الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

دورة: 2020

الشعبة: رياضيات

اختبار في مادة: الرياضيات

المدة: 04 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأوّل: (04 نقاط)

الدالة العددية f معرّفة على المجال $[1;4]$ بـ: $f(x)=\frac{4x+4}{9-x}$.

1) أ . ادرس اتّجاه تغيّر الدالة f على المجال $[1;4]$.

ب. أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;4]$ فإن: $f(x)\in[1;4]$.

2) المتتالية العددية (u_n) معرّفة بحدها الأول u_0 حيث: $u_0=2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ . برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $1<u_n<4$.

ب. ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و استنتج أنّها متقاربة.

3) المتتالية العددية (v_n) معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n، كما يلي: $v_n=\frac{u_n-1}{u_n-4}$.

أ . برهن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_0 .

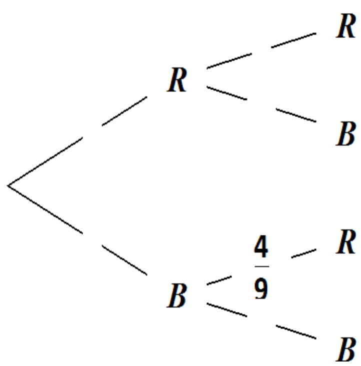
ب. عبّر عن الحد العام v_n بدلالة n ، ثمّ استنتج الحد العام u_n بدلالة n واحسب $\lim_{n\to+\infty}u_n$.

4) المجموع S_n معرف بـ : $S_n=v_0+8v_1+8^2v_2+...+8^nv_n$. احسب S_n بدلالة n.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

صندوق به 5 كريات بيضاء و 3 كريات حمراء (كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس).

نسحب من الصندوق كرية واحدة حيث: إذا ظهرت كرية حمراء نُعيدها إلى الصندوق ونُضيف له كرية بيضاء وإذا ظهرت كرية بيضاء نُعيدها إلى الصندوق ونُضيف له كرية حمراء، ثم نُكرّر العملية مرّة ثانية.



1) انقل شجرة الاحتمالات المقابلة التي تُنمذج هذه التجربة ثم أكملها.

2) بيّن أنّ احتمال أن يوجد في الصندوق 7 كريات بيضاء هو $\frac{1}{8}$.

3) احسب احتمال أن يوجد في الصندوق 4 كريات حمراء على الأقل.

4) ليكن X المتغير العشوائي الذي يأخذ كقيمة عدد الكريات البيضاء الموجودة في الصندوق بعد العملية الثانية.

أ . برّر أنّ قيم المتغير العشوائي X هي: 5، 6 و 7.

ب. عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثمّ احسب $E(X)$ أمله الرياضياتي.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

ليكن n عددا طبيعيا أكبر تماما من 1.

نعتبر الأعداد الطبيعية a ، b و c حيث : $a=4n+1$ ، $b=6n+1$ و $c=3n+2$.

1) أثبت أنّ العددين a و b أوليان فيما بينهما.

2) نسمي α القاسم المشترك الأكبر للعددين a و c .

أثبت أنّ α يقسم 5 ، ثمّ عين الأعداد الطبيعية n بحيث يكون: $\alpha=5$.

3) نسمي β القاسم المشترك الأكبر للعددين a و bc .

أ . أثبت أنّ α يقسم β .

ب. أثبت أنّ العددين β و b أوليان فيما بينهما ثمّ استنتج أنّ: $\alpha=\beta$.

4) نعتبر العددين الطبيعيين A و B حيث: $A=4n^2-3n-1$ و $B=18n^3-3n^2-13n-2$.

أ . بيّن أنّ كلا من العددين A و B مضاعف للعدد الطبيعي $(n-1)$.

ب. نضع: $d=PGCD(A;B)$. عبّر حسب قيم α عن d بدلالة n . (لاحظ أنّ: $bc=18n^2+15n+2$)

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) الدّالتان العدديتان g و h معرفتان على المجال $]-\infty;0]$ كما يلي: $g(x)=-2e^x$ و $h(x)=x(e^x+1)$.

حدّد إشارة كل من $h(x)$ و $g(x)$ على المجال $]-\infty;0]$.

II) الدالة العددية f معرّفة على المجال $]-\infty;0]$ بـ: $f(x)=(x-3)e^x+\frac{1}{2}x^2$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ . بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]-\infty;0]$: $f'(x)=h(x)+g(x)$

ب. استنتج اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-\infty;0]$.

2) احسب $f(0)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدالة f .

3) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty;0]$ ثمّ تَحقّق أنّ : $-1.5<\alpha<-1.4$.

4) (P) هو التمثيل البياني للدالة: $x\mapsto \frac{1}{2}x^2$ على المجال $]-\infty;0]$.

أ . احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}x^2\right]$ ثمّ فسّر النتيجة بيانيا.

ب. ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (P) و (C_f).

جـ. أنشئ (P) ثم المنحنى (C_f) على المجال $]-\infty;0]$.

5) ليكن m وسيطا حقيقيا، ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد حلول المعادلة: $|f(x)|=e^m$ في $]-\infty;0]$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

1) حل المعادلة: $3x-5y=2$ ذات المجهول $(x;y)$ حيث x و y عددان صحيحان.

2) **أ.** ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد الطبيعي 9^n على 7.

ب. ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد الطبيعي 4^n على 11.

3) عيّن الأعداد الطبيعية n بحيث يكون: $14\times 4^n+11\times 9^n-4\equiv 0[77]$.

4) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم، نضع: $u_n=3\times 4^n+4\times 9^n$ و $S_n=u_1+u_2+u_3+...+u_{15n}$

أ . عبّر عن S_n بدلالة n.

ب. أثبت أنّ S_n مضاعف للعدد 77.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي صندوق على كريات متماثلة منها: n كرية بيضاء تحمل العدد π (n عدد طبيعي و $n\geq 2$)

و 4 كريات حمراء تحمل الأعداد $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{3}$ و π و كريتين خضراوين تحملان العددين $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{3}$.

نسحب عشوائيا كريتين في آن واحد من هذا الصندوق.

1) أ . احسب احتمال كل من A و B حيث:

A : "سحب كريتين من نفس اللون" و B : "سحب كريتين تحملان نفس العدد علما أنهما من نفس اللون"

ب. عيّن العدد الطبيعي n حتّى يكون: $P(A)=\frac{17}{55}$.

2) نفرض في ما يلي: $n=5$ و نسمي α و β العددين الظاهرين على الكريتين المسحوبتين .

نعتبر X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب العدد: $\cos(\alpha)\cos(\beta)$

أ . برّر أنّ قيم المتغيّر العشوائي X هي: $-\frac{1}{2}$ ، 0 ، $\frac{1}{4}$ ، 1.

ب. بيّن أنّ: $P(X=0)=\frac{27}{55}$.

جـ. عيّن قانون احتمال المتغيّر العشوائي X واحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المتتاليتان العدديتان (u_n) و (v_n) معرفتان على $\mathbb{N}$ بـ:

$$\begin{cases} u_0=-1 \\ u_{n+1}=3\alpha u_n+(1-3\alpha)v_n \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_0=3 \\ v_{n+1}=3\alpha v_n+(1-3\alpha)u_n \end{cases}$$ (α عدد حقيقي)

المتتالية العددية (w_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $w_n=v_n-u_n$

1) أ . احسب w_0 ثمّ احسب w_1 بدلالة α.

ب. بيّن أنّ (w_n) متتالية هندسية أساسها $(6\alpha-1)$.

جـ. اكتب عبارة w_n بدلالة n و α ، ثمّ عيّن قيم α حتّى تكون: $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

نفرض في كلّ ما يلي: $\frac{1}{6}<\alpha<\frac{1}{3}$

2) أ . أثبت أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما و أنّ (v_n) متناقصة تماما.

ب. استنتج أنّ (u_n) و (v_n) متقاربتان نحو نفس النهاية ℓ.

3) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n+v_n=2$ ، واستنتج قيمة ℓ.

4) احسب بدلالة α المجموع S حيث: $S=u_0+u_1+\cdots+u_{2020}$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

الدالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\ln\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)$.

ليكن (C_f) المنحنى البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ . احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثمّ بيّن أنّ : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

ب. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x)=\frac{3}{\sqrt{9x^2+1}}$.

جـ. استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) نعتبر الدالة g المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=f(x)-x$.

أ . بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$.

ب. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$: $g'(x)=\frac{-9x^2+8}{\left(\sqrt{9x^2+1}\right)\left(3+\sqrt{9x^2+1}\right)}$

جـ. ادرس اتجاه تغيّر الدالة g على المجال $[0;+\infty[$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها. (نأخذ $g\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\approx 0,8$)

3) أ . بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left[\frac{2\sqrt{2}}{3};+\infty\right[$ ثمّ تَحقّق أنّ: $2.83<\alpha<2.84$.

ب. استنتج إشارة $g(x)$ على $[0;+\infty[$.

جـ. حدّد الوضع النسبي للمستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$ و المنحنى (C_f) على المجال $[0;+\infty[$.

4) نعتبر الدالة k المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $k(x)=\ln(6x)$ و ليكن (γ) منحنيها البياني في المعلم السابق.

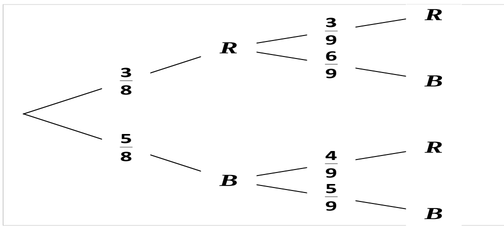
أ . بيّن أنّ (γ) هو صورة منحني الدالة: $x\mapsto \ln x$ بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه.

ب. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-k(x)\right]$ ثمّ فسّر النتيجة بيانيا.

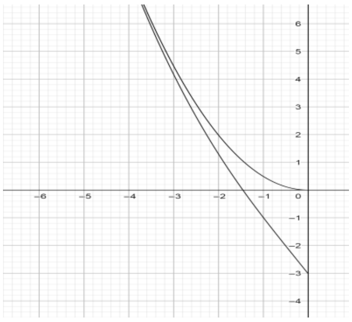
5) أ . بيّن الدالة f فردية.

ب. انشئ كلا من (Δ) ، (γ) و (C_f) على المجال $[0;+\infty[$ ثمّ استنتج انشاء المنحنى (C_f) على $\mathbb{R}$.

انتهى الموضوع الثاني

عناصر الإجابة (الموضوع الأوّل)	العلامة مجزأة	العلامة مجموعة
التّمرين الأول: (04 نقاط)		
1) أ. لدينا: $f'(x)=\frac{40}{(9-x)^2}$ ومنه f متزايدة تمامًا على $[1;4]$. **ب.** من أجل: $x\in[1;4]$ يكون $f(x)\in[f(1);f(4)]$	2×0.25 0.25	0.75
2) أ. البرهان بالتّراجع. **ب.** لدينا : $u_{n+1}-u_n=\frac{(u_n-1)(u_n-4)}{9-u_n}$ ونجد أنّ (u_n) متناقصة تمامًا. الاستنتاج: (u_n) متناقصة تمامًا و محدودة من الأسفل فهي متقاربة.	2×0.25 2×0.25 0.25	1.25
3) أ. لدينا: $v_{n+1}=\frac{5}{8}v_n$ ومنه (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{8}$ و $v_0=-\frac{1}{2}$. **ب.** عبارة v_n و عبارة u_n : $v_n=\frac{-1}{2}\left(\frac{5}{8}\right)^n$ ، $u_n=\frac{4\left(\frac{5}{8}\right)^n+2}{\left(\frac{5}{8}\right)^n+2}$. حساب: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$	2×0.25 2×0.25 0.25	1.25
4). نجد: $S_n=\frac{-1}{8}\left(5^{n+1}-1\right)$	0.75	0.75
التّمرين الثاني: (04 نقاط)		
1) شجرة الاحتمالات: 	0.25x5	1.25
2) احتمال أن يوجد في الصّندوق 7 كريات بيضاء: $\frac{3}{8}\times\frac{3}{9}=\frac{1}{8}$	0.5	0.5
3) احتمال أن يوجد في الصّندوق 4 كريات حمراء على الأقل: $1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$	0.75	0.75
4) أ . تبرير أنّ قيّم المتغير العشوائي X هي: 5 ، 6 و 7 **ب.** تعريف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي. $\begin{array}{c\|c\|c\|c} x_i & 5 & 6 & 7 \\ \hline P(X=x_i) & \frac{25}{72} & \frac{38}{72} & \frac{9}{72} \end{array}$ $E(X)=\frac{52}{9}$	0.5 0.75 0.25	1.50
التّمرين الثالث: (05 نقاط)		
1) لدينا: $3a-2b=1$ ، إذن حسب بيزو a و b أوليان فيما بينهما	0.75	0.75
2) لدينا: ($\alpha\|a$ و $\alpha\|c$) ومنه: $\alpha\|(4c-3a)$ أي $\alpha\|5$. $\alpha=5$ معناه ($a\equiv0[5]$ و $c\equiv0[5]$) أي $n\equiv1[5]$ ومنه $n=5k+1$ ، $k\in\mathbb{N}$	0.75 0.75	1.5

عناصر الإجابة (الموضوع الأوّل)	العلامة مجزأة	العلامة مجموعة
3) أ . إثبات أنّ α يقسم β . لدينا $(\alpha\|a$ و $\alpha\|c)$ ومنه $(\alpha\|a$ و $\alpha\|bc)$ وبالتّالي $\alpha\|p\gcd(a,bc)$ أي $\alpha\|\beta$ ب. إثبات أنّ β و b أوليان فيما بينهما: نفرض أنّ d قاسم مشترك لـ β و b $(d\|\beta$ و $d\|b)$ ومنه$(\alpha\|b$ و $d\|a)$ وبالتّالي $d\|p\gcd(a,b)$ أي: $d=1$ **ملاحظة:** يمكن استعمال مبرهنة بيزو استنتاج أنّ: $\alpha=\beta$: $(\beta\|bc$ و$\beta\wedge b=1)$ ومنه$(\beta\|c$ و $\beta\|a)$ وعليه $\beta\|\alpha$ $(\alpha\|\beta$ و$\beta\|\alpha)$ معناه $\alpha=\beta$	0.5 0.5 0.5	1.5
4) أ . لدينا : $A=(n-1)(4n+1)$ و $B=(n-1)bc$ إذن كلاّ من A و B مضاعف لـ $(n-1)$ ب. لدينا $d=PGCD(A,B)$ ومنه $d=(n-1)PGCD(a,bc)$ ومنه $d=(n-1)\beta=(n-1)\alpha$ وعليه من أجل $\alpha=1$: $d=n-1$ ، من أجل $\alpha=5$: $d=5n-5$	0.5 0.25x3	1.25
<u>التّمرين الرابع</u> : (07 نقاط)		
I) من أجل $x\in\left]-\infty\,;0\right[$: $h(x)\le 0$ و $g(x)<0$	0.25×2	0.5
II) 1) أ. من أجل كل x من $\left]-\infty\,;0\right[$: $f'(x)=x(e^x+1)+(-2e^x)=h(x)+g(x)$ ب. f متناقصة تمامًا على المجال $\left]-\infty\,;0\right[$.	0.5+0.25 0.5	1.25
2) نجد: $f(0)=-3$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^x-3e^x+\frac{1}{2}x^2)=+\infty$ جدول التّغيرات	0.25×2 0.5	1
3) f مستمرة ومتناقصة تمامًا على المجال $\left]-\infty\,;0\right[$ وتأخذ قيمها في $\left]-3\,;+\infty\right[$ ومنه $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\left]-\infty\,;0\right[$. التّحقق أن $\alpha\in\left]-1{,}5;-1{,}4\right[$: $f(-1{,}5)\simeq 0{,}121$ ، $f(-1{,}4)\simeq -0{,}105$	0.75 0.25	1
4) أ . نجد: $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-\frac{1}{2}x^2)=0$ ، إذن: (P) منحنى مقارب لـ (C_f) بجوار $-\infty$ ب. من أجل كل x من $\left]-\infty\,;0\right[$: $f(x)-\frac{1}{2}x^2=(x-3)e^x$ ومنه $f(x)-\frac{1}{2}x^2<0$ وبالتالي (C_f) أسفل (P) على المجال $\left]-\infty\,;0\right[$	0.5×2 0.5+0.25	1.75

عناصر الإجابة (الموضوع الأوّل)	العلامة مجزأة	العلامة مجموعة
جـ. إنشاء (P) و (C_f) : 	0.25 0.5	0.75
5) المناقشة البيانية وحسب قيم m عدد حلول المعادلة: $\left\|f(x)\right\| = e^m$ في $]-\infty ; 0]$ من أجل $m \leq \ln 3$ المعادلة تقبل حلّين مختلفين. من أجل $m > \ln 3$ المعادلة تقبل حلّ واحد	0.25×3	0.75

عناصر الإجابة (الموضوع الثّاني)	العلامة مجزأة	العلامة مجموعة
التّمرين الأول: (04 نقاط)		
1) $(x;y)=(5k-1;3k-1)$ حيث $k\in Z$	1	1
2) أ) بواقي القسمة الاقليدية للعدد 9^n على 7 $(k\in\mathbb{N})$ $\begin{array}{c\|c\|c\|c} n & 3k & 3k+1 & 3k+2 \\ \hline \text{باقي القسمة} & 1 & 2 & 4 \end{array}$ ب) بواقي القسمة الاقليدية للعدد 4^n على 11 $(k'\in\mathbb{N})$ $\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c\|c} n & 5k' & 5k'+1 & 5k'+2 & 5k'+3 & 5k'+4 \\ \hline \text{باقي القسمة} & 1 & 4 & 5 & 9 & 3 \end{array}$	0.5 0.5	1
3) بما أن 7 و 11 أوليان فيما بينهما فإنّ: $\begin{cases}14\times4^n+11\times9^n-4\equiv0[7]\\14\times4^n+11\times9^n-4\equiv0[11]\end{cases}$ يعني $\begin{cases}11\times9^n-4\equiv0[7]\\14\times4^n-4\equiv0[11]\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}9^n\equiv1[7]\\4^n\equiv5[7]\end{cases}$ أي: $n=3\alpha=5\beta+2$ ومنه $3\alpha-5\beta=2$ (α ، β عددان طبيعيان) ومنه $n=15p-3$ ، $(\alpha;\beta)=(5p-1;3p-1)$. حيث $\left(p\in\mathbb{N}^*\right)$	0.25×3 0.25	1
4) أ. $S_n=4\left(4^{15n}-1\right)+\frac{9}{2}\left(9^{15n}-1\right)$. **ب.** إثبات أنّ S_n مضاعف للعدد 77 . $S_n\equiv0[77]$ يعني $2S_n\equiv0[77]$ أي $8\left(4^{15n}-1\right)+9\left(9^{15n}-1\right)_n\equiv0[77]$ أي $\begin{cases}8\left(4^{15n}-1\right)+9\left(9^{15n}-1\right)\equiv0[7]\\8\left(4^{15n}-1\right)+9\left(9^{15n}-1\right)\equiv0[11]\end{cases}$ $\begin{cases}4^{15n}-1\equiv0[7]\\9^{15n}-1\equiv0[11]\end{cases}$ أي $\begin{cases}\left(4^3\right)^{5n}-1\equiv0[7]\\\left(9^5\right)^{3n}-1\equiv0[11]\end{cases}$ أي $\begin{cases}(1)^{5n}-1\equiv0[7]\\(1)^{3n}-1\equiv0[11]\end{cases}$ محققة دوما	0.5 0.5	1
التّمرين الثاني: (04 نقاط)		
1) أ . $P(A)=\dfrac{n^2-n+14}{(n+5)(n+6)}$ ، $P(B)=\dfrac{n^2-n+2}{n^2-n+14}$ **ب.** $P(A)=\dfrac{17}{55}$ يعني $n=5$	0.5×2 0.5	1.5
2) أ . بعد الحساب نجد قيم المتغيّر العشوائي X $-\frac{1}{2}$ ، 0 ، $\frac{1}{4}$ ، 1. **ب.** $P(X=0)=\dfrac{C_3^1\times C_8^1+C_3^2}{C_{11}^2}=\dfrac{27}{55}$	0.5 0.5	1

<table>
<tr><th rowspan="2">عناصر الإجابة (الموضوع الثّاني)</th><th colspan="2">العلامة</th></tr>
<tr><th>مجزأة</th><th>مجموعة</th></tr>
<tr><td>

جـ. قانون احتمال X

<table>
<tr><td>x_i</td><td>$\frac{-1}{2}$</td><td>0</td><td>$\frac{1}{4}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$p(X=x_i)$</td><td>$\frac{12}{55}$</td><td>$\frac{27}{55}$</td><td>$\frac{1}{55}$</td><td>$\frac{15}{55}$</td></tr>
</table>

$E(X)=\frac{37}{220}$

</td><td>1
0.5</td><td>1.5</td></tr>
<tr><td colspan="3">

التّمرين الثالث: (05 نقاط)

</td></tr>
<tr><td>

1) أ . $w_0=4$ ، $w_1=4(6\alpha-1)$
ب. $w_{n+1}=(6\alpha-1)w_n$: (w_n) متتالية هندسية أساسها $(6\alpha-1)$.
جـ. $w_n=4(6\alpha-1)^n$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=0$ يعني $-1<6\alpha-1\leq 1$ ومنه $0<\alpha\leq\frac{1}{3}$.

</td><td>2×0.25
0.5
0.5
0.5</td><td>2</td></tr>
<tr><td>

2) أ . $u_{n+1}-u_n=-(3\alpha-1)w_n$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تمامًا .
$v_{n+1}-v_n=(3\alpha-1)w_n$ ومنه المتتالية (v_n) متناقصة تمامًا.
ب. بما أن المتتالية (u_n) متزايدة تمامًا و المتتالية (v_n) متناقصة تمامًا و $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$
فإنهما متجاورتان وبالتالي متقاربتان نحو نفس النّهاية ℓ .

</td><td>0.5
0.5
0.5
0.25</td><td>1.75</td></tr>
<tr><td>

3) لدينا $u_{n+1}-u_n=-(3\alpha-1)w_n$ و $v_{n+1}-v_n=(3\alpha-1)w_n$ إذا
$u_{n+1}+v_{n+1}=u_n+v_n=u_0+v_0=2$
استنتاج قيمة ℓ: $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=2$ ومنه $\ell=1$

</td><td>0.5
0.25</td><td>0.75</td></tr>
<tr><td>

4) نجد: $S=2021-\frac{(6\alpha-1)^{2021}-1}{3\alpha-1}$.

</td><td>0.5</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td colspan="3">

التّمرين الرابع: (07 نقاط)

</td></tr>
<tr><td>

1) أ . $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. (مع التّبرير)
اثبات أنّ : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.
ب. من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{3}{\sqrt{9x^2+1}}$.
جـ. من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)>0$ ، إذن f متزايدة تمامًا على $\mathbb{R}$.
جدول تغيّرات الدالة f .

</td><td>2×0.25
0.25
0.5
0.25
0.25</td><td>1.75</td></tr>
<tr><td>

2) أ . تبيان أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$
ب. تبيان أنّ من أجل كل $x\geq 0$ ، $g'(x)=\frac{-9x^2+8}{\left(\sqrt{9x^2+1}\right)\left(3+\sqrt{9x^2+1}\right)}$

</td><td>0.5
0.5</td><td>1</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2">عناصر الإجابة (الموضوع الثّاني)</th><th colspan="2">العلامة</th></tr>
<tr><th>مجزأة</th><th>مجموعة</th></tr>
<tr><td>

ج. إشارة $g'(x)$ هي من إشارة $(-9x^2+8)$.

x	0	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$

g متزايدة تمامًا على $\left[0;\frac{2\sqrt{2}}{3}\right]$ و متناقصة تمامًا على المجال $\left[\frac{2\sqrt{2}}{3};+\infty\right[$

جدول تغيّرات الدّالة g

</td><td>0.25
0.25
0.25</td><td>0.75</td></tr>
<tr><td>

3) أ. g مستمرة ورتيبة تمامًا على $\left]\frac{2\sqrt{2}}{3};+\infty\right[$ وتأخذ قيمها في المجال $\left]-\infty;g(\frac{2\sqrt{2}}{3})\right[$

التّحقق من أنّ $2,83<\alpha<2,84$: $g(0.84)\approx-0.005$ و $g(0.83)\approx 0.001$.

ب. استنتاج إشارة $g(x)$:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	0	$+$	0	$-$	

ج. الوضع النّسبي : (C_f) فوق (Δ) على المجال $]0;\alpha[$

(C_f) تحت (Δ) على المجال $]\alpha;+\infty[$

(C_f) و (Δ) متقاطعان في نقطتين فاصلتاهما 0 و α

</td><td>0.5
0.25
0.25
0.5</td><td>1.5</td></tr>
<tr><td>

4) أ. لدينا $k(x)=\ln 6+\ln x$ إذن (γ) هو صورة المنحني الممثل للدّالة $x\mapsto \ln x$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}(0;\ln 6)$.

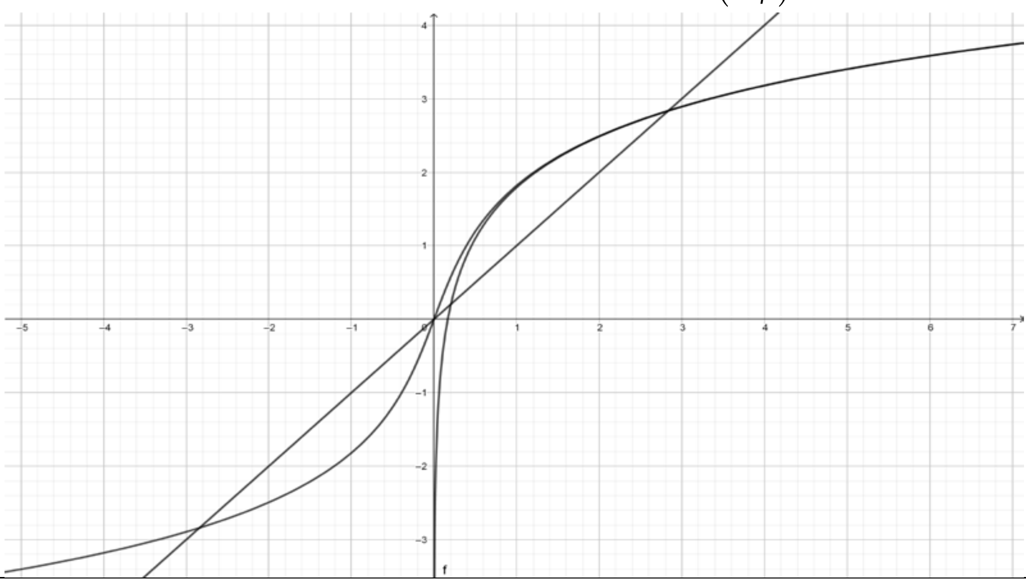
ب. $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-k(x)\right)=0$. نستنتج أنّ (γ) منحني مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

</td><td>0.25
2×0.25</td><td>0.75</td></tr>
<tr><td>

5. أ. إثبات أنّ الدّالة f فردية.

ب. رسم كل من (γ)،على المجال $]0;+\infty[$ و رسم (C_f) و (Δ) على المجال $[0;+\infty[$.

استنتاج الرسم للمنحني (C_f) على $\mathbb{R}$.



</td><td>0.25
3×0.25
0.25</td><td>1.25</td></tr>
</table>

التمرين الأول (04 نقاط) :

العودة إلى الموضوع ← العودة إلى الفهرس ←

لدينا $f(x)=\frac{4x+4}{9-x}$ و f معرفة على $[1;4]$:

1. أ- دراسة اتجاه تغير الدالة f : $f'(x)=\frac{4(9-x)+(4x+4)}{(9-x)^2}$ أي أن $f'(x)=\frac{40}{(9-x)^2}$ و هي موجبة على $[1;4]$ و منه الدالة f متزايدة على هذا المجال .

ب- إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;4]$ فإن $f(x)\in[1;\ 4]$: $x\in[1;\ 4]$ و f متزايدة على $[1;\ 4]$ يعني أن $f(x)\in[f(1);f(4)]$ أي أن $f(x)\in[1;\ 4]$.

2. المتتالية (u_n) حيث $u_{n+1}=f(u_n)$:

أ – البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1<u_n<4$

$1<u_0<4$ أي $1<2<4$ أذن محققة

نفرض أن $1<u_n<4$ صحيحة و نبرهن صحة $1<u_{n+1}<4$

لدينا $1<u_n<4$ يعني أن $f(1)<f(u_n)<f(4)$ أي أن $1<u_{n+1}<4$ صحيحة 0

و منه من أجل كل عدد طبيعي n : $1<u_n<4$.

ب.دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) : نحسب الفرق $u_{n+1}-u_n=\frac{4u_n+4}{9-u_n}-u_n=\frac{4u_n+4-9u_n+u_n^2}{9-u_n}$ أي أن $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n^2-5u_n+4}{9-u_n}$ يعني أن $u_{n+1}-u_n=\frac{(u_n-4)(u_n-1)}{9-u_n}$ بما أن $1<u_n<4$ فإن الفرق سالب إذن المتتالية متناقصة .

بما المتتالية (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل فهي متقاربة .

3. المتتالية (v_n) : $v_n=\frac{u_n-1}{u_n-4}$

أ – البرهان المتتالية (v_n) هندسية : $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}-4}=\frac{\frac{4u_n+4}{9-u_n}-1}{\frac{4u_n+4}{9-u_n}-4}$ أي $v_{n+1}=\frac{4u_n+4-9+u_n}{4u_n+4-36+4u_n}$ يعني أن $v_{n+1}=\frac{5u_n-5}{8u_n-32}$ يعني أن $v_{n+1}=\left(\frac{5}{8}\right)\left(\frac{u_n-1}{u_n-4}\right)$ إذن $v_{n+1}=\left(\frac{5}{8}\right).v_n$ و منه (v_n) هندسية أساسها $\left(\frac{5}{8}\right)$ و حدها الأول $v_0=\frac{u_0-1}{u_0-4}$ أي $v_0=-\frac{1}{2}$.

ب عبارة الحد العام v_n : $v_n=v_0.q^n$ أي أن $v_{n+1}=-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}\right)^n$

استنتاج عبارة الحد العام u_n : $v_n=\frac{u_n-1}{u_n-4}$ يعني أن $v_n.u_n-4v_n=u_n-1$ و منه $v_n.u_n-u_n=4v_n-1$ يعني $(v_n-1).u_n=4v_n-1$ و منه $u_n=\frac{4v_n-1}{v_n-1}$ بالتعويض نجد $u_n=\frac{-2.\left(\frac{5}{8}\right)^n-1}{-\frac{1}{2}.\left(\frac{5}{8}\right)^n-1}$ إذن $u_n=\frac{2.\left(\frac{5}{8}\right)^n+1}{\frac{1}{2}.\left(\frac{5}{8}\right)^n+1}$.

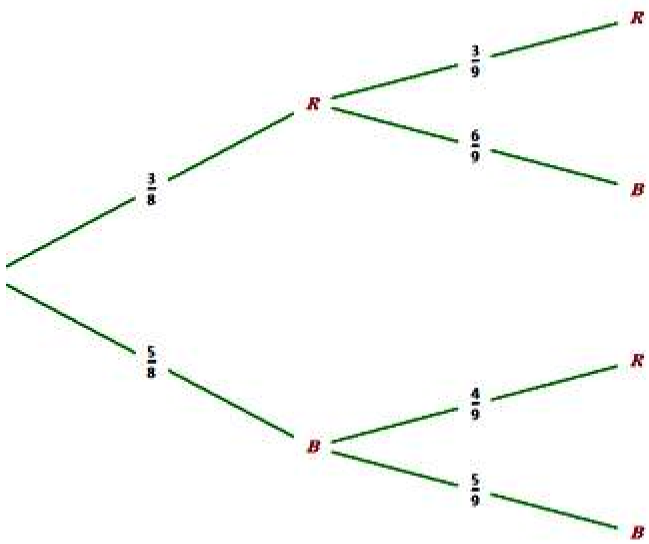
$$\lim u_n = \lim \frac{2.\left(\frac{5}{8}\right)^n + 1}{\frac{1}{2}.\left(\frac{5}{8}\right)^n + 1} = 1 \ .$$

4. حساب المجموع $S_n = v_0 + 8v_1 + 8^2 v_2 + ... + 8^n v_n$ لدينا $8^n v_n = 8^n.\left(-\frac{1}{2}\right).\left(\frac{5}{8}\right)^n$ أي أن $8^n v_n = \left(-\frac{1}{2}\right)5^n$ إذن

$\left(8^n v_n\right)$ متتالية هندسية أساسها 5

و منه $S_n = v_0.\frac{5^{n+1}-1}{5-1}$ أي $S_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{5^{n+1}-1}{5-1}\right)$ إذن $S_n = -\frac{1}{8}.\left(5^{n+1}-1\right)$

التمرين الثاني (04 نقاط):



1. شجرة الاحتمالات
2. احتمال أن يكون في الصندوق 7 كريات بيضاء

هو احتمال ان يكون في الصندوق 6 كريات و نسحب

في السحب الثاني كرية حمراء من الشجرة الاحتمالات

نجد أن هذا الاحتمال هو $P(A) = \frac{3}{8} \times \frac{3}{9} = \frac{1}{8}$ محققة

3. احتمال ان يكون في الصندوق 4 كريات حمراء على الأقل

$$P(B) = \frac{3}{8} \times \frac{6}{9} + \frac{5}{8} = \frac{7}{8}$$

4. أ- قيم المتغير X :

هي 5 في حالة سحب كرية بيضاء في السحب الأول و السحب الثاني BB

هي 6 في حالة سحب كرية حمراء في السحب الأول و سحب كرية بيضاء في السحب الثاني أو سحب كرية بيضاء في السحب الأول و سحب كرية حمراء في السحب الثاني RB أو BR

هي 7 في حالة سحب كرية حمراء في السحب الأول و السحب الثاني RR.

قانون الاحتمال

$P(X=5) = \frac{5}{8} \times \frac{5}{9} = \frac{25}{72}$ و $P(X=6) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{9} + \frac{3}{8} \times \frac{6}{9} = \frac{38}{72}$ و $P(X=7) = \frac{3}{8} \times \frac{3}{9} = \frac{9}{72}$

$x_i =$	5	6	7
$P(X = x_i)$	$\frac{25}{72}$	$\frac{38}{72}$	$\frac{9}{72}$

الأمل ألرياضياتي : $E(X) = 5 \times \frac{25}{72} + 6 \times \frac{38}{72} + 7 \times \frac{9}{72} = \frac{52}{9}$

التمرين الثالث (05 نقاط) :

$$c = 3n+2 \ ; \ b = 6n+1 \ ; \ a = 4n+1$$

1. إثبات أن العددان $a \ ; \ b$ أوليان فيما بينهما لدينا $3a - 2b = 3(4n+1) - 2(6n+1)$ أي أن $3a - 2b = 1$ فحسب مبرهنة بيزو العددان $a \ ; \ b$.

2. نضع $\alpha = p\gcd(a;c)$ لدينا $4c-3a = 4(3n+2)-3(4n+1)$ أي أن $4c-3a=5$ بما أن α قاسم للعددين $a\ ;\ c$ فهو قاسم للعدد $4c-3a$ إذن فهو قاسم للعدد 5 .

$\alpha = 5$ يعني أن $\begin{cases} a \equiv 0[5] \\ c \equiv 0[5] \end{cases}$ أي أن $\begin{cases} 4n+1 \equiv 0[5] \\ 3n+2 \equiv 0[5] \end{cases}$ بالطرح نجد $n-1 \equiv 0[5]$ يكافئ $n \equiv 1[5]$ أي أن $n = 1+5k\ :\ k \in \mathbb{N}$.

3. $\beta = p\gcd(a;b.c)$

أ – إثبات أن α يقسم β: $\alpha = p\gcd(a;c)$ يعني أن α يقسم العددين $a\ ;\ c$ و منه α يقسم العددين $a\ ;\ bc$ (القاسم المشترك للعددين الطبيعيين هو قاسم للقاسم المشترك الأكبر لهذين العددين) إ α يقسم β .

ب إثبات β و b أوليان فيما بينهما: $p\gcd(\beta;b) = p\gcd(a;bc;b) = 1$ لأن $p\gcd(a;b)=1$ و منه العددان أوليان فيما بينهما .

بما أن $p\gcd(a;b)=1$ فإن $\beta = p\gcd(a;b.c) = p\gcd(a;c) = \alpha$

4. نعتبر $A = 4n^2-3n-1$ و $B = 18n^3-3n^2-13n-2$

أ – إثبات أن A و B مضاعفان للعدد $n-1$:

بما أن $A = (n-1).(4n+1)$ و $B = (n-1).(18n^2+15n+2)$ فالعددان مضاعف للعدد $n-1$.

ب نضع $d = p\gcd(A;B)$: $p\gcd(A;B) = (n-1).p\gcd(4n+1\ ;18n^2+15n+2)$ أي أن

$p\gcd(A;B) = (n-1).p\gcd(a\ ;bc) = (n-1).\beta = (n-1).\alpha$

لما $\alpha = 5$ فإن $p\gcd(A;B) = 5.(n-1)$

لما $\alpha = 1$ فإن $p\gcd(A;B) = (n-1)$

التمرين الرابع (07 نقاط) :

I – لدينا $g(x) = -2e^x$ و $h(x) = x.(e^x+1)$ من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0]$ فإن $g(x)$ سالبة و $h(x)$ سالبة .

II – الدالة f : $f(x) = (x-3).e^x + \frac{1}{2}x^2$

1. أ–إثبات عبارة المشتقة $f'(x) = e^x + (x-3).e^x + x = -2e^x + x.(e^x+1)$ أي أن $f'(x) = g(x)+h(x)$.

ب–بما أن $h(x)\ ;\ g(x)$ سالبين على المجال $]-\infty;0]$ فإن $f'(x)$ سالبة و منه f متناقصة على $]-\infty;0]$.

2. حساب $f(0)$: $f(0) = -3$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{2}.x^2 = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-3).e^x = 0$.

جدول تغيرات :

x	$-\infty$	0
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-3

3. إثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α

$f(-1{,}5)=0{,}12$ و $f(-1{,}4)=-0{,}11$ بما أن الدالة f مستمرة و متزايدة على المجال $]-1{,}5\,;\,-1{,}4[$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة تقبل حل وحيد α .

4. لدينا $(P):\ y=\frac{1}{2}x^2$

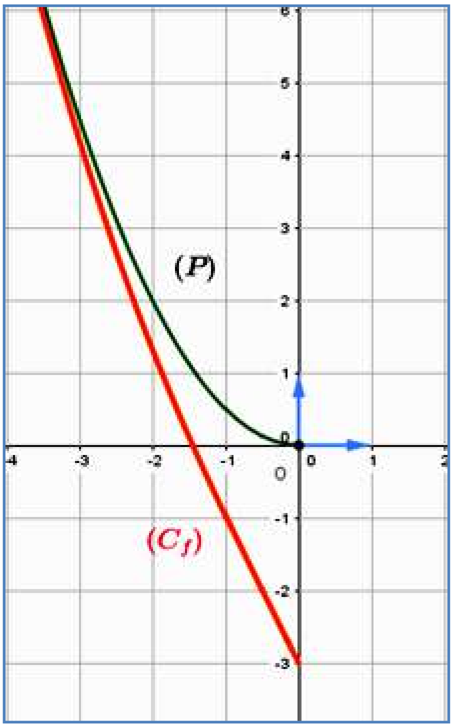
أ. حساب $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}x^2\right]=\lim_{x\to-\infty}(x-3).e^x=0$

التفسير البياني (P) منحنى مقارب للمنحنى (C_f) جهة $-\infty$.

ب. دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمنحنى (P):

إشارة الفرق من إشارة $(x-3)$ و هو عدد $\left[f(x)-\frac{1}{2}x^2\right]=(x-3).e^x$ سالب على المجال $]-\infty;0]$ و منه (C_f) يقع تحت المنحنى (P).

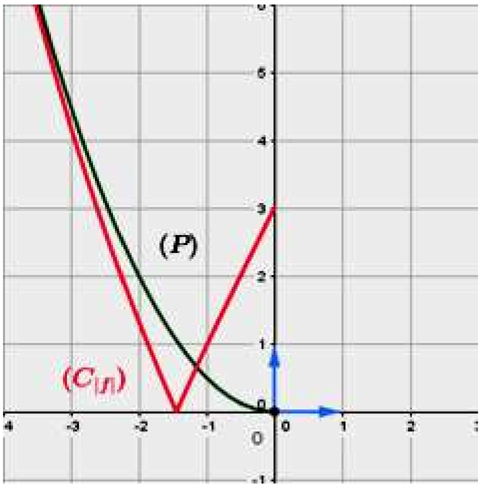
ج. إنشاء المنحنى (P) و المنحنى (C_f):



5. ليكن m وسيط حقيقي $|f(x)|=e^m$ حلها هو ايجاد فواصل نقط تقاطع (C_f) و المستقيم ذو المعادلة $(\Delta_m):\ y=e^m$

لما $m\in]-\infty;\ln(3)]$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتين و منه للمعادلة حلين

لما $m\in]\ln 3\,;+\infty[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة وحيدة و منه للمعادلة حل وحيد .



انتهى الموضوع الأول

التمرين الأول (04 نقاط) :

1. حل المعادلة $3x-5y=2$ لدينا $\begin{cases}3x-5y=2\\3(-1)-5(-1)=2\end{cases}$ بالطرح نجد $3(x+1)=5(y+1)$ بما أن العددان 3 و 5 أوليان فيما بينهما

حسب مبرهنة غوص $\begin{cases}x+1=5k\\y+1=3k\end{cases} : k\in Z$ أي $\begin{cases}x=-1+5k\\y=-1+3k\end{cases} : k\in Z$ مجموعة الحلول هي.

$S=\{(-1+5k\ ;\ -1+3k):k\in Z\}$

2. أ-دراسة بواقي قسمة 9^n على 7 :

$n=$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$	$k\in N$
$9^n\equiv$	1	2	4	$[7]$
	بواقي القسمة			

ب. دراسة بواقي قسمة 4^n على 11

$n=$	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$5k+4$	$k\in N$
$4^n\equiv$	1	4	5	9	3	$[11]$
	بواقي القسمة					

3. تعيين الأعداد الطبيعة n حتى يكون $14\times4^n+11\times9^n-4\equiv0[77]$ بما أن $77=7\times11$ و العددان 11 و 7 أوليان فيما بينهما $14\times4^n+11\times9^n-4\equiv0[77]$ يعني أن $14\times4^n+11\times9^n-4\equiv0[7]$ و $14\times4^n+11\times9^n-4\equiv0[11]$

$14\times4^n+11\times9^n-4\equiv0[7]$ يعني أن $4\times9^n-4\equiv0[7]$ أي أن $4(9^n-1)\equiv0[7]$ العددان 7 و 4 أوليان فيما بينهما و منه

$9^n\equiv1\ [7]$ يعني أن $n=3\alpha\ :\alpha\in N$

$14\times4^n+11\times9^n-4\equiv0[11]$ يعني أن $3\times4^n-4\equiv0[11]$ أي أن $4(3\times4^{n-1}-1)\equiv0[11]$ العددان 11 و 4 أوليان فيما بينهما و منه $3\times4^n\equiv1\ [11]$

$n=$	5β	$5\beta+1$	$5\beta+2$	$5\beta+3$	$5\beta+4$	$\beta\in N$
$4^n\equiv$	1	4	5	9	3	$[11]$
$3\times4^n\equiv$	3	1	4	5	9	$[11]$

يعني أن $n=5\beta+1\ :\beta\in N$

يعني أن $3\alpha=5\beta+1$ أي $3\alpha-5\beta=1$ أي أن $\begin{cases}3\alpha-5\beta=1\\3(2)-5(1)=1\end{cases}$ بالطرح نجد $3(\alpha-2)=5(\beta-1)$ أي أن

$\begin{cases}\alpha=2+5k\\\beta=1+3k\end{cases} : k\in N$ بالتعويض نجد $n=5.(1+3k)+1\ :k\in N$ أي $n=15k+6\ :k\in N$

4. لدينا $u_n=3\times4^n+4\times9^n$ و $S_n=u_1+u_2+...+u_{15n}$

أ- S_n مجموع حدود متتابعة من مجموع متتاليتين هندسيتين $S_n=12\times\dfrac{4^{15n}-1}{4-1}+36\times\dfrac{9^{15n}-1}{9-1}$ أي $S_n=4.(4^{15n}-1)+9\dfrac{(9^{15n}-1)}{2}$

أي $S_n=\dfrac{4^{15n+1}+\ 9^{15n+1}-17}{2}$.

ب- S_n قابلة للقسمة على 77 يعني $4^{15n+1}+9^{15n+1}-17\equiv 0[77]$ أي أن $4^{15n+1}+9^{15n+1}-17\equiv 0[7]$ و $4^{15n+1}+9^{15n+1}-17\equiv 0[11]$

لدينا $2^3\equiv 1[7]$ و $9\equiv 2[7]$ و منه $4^{15n+1}\equiv 4[7]$ و $9^{15n+1}\equiv 2[7]$ و منه $4^{15n+1}+9^{15n+1}-17\equiv 4+2-17[7]$ أي أن $4^{15n+1}+9^{15n+1}-17\equiv -11[7]$ و منه العدد $4^{15n+1}+9^{15n+1}-17$ لا يقبل القسمة 7 فهو غير قابل للقسمة 77 أي S_n لا يقبل القسمة على 77

التمرين الثاني (04 نقاط) :

1. حساب الاحتمالات $P(A)=\dfrac{C_n^2+C_4^2+C_2^2}{C_{n+6}^2}$ أي أن $P(A)=\dfrac{\dfrac{n!}{2(n-2)!}+6+1}{\dfrac{(n+6)!}{2(n+4)!}}$ أي

$$P(A)=\frac{\dfrac{n.(n-1)}{2}+7}{\dfrac{(n+6)(n+5)}{2!}}=\frac{n^2-n+14}{n^2+11n+30}.$$

أي أن $P(A)=\dfrac{\dfrac{n!}{2(n-2)!}+6+1}{\dfrac{(n+6)!}{2(n+4)!}}$ أي $P(A)=\dfrac{\dfrac{n.(n-1)}{2}+7}{\dfrac{(n+6)(n+5)}{2!}}=\dfrac{n^2-n+14}{n^2+11n+30}$.

$$P(B)=\frac{\dfrac{C_n^2+C_4^2}{C_{n+6}^2}}{P(A)}=\frac{\dfrac{n(n-1)}{2}+6}{\dfrac{n(n-1)}{2}+7}=\frac{n^2-n+12}{n^2-n+14}$$

تعيين n حتى يكون $P(A)=\dfrac{17}{55}$. أي أن $\dfrac{n^2-n+14}{n^2+11n+30}=\dfrac{17}{55}$ يكافئ $38n^2-242n+260=0$ أي $19n^2-121n+130=0$ المميز $\Delta=4761$ للمعادلة حلين هما $\dfrac{26}{19}=\dfrac{121-69}{38}$ مرفوض لأنه غير طبيعي أو $5=\dfrac{121+69}{38}$ مقبول .

قيمة $n=5$

2. أ- تبرير قيم المتغير العشوائي X : الأعداد الظاهرة هي π و $\dfrac{\pi}{3}$ و $\dfrac{\pi}{2}$

ظهور π و π يعني أن $X=\cos^2\pi=1$

ظهور $\dfrac{\pi}{2}$ و π او $\dfrac{\pi}{3}$ او $\dfrac{\pi}{2}$ (قيمة أخرى) $X=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\cos\beta=0$.

ظهور $\dfrac{\pi}{3}$ و $\dfrac{\pi}{3}$ يعني $X=\cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{4}$

ظهور π و $\dfrac{\pi}{3}$ يعني $X=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\pi=-\dfrac{1}{2}$

ب-إثبات أن $P(X=0)=\dfrac{C_3^2+C_3^1\times C_8^1}{C_{11}^2}=\dfrac{27}{55}$ صحيحة .

ج-قانون الاحتمال $P(X=1)=\dfrac{C_6^2}{C_{11}^2}=\dfrac{15}{55}$ و $P\left(X=\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{C_2^2}{C_{11}^2}=\dfrac{1}{55}$ و $P\left(X=-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{C_2^1\times C_6^1}{C_{11}^2}=\dfrac{12}{55}$

x_i	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	1
$P(X=x_i)$	$\frac{12}{55}$	$\frac{27}{55}$	$\frac{1}{55}$	$\frac{15}{55}$

الأمل ألرياضياتي $E(X)=-\frac{1}{2}\times\frac{12}{55}+0\times\frac{27}{55}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{55}+1\times\frac{15}{55}=\frac{37}{220}$

التمرين الثالث (05 نقاط) :

لدينا $\begin{cases}u_0=-1\\u_{n+1}=3\alpha u_n+(1-3\alpha)v_n\end{cases}$ و $\begin{cases}v_0=3\\v_{n+1}=3\alpha v_n+(1-3\alpha)u_n\end{cases}$ و $w_n=v_n-u_n$

1. أ. حساب $w_0=v_0-u_0=3+1=4$

و $w_1=v_1-u_1$ أي $w_1=3\alpha v_0+(1-3\alpha)u_0-3\alpha u_0-(1-3\alpha)v_0$ أي أن $w_1=9\alpha-(1-3\alpha)+3\alpha-3(1-3\alpha)$ إذن $w_1=24\alpha-4$.

ب.اثبات أن المتتالية (w_n) هندسية: $w_{n+1}=v_{n+1}-u_{n+1}=3\alpha v_n+(1-3\alpha)u_n-3\alpha u_n-(1-3\alpha)v_n$ أي أن $w_{n+1}=v_{n+1}-u_{n+1}=3\alpha(v_n-u_n)+(1-3\alpha)(u_n-v_n)$ و منه $w_{n+1}=(6\alpha-1)(v_n-u_n)$ إذن $w_{n+1}=(6\alpha-1)w_n$ و منه المتتالية هندسية و أساسها $(6\alpha-1)$.

ج. كتابة عبارة الحد العام $w_n=w_0(6\alpha-1)^n$ أي أن $w_n=4.(6\alpha-1)^n$

تعيين قيم α حتى يكون $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=0$ يكافئ أن $-1<(6\alpha-1)<1$ أي أن $0<6\alpha<2$ يعني $0<\alpha<\frac{2}{6}$ أي $0<\alpha<\frac{1}{3}$.

2. أ– إثبات أن المتتالية (u_n) متزايدة : $u_{n+1}-u_n=3\alpha u_n+(1-3\alpha)v_n-u_n$ أي أن $u_{n+1}-u_n=(3\alpha-1)u_n+(1-3\alpha)v_n=(1-3\alpha).(v_n-u_n)$ يعني $u_{n+1}-u_n=(1-3\alpha)w_n=4(1-3\alpha)(6\alpha-1)^n$ الفرق موجب و منه المتتالية (u_n) متزايدة .

ب– إثبات أن المتتالية (u_n) متناقصة : $v_{n+1}-v_n=3\alpha v_n+(1-3\alpha)u_n-v_n$ أي أن $v_{n+1}-v_n=(3\alpha-1)v_n+(1-3\alpha)u_n=-(1-3\alpha).(v_n-u_n)$ يعني $v_{n+1}-v_n=-(1-3\alpha)w_n=-4(1-3\alpha)(6\alpha-1)^n$ الفرق سالب و منه المتتالية (v_n) متناقصة .

ب . لدينا $w_n=v_n-u_n$ و $\lim w_n=0$ و المتتالية (v_n) متناقصة و (u_n) متزايدة و منه $\lim v_n=\lim u_n=l$

لدينا $v_{n+1}+u_{n+1}=3\alpha v_n+(1-3\alpha).u_n+3\alpha u_n+(1-3\alpha).v_n=3\alpha(v_n+u_n)+(1-3\alpha)(v_n+u_n)$ أي أن $v_{n+1}+u_{n+1}=(v_n+u_n)=v_0+u_0=3-1=2$ أي أن $(v_n+u_n)=2$ محققة .

$\lim v_n=\lim u_n=l$ و $v_n+u_n=2$ يعني أن $2l=2$ إذن $l=1$.

4. حساب المجموع $S=u_0+u_1+...+u_{2020}$ و $\begin{cases}v_n+u_n=2\\v_n-u_n=w_n\end{cases}$ بالطرح نجد $2u_n=2-w_n$ و منه $u_n=1-\frac{1}{2}w_n$ إذن

$S=\left(1-\frac{1}{2}w_0\right)+\left(1-\frac{1}{2}w_1\right)+...+\left(1-\frac{1}{2}w_{2020}\right)$ أي $S=(n+1)-\frac{1}{2}[w_0+w_1+...+w_{2020}]$ إذن

$S=(n+1)-\frac{1}{2}\times4\left[\frac{(6\alpha-1)^{2021}-1}{6\alpha-2}\right]$ إذن $S=(n+1)-\left[\frac{(6\alpha-1)^{2021}-1}{3\alpha-1}\right]$

التمرين الرابع (07 نقاط) :

لدينا $f(x)=\ln\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)$.

1. حساب النهاية $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln(6x)=+\infty$

و النهاية الثانية نضرب في المرافق داخل اللوغاريتم النيبيري لانها حالة عدم التعـ$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{9x^2+1}-3x}\right)=-\infty$ لأن

$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{9x^2+1}-3x}\right)=0$; $\lim_{t\xrightarrow{>}0}\ln t=-\infty$.

ب.حساب المشتقة $f'(x)=\frac{\frac{18x}{2\sqrt{9x^2+1}}+3}{\sqrt{9x^2+1}+3x}$ أي $f'(x)=\frac{\frac{9x}{\sqrt{9x^2+1}}+3}{\sqrt{9x^2+1}+3x}$ أي $f'(x)=\frac{\frac{3.\left(3x+\sqrt{9x^2+1}\right)}{\sqrt{9x^2+1}}}{\sqrt{9x^2+1}+3x}$ أي

$f'(x)=\frac{3}{\sqrt{9x^2+1}}$ و هو المطلوب .

ج. f متزايدة على $\mathbb{R}$ لأن المشتقة موجبة

جدول تغيرات

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2. لدينا $g(x)=f(x)-x$.

أ- إثبات النهاية $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{\ln(6x)}{x}-1\right]=-\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln(6x)}{x}\right]=0$

ب.إثبات عبارة المشتقة $g'(x)=f'(x)-1=\frac{3}{\sqrt{9x^2+1}}-1$ أي $g'(x)=\frac{3-\sqrt{9x^2+1}}{\sqrt{9x^2+1}}$ ومنه $g'(x)=\frac{9-\left(9x^2+1\right)}{\left(3+\sqrt{9x^2+1}\right)\sqrt{9x^2+1}}$

أي أن $g'(x)=\frac{8-9x^2}{\left(3+\sqrt{9x^2+1}\right)\sqrt{9x^2+1}}$ و هو المطلوب .

ج. إشارة المشتقة من إشارة البسط $8-9x^2$ و التي تنعدم عند $\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{8}}{3}$ و هي موجبة على المجال $\left[0\,;\frac{2\sqrt{2}}{3}\right]$ و سالبة على المجال $\left[\frac{2\sqrt{2}}{3};+\infty\right[$ و منه g متزايدة على المجال $\left[0\,;\frac{2\sqrt{2}}{3}\right]$ و متناقصة على المجال $\left[\frac{2\sqrt{2}}{3};+\infty\right[$

x	0		$\frac{2\sqrt{2}}{3}$		$+\infty$
$g(x)$	0	$\nearrow$	$0,8$	$\searrow$	$-\infty$

3. أ. إثبات أن $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2,83<\alpha<2,84$

حساب $g(2,83)=0,005$ و $g(2,84)=-0,001$ بما أن الدالة مستمرة و متناقصة على المجا $]2,83;2,84[$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة للمعادلة حل وحيد α

ب-استنتاج إشارة $g(x)$:

x	0		α		$+\infty$
إشارة $g(x)$		$+$	0	$-$	

ج-تحديد وضعية (C_f) بالنسبة للمنصف الأول (Δ) : من إشارة $g(x)$

x	0	α	$+\infty$
الوضعية	(C_f) يقع فوق (Δ)	(C_f) و (Δ) يتقاطعان	(C_f) يقع تحت (Δ)

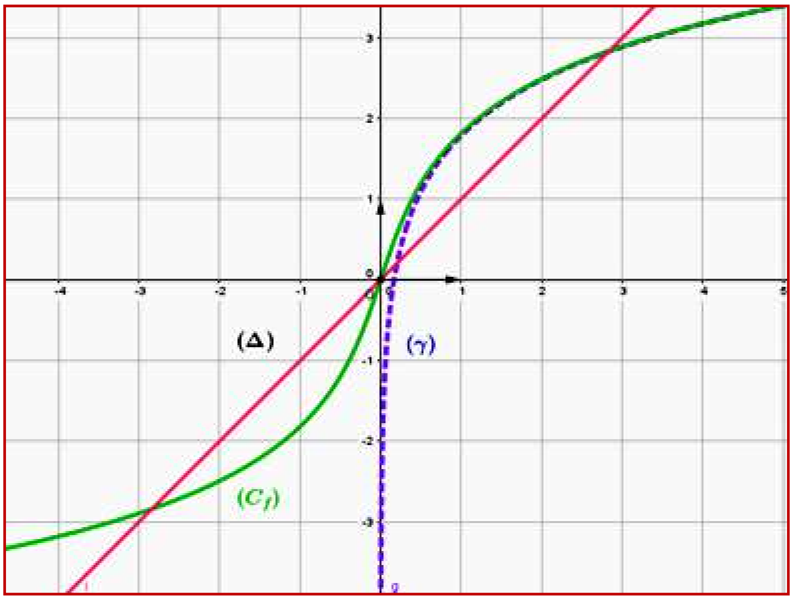
4. نعتبر $k(x)=\ln(6x)$ و (γ) التمثيل البياني للدالة k

أ. إثبات أن (γ) صورة للمنحنى الدالة $x\mapsto \ln(x)$ بتحويل نقطي بسيط $k(x)=\ln(6x)$ يعني أن $k(x)=\ln 6+\ln(x)$ أي أن (γ) صورة المنحنى الدالة $x\mapsto \ln(x)$ بتحويل نقطي عبارته التحليلية $\begin{cases} x'=x \\ y'=y+\ln 6 \end{cases}$ و هو الانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\,(0;\ \ln(6))$.

ب. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-k(x)]$ أي $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-k(x)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)-\ln(6x)\right]$ أي. $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-k(x)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{\sqrt{9x^2+1}+3x}{6x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{6x}{6x}\right)=0$ التفسير البياني أن المنحنى (γ) مقارب للمنحنى (C_f) جهة $+\infty$.

5. أ. إثبات أن f دالة فردية : مجموعة تعريفها متناظرة بالنسبة إلى 0 و $f(-x)=\ln\left(\sqrt{9(-x)^2+1}+3(-x)\right)=\ln\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)$ أي $f(-x)=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{9x^2+1}+3x}\right)=-\ln\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)$ إذن $f(-x)=-f(x)$ و منه الدالة فردية محققة .

ب. إنشاء المنحنى من ما سبق نستنتج أن (C_f) متناظر بالنسبة للمبدأ O



انتهى الموضوع الثاني