الإجابة النموذجية للبكالوريا التجريبية -مـــاي 2024- في مادة الرياضيات (شعبة الرياضيات):

الموضوع الأول:

التمرين الأول: (05 نقاط)

I/1/ ا/ كتابة الأعداد على الشكل الأسي:

لدينا: $|Z_A| = \sqrt{2}$ و $\arg(Z_A) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ إذن:

$\bullet \boxed{Z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$.

ولدينا: $|Z_C| = \sqrt{2}$ و بوضع $\arg(Z_C) = \theta$ فإن:

$$\begin{cases} \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$ وبالتالي: $\theta = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

إذن:

$\bullet \boxed{Z_C = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}$.

الإستنتاج:

$\bullet Z_B = \overline{Z_A} = \boxed{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = Z_B}$.

$\bullet Z_D = -Z_A = e^{i\pi}\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)} = \boxed{\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} = Z_D}$

ب/ الإستنتاج:

لدينا: $|Z_A| = |Z_B| = |Z_C| = |Z_D| = \sqrt{2}$ ،

إذن: النقط A و B و C و D تنتمي إلى نفس الدائرة (Γ) التي مركزها المبدأ O ونصف قطرها $r = \sqrt{2}$.

2/ ا/ كتابة العدد على الشكل الأسي:

$$\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} = \frac{1-i-1-i}{-1+i-1-i} = \frac{-2i}{-2} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

طبيعة المثلث ABC :

من الشكل الأسي نستنتج أن: $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}$

وأن: $AB = AC$ ، إذن المثلث ABC هو مثلث قائم في A ومتساوي الساقين.

ب/ صورة النقطة B بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$:

ولتكن M ذات اللاحقة Z ، وذلك معناه أن: $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AC}$

وعليه: $Z - Z_B = Z_C - Z_A$ إذن:

$Z = Z_C - Z_A + Z_B = -1 + i - 1 - i + 1 - i = -1 - i = Z_D$

إذن صورة النقطة B بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$ هي النقطة D .

الإستنتاج:

لدينا $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$ فالرباعي ABDC متوازي أضلاع،

وبما أن المثلث ABC هو مثلث قائم في A ومتساوي الساقين،

إذن الرباعي ABDC مربع.

3/ مجموعة النقط:

لدينا: $\overline{Z} = Z_A e^{i\theta} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\theta} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}$

ومنه: $Z = \sqrt{2}e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)} = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}-\theta\right)} = \sqrt{2}e^{i\theta'} \; ; \; \theta' = -\frac{\pi}{4} - \theta$

لما θ يمسح $\mathbb{R}$ فإن θ' يمسح $\mathbb{R}$ كذلك، وعليه تُصبح العلاقة:

$\boxed{Z = \sqrt{2}e^{i\theta'} ; \theta' \in \mathbb{R}}$ وذلك معناه أن: $|Z| = \sqrt{2}$ أي: $OM = \sqrt{2}$

إذن مجموعة النقط M هي الدائرة التي مركزها المبدأ O و نصف قطرها $\sqrt{2}$ و هي نفسها الدائرة (Γ) .

II/ وعاء به عشر كريات ونسحب عشوائيا منه كريتين في آن واحد،

إذن عدد الحالات الكلية للسحب هو: $C_{10}^2 = 45$.

1/ حساب الإحتمالات:

الحدث E : عدد الأرقام الحقيقية الصرفة في الوعاء هو 4 إذن:

$\bullet P(E) = \frac{C_4^2}{45} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$.

الحدث F : عدد مركب له عمدة تنتمي إلى المجال: $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ معناه جزؤه الحقيقي موجب، وعددها في الكيس هو 6 إذن:

$\bullet P(F) = \frac{C_6^2}{45} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$.

2/ ا/ **الإحتمال الشرطي:** $\bullet P_F(E) = \frac{P(E\cap F)}{P(F)} = \frac{C_2^2}{15} = \frac{1}{15}.$

ب/ الحدثان E و F غير مستقلين، لأن: $P_F(E) \neq P(E)$.

(أو نقول لأن: $P(E)\times P(F) = \frac{2}{45} \neq P(E\cap F)$)

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1/ تعيين قيم n من $\mathbb{N}^*$ بحيث يكون العدد M_n مضاعفا لـ 7 :

لدينا: $\bullet M_n = 4C_{n+1}^2 - A_{n+3}^2 + 2 = 4\frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} - \frac{(n+3)!}{(n+1)!} + 2$

$= 2(n+1)n - (n+3)(n+2) + 2$

$= 2n^2 + 2n - n^2 - 3n - 2n - 6 + 2 = \boxed{n^2 - 3n - 4 = M_n}$

M_n مضاعف للعدد 7 معناه $M_n \equiv 0\,[7]$ ومنه: $n^2 - 3n - 4 \equiv 0\,[7]$

وبالتالي: $n^2 + 4n + 3 \equiv 0\,[7]$ أي: $(n+2)^2 - 1 \equiv 0\,[7]$

ومنه: $(n+1)(n+3) \equiv 0\,[7]$ وبما أن 7 عدد أولي، فإن:

$n+1 \equiv 0\,[7]$ أو $n+3 \equiv 0\,[7]$ ومنه: $n \equiv -1\,[7]$ أو $n \equiv -3\,[7]$

أي: $n \equiv 6\,[7]$ أو $n \equiv 4\,[7]$ إذن: $\boxed{n \in \{7k+4; 7k+6 \,/\, k \in \mathbb{N}\}}$.

2/ دراسة بواقي القسمة الإقليدية:

لدينا: $5^0 \equiv 1\,[7]$ و $5^1 \equiv 5\,[7]$ و $5^2 \equiv 4\,[7]$ و $5^3 \equiv 6\,[7]$ و $5^4 \equiv 2\,[7]$

و $5^5 \equiv 3\,[7]$ و $5^6 \equiv 1\,[7]$ وعليه:

$n =$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	$k \in \mathbb{N}$
$5^n \equiv$	1	5	4	6	2	3	$[7]$

3/ ا/ **الإثبات أن $4T_n = 5^{n+1} - 1$:**

$\bullet\ T_n = 5^0 + 5^1 + \cdots + 5^n = 5^0\left(\frac{5^{n+1}-1}{5-1}\right) = \frac{1}{4}(5^{n+1} - 1)$

إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $\boxed{4T_n = 5^{n+1} - 1}$.

الإستنتاج: لدينا $4T_n = 5^{n+1} - 1$ ومنه $\boxed{5 \times 5^n - 4 \times T_n = 1}$ ،

إذن حسب مبرهنة بيزو: $PGCD(5^n; T_n) = 1$.

ب/ **إثبات التكافؤ:** ليكن m عددا طبيعيا:

$4T_n \equiv m\,[7]$ يكافئ $8T_n \equiv 2m\,[7]$ يكافئ $T_n \equiv 2m\,[7]$.

ج/ استنتاج باقي قسمة العدد N على 7 :

لدينا: $4T_{2024} = 5^{2025} - 1$ وبما أن: $2025 = 337(6) + 3$

فإن: $5^{2025} \equiv 6\,[7]$ وبالتالي: $4T_{2024} \equiv 5\,[7]$ إذن: $T_{2024} \equiv 10\,[7]$

أي: $\boxed{T_{2024} \equiv 3\,[7]}$ $(1)\cdots$

ولدينا: $4T_{1445} = 5^{1446} - 1$ وبما أن $1446 = 241(6)$

فإن: $5^{1446} \equiv 1\,[7]$ وبالتالي: $4T_{1445} \equiv 0\,[7]$ إذن: $T_{1445} \equiv 0\,[7]$

ومنه: $\boxed{2T_{1445} \equiv 0\,[7]}$ $(2)\cdots$

من (1) و (2) نجد: $\boxed{N \equiv 3\,[7]}$ إذن باقي قسمة N على 7 هو 3 .

4/ تبيان أن المعادلة $5^n x + T_n y = 1 \cdots (E_n)$ تقبل حلولا:

لدينا $PGCD(5^n; T_n) = 1$ إذن المعادلة (E_n) تقبل حلا على الأقل في $\mathbb{Z}^2$.

حل المعادلة (E_2) : لدينا: $5^2 = 25$ ولدينا: $T_2 = \frac{1}{4}(5^3 - 1) = 31$

لدينا حسب السؤال 3/أ/ : $\begin{cases} 5^2 x + T_2 y = 1 \\ 5^2(5) + T_2(-4) = 1 \end{cases}$ بالطرح نجد:

$5^2(x-5) + T_2(y+4) = 0$ ومنه: $5^2(x-5) = -T_2(y+4) \cdots (*)$ ومنه:

T_2 يقسم $5^2(x-5)$ وبما أن: $PGCD(5^2; T_2) = 1$ فإن: T_2 يقسم $x-5$

أي: $x - 5 = T_2.k\,; k \in \mathbb{Z}$ إذن: $\boxed{x = 31k + 5\,;\ k \in \mathbb{Z}}$

بالتعويض في $(*)$ نجد: $5^2.31k = -31(y+4)$ ومنه: $5^2.k = -y - 4$

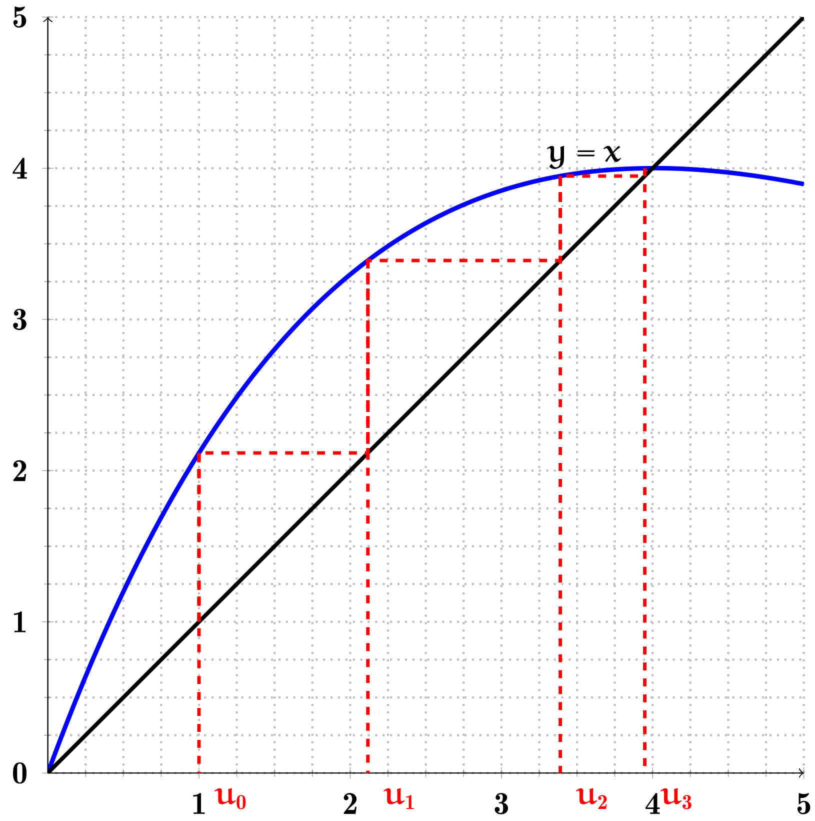
إذن: $\boxed{y = -25k - 4\,;\ k \in \mathbb{Z}}$ إذن حلول المعادلة (E_2) هي الثنائيات:

$\boxed{(x; y) = (\ 31k + 5\ ;\ -25k - 4\ )}$ بحيث $k \in \mathbb{Z}$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1/ ا/ من خلال التمثيل البياني: الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;4]$ ومنه من أجل كل x من هذا المجال فإن: $f(0) \leq f(x) \leq f(4)$ أي $0 \leq f(x) \leq 4$
إذن: $f(x) \in [0;4]$.

ب/ تمثيل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) :



ج/ التخمين:

من خلال التمثيل نخمن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومتقاربة نحو 4 .

2/ ا/ **البرهان بالتراجع:** نسمي الخاصية $P(n)\ :\ 0 < u_n \leq 4$.
ولنثبت صحتها من أجل كل عدد طبيعي n .

- لدينا من أجل $n = 0$: $u_0 = 1$ أي: $0 < u_0 \leq 4$ أي: $P(0)$ صحيحة.
- لنفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي كيفي n أي: $0 < u_n \leq 4$

ومنه: $0 < f(u_n) \leq 4$ أي: $0 < u_{n+1} \leq 4$.
إذن إذا كانت $P(n)$ صحيحة فإن $P(n+1)$ صحيحة.

- إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n \leq 4$.

ب/ تبيان أن $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{1-\frac{1}{4}u_n}$

وبما أن: $0 < u_n \leq 4$ ومنه: $1 > 1 - \frac{1}{4}u_n \geq 0$

فإن: $e > e^{1-\frac{1}{4}u_n} \geq 1$ أي: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.

استنتاج إتجاه التغير:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ وبما أن (u_n) ذات حدود موجبة، فإن المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

3/ إستنتاج أن (u_n) متقاربة:

لدينا المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى، إذن هي متقاربة.

حساب النهاية:

المتتالية (u_n) متقاربة معناه: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$ حيث a عدد حقيقي.

ومنه: $a = ae^{1-\frac{1}{4}a}$ وبالتالي: $1 = e^{1-\frac{1}{4}a}$ ومنه: $1 - \frac{1}{4}a = 0$

إذن: $a = 4$ إذن: $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4}$.

4/ $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$

ا/ **إثبات عبارة الحد العام:**

الطريقة 1: لدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{1-\frac{1}{4}u_n}$

ومنه: $1-\frac{1}{4}u_n=\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ إذن: $u_n=4-4\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$

وبالتالي: $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_{n-1}$

$$=4-4\ln\left(\frac{u_1}{u_0}\right)+4-4\ln\left(\frac{u_2}{u_1}\right)+\cdots+4-4\ln\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right)$$

$$=(4+4+\cdots+4)-4\left(\ln\left(\frac{u_1}{u_0}\right)+\ln\left(\frac{u_2}{u_1}\right)+\cdots+\ln\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right)\right)$$

$$=4n-4\ln\left(\frac{u_1\times u_2\times\cdots\times u_n}{u_0\times u_1\times\cdots\times u_{n-1}}\right)$$

$$=4n-4\ln(u_n)$$

وعليه: $4n-S_n=4\ln(u_n)$ إذن: $\boxed{u_n=e^{n-\frac{1}{4}S_n}}$.

الطريقة 2: (البرهان بالتراجع)

نسمي الخاصية: $P(n)\ :\ u_n=e^{n-\frac{1}{4}S_n}$.

ولنثبت صحتها من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n .

- من أجل $n=1$: لدينا من جهة: $u_1=u_0e^{1-\frac{1}{4}u_0}=e^{\frac{3}{4}}$

ومن جهة أخرى: $e^{1-\frac{1}{4}S_1}=e^{1-\frac{1}{4}u_0}=e^{\frac{3}{4}}$ إذن: $P(1)$ صحيحة.

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل n من $\mathbb{N}^*$ كيفي، أي: $u_n=e^{n-\frac{1}{4}S_n}$

لدينا: $u_{n+1}=u_ne^{1-\frac{1}{4}u_n}=e^{n-\frac{1}{4}S_n}e^{1-\frac{1}{4}u_n}=e^{n+1-\frac{1}{4}(S_n+u_n)}$

إذن: $u_{n+1}=e^{(n+1)-\frac{1}{4}S_{n+1}}$ وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\boxed{u_n=e^{n-\frac{1}{4}S_n}}$.

الطريقة 3:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=u_ne^{1-\frac{1}{4}u_n}$ ، وبالتالي:

$$\begin{cases} u_1=u_0e^{1-\frac{1}{4}u_0} \\ u_2=u_1e^{1-\frac{1}{4}u_1} \\ \vdots \\ u_n=u_{n-1}e^{1-\frac{1}{4}u_{n-1}} \end{cases}$$

بالضرب طرف لطرف، ثم اختزال الحدود (لأن: $u_n>0$) نجد:

$$u_n=u_0e^{(1+1+\cdots+1)-\frac{1}{4}(u_0+u_1+\cdots+u_{n-1})}$$

إذن من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $\boxed{u_n=e^{n-\frac{1}{4}S_n}}$.

ب/ حساب النهاية:

لدينا: $u_n=e^{n-\frac{1}{4}S_n}$ ومنه: $S_n=4n-4\ln(u_n)$ إذن:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{4n-4\ln(u_n)}{n}=\lim_{n\to+\infty}\left(4-4\frac{\ln(u_n)}{n}\right)=4$$

(لأن: $\lim_{n\to+\infty}u_n=4$ ومنه: $\lim_{n\to+\infty}\ln(u_n)=\ln 4$).

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I/ $(\Gamma)\ :\ y=(2x+2)e^x$ و $(D)\ :\ y=x+2$.

1/ الوضعية النسبية: بقراءة بيانية نجد:

- (Γ) و (D) يتقاطعان في نقطتين فاصلتيهما: 0 و α .
- (Γ) يقع فوق (D) على كل من المجالين: $]-\infty;\alpha[$ و $]0;+\infty[$.
- (Γ) يقع تحت (D) على المجال: $]\alpha;0[$.

2/ إستنتاج إشارة $g(x)$: $g(x)=-x-2+2(x+1)e^x$

من خلال الوضعية النسبية لـ (Γ) و (D) نجد:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

II/ $f(x)=x(e^x-1)^2$; $D_f=\mathbb{R}$.

1/ ا/ حساب النهايات:

- $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x(e^x-1)^2=-\infty$

(لأن: $\lim_{x\to-\infty}(e^x-1)^2=1$).

- $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x(e^x-1)^2=+\infty$

(لأن: $\lim_{x\to-\infty}(e^x-1)^2=+\infty$).

ب/ المستقيم المقارب المائل:

لدينا:

$$\bullet \lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to-\infty}(x(e^{2x}-2e^{x}+1)-x)=\lim_{x\to-\infty}(xe^{2x}-2e^{x})=\lim_{x\to-\infty}(\tfrac{1}{2}2xe^{2x}-2e^{x})=0$$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

ج/ دراسة الوضعية النسبية لـ (C_f) و (Δ) :

لذلك ندرس إشارة:

$$f(x)-x=x(e^{x}-1)^2-x=x\left((e^{x}-1)^2-1\right)$$
$$=x\left(e^{x}-1-1\right)\left(e^{x}-1+1\right)=\boxed{xe^{x}(e^{x}-2)=f(x)-x}$$

وعليه:

x	$-\infty$		0		$\ln 2$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$e^{x}-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذن: - (C_f) يقع فوق (Δ) على المجالين: $]-\infty;0[$ و $]\ln 2;+\infty[$.

- (C_f) يقع تحت (Δ) على المجال: $]0;\ln 2[$.

- (C_f) و (Δ) يتقاطعان في النقطتين: $O(0;0)$ و $A(\ln 2;\ln 2)$.

2/ تبيان أن: $x(e^{x}-1)\geq 0$: لدينا:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	$+$
$e^{x}-1$		$-$	0	$+$	
$x(e^{x}-1)$		$+$	0	$+$	

إذن من أجل كل عدد حقيقي x : $x(e^{x}-1)\geq 0$.

إتجاه تغير الدالة f :

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $\boxed{f'(x)=(e^{x}-1)^2+2xe^{x}(e^{x}-1)}$

بما أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $2e^{x}(e^{x}-1)x\geq 0$ وكذلك $(e^{x}-1)^2\geq 0$ ، فإنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)\geq 0$.

إذن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$			$+\infty$

3/ إثبات عبارة المشتق الثاني: لدينا من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f''(x)=2e^{x}(e^{x}-1)+(2e^{x}+2xe^{x})(e^{x}-1)+2xe^{x}e^{x}$$
$$=2e^{x}(e^{x}-1+(1+x)(e^{x}-1)+xe^{x})$$
$$=2e^{x}(e^{x}-1+e^{x}-1+xe^{x}-x+xe^{x})$$
$$=2e^{x}(-x-2+e^{x}(2x+2))=\boxed{2e^{x}g(x)=f''(x)}$$

استنتاج نقاط الإنعطاف: لدينا: $f''(x)=2e^{x}g(x)$ ومنه إشارة $f''(x)$ من إشارة $g(x)$ ، وعليه $f''(x)$ تنعدم عند كل من 0 و α وتغير إشارتها في جوارهما، إذن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف فاصلتيهما 0 و α

4/ معادلة المماس (T) : $(T)\ :\ y=f'(0)(x-0)+f(0)$

وبما أن: $f(0)=0$ و $f'(0)=(1-1)^2+0=0$ فإن: $\boxed{(T)\ :\ y=0}$.

إثبات وحدانية المماس الذي يمر من المبدأ:

لذلك نحل المعادلة: $0=f'(a)(0-a)+f(a)$

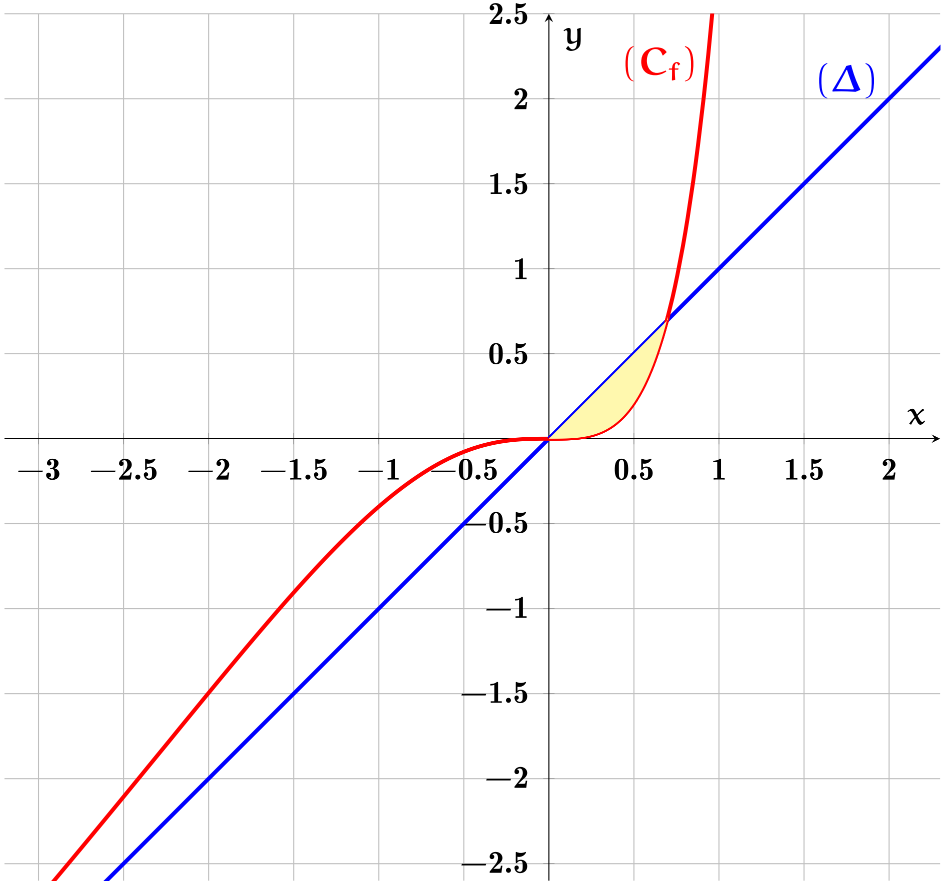
أي المعادلة: $-a[(e^{a}-1)^2+2a(e^{a}-1)]+a(e^{a}-1)^2=0$

تكافئ: $a(e^{a}-1)(-e^{a}+1-2a+e^{a}-1)=0$

تكافئ: $-2a^2(e^{a}-1)=0$ معناه: $a=0$.

إذن المنحنى (C_f) يقبل مماسا وحيدا يشمل المبدأ هو نفسه المماس (T) .

/5 ا/ **الإنشاء:**



ب/ **تعيين قيم العدد الحقيقي m :** بقراءة بيانية:

تقبل المعادلة $f(x)=mx$ ثلاثة حلول مختلفة لما $m\in]0;1[$.

/6 ا/ **المكاملة بالتجزئة:** لتبيان أن: $\int_0^{\ln 2} xe^x(e^x-2)dx = \frac{5-8\ln 2}{4}$

نعتبر: $\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=e^x(e^x-2)\end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=\frac{1}{2}(e^x-2)^2\end{cases}$

وبالتالي:

$$\int_0^{\ln 2} xe^x(e^x-2)dx = \left[\frac{1}{2}x(e^x-2)^2\right]_0^{\ln 2} - \frac{1}{2}\int_0^{\ln 2}(e^x-2)^2dx$$

$$= \left(\frac{\ln 2}{2}(e^{\ln 2}-2)^2-0\right)-\frac{1}{2}\int_0^{\ln 2}(e^{2x}-4e^x+4)dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}-4e^x+4x\right]_0^{\ln 2}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2\ln 2}-4e^{\ln 2}+4\ln 2-\frac{1}{2}+4\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{4}{2}-4\times 2+4\ln 2-\frac{1}{2}+4\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-2+4\ln 2-\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(4-8\ln 2+1)$$

$$\boxed{\int_0^{\ln 2} xe^x(e^x-2)dx = \frac{1}{4}(5-8\ln 2)}$$

ب/ **استنتاج المساحة:** بما أن المنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) على المجال $[0;\ln 2]$ فإن مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) على هذا المجال هي:

$$A=\int_0^{\ln 2}(x-f(x))dx = -\int_0^{\ln 2} xe^x(e^x-2)dx$$

$$= -\frac{1}{4}(5-8\ln 2)\ \ u.a = \frac{1}{4}(-5+8\ln 2)\times 4\ cm^2$$

$$\boxed{A=-5+8\ln 2\ cm^2}$$

الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (04 نقاط)

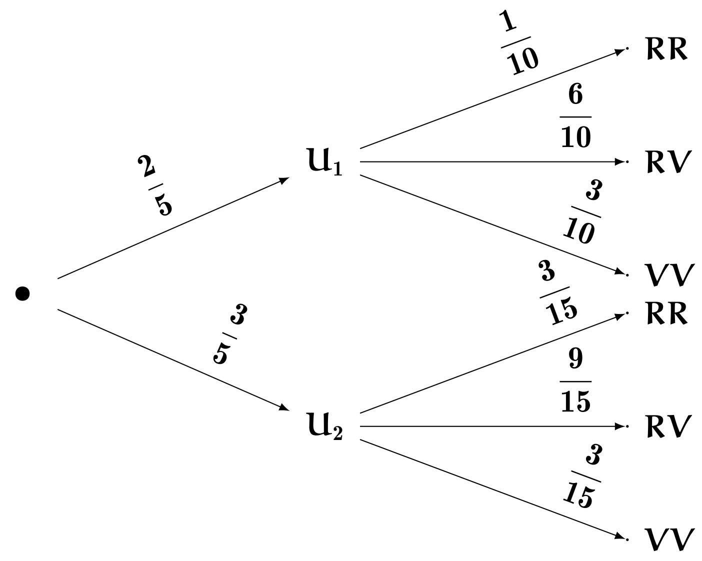
1/ إتمام شجرة الإحتمالات: لدينا:

$\bullet P(U_2) = 1 - P(U_1) = \frac{3}{5}$

$\bullet P_{U_1}(RV) = \frac{C_3^1 . C_2^1}{C_5^2} = \frac{6}{10} \quad (= 1 - \frac{1}{10} - \frac{3}{10}) \qquad \bullet P_{U_1}(VV) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$

$\bullet P_{U_1}(VV) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{15} \quad (= 1 - \frac{3}{15} - \frac{9}{15}) \qquad \bullet P_{U_2}(RR) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{15}$

وعليه:



2/ حساب إحتمالي الحدثين:

- **الحدث** A **:** الأولى حمراء والأخرتين حمراوين، أو الأولى خضراء والأخرتين خضراوين:

$P(A) = P(U_1)P_{U_1}(RR) + P(U_2)P_{U_2}(VV) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{10} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{15}$

$\boxed{P(A) = \frac{4}{25}}$

- **الحدث** B **:** الأولى حمراء، أو الأولى خضراء والأخرتين واحدة حمراء والأخرى خضراء أو الأولى خضراء والأخرتين حمراوين.
(أو يمكن القول أنه الحدث العكسي لثلاث كريات خضراء-الأولى خضراء والأخرتين خضراوين)

$P(B) = P(U_1) + P(U_2)\left(P_{U_2}(RV) + P_{U_2}(RR)\right) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\left(\frac{9}{15} + \frac{3}{15}\right)$

$\boxed{P(B) = \frac{22}{25}} \qquad \left(P(B) = 1 - \frac{3}{5} \times \frac{3}{15} = 1 - \frac{3}{25} = \frac{22}{25}\right)$

3/ حساب الإحتمال الشرطي:

$\bullet P_A(U_2) = \frac{P(U_2 \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{5} \times \frac{3}{15}}{\frac{4}{25}} = \frac{\frac{3}{25}}{\frac{4}{25}} = \boxed{\frac{3}{4} = P_A(U_2)}$

4/ ا/ قيم المتغير العشوائي X نلخصها كما يلي:

في حالة سحب الأولى حمراء (حالة سحب كريتين من U_1): نميز ثلاث حالات: إما: $U_1 - RR \to X = 3$ وإما: $U_1 - RV \to X = 2$

وإما: $U_1 - VV \to X = 1$

في حالة سحب الأولى خضراء (حالة سحب كريتين من U_2):

يبقى في الصندوق U_1 كريتان خضراوان، أي: $X = 2$.

إذن قيم المتغير العشوائي X هي: 1 و 2 و 3 .

ب/ قانون إحتمال المتغير العشوائي X **:**

$\bullet P(X=2) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{6}{10} = \frac{21}{25} \qquad \bullet P(X=1) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{25}$

$\bullet P(X=3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{25}$ وعليه:

$X = x_i$	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{25}$	$\frac{21}{25}$	$\frac{1}{25}$

حساب الامل الرياضياتي للمتغير العشوائي X **:**

$$E(X)=\sum_{i=1}^{3} x_iP(X=x_i)=1\times\frac{3}{25}+2\times\frac{21}{25}+3\times\frac{1}{25}=\frac{48}{25}$$

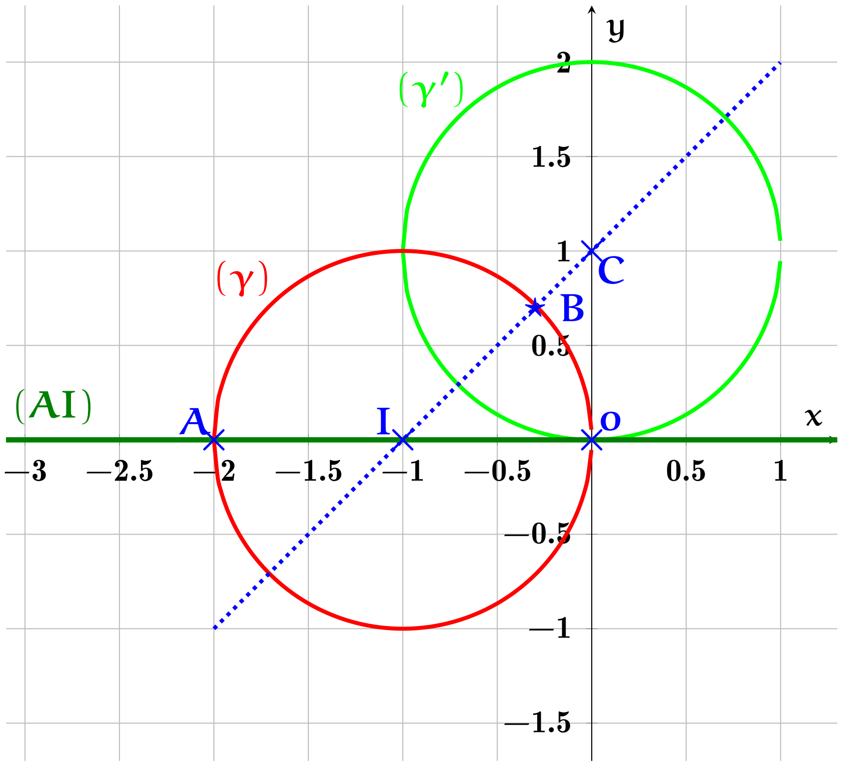
$$\boxed{E(X)=1.92}$$

ج/ حساب الإحتمال:

$$P(C_3^X=3)=P([X=1]\cup[X=2])=P(X=1)+P(X=2)=\frac{24}{25}$$

التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

I/1 الإنشاء:



2/ استنتاج الطويلة وعمدة للعدد Z_B+1 :

- $|Z_B+1|=|Z_B-Z_I|=IB=1$
- $\arg(Z_B+1)=\arg(Z_B-Z_I)=(\vec{u};\vec{IB})=(\vec{IO};\vec{IB})$

لدينا الزاوية الموجهة $(\vec{IO};\vec{IB})$ هي زاوية مركزية في الدائرة (γ) ، زاويتها المحيطية هي: $(\vec{AO};\vec{AB})$ إذن:

$$(\vec{IO};\vec{IB})=2(\vec{AO};\vec{AB})=2\times\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$$

إذن: $\frac{\pi}{4}$ هي عمدةٌ للعدد المركب Z_B+1 .

الشكل الجبري لـ Z_B : لدينا: $Z_B+1=e^{i\frac{\pi}{4}}$ ومنه:

$$Z_B=-1+\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\boxed{-1+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}=Z_B}$$

3/ إثبات أن العدد حقيقي:

- $\frac{Z_B+1}{i+1}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+i}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}{1+i}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

إذن العدد $\frac{Z_B-Z_I}{Z_C-Z_I}$ حقيقي.

الإستنتاج: لدينا العدد $\frac{Z_B-Z_I}{Z_C-Z_I}$ حقيقي موجب معناه:

$$\arg\left(\frac{Z_B-Z_I}{Z_C-Z_I}\right)=2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$$

إذن النقط: I و B و C على استقامة واحدة.

II/1 ا/ الإثبات:

$$\arg(Z')=\arg\left(\frac{i(Z+2)}{Z+1}\right)=\arg(i)+\arg\left(\frac{Z+2}{Z+1}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}+\arg\left(\frac{Z-Z_A}{Z-Z_I}\right)=\boxed{\frac{\pi}{2}+(\vec{MI};\vec{MA})=\arg(Z')}$$

ب/ تعيين مجموعة النقط M بحيث Z' تخيلي صرف:

Z' تخيلي صرف معناه: $Z'=0$ أو $\arg(Z')=\frac{\pi}{2}+k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$

وبالتالي: $Z+2=0$ أو $\frac{\pi}{2}+(\vec{MI};\vec{MA})=\frac{\pi}{2}+k\pi$

أي: $M=A$ أو $(\vec{MI};\vec{MA})=k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$

إذن مجموعة النقط M في هذه الحالة هي المستقيم (AI) ماعدا النقطة I ، وهو منطبق على حامل محور الفواصل.

2/ ا/ إثبات العلاقة:

$$\bullet Z' - i = \frac{i(Z+2)}{Z+1} - i = \frac{i(Z+2)}{Z+1} - \frac{i(Z+1)}{Z+1}$$
$$= \frac{i(Z+2-Z-1)}{Z+1} = \boxed{\frac{i}{Z+1} = Z'-i}$$

ب/ لدينا: $Z = -1 + e^{i\theta}$ أي: $Z - Z_I = +e^{i\theta}$ وبالتالي:

$$\begin{cases}|Z-Z_I|=1\\ \arg(Z-Z_I)=\theta\end{cases} \quad \text{معناه:} \quad \begin{cases}IM=1\\ (\overrightarrow{IO};\overrightarrow{IM})=\theta\end{cases}$$

لما θ تمسح المجال $]-\pi;\pi]$ فإن: M تمسح الدائرة (γ) ،
وعندئذ بالتعويض في العلاقة في السؤال السابق نجد:

$$Z'-i = \frac{i}{e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\theta}} = e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}$$

أي: $\boxed{Z'-Z_C = e^{i\theta'}}$ حيث: $\theta' = \frac{\pi}{2}-\theta$

$$\text{وذلك معناه:} \quad \begin{cases}|Z'-Z_C|=1\\ \arg(Z'-Z_C)=\theta'\end{cases} \quad \text{أي:} \quad \begin{cases}CM'=1\\ (\overrightarrow{u};\overrightarrow{CM'})=\theta'\end{cases}$$

وبالتالي لما M تمسح الدائرة (γ) أي لما θ تمسح المجال $]-\pi;\pi]$
فإن θ' تمسح المجال $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$
وعندئذ النقطة M' تمسح دائرة (γ') مركزها النقطة C ونصف قطرها 1 .

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

1/ ا/ **تعيين باقي القسمة الإقليدية:** لدينا: $2009 = 16(125)+9$ ومنه:
$2009 \equiv 9\,[16]$ ومنه: $2009^2 \equiv 81\,[16]$ أي: $2009^2\equiv 1\,[16]$ إذن
باقي قسمة العدد 2009^2 على 16 هو 1 .

ب/ **الإستنتاج:**
لدينا: $2009^2 \equiv 1\,[16]$ ومنه: $(2009^2)^{4000}\equiv 1\,[16]$ أي:
$2009^{8000}\equiv 1\,[16]$ وبما أن: $2009\equiv 9\,[16]$

فإن: $2009\times 2009^{8000} \equiv 2009\,[16]$ أي: $\boxed{2009^{8001}\equiv 2009\,[16]}$.

2/
$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}: \begin{cases}u_0=2009^2-1\\u_{n+1}=(u_n+1)^5-1\end{cases}$$

ا/ **تبيان أن u_0 يقبل القسمة على 5 :**
لدينا: $2009\equiv 4\,[5]$ أي: $2009\equiv -1\,[5]$ ومنه: $2009^2\equiv 1\,[5]$
وبالتالي: $2009^2-1\equiv 0\,[5]$ إذن: u_0 يقبل القسمة على 5 .

ب/ **إثبات العلاقة التراجعية:**

$$u_{n+1} = (u_n+1)^5 - 1 = -1 + \sum_{p=0}^{5} C_5^p (u_n)^{5-p}(1)^p$$
$$= -1 + C_5^0u_n^5 + C_5^1u_n^4 + C_5^2u_n^3 + C_5^3u_n^2 + C_5^4u_n + C_5^5u_n^0$$
$$= u_n^5 + 5u_n^4 + 10u_n^3 + 10u_n^2 + 5u_n + 1 - 1$$
$$= u_n\left(u_n^4 + 5u_n^3 + 10u_n^2 + 10u_n + 5\right)$$
$$\boxed{u_{n+1} = u_n\left[u_n^4 + 5\left(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1\right)\right]}$$

ج/ **البرهان بالتراجع:** نسمي الخاصية: "u_n مضاعف لـ 5^{n+1}" : $P(n)$.
ولنثبت صحتها من أجل كل عدد طبيعي n .
- من أجل $n=0$:
لدينا u_0 يقبل القسمة على 5 أي u_0 مضاعف لـ 5 إذن $P(0)$ صحيحة.
- ليكن n عددا طبيعيا. لنفرض صحة $P(n)$ أي: u_n مضاعف لـ 5^{n+1}
ومنه: u_n^4 مضاعف لـ مضاعف لـ 5^{n+1} أي أنه مضاعف لـ 5 ،
وكذلك $5(u_n^3+2u_n^2+2u_n+1)$ مضاعف لـ 5
إذن $u_n^4+5(u_n^3+2u_n^2+2u_n+1)$ مضاعف لـ 5
أي: $u_n^4+5(u_n^3+2u_n^2+2u_n+1)=5k$ بحيث $k\in\mathbb{Z}$.
ولدينا u_n مضاعف لـ 5^{n+1} معناه: $u_n=5^{n+1}q$ بحيث $q\in\mathbb{Z}$.
وبالتالي: $u_n[u_n^4+5(u_n^3+2u_n^2+2u_n+1)] = 5^{n+1}q5k = 5^{n+2}qk$
معناه: u_{n+1} مضاعف لـ 5^{n+2} ، إذن $P(n+1)$ صحيحة.

نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : u_n مضاعف لـ 5^{n+1} .

3/ ا/ **التحقق:** لدينا:

$u_1=(u_0+1)^5-1=2009^{10}-1$

ومنه: $u_2=(u_1+1)^5-1=2009^{50}-1$

إذن: $u_3=(u_2+1)^5-1=2009^{250}-1$

ب/ **الإستنتاج:**

مما سبق نستنتج أن u_3 مضاعف لـ 5^4 أي أن u_3 مضاعف لـ 625

ومنه: $2009^{250}-1\equiv 0\ [625]$ إذن: $\boxed{2009^{250}\equiv 1\ [625]}$

ومنه: $(2009^{250})^{32}\equiv 1\ [625]$ أي: $2009^{8000}\equiv 1\ [625]$ إذن: $\boxed{2009^{8001}\equiv 2009\ [625]}$

4/ ا/ **البرهان:**

لتكن a و b و c أعداد صحيحة غير معدومة، بحيث: a مضاعف لكل من b و c ، و b و c أوليان فيما بينهما.

الطريقة 1:

a مضاعف لـ b معناه: $a=b.k\,;\ K\in\mathbb{Z}\ \cdots\ (*)$

وبما أن a مضاعف لـ c فإن c يقسم a أي c يقسم $b.k$

وبما أن b و c أوليان فيما بينهما فإن: c يقسم k ، أي $k=c.q\,;\ q\in\mathbb{Z}$

بالتعويض في $(*)$ نجد: $a=b.c.q$ إذن a مضاعف للجداء bc .

الطريقة 2:

a مضاعف لـ b معناه: b يقسم a ،

و a مضاعف لـ c معناه: c يقسم a ،

ومنه الجداء bc يقسم a لأن b و c أوليان فيما بينهما،

أي: a مضاعف للجداء bc .

ب/ **تبيان قابلية قسمة العدد $2009^{8001}-2009$ على 10000 :**

لدينا: $2009^{8001}\equiv 2009\ [16]$ أي: $2009^{8001}-2009\equiv 0\ [16]$

إذن العدد $2009^{8001}-2009$ مضاعف لـ 16 .

ولدينا: $2009^{8001}\equiv 2009\ [625]$ أي: $2009^{8001}-2009\equiv 0\ [625]$

إذن العدد $2009^{8001}-2009$ مضاعف لـ 625 .

ولدينا: $16=2^4$ وكذلك: $625=5^4$ إذن: $PGCD(16;625)=1$ ؛

نستنتج أن العدد $2009^{8001}-2009$ مضاعف للجداء: $10000=16\times 625$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I/1/ دراسة تغيرات الدالة g :

• **النهايات:** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right)=0$

(لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}=1$ و $\ln 1=0$ ، وكذلك: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$)

• $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} g(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\left(\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right)=+\infty$

(لأن: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{x+1}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ ،

وكذلك: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{1}{x+1}=1$)

• **إتجاه التغير:** لدينا من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x :

$$g'(x)=\frac{\left(\frac{x+1}{x}\right)'}{\left(\frac{x+1}{x}\right)}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x-x-1}{x^2}\times\frac{x}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{-1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{-x-1+x}{x(x+1)^2}=\boxed{\frac{-1}{x(x+1)^2}=g'(x)}$$

نلاحظ أن $g'(x)<0$ من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما،

إذن الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

• **جدول التغيرات:**

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	0

2/ **الإستنتاج:** بقراءة جدول التغيرات للدالة g نستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x : $g(x)>0$

II/ من أجل كل $x>0$: $f(x)=x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+x+1$ و $f(0)=1$.

1/ أ/ **تبيان النهاية:**

• $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{t\to0}\frac{1}{t}\ln(1+t)$

$= \lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+t)}{t} = \boxed{1 = \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+x+1\right]=+\infty$.

ب/ **تبيان أن $y=x+2$: (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) :**

• $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x-2) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-1\right]=0$

إذن المستقيم (Δ) ذو معادلة $y=x+2$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

2/ أ/ **دراسة قابلية الإشتقاق عن 0 :**

• $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{f(x)-1}{x} = \lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+1 = +\infty$

إذن الدالة غير قابلة للإشتقاق على يمين 0 .

التفسير الهندسي:

المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس موازٍ لحامل محور التراتيب معادلته: $x=0$.

ب/ **تبيان عبارة المشتقة:**

لدينا من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x :

$$f'(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+x.\frac{\left(\frac{x+1}{x}\right)'}{\left(\frac{x+1}{x}\right)}+1$$

$$=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+x\left(\frac{x-x-1}{x^2}\right)\left(\frac{x}{x+1}\right)+1$$

$$=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}+1=\boxed{g(x)+1=f'(x)}$$

إتجاه التغير:

لدينا مماسبق من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x : $g(x)>0$

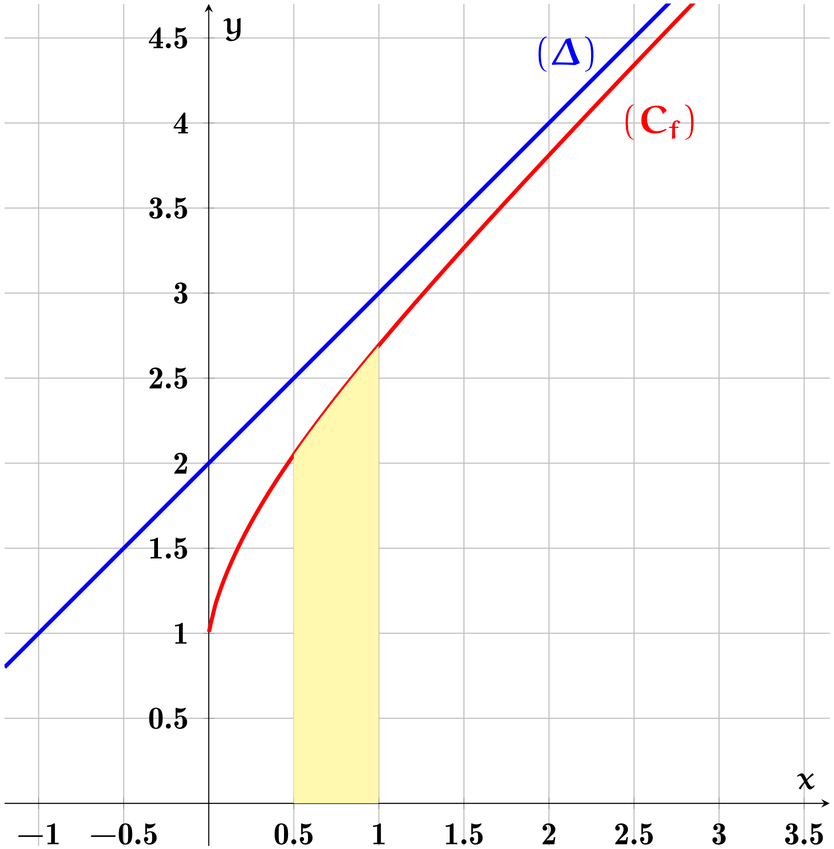
ومنه: $f'(x)>0$ إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

جدول التغيرات:

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	1 $\nearrow$ $+\infty$

3/ **الإنشاء:**

$f(1)=2+\ln 2\approx 2.7$



/4 أ/ **تبيان أن الدالة F أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$:**

لدينا من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x :

$$\begin{aligned}F'(x) &= \frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}xf'(x)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}\right)+1\\ &= \frac{1}{2}\left(f(x)+x(g(x)+1)-\frac{1}{x+1}+2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(f(x)+x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{x}{x+1}+x-\frac{1}{x+1}+2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(f(x)+x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{x+1}{x+1}+x+2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(f(x)+x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+x+1\right)=\frac{1}{2}(2f(x))\end{aligned}$$

$$\boxed{F'(x)=f(x)}$$

إذن الدالة F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

ب/ **استنتاج مساحة الحيز:**

مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات: $y=0$ و $x=\frac{1}{2}$ و $x=1$ هي:

$$\begin{aligned}A &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx=[F(x)]_{\frac{1}{2}}^{1}=F(1)-F(\tfrac{1}{2})\\ &= \frac{1}{8}\left(9+\ln\left(\frac{27}{16}\right)\right)\ u.a=\frac{1}{8}\left(9+\ln\left(\frac{27}{16}\right)\right)\times 4\ cm^2\end{aligned}$$

$$\boxed{A=\frac{1}{2}\left(9+\ln\left(\frac{27}{16}\right)\right)\ cm^2}$$

/5 $n\in\mathbb{N}^*$; $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

أ/ **إثبات عبارة الحد العام:**

لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$e^{f(n)-n-1}=e^{n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}=e^{\ln\left(1\frac{1}{n}\right)^n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=u_n$$

ب/ **إثبات أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما:**

نعتبر h الدالة المرفقة بعبارة الحد العام للمتتالية (u_n).

الدالة h معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بالعبارة: $h(x)=e^{f(x)-x-1}$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x :

$$h'(x)=(f'(x)-1)e^{f(x)-x-1}=g(x)e^{f(x)-x-1}$$

بما أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x : $g(x)>0$

فإن: $h'(x)>0$ وبالتالي الدالة h متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ ؛

إذن: المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}^*$.

ج/ **تبيان النهاية:**

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty} e^{f(n)-n-1}=\lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}=e$.

(لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=1$) .

الإستنتاج:

نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد e .

تمنياتنا بالتوفيق والنجاح في شهادة البكالوريا لكل تلاميذنا الشرفاء...