

➤ التمرين الأول (04 نقاط) :

نعتبر الدالة f المعرفة و المتزايدة تماما على $[0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{3x+1}{x+3}$

α عدد حقيقي موجب ، (u_n) المتتالية العددية المعرفة على بعدها الأول u_0 حيث :

$$u_{n+1} = f(u_n) ; n \text{ عدد طبيعي } u_0 = \alpha$$

(I) عين قيمة α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة

(II) نضع في كل ما يلي $\alpha = 0$

(1) أ. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 0 \leq u_n < 1$

ب. بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ، ثم برر تقاربها

(2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

أ. بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$. يُطلب تعيين حدها الأول v_0

ب. عيّن عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n = \frac{2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} - 1$

ج. أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(3) نضع : من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $T_n = \frac{1}{u_0 + 1} + \frac{1}{u_1 + 1} + \dots + \frac{1}{u_n + 1}$

احسب S_n بدلالة n ثم بين أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $T_n = \frac{n+3}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

➤ التمرين الثاني (04 نقاط) :

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية ، مع التبرير :

x_i	-2	0	1	3
$p(X = x_i)$	α	$\frac{1}{20}$	α^2	$\frac{1}{5}$

(1) α عدد حقيقي موجب تماما ، قانون احتمال المتغير العشوائي X معرف كما يلي :

الأمّل الرياضياتي $E(X)$ يساوي $-\frac{3}{20}$ ، من أجل :

(أ) $\alpha = \frac{3}{2}$ ، (ب) $\alpha = 1$ ، (ج) $\alpha = \frac{1}{2}$

(1) القيمة المتوسطة للدالة $(x-1)e^{(x-1)^2}$ على المجال $[0; 2]$ هي :

(أ) $m = \frac{1}{4}$ ، (ب) $m = 0$ ، (ج) $m = \frac{1}{2}$

(3) إن حل المعادلة التفاضلية $y' - y = (2x^2 + 1)\frac{e^x}{x} + 2e$ و الذي ينعدم عند القيمة 1 للمتغير الحقيقي x

هي الدالة H المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ :

(أ) $H(x) = (x^2 - \ln x + 1)e^x - 2e$ ، (ب) $H(x) = (-x^2 + \ln x + 2)e^x - 2e$ ، (ج) $H(x) = (x^2 + \ln x + 1)e^x - 2e$

$$(2) \quad (\omega_n) \text{ المتتالية المعرفة على } \mathbb{N}^* \text{ بـ } \omega_n = \int_n^{n+1} \frac{\ln x}{x} dx \text{ . نضع: } S_n = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n$$

$$S_n = \ln(n+1) \quad (\text{ب}) \quad , \quad S_n = \frac{\ln(n+1)}{2} \quad (\text{ج}) \quad , \quad S_n = \left(\frac{\ln(n+1)}{\sqrt{2}} \right)^2$$

➤ التمرين الثالث (04 نقاط) :

يحتوي صندوق 10 كريات لا نفرق بينها باللمس، منها أربع كريات بيضاء مرقمة بـ : 1 ، 2 ، 2 ، 3 و ثلاث كريات حمراء مرقمة بـ : 2 ، 2 ، 3 و ثلاث خضراء مرقمة بـ : 2 ، 3 ، 3
نسحب عشوائيا على التوالي 3 كريات دون إرجاع الكرية المسحوبة قبل السحب الموالي
نعتبر الحدثين التاليين : A " الحصول على كرية من كل لون " ، B " الحصول على ثلاث كريات تحمل نفس الرقم "

(1) بين أن احتمال الحدث A هو $\frac{3}{10}$ واحسب احتمال الحدث B

(2) احسب $p(A \cap B)$ ، ثم استنتج $p_A(B)$ و $p_B(A)$ و $p(A \cup B)$

(3) نسحب الآن عشوائيا من الصندوق 3 كريات في آن واحد ونعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب ، عدد الكريات الحمراء المتبقية في الكيس

عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$

➤ التمرين الرابع (07 نقاط) :

(I) الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بالعلاقة : $g(x) = \frac{1}{x} - 3 - \ln x$. (C_g) تمثيلها البياني

يقطع حامل محور الفواصل في النقطة التي فاصلتها α (لاحظ الشكل المقابل)

(1) بقراءة بيانية ، حدد حسب قيم x إشارة $g(x)$

(2) تحقق أن : $0,452 < \alpha < 0,453$

(II) الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بالعلاقة : $f(x) = (-2 + \ln x) \left(1 - \frac{1}{x} \right)$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و فسر النتيجة بيانيا ، ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

(2) أبين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{1}{x^2} g\left(\frac{1}{x}\right)$

ب. بين أن f متناقصة تماما على $\left]0; \frac{1}{\alpha}\right]$ و متزايدة تماما على $\left[\frac{1}{\alpha}; +\infty\right[$ ، ثم انجز جدول تغيراتها

(3) نعتبر الدالة h المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $h(x) = -2 + \ln x$ وليكن (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق

أ. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - h(x))$ و فسر النتيجة بيانيا

ب. أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_h)

ج. اشرح كيفية رسم (C_h) انطلاقا من $(C_{\ln})$ التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية النبيرة

(4) أ. عين إحداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل

ب. . أرسم في نفس المعلم المنحنيين (C_h) و (C_f) (نأخذ $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -0.66$)

(5) أحسب المساحة S ، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_h) و (C_f) والمستقيمين اللذين معادلتهما :

$$x=1 \text{ و } x=e$$

انتهى

(I) تعيين α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة :

نعلم أنه تكون (u_n) متتالية ثابتة إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} = u_n$

وعليه من أجل $n=0$ نجد: $u_1 = u_0 = \alpha$ أي أن $f(\alpha) = \alpha$ ومنه $\frac{3\alpha+1}{\alpha+3} = \alpha$ إذن $\alpha^2 = 1$ و بما أن $\alpha \geq 0$ فإن $\alpha = 1$

(II) نعتبر $\alpha = 0$

(1) أ. البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 0 \leq u_n < 1$

(1) من أجل $n=0 : 0 \leq u_0 < 1$ ، محققة لأن $u_0 = 0$

(2) من أجل عدد طبيعي n كيفي:

نفرض أن $0 \leq u_n < 1$ ولنبرهن أن: $0 \leq u_{n+1} < 1$

بما أن فرضا $0 \leq u_n < 1$ والدالة f متزايدة تماما

على $[0; +\infty[$ فإن $f(0) \leq f(u_n) < f(1)$ ومنه $\frac{1}{3} \leq f(u_n) < 1$ أي أن $0 \leq f(u_n) < 1$

و بما أن $u_{n+1} = f(u_n)$ فإن $0 \leq u_{n+1} < 1$ من (1) و (2) ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 0 \leq u_n < 1$

ب. لنبين أن (u_n) متزايدة تماما : من أجل كل عدد طبيعي n ، لدينا $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n+1}{u_n+3} - u_n$

أي أن $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2+1}{u_n+3} = \frac{-(u_n+1)(u_n-1)}{u_n+3}$ و بما أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 0 \leq u_n < 1$ فإن

$u_n - 1 < 0$ و $u_n + 1 > 0$ ومنه $-(u_n+1)(u_n-1) > 0$ و بما أن $u_n + 3 > 0$ فإن $u_{n+1} - u_n > 0$ و بالتالي

المتتالية (u_n) متزايدة تماما

• تقارب (u_n) : بما أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى بالعدد 1 فإنها متقاربة

(2) أ. نبين أن (v_n) متتالية هندسية :

(v_n) متتالية هندسية أساسها العدد الحقيقي غير المعدوم q إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي $n : v_{n+1} = v_n \times q$

من أجل كل عدد طبيعي $n : v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}$ و بما أن $u_{n+1} = \frac{3u_n+1}{u_n+3}$ فإن $v_{n+1} = \frac{\frac{3u_n+1}{u_n+3}-1}{\frac{3u_n+1}{u_n+3}+1}$ ومنه

$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} = \frac{\frac{3u_n+1}{u_n+3}-1}{\frac{3u_n+1}{u_n+3}+1} = \frac{2u_n-2}{4u_n+4} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_n-1}{u_n+1} \right)$ و عليه $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$ إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = \frac{u_0-1}{u_0+1} = -1$

ب. تعيين عبارة v_n بدلالة n : بما أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = -1$ فإن

$$v_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{من أجل كل عدد طبيعي } n$$

استنتاج أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n = \frac{2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} - 1$: لدينا $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$ ومنه $v_n = \frac{u_n + 1 - 2}{u_n + 1}$ أي أن

$$u_n = \frac{2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} - 1 \text{ و بالتالي } u_n = \frac{2}{1 - v_n} - 1 \text{ ينتج أن } \frac{1}{u_n + 1} = \frac{1 - v_n}{2} \text{ إذن } \frac{2}{u_n + 1} = 1 - v_n \text{ عليه } v_n = 1 - \frac{2}{u_n + 1}$$

ج. حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$: بما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = 2$ و عليه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

(4) أ. حساب S_n بدلالة n : إن S_n هو مجموع $(n+1)$ حد متتابع من المتتالية الهندسية (v_n) و عليه

$$S_n = - \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right) \text{ أي أن } S_n = -2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right) \text{ ومنه } S_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2$$

• نبين أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $T_n = \frac{n+3}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

لدينا $T_n = \frac{1}{u_0 + 1} + \frac{1}{u_1 + 1} + \dots + \frac{1}{u_n + 1}$ و بما أن $\frac{1}{u_n + 1} = \frac{1 - v_n}{2}$ فإن $T_n = \frac{1 - v_0}{2} + \frac{1 - v_1}{2} + \dots + \frac{1 - v_n}{2}$

ومنه $T_n = \frac{1}{2} [(1 + 1 + \dots + 1) - (v_0 + v_1 + \dots + v_n)]$ و عليه $T_n = \frac{1}{2} [n + 1 - S_n]$

و بالتالي $T_n = \frac{1}{2} \left[n + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 \right]$ ينتج أن $T_n = \frac{n+3}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

✓ **التمرين الثاني :**

(1) الاقتراح الصحيح هو ج) ، لأن : $E(X) = (-2 \times \alpha) + \left(0 \times \frac{1}{20}\right) + (1 \times \alpha^2) + \left(3 \times \frac{1}{5}\right)$

أي أن $E(X) = -2\alpha + \alpha^2 + \frac{3}{5}$ و بالتالي $E(X) = -\frac{3}{20}$ تكافئ $-2\alpha + \alpha^2 + \frac{3}{5} = -\frac{3}{20}$

ومنه $E(X) = -\frac{3}{20}$ تكافئ $4\alpha^2 - 8\alpha + 3 = 0$ إذن $E(X) = -\frac{3}{20}$ تكافئ $\left(\alpha = \frac{1}{2} \text{ أو } \alpha = \frac{3}{2}\right)$

من جهة أخرى نعلم أن $\alpha + \frac{1}{20} + \alpha^2 + \frac{1}{5} = 1$ و عليه :

لما $\alpha = \frac{3}{2}$ نجد : $\alpha + \frac{1}{20} + \alpha^2 + \frac{1}{5} = 4$ و لما $\alpha = \frac{1}{2}$ نجد : $\alpha + \frac{1}{20} + \alpha^2 + \frac{1}{5} = 1$ ينتج أن $\alpha = \frac{1}{2}$

(2) الاقتراح الصحيح هو ب) ، لأن : القيمة المتوسطة للدالة $e^{(x-1)^2}$ على المجال $[0; 2]$ هي :

$$m = \frac{1}{4} \int_0^2 (2x-2) e^{(x-1)^2} dx \text{ أي أن } m = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{1}{2} (2x-2) e^{(x-1)^2} dx \text{ ومنه } m = \frac{1}{2} \int_0^2 (x-1) e^{(x-1)^2} dx$$

و عليه $m = \frac{1}{4} (e^{(1)^2} - e^{(-1)^2}) = 0$ أي أن $m = \frac{1}{4} [e^{(x-1)^2}]_0^2 = \frac{1}{4} (e^{(2-1)^2} - e^{(0-1)^2})$

(3) الاقتراح الصحيح هو ج) ، لأن : الدالة H قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ و لدينا من أجل كل x من $]0; +\infty[$

$$H'(x) = \left(x^2 + \ln x + 1 + 2x + \frac{1}{x}\right)e^x \text{ أي } H'(x) = \left(2x + \frac{1}{x}\right)e^x + (x^2 + \ln x + 1)e^x$$

$$H'(x) - H(x) = \left(x^2 + \ln x + 1 + 2x + \frac{1}{x}\right)e^x - \left((x^2 + \ln x + 1)e^x - 2e\right)$$

$$H(1) = 0 \text{ وكذلك } H'(x) - H(x) = \left(2x + \frac{1}{x}\right)e^x + 2e \text{ ومنه}$$

$$S_n = \int_1^{n+1} \frac{\ln x}{x} dx \text{ ومنه } S_n = \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx + \int_2^3 \frac{\ln x}{x} dx + \dots + \int_n^{n+1} \frac{\ln x}{x} dx : \text{ لأن } (4) \text{ الاقتراح الصحيح هو ج) ،}$$

$$S_n = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} \times \ln x dx = \frac{1}{2} (\ln(n+1))^2 \text{ أي أن } S_n = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} \times \ln x dx = \left[\frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_1^{n+1} \text{ و عليه}$$

$$S_n = \frac{(\ln(n+1))^2}{2} = \left(\frac{\ln(n+1)}{\sqrt{2}} \right)^2 \text{ و بالتالي}$$

✓ التمرين الثالث :

- بما أن السحب يتم على التوالي دون إرجاع فإننا نوظف ترتيبات و عليه عدد الحالات الممكنة هو $A_{10}^3 = 720$

(1) نبين أن احتمال الحدث A هو $\frac{3}{10}$ و حساب احتمال الحدث B :

أ. الحدث A يعني الحصول على كرية من اللون الأبيض و كرية من اللون الأحمر و كرية من اللون الأخضر و عليه

$$p(A) = \frac{216}{720} = \frac{3}{10} \text{ ومنه } (A_4^1 \times A_3^1 \times A_3^1) \times 6 = 216 \text{ هي عدد الحالات المواتية للحدث } A$$

ب. الحدث B يعني الحصول على (3 كريات تحمل الرقم 2) أو (3 كريات تحمل الرقم 3) و عليه

$$p(B) = \frac{84}{720} = \frac{7}{60} \text{ ومنه } A_5^3 + A_4^3 = 84 \text{ هي عدد الحالات المواتية للحدث } B$$

(2) الحدث $A \cap B$ يعني الحصول على 3 الكريات مختلفة اللون مثني ، مثني و لها نفس الرقم و عليه

$$p(A \cap B) = \frac{36}{720} = \frac{1}{20} \text{ ومنه } [(A_2^1 \times A_2^1 \times A_1^1) \times 6] + [(A_1^1 \times A_1^1 \times A_2^1) \times 6] = 36 \text{ هي عدد الحالات المواتية للحدث } A \cap B$$

$$\bullet \text{ استنتاج } p_B(A) : \text{ لدينا } p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \text{ ومنه } p_B(A) = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{7}{60}} \text{ أي أن } p_B(A) = \frac{3}{7}$$

$$\bullet \text{ استنتاج } p_A(B) : \text{ لدينا } p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \text{ ومنه } p_A(B) = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{3}{10}} \text{ أي أن } p_A(B) = \frac{1}{6}$$

$$\bullet \text{ استنتاج } p(A \cup B) : \text{ لدينا } p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$\text{ ومنه } p(A \cup B) = \frac{11}{30} \text{ أي أن } p(A \cup B) = \frac{3}{10} + \frac{7}{60} - \frac{1}{20}$$

(3) بما أن السحب يتم في آن واحد فإننا نوظف توفيقات و عليه عدد الحالات الممكنة هو $C_{10}^3 = 120$

أ. تعريف قانون احتمال المتغير العشوائي X وحساب أمله الرياضياتي $E(X)$:

- إن قيم المتغير العشوائي X هي : 0 ، 1 ، 2 ، 3

$$\bullet \text{ } p(X=3) = \frac{C_7^3}{120} = \frac{7}{24} , p(X=2) = \frac{C_3^2 \times C_7^1}{120} = \frac{7}{40} , p(X=1) = \frac{C_3^1 \times C_7^2}{120} = \frac{21}{40} , p(X=0) = \frac{C_3^3}{120} = \frac{1}{120}$$

$(X = x_i)$	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{120}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{7}{24}$

• حساب الأمل الرياضي $E(X)$:

لدينا $E(X) = \left(0 \times \frac{1}{120}\right) + \left(1 \times \frac{21}{40}\right) + \left(2 \times \frac{7}{40}\right) + \left(3 \times \frac{7}{24}\right)$ ومنه $E(X) = \frac{7}{4}$

✓ التمرين الرابع :

(I) 1) باستعمال وضعية المنحني (C_g) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل نستنتج إشارة $g(x)$ على النحو التالي :

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

1) بما أن $g(0.453) \approx -0.0006$ و $g(0.452) \approx 0.006$ فإن $g(0.452) < g(\alpha) < g(0.453)$ ومنه $0.452 < \alpha < 0.453$

(1) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و تفسيرها بيانيا ، ثم حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ، لأن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2 + \ln x) = -\infty$

ومنه المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x = 0$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ، لأن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2 + \ln x) = +\infty$

(2) أ. الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ولدينا من أجل كل x من $]0; +\infty[$:

$f'(x) = \frac{x-3+\ln x}{x^2}$ ومنه $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2}$ أي أن $f'(x) = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2} (-2 + \ln x)$

و بما أن $g(x) = \frac{1}{x} - 3 - \ln x$ فإن $g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)} - 3 - \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ أي أن $g\left(\frac{1}{x}\right) = x - 3 + \ln x$ وعليه $f'(x) = \frac{1}{x^2} g\left(\frac{1}{x}\right)$

ب. إشارة $f'(x)$ من إشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$ لأن من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $\frac{1}{x^2} > 0$ و اعتمادا على إشارة $g(x)$ نجد أن :

* إذا كان فإن $0 < \frac{1}{x} \leq \alpha$ فإن $g\left(\frac{1}{x}\right) \geq 0$ و إذا كان $\frac{1}{x} > \alpha$ فإن $g\left(\frac{1}{x}\right) < 0$

و عليه : إذا كان فإن $x \geq \frac{1}{\alpha}$ فإن $f'(x) \geq 0$ و إذا كان $0 < x < \frac{1}{\alpha}$ فإن $f'(x) < 0$

ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجال $\left]0; \frac{1}{\alpha}\right[$ و متزايدة تماما على المجال $\left[\frac{1}{\alpha}; +\infty\right[$

جدول التغيرات :

x	0	$\frac{1}{\alpha}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$	$+\infty$

$$(3) \text{ أ. لدينا } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - h(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) \text{ إذن } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - h(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - \ln x) \left(\frac{1}{x} \right)$$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$$

• التفسير الهندسي: بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - h(x)] = 0$ فإن المنحنيان (C_f) و (C_h) متقاربان عند $+\infty$

ب. لدراسة الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_h) نعين إشارة $f(x) - h(x)$ أي نعين إشارة $\frac{2 - \ln x}{x}$

و بما أن $x > 0$ فإن إشارة $f(x) - h(x)$ من إشارة $2 - \ln x$ لدينا $2 - \ln x \geq 0$ يكافئ $\ln x \leq 2$

أي أن $2 - \ln x \geq 0$ يكافئ $x \leq e^2$ و عليه نتحصل على الجدول التالي الذي يلخص وضعية (C_f) بالنسبة إلى (C_h) :

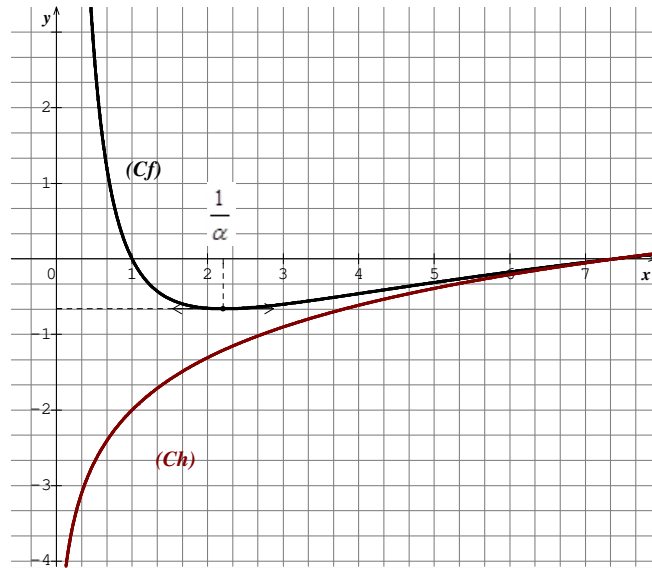
x	0	e^2	$+\infty$
$f(x) - h(x)$		+	-
وضعية (C_f) بالنسبة إلى (C_h)	(C_f) يقع أعلى (C_h)	(C_f) و (C_h) يتقاطعان	(C_f) يقع أسفل (C_h)
	في النقطة $A(e^2; 0)$		

ج. بما أن من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $\ln x - 2$ فإننا نرسم صورة (C_h) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}(0; -2)$

(4) أ. $M \in (C_f) \cap (Ox)$ يكافئ $x \in]0; +\infty[$ و $f(x) = 0$

لدينا $f(x) = 0$ تكافئ $\left(1 - \frac{1}{x}\right)(-2 + \ln x) = 0$ ومنه $f(x) = 0$ تكافئ $x = 1$ أو $x = e^2$

و عليه (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطتين $A(1; 0)$ و $B(e^2; 0)$



ب. رسم المنحنيين (C_h) و (C_f) :

(5) حساب المساحة S : بما أن $x \in [1; e]$ فإن (C_f) يقع أعلى (C_h) و عليه $S = \int_1^e [f(x) - h(x)] dx$

$$\text{ومنّه } S = \int_1^e \left(\frac{2}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) dx \text{ و عليه } S = 2 \int_1^e \frac{1}{x} dx - \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx \text{ إذن } S = 2 [\ln x]_1^e - \left[\frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_1^e$$

انتهى

$$S = \frac{3}{2} \text{ ينتج أن}$$