امتحان بكالوريا التعليم الثانوي **دورة: 2023**

الشعبة: رياضيات

اختبار في مادة: الرياضيات **المدة: 04 سا و30 د**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

يحتوي الموضوع على (03) صفحات (من الصفحة 1 من 5 إلى الصفحة 3 من 5)

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 10 كريات متماثلة ولا نفرّق بينها باللّمس، منها كريتان حمراوان مرقمتان بـ: 2 ، $3-$
وخمس كريات بيضاء مرقمة بـ: 0 ، 1 ، 1 ، 2 ، $2-$ وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: 0 ، 1 ، 2
نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من الكيس ونعتبر الحوادث A ، B ، C الآتية:

A " الحصول على 3 كريات من نفس اللون " ، B " الحصول على الألوان الثلاثة "

C " الحصول على 3 كريات مجموع أرقامها معدوم "

1) أ) احسب $P(A)$ و $P(B)$ ثمّ بيّن أنّ: $P(C)=\dfrac{3}{20}$

ب) احسب $P(A\cap C)$ ثم استنتج $P_C(A)$

2) نعتبر المتغيّر العشوائي X الذي يرفق بكلّ عملية سحب لثلاث كريات عدد الألوان المتحصّل عليها.
عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X ثمّ احسب أمله الرياضياتي $E(X)$

3) نسحب الآن عشوائيا من الكيس ثلاث كريات على التوالي وبإرجاع.
احسب احتمال الحصول على ثلاث كريات جُداء أرقامها معدوم.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) f الدّالة المعرّفة على $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x+4}{x+1}$

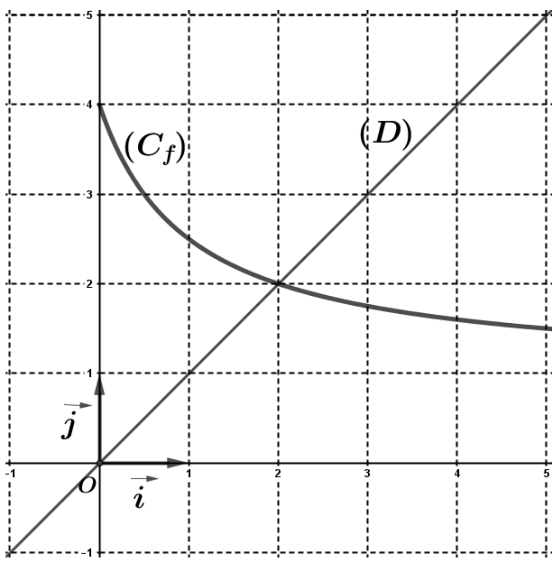
(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، (D) المستقيم ذو المعادلة $y=x$

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ:

$u_0=0$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$

أ) أعد رسم الشكل على ورقة الإجابة ثمّ مثّل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3

(دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل)



ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية $\left(u_n\right)$ وتقاربها.

2) $\left(v_n\right)$ المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\dfrac{u_n-2}{u_n+2}$

أ) بيّن أنّ المتتالية $\left(v_n\right)$ هندسية أساسها $-\dfrac{1}{3}$ يُطلب تعيين حدّها الأول v_0

ب) عيّن عبارة الحدّ العام v_n بدلالة n ثمّ استنتج أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n=-2+\dfrac{4}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$

جـ) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3) نضع: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$ و $T_n=\dfrac{1}{u_0+2}+\dfrac{1}{u_1+2}+\cdots+\dfrac{1}{u_n+2}$

احسب S_n بدلالة n ثمّ بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $T_n=\dfrac{1}{16}\left[4n+7+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) نعتبر المعادلة (E) ... $16x+361y=818$ ذات المجهولين الصحيحين x و y

أ) تحقّق أنّ الثنائية $(2\,;6)$ حلّ للمعادلة (E) ثمّ استنتج مجموعة حلولها.

ب) عيّن كلّ الثنائيات $(x\,;y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقّق: $\left|x+23y\right|\leq 4$

2) P عدد طبيعي يُكتب $\overline{5\alpha\beta 0}$ في نظام التعداد الذي أساسه 7 ويُكتب $\overline{\beta\alpha 87}$ في نظام التعداد الذي أساسه 9

حيث α و β عددان طبيعيان.

عيّن α و β ثمّ اكتب P في النظام العشري.

3) أ) حلّل العدد 2023 إلى جُداء عوامل أوّلية ثمّ عيّن الأعداد الطبيعية التي مربع كلّ منها يقسم 2023

ب) نضع: $d=PGCD(a\,;b)$ و $m=PPCM(a\,;b)$

عيّن كلّ الثنائيات $(a\,;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقّق: $m^2+3d^2=2023$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) g الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+(6x-3)e^{-2x}$

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) أ) أثبت أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0{,}2<\alpha<0{,}3$

ب) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$

II) f الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f\left(x\right)=x+1-3x\,e^{2x}$

$\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (وحدة الطول $2cm$)

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

ب) بيّن أنّ المستقيم $\left(\Delta\right)$ ذا المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل لـ $\left(C_f\right)$ عند $-\infty$

جـ) ادرس وضعية $\left(C_f\right)$ بالنسبة إلى $\left(\Delta\right)$

2) أ) بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد حقيقي x، $f'\left(x\right)=g\left(-x\right)$

ب) استنتج أنّ f متزايدة تماما على $\left]-\infty;-\alpha\right]$ ومتناقصة تماما على $\left[-\alpha;+\infty\right[$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) أ) أثبت أنّ $\left(C_f\right)$ يقبل مماسا $\left(T\right)$ يوازي $\left(\Delta\right)$ يُطلب تعيين معادلة له.

ب) ارسم $\left(\Delta\right)$،$\left(T\right)$ و $\left(C_f\right)$ على $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ (نأخذ : $f\left(0,25\right)\simeq0$ ، $f\left(-1,3\right)\simeq0$ و $f\left(-\alpha\right)\simeq1,2$)

جـ) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $f\left(x\right)=x+m$ حلّين بالضبط.

4) أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب العدد الحقيقي $\int_{-\alpha}^{0}xe^{2x}dx$

ب) استنتج بالسنتيمتر المربّع المساحة $\mathcal{A}$ للحيّز المستوي المحدّد بـ $\left(C_f\right)$ والمستقيمات التي معادلاتها

$y=x+1$ ، $x=-\alpha$ و $x=0$

جـ) تحقّق أنّ $\mathcal{A}=2\left(\frac{4\alpha-1}{2\alpha-1}\right)cm^2$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

يحتوي الموضوع على صفحتين (02) (من الصفحة 4 من 5 إلى الصفحة 5 من 5)

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي صندوق U على كريتين حمراوين وكريتين خضراوين، ويحتوي صندوق V على كريتين حمراوين وثلاث كريات خضراء (كل الكريات متماثلة لا نفرّق بينها عند اللمس)

نسحب عشوائيا كريتين في آن واحد من أحد الصندوقين بالكيفية الآتية:

نقوم بسحب بطاقة واحدة عشوائيا من كيس به 10 بطاقات متماثلة ومرقمة من 1 إلى 10

إذا تحصلنا على عدد أوّلي نسحب الكريتين من U وفي باقي الحالات نسحب الكريتين من V

1) نعتبر الحوادث A ، B و C الآتية:

A " سحب كريتين حمراوين " ، B " سحب كريتين خضراوين " و C " سحب كريتين من لونين مختلفين "

أ) أنجز شجرة الاحتمالات التي تُنمذج هذه التجربة.

ب) بيّن أنّ $P(A)=\frac{19}{150}$ و $P(B)=\frac{37}{150}$ ثمّ استنتج $P(C)$

2) X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكلّ عملية سحب لكريتين عدد الكريات الحمراء المتحصل عليها.

أ) عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X ثمّ احسب أمله الرياضياتي $E(X)$

ب) احسب احتمال الحدث: " $\ln X \leq 1$ "

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $\left(\overline{z}-1+i\sqrt{3}\right)\left(z^2-2\sqrt{2}z+4\right)=0$

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها z_A ، z_B و z_C على الترتيب حيث: $z_A=\sqrt{2}(1+i)$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=1+i\sqrt{3}$

أ) اكتب z_A ، z_B و z_C على الشكل المثلثي.

ب) استنتج أنّ النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

3) نضع: $K=\frac{z_C}{2z_A}$

أ) احسب طويلة العدد المركب K وعمدة له ثمّ اكتبه على الشكل الجبري.

ب) استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

4) n عدد طبيعي، نضع: $L_n=z_A^{\,n}+z_B^{\,n}$

بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n، العدد المركب L_n حقيقي.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) أ) عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 11 ، ثم استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد 1945^{2023} على 11

ب) عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقّق الجملة : $\begin{cases} n \equiv 2023[5] \\ 3n+9^n \equiv 1444[11] \end{cases}$

2) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0=\frac{3}{2}$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1}=9u_n-16n+6$

(v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=4u_n-8n+2$

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها 9 يُطلب تعيين حدّها الأول v_0

ب) عيّن عبارة v_n بدلالة n ثمّ استنتج أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n=2\times 9^n+2n-\frac{1}{2}$

3) نضع: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$ و $T_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$

احسب S_n بدلالة n ثمّ استنتج أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $T_n=\frac{1}{4}\left(9^{n+1}+4n^2+2n-3\right)$

4) بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n، $4T_{5n}-n^2+n+5\equiv 0[11]$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) g الدّالة المعرّفة على المجال $]0\,;+\infty[$ بـ: $g(x)=(x-3)\ln x+x$

1) أ) احسب من أجل كلّ x من المجال $]0\,;+\infty[$: $g'(x)$ و $g''(x)$

ب) بيّن أنّ الدّالة g' متزايدة تماما على المجال $]0\,;+\infty[$

2) أ) بيّن أنّ المعادلة $g'(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1{,}3<\alpha<1{,}4$

ب) علما أنّ $g(\alpha)\simeq 0{,}85$ ، استنتج أنّه: من أجل كلّ x من $]0\,;+\infty[$ ، $g(x)>0$

II) f الدّالة المعرّفة على المجال $]0\,;+\infty[$ بـ: $f(x)=\left(x-\frac{3}{2}\ln x\right)\ln x$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول $2\,cm$)

1) أ) احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

ب) بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2) بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد حقيقي x من $]0\,;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$ ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدّالة f

3) بيّن أنّ (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') معامل توجيه كل منهما يساوي 1 ، يُطلب تعيين معادلة لكل منهما.

4) أ) ارسم (T) ، (T') و (C_f) (نأخذ : $f(6)\simeq 5{,}9$)

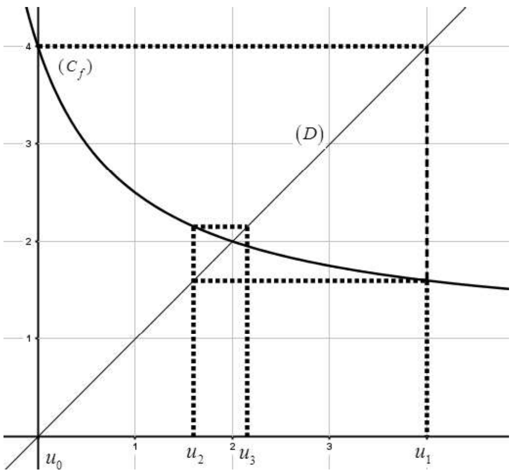
ب) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ ثلاثة حلول بالضبط.

5) F الدّالة المعرّفة على المجال $]0\,;+\infty[$ بـ: $F(x)=\left(\frac{1}{2}x^2+3x\right)\ln x-\frac{3}{2}x(\ln x)^2-\frac{1}{4}x^2-3x$

أ) تحقّق أنّ F أصلية للدّالة f على المجال $]0\,;+\infty[$

ب) استنتج بالسنتيمتر المربّع مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $y=0$ ، $x=1$ و $x=e$

انتهى الموضوع الثاني

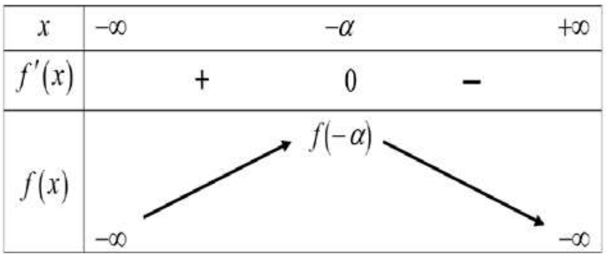
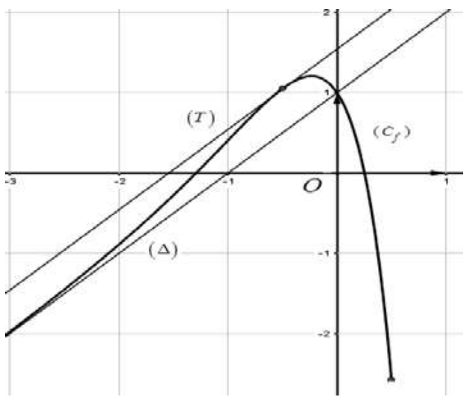
	عناصر الإجابة (الموضوع الأول)	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
	التمرين الأول (04 نقاط)		
1	أ) $P(A)=\dfrac{C_5^3+C_3^3}{C_{10}^3}=\dfrac{11}{120}$ ، $P(B)=\dfrac{C_5^1\times C_3^1\times C_2^1}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{4}$ مجموع أرقام الكريات يكون معدوما: $\{0;2;-2\}$ ، $\{1;1;-2\}$ ، $\{-3;1;2\}$ $P(C)=\dfrac{C_2^1\times C_3^1\times C_1^1+C_3^2\times C_1^1+C_3^1\times C_3^1\times C_1^1}{C_{10}^3}=\dfrac{3}{20}$	2×0.5 0.5	2.25
	ب) الكريات من نفس اللون ومجموع أرقامها معدوم: $\{1;1;-2\}$، $\{0;2;-2\}$ $P(A\cap C)=\dfrac{C_2^2\times C_1^1+C_1^1\times C_1^1\times C_1^1}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{60}$ ، $P_C(A)=\dfrac{P(A\cap C)}{P(C)}=\dfrac{1}{9}$	0.25+0.5	
2	مجموعة قيم المتغير العشوائي هي $\{1;2;3\}$ $P(X=1)=\dfrac{11}{120}$ ، $P(X=3)=\dfrac{30}{120}$ $P(X=2)=1-P(X=1)-P(X=3)=\dfrac{79}{120}$ $E(X)=1\times\dfrac{11}{120}+2\times\dfrac{79}{120}+3\times\dfrac{30}{120}=\dfrac{259}{120}$	0.25 0.25 0.25 0.25 0.25	1.25
3	حساب احتمال الحصول على ثلاث كريات جُداء أرقامها معدوم. $P=1-P'=1-\dfrac{8^3}{10^3}=\dfrac{61}{125}$ حيث P' احتمال الحدث المعاكس	0.5	0.5
	التمرين الثاني (04 نقاط)		
1	أ) تمثيل الحدود 	0.5	1
	ب) التخمين: المتتالية (u_n) ليست رتيبة ومتقاربة.	2×0.25	

2	**0.25+0.5**	أ) $v_{n+1}=-\frac{1}{3}v_n$ و $v_0=-1$	2
	0.5 **2 × 0.25**	ب) من أجل كلّ عدد طبيعي n، $v_n=-\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n=\frac{4}{1-v_n}-2=-2+\frac{4}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$	
	0.25	جـ) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2$ لأنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=0$	
1	**0.75** **0.25**	$S_n=v_0\,\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=-\frac{3}{4}\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$ من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $T_n=\frac{1}{4}\left[n+1-S_n\right]=\frac{1}{16}\left[4n+7+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]$	3
		التمرين الثالث (05 نقاط)	
1.75	**0.25** **0.25** **0.25** **0.25**	أ) التحقّق أنّ الثنائية $(6\,;2)$ حلّ للمعادلة (E) : $16\times6+361\times2=818$ من الجملة $\begin{cases}16x+361y=818\\16\times6+361\times2=818\end{cases}$ نجد $16(x-6)=361(2-y)$ تبيان أنّ $PGCD(16\,;361)=1$ مجموعة الحلول هي $\{(361k+6\,;-16k+2)\,/\,k\in\mathbb{Z}\}$	1
	0.25 **2 × 0.25**	ب) الثنائيات $(x\,;y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقّق $\lvert x+23y\rvert\leq4$ $\begin{cases}x=361k+6\\y=-16k+2\end{cases}$ و $\lvert x+23y\rvert\leq4$ نجد $6,85\leq k\leq8$ الثنائيتان هما $(2533\,;-110)$ ، $(2894\,;-126)$	
2	 **0.25** **0.25** **0.25** **0.25** **0.5** **0.5**	تعيين α و β : $\overline{5\alpha\beta0}=1715+7\beta+49\alpha$ $\overline{\beta\alpha87}=79+81\alpha+729\beta$ $0\leq\alpha\leq6$ و $0<\beta\leq6$ $\overline{5\alpha\beta0}=\overline{\beta\alpha87}$ تكافئ $16\alpha+361\beta=818$ $\alpha=361k+6$ و $\beta=-16k+2$ من أجل $k=0$ نجد $\alpha=6$ و $\beta=2$ فيكون $P=2023$	2

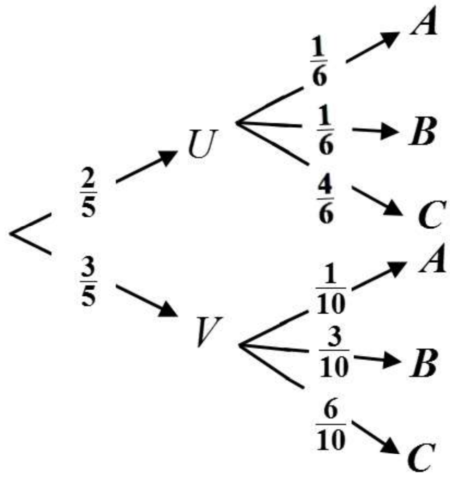
<table dir="rtl">
<tr><td rowspan="2">3</td><td>أ) $2023 = 7\times 17^2$
الأعداد الطبيعية التي مربع كلّ منها يقسم 2023 هي 1 و 17</td><td>0.5
0.25</td><td>0.75</td></tr>
<tr><td>ب) لدينا $\begin{cases} m \times d = a\times b \\ a = d\times a',\ b = d\times b' \\ PGCD(a';b') = 1 \end{cases}$
تُكتب عندئذ $m^2+3d^2=2023$ على الشكل $\left(a'\times b'\right)^2 = \dfrac{2023}{d^2}-3$
من أجل $d=1$ نجد $a'\times b'=\sqrt{2020}$ (غير ممكن)
من أجل $d=17$ نجد $a'\times b'=2$ ومنه الثنائيتان هما $(17;34)$ ، $(34;17)$</td><td>0.25

0.25</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td colspan="4">التمرين الرابع (07 نقاط)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">I) 1</td><td>أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$</td><td>2 × 0.25</td><td rowspan="2">1.25</td></tr>
<tr><td>ب) من أجل كلّ عدد حقيقي x ، $g'(x)=-12(x-1)e^{-2x}$
g متزايدة تماما على $]-\infty;1]$ ومتناقصة تماما على $[1;+\infty[$
جدول التغيرات
$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & 1 & & +\infty \\ \hline g'(x) & & + & 0 & - & \\ \hline g(x) & & & g(1) & & \\ & & \nearrow & & \searrow & \\ & -\infty & & & & 1 \end{array}$</td><td>0.25
0.25

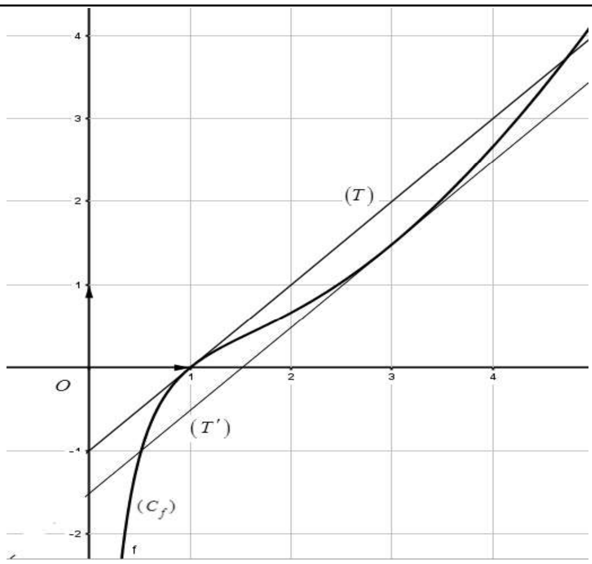
0.25</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>أ) المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0{,}2<\alpha<0{,}3$ لأنّ الدّالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $[0{,}2\ ;\ 0{,}3]$ و $g(0{,}2)\times g(0{,}3)<0$
$(g(0{,}2)\simeq -0{,}21$ ، $g(0{,}3)\simeq 0{,}34)$</td><td>0.25</td><td rowspan="2">0.5</td></tr>
<tr><td>ب) إشارة $g(x)$ حسب قيم x :
$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & \alpha & & +\infty \\ \hline g(x) & & - & 0 & + & \end{array}$</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td rowspan="3">II) 1</td><td>أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1+\dfrac{1}{x}-3e^{2x}\right)=-\infty$</td><td>0.5+0.25</td><td rowspan="3">1.5</td></tr>
<tr><td>ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}(-3xe^{2x})=0$</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>جـ) على $]-\infty;0[$ يكون (C_f) أعلى (Δ) وعلى $]0;+\infty[$ يكون (C_f) أسفل (Δ)
(C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الإحداثيات $(0;1)$</td><td>2 × 0.25</td></tr>
</table>

2	أ) من أجل كلّ عدد حقيقي x ، $f'(x)=g(-x)$	0.25	1
	ب) إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(-x)$ إذن f متزايدة تماما على $]-\infty;-\alpha]$ ومتناقصة تماما على $[-\alpha;+\infty[$ جدول التغيّرات 	0.25 0.25 0.25	
3	أ) $f'(x)=1$ يكافئ $g(-x)=1$ ومنه $x=-\frac{1}{2}$ معادلة المماس (T) : $y=x+1+\frac{3}{2}e^{-1}$	0.25 0.25	1.75
	ب) رسم (Δ) و (T)  رسم (C_f)	2 × 0.25 0.5	
	جـ) مجموعة قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلين بالضبط هي $\left]1\,;\,1+\frac{3}{2}e^{-1}\right[$	0.25	
4	أ) $\int_{-\alpha}^{0}xe^{2x}dx=\left[\frac{1}{4}(2x-1)e^{2x}\right]_{-\alpha}^{0}=\frac{1}{4}(2\alpha+1)e^{-2\alpha}-\frac{1}{4}$	0.25	1
	ب) $\mathcal{A}=\int_{-\alpha}^{0}\left(f(x)-(x+1)\right)dx=-3\int_{-\alpha}^{0}xe^{2x}\,dx=\left[-3(2\alpha+1)e^{-2\alpha}+3\right]cm^2$	0.25 0.25	
	جـ) $\mathcal{A}=2\left(\frac{4\alpha-1}{2\alpha-1}\right)cm^2$	0.25	

ملاحظة: تُقبل وتُراعى جميع الطرائق الصحيحة الأخرى مع التقيّد التام بسلم التنقيط

	عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)	مجزأة	مجموع
	التمرين الأول (04 نقاط)		
1	أ) شجرة الاحتمالات 	0.75	2.25
	ب) $P(A)=P(U)\times P_U(A)+P(V)\times P_V(A)=\frac{2}{5}\times\frac{C_2^2}{C_4^2}+\frac{3}{5}\times\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{19}{150}$ $P(B)=P(U)\times P_U(B)+P(V)\times P_V(B)=P(B)=\frac{2}{5}\times\frac{C_2^2}{C_4^2}+\frac{3}{5}\times\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{37}{150}$ $P(C)=1-P(\overline{C})=1-\frac{19}{150}-\frac{37}{150}=\frac{47}{75}$	2 × 0.25 2 × 0.25 2 × 0.25	
2	أ) مجموعة قيم المتغير العشوائي هي $\{0;1;2\}$ $P(X=0)=\frac{37}{150}$ ، $P(X=1)=\frac{94}{150}$ ، $P(X=2)=\frac{19}{150}$ $E(X)=\frac{22}{25}$	0.25 3 × 0.25 0.5	1.75
	ب) $\ln X\leq 1$ تكافئ $0<X\leq e$ ومنه $P(\ln X\leq 1)=P(X=1)+P(X=2)=\frac{113}{150}$	0.25	
	التمرين الثاني (04 نقاط)		
1	$z_1=1+i\sqrt{3}$ ، $\Delta=-8$ ، $z_2=\sqrt{2}(1+i)$ ، $z_3=\sqrt{2}(1-i)$	4 × 0.25	1
2	أ) $z_A=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ، $z_B=2\left(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)$ $z_C=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$	3 × 0.25	1.5
	ب) النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة لأنّ : $OA=OB=OC=2$ مركز الدائرة هو المبدأ ونصف قطرها 2	0.25 2 × 0.25	

<table dir="rtl">
<tr><td rowspan="2">3</td><td>أ) $\left|K\right|=\left|\dfrac{z_C}{2z_A}\right|=\dfrac{1}{2}$ ، $\arg(K)=\dfrac{\pi}{12}$ ، $K=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}+i\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}$</td><td>3 × 0.25</td><td rowspan="2">1.25</td></tr>
<tr><td>ب) $\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ، $\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$</td><td>2 × 0.25</td></tr>
<tr><td>4</td><td>من أجل كلّ عدد طبيعي n، $\overline{L_n}=\overline{z_A^{\,n}+z_B^{\,n}}=z_B^{\,n}+z_A^{\,n}=L_n$</td><td>0.25</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td colspan="4">التمرين الثالث (05 نقاط)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>أ) بواقي القسمة الإقليدية لـ 9^n على 11:
$9^0\equiv1[11]$ ، $9^1\equiv9[11]$ ، $9^2\equiv4[11]$ ، $9^3\equiv3[11]$ ، $9^4\equiv5[11]$
التعميم : $k\in\mathbb{N}$
$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline n & 5k & 5k+1 & 5k+2 & 5k+3 & 5k+4 & \\ \hline 9^n\equiv & 1 & 9 & 4 & 3 & 5 & [11] \\ \hline\end{array}$
باقي القسمة الإقليدية للعدد 1945^{2023} على 11 هو 3 (لاحظ أنّ $2023=5k+3$)</td><td>0.5
0.5
0.25</td><td rowspan="2">1.75</td></tr>
<tr><td>ب) مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقّق الجملة : $\begin{cases} n\equiv2023[5] \\ 3n+9^n\equiv1444[11]\end{cases}$
$n\equiv2023[5]$ معناه $n=5k+3$ حيث k عدد طبيعي
ومنه: $n=55\alpha+33$ مع α عدد طبيعي</td><td>0.25
0.25</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>أ) من أجل كلّ عدد طبيعي n، $v_{n+1}=9v_n$ و $v_0=8$</td><td>0.25+0.5</td><td rowspan="2">1.75</td></tr>
<tr><td>ب) من أجل كلّ عدد طبيعي n، $v_n=8\times9^n$
من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n=\dfrac{v_n+8n-2}{4}=2\times9^n+2n-\dfrac{1}{2}$</td><td>0.5
0.5</td></tr>
<tr><td>3</td><td>من أجل كلّ عدد طبيعي n، $S_n=v_0\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}=9^{n+1}-1$
$T_n=\dfrac{1}{4}S_n+\dfrac{1}{2}(n+1)(2n-1)=\dfrac{1}{4}\left(9^{n+1}+4n^2+2n-3\right)$</td><td>0.5
0.5</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4</td><td>من أجل كلّ عدد طبيعي n، $4T_{5n}=9^{5n+1}+100n^2+10n-3$
إذن $4T_{5n}-n^2+n+5=9^{5n+1}+99n^2+11n+2$
فيكون $4T_{5n}-n^2+n+5\equiv0[11]$</td><td>0.25
0.25</td><td>0.5</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="4">**التمرين الرابع (07 نقاط)**</td></tr>
<tr><td rowspan="2">I) 1</td><td>أ) من أجل كلّ x من $]0\,;+\infty[$ ، $g'(x)=\ln x+\dfrac{2x-3}{x}$ و $g''(x)=\dfrac{x+3}{x^2}$</td><td>2×0.5</td><td rowspan="2">1.25</td></tr>
<tr><td>ب) الدّالة g' متزايدة تماما على المجال $]0\,;+\infty[$ لأن $g''(x)>0$</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>أ) الدّالة g' مستمرة ومتزايدة تماما على $[1{,}3\,;\,1{,}4]$ و $g'(1{,}3)\times g'(1{,}4)<0$
$(g'(1{,}3)=-0{,}05$ ، $g'(1{,}3)=0{,}19)$ إذن $g'(x)=0$ تقبل حلا وحيدا</td><td>0.5</td><td rowspan="2">0.75</td></tr>
<tr><td>ب) من أجل كلّ x من $]0\,;+\infty[$ ، $g(x)\geq g(\alpha)$ ومنه $g(x)>0$</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td rowspan="2">II) 1</td><td>أ) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=-\infty$ ، المنحني يقبل المستقيم ذا المعادلة $x=0$ مقارب له</td><td>2×0.25</td><td rowspan="2">1</td></tr>
<tr><td>ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{3\ln x}{2x}\right)x\ln x=+\infty$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>2</td><td>من أجل كلّ x من $]0\,;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$
جدول التغيرات
<table><tr><td>x</td><td>0 $+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>$+$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$-\infty$ ↗ $+\infty$</td></tr></table></td><td>0.5
0.5</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$f'(x)=1$ يكافئ $g(x)=x$ ومنه $x=1$ أو $x=3$
$(T):\ y=x-1$ و $(T'):\ y=x-3+(3-\frac{3}{2}\ln 3)\ln 3$</td><td>0.25
2×0.25</td><td>0.75</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td>أ) رسم (T) و (T')
رسم (C_f)
</td><td>2×0.25
0.5</td><td rowspan="2">1.25</td></tr>
<tr><td>ب) مجموعة قيم m هي $\left]-3+(3-\frac{3}{2}\ln 3)\ln 3\,;\,-1\right[$</td><td>0.25</td></tr>
</table>

5	أ) F تقبل الاشتقاق على $]0\,;+\infty[$ ومن أجل كلّ عدد حقيقي x من $]0\,;+\infty[$ ، $F'(x)=f(x)$	**0.5**	**1**
	ب) $\int_1^e f(x)\,dx=\left[F(e)-F(1)\right]=(e^2-6e+13)\ cm^2$	**2×0.25**	

ملاحظة: تُقبل وتُراعى جميع الطرائق الصحيحة الأخرى مع التقيّد التام بسلم التنقيط

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للإمتحانات والمسابقات

امتحان: شهادة البكالوريا — اللقب: قويسم

دورة: جوان 2023 — الاسم: ابراهيم الخليل

الشعبة: رياضيات — تاريخ ومكان الميلاد: 07 ماي 1996 بالجلفة

اختبار مادة: الرياضيات

رقم التسجيل: 17202207051996

يوم: 12 جوان 2023

إمضاء المترشح(ة):

اسم ولقب وتوقيع الحراس:

1............ 2............ 3............

لا بد من ملأ أعلى هذه الوثيقة - ويمنع التوقيع في آخر ورقة الاختبار

إختبار مادة: الرياضيات

الموضوع الأول

← العودة الى الموضوع ← العودة الى الفهرس

التمرين الأول:

❶

أ/ حسب $P(A)$ و $P(B)$:

$$\bullet\ P(A) = \frac{C_5^3 + C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{11}{120}$$

$$\bullet\ P(B) = \frac{C_2^1 C_5^1 C_3^1}{C_{10}^3} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$$

• تبيين أنّ: $P(C) = \frac{3}{20}$:

$$\bullet\ P(C) = \frac{C_3^1 C_1^1 C_2^1 + C_1^1 C_3^1 C_3^1 + C_3^2 C_1^1}{C_{10}^3} = \frac{18}{120} = \frac{3}{20}$$

❷ حساب $P(A \cap C)$:

$$P(A \cap C) = \frac{C_1^1 C_1^1 C_1^1 + C_2^2 C_1^1}{C_{10}^3} = \frac{2}{120} = \frac{1}{60}$$

• استنتاج $P_C(A)$:

$$P_C(A) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{2}{120}}{\frac{18}{120}} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$

❸ تعيين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X:

لدينا:

$$X(\Omega) = \{1; 2; 3\}$$

حيث:

- $P(X=1)=P(A)=\dfrac{11}{120}$
- $P(X=2)=\dfrac{C_2^2C_8^1+C_5^2C_5^1+C_3^2C_7^1}{C_{10}^3}=\dfrac{79}{120}$
- $P(X=3)=P(B)=\dfrac{30}{120}$

وعليه:

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{30}{120}$	$\frac{79}{120}$	$\frac{11}{120}$

- **حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$:**

$$E(X)=\sum_{i=1}^{3}x_iP(x_i)=\frac{256}{120}$$

4 حساب احتمال الحصول على ثلاث كريات جُداء أرقامها معدوم:

نضع: $P(D)$ **هو احتمال الحصول على ثلاث كريات جُداء أرقامها معدوم**

$$P(D)=\frac{(3\times 2^1\times 8^2)+(3\times 2^2\times 8^1)+2^3}{10^3}=\frac{488}{1000}=\frac{61}{125}$$

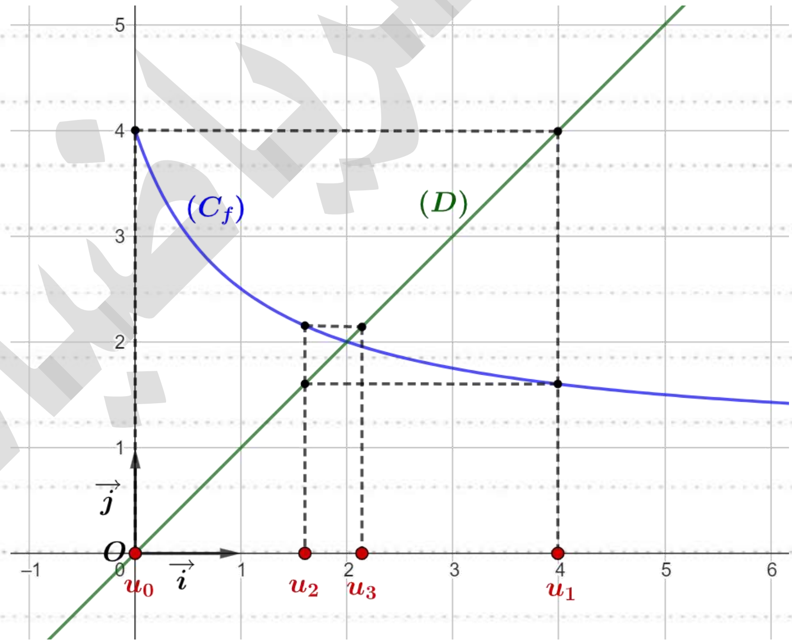
أو:

$$P(D)=1-P(\overline{D})=1-\frac{8^3}{10^3}=\frac{512}{1000}=\frac{61}{125}$$

التمرين الثاني:

1

أ/ تمثيل على حامل محور الفواصل الحدود u_0، u_1 ، u_2 وu_3 :



2 وضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها:

نلاحظ من التمثيل أنّ $u_0<u_1$ **و** $u_1>u_2$

إذن (u_n) **ليست رتيبة**

ونلاحظ أن الحدود تتراكم حول نقطة تقاطع (C_f) **مع** (D) **(في النقطة ذات الفاصلة** $x=2$**)**

إذن (u_n) **تتقارب نحو الـ2**

3

أ/ تبيين أنّ (v_n) هندسية أساسها $-\frac{1}{3}$:

لدينا:

$$v_n=\frac{u_n-2}{u_n+2}=\frac{u_n+2-4}{u_n+2}=1-\frac{4}{u_n+2}$$

ولدينا:

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}+2}=\frac{\frac{u_n+4}{u_n+1}-2}{\frac{u_n+4}{u_n+1}+2}=\frac{-u_n+2}{3u_n+6}=\frac{-(u_n-2)}{3(u_n+2)}=-\frac{1}{3}v_n$$

إذن: (v_n) هندسية أساسها $-\frac{1}{3}$ وحدها الأول v_0 حيث:

$$v_0=\frac{u_0-2}{u_0+2}=-1$$

ب/ تعيين عبارة v_n بدلالة n:

$$v_n=v_0q^n=-\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

- استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=-2+\frac{4}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$:

لدينا: $v_n=1-\frac{4}{u_n+2}$

ومنه: $1-v_n=\frac{4}{u_n+2}$

ومنه: $u_n=\frac{4}{1-v_n}-2$

ومنه: $u_n=\frac{4}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n}-2$

ج/ حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n}-2\right)=\frac{4}{1}-2=2$$

لأنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=0$

4

$$\begin{aligned}S_n&=v_0+v_1+\cdots+v_n\\&=-\left(\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}\right)\\&=\frac{3}{4}\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}-1\right)\end{aligned}$$

- تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $T_n=\frac{1}{16}\left[4n+7+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]$:

لدينا: $v_n=1-\frac{4}{u_n+2}$

ومنه: $\frac{1}{u_n+2}=\frac{1}{4}(1-v_n)$

وعليه:

$$T_n=\frac{1}{u_0+2}+\frac{1}{u_1+2}+\cdots+\frac{1}{u_n+2}$$

$$=\frac{1}{4}(1-v_0)+\frac{1}{4}(1-v_1)+\cdots+\frac{1}{4}(1-v_n)$$
$$=\frac{1}{4}(n+1-S_n)$$
$$=\frac{1}{4}\left(n+1-\frac{3}{4}\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}-1\right)\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(n+1-\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}+\frac{3}{4}\right)$$
$$=\frac{1}{16}\left(4n+7+\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{16}\left(4n+7+\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}\right)$$

◄ التمرين الثالث:

❶

أ/ التحقق أنّ الثنائية $(6;2)$ حل للمعادلة (E) :

لدينا: $16(6)+361(2)=818$

إذن: الثنائية $(6;2)$ حل للمعادلة (E)

- استنتاج مجموعة حلول المعادلة (E):

لدينا: $\begin{cases} 16x+361y=818 \ldots (E) \\ 16(6)+361(2)=818 \ldots (E') \end{cases}$

بطرح (E') من (E)

نجد: $16(x-6)+361(y-2)=0$

ومنه: $16(x-6)=361(2-y)$

ومنه: $361 \mid 16(x-6)$ و $16 \mid 361(2-y)$

لدينا: $16 \wedge 361=1$

ومنه: $361 \mid x-6$ و $16 \mid 2-y$ (حسب غوص)

ومنه: $\begin{cases} x-6=361k \\ 2-y=16k \end{cases}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

ومنه: $\begin{cases} x=361k+6 \\ y=2-16k \end{cases}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

إذن حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حيث:

$(x;y)\in\{(361k+6;2-16k);k\in\mathbb{Z}\}$

ب/ تعيين كل الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق $|x+23y|\leq 4$:

لدينا: $|x+23y|\leq 4$

معناه: $|361k+6+23(2-16k)|\leq 4$

معناه: $|52-7k|\leq 4$

معناه: $-4\leq 52-7k\leq 4$

معناه: $6.85\leq k\leq 8$

ومنه: $k\in\{7;8\}$

وعليه: الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق $|x+23y|\leq 4$

هي: $(x;y)=\{(2533;-110);(2894;-126)\}$

❷ تعيين α و β

لدينا:

- $P = \overline{5\alpha\beta0}^{7}$
$= 0(7)^0 + \beta(7)^1 + \alpha(7)^2 + 5(7)^3$
$= 49\alpha + 7\beta + 1715$
- $P = \overline{\beta\alpha87}^{9}$
$= 7(9)^0 + 8(9)^1 + \alpha(9)^2 + \beta(9)^3$
$= 81\alpha + 729\beta + 79$

ومنه: $49\alpha + 7\beta + 1715 = 81\alpha + 729\beta + 79$

ومنه: $32\alpha + 722\beta = 1636$

ومنه: $16\alpha + 361\beta = 818$

إذن: $\begin{cases} \alpha = 361m + 6 \\ \beta = 2 - 16m \end{cases}$ حيث: $m \in \mathbb{N}$

لدينا: $0 \le \alpha < 7$ و $0 \le \beta < 7$

إذن: $m = 0$

وعليه: $\begin{cases} \alpha = 6 \\ \beta = 2 \end{cases}$

- **كتابة P في النظام العشري:**

$$P = \overline{5\alpha\beta0}^{7} = \overline{2023}^{10}$$

③ تحليل العدد 2023 إلى جداء عوامل أولية:

$$\begin{array}{r|l} 2023 & 7 \\ 289 & 17 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$$

إذن: $2023 = 7 \times 17^2$

- **تعيين الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها يقسم 2023:**

لدينا: $2023 = 1^2 \times 7 \times 17^2$

إذن: الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها يقسم 2023 هي: $\{1; 17\}$

ب/ تعيين كل الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق: $m^2 + 3d^2 = 2023$

- لدينا: $md = ab$

نضع: $\begin{cases} a = a'd \\ b = b'd \end{cases}$ حيث: $a' \wedge b' = 1$

ومنه: $m = a'b'd$

- وعليه: $m^2 + 3d^2 = 2023$

معناه: $(a'b'd)^2 + 3d^2 = 2023$

معناه: $d^2((a'b')^2 + 3) = 2023$

ومنه: $d^2 \mid 2023$

ومنه: $d^2 \in \{1; 17\}$

◄ لما: $d = 1$

لدينا: $(a'b')^2 + 3 = 2023$

ومنه: $(a'b')^2 = 2020$

وهذا مستحيل (لأنّ 2020 ليس مربع تام)

◀ لما: $d = 17$

لدينا: $17^2((a'b')^2 + 3) = 2023$

ومنه: $(a'b')^2 = 4$

ومنه: $a'b' = 2$

ومنه: $(a'; b') \in \{(1; 2); (2; 1)\}$

إذن: $(a; b) \in \{(17; 34); (34; 17)\}$

◀ التمرين الرابع:

(I

❶

أ/ حساب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$:

• $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ لأنّ: $\begin{cases} \lim_{x\to-\infty} (e^{-2x}) = +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} (6x-3) = -\infty \end{cases}$

• $$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} g(x) &= \lim_{x\to+\infty} (1 + (6x-3)e^{-2x}) \\ &= \lim_{x\to+\infty} (1 - 3(-2xe^{-2x}) - 3e^{-2x}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

لأنّ: $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} (e^{-2x}) = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} (-2xe^{-2x}) = 0 \end{cases}$

ب/ دراسة اتجاه الدالة g وتشكيل جدول تغيراتها:

لدينا الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 6e^{-2x} - 2e^{-2x}(6x-3) \\ &= 12(1-x)e^{-2x} \end{aligned}$$

لدينا: $12e^{-2x} > 0$

ولدينا: $1 - x = 0$ معناه: $x = 1$

وعليه:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$g(1)$	↘ 1

❷

أ/ اثبات أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.2 < \alpha < 0.3$:

لدينا: g مستمرة ورتيبة على $]-\infty; 1[$

ولدينا: $\begin{cases} g(0.2) \approx -0.21 \\ g(0.3) \approx 0.34 \end{cases}$

أي: $g(0.3) \times g(0.2) < 0$

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.2 < \alpha < 0.3$

ب/ استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II

❶

أ/ حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$:

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x+1-3xe^{2x})$
$= \lim_{x\to-\infty} \left(x+1-\frac{3}{2}2xe^{2x}\right)$
$= -\infty$

لأنّ: $\lim_{x\to-\infty} (2xe^{2x}) = 0$

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x+1-3xe^{2x})$
$= \lim_{x\to+\infty} \left(e^{2x}\left(\frac{1}{2}\frac{2x}{e^{2x}}+\frac{1}{e^{2x}}-3x\right)\right)$
$= -\infty$

لأنّ: $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} (e^{2x}) = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x}{e^{2x}}\right) = 0 \end{cases}$

ب/ تبيين أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x+1$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$:

لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty} \left(f(x)-(x+1)\right) = \lim_{x\to-\infty} (-3xe^{2x}) = \lim_{x\to-\infty} \left(-\frac{3}{2}2xe^{2x}\right) = 0$$

إذن: (Δ) ذا المعادلة $y = x+1$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$

ج/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ):

$$f(x)-(x+1) = -3xe^{2x}$$

لدينا: $e^{2x} > 0$

ولدينا: $-3x = 0$ معناه: $x = 0$

وعليه:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-(x+1)$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	(C_f) **فوق** (Δ)	(C_f) **يقطع** (Δ) **في** $A(0;1)$	(C_f) **تحت** (Δ)

2

أ/ تبيين أنه: من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x) = g(-x)$:

لدينا:

$$f'(x) = 1-3e^{2x}+2e^{2x}(-3x) = 1+e^{2x}(-6x-3) = 1+e^{2(-x)}(6(-x)-3) = g(-x)$$

ب/ استنتاج تغيرات الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(-x)$

لدينا:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

ومنه:

$-x$	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(-x)$	$-$	0	$+$

ومنه:

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$g(-x)$	$+$	0	$-$

إذن:

x	$-\infty$	$-a$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f(-\alpha)$	↘ $-\infty$

3

أ/ اثبات أنّ (C_f) يقبل مماسا يوازي (Δ):

لدينا: $f'(a) = 1$

معناه: $g(-a) = 1$

معناه: $1 - 3e^{2x}(2a + 1) = 1$

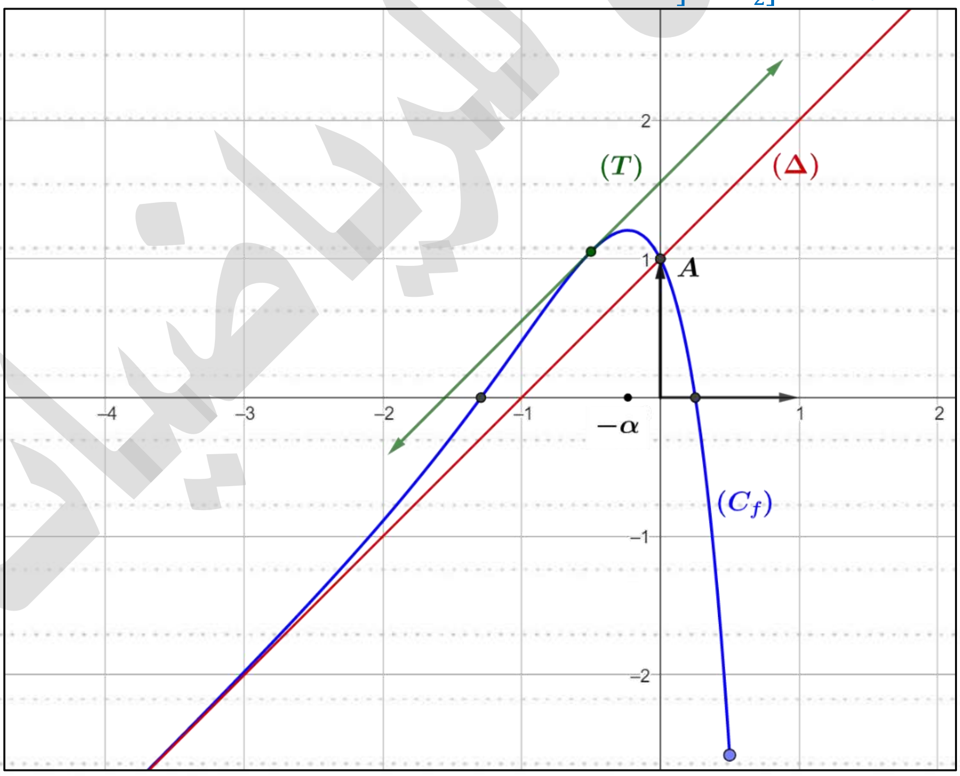
معناه: $a = -\dfrac{1}{2}$

إذن: (C_f) **يقبل مماسا يوازي** (Δ) **عند النقطة ذات الفاصلة** $x = -\dfrac{1}{2}$

- **تعيين معادلة (T):**

$$(T): y = f'\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$= x + 1 + \frac{3}{2}e^{-1}$$

ب/ رسم (Δ)، (T) و (C_f) على $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$ **:**



ج/ تعين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها المعادلة $f(x) = x + m$ حلين بالضبط:

حلول المعادلة $f(x) = x + m$ **هي فواصل نقط تقاطع** (C_f) **مع المستقيمات ذات المعادلة** $y = x + m$

ونجد أنه لما: $m \in \left]1; 1 + \dfrac{3}{2}e^{-1}\right[$ **المعادلة تقبل حلين**

4

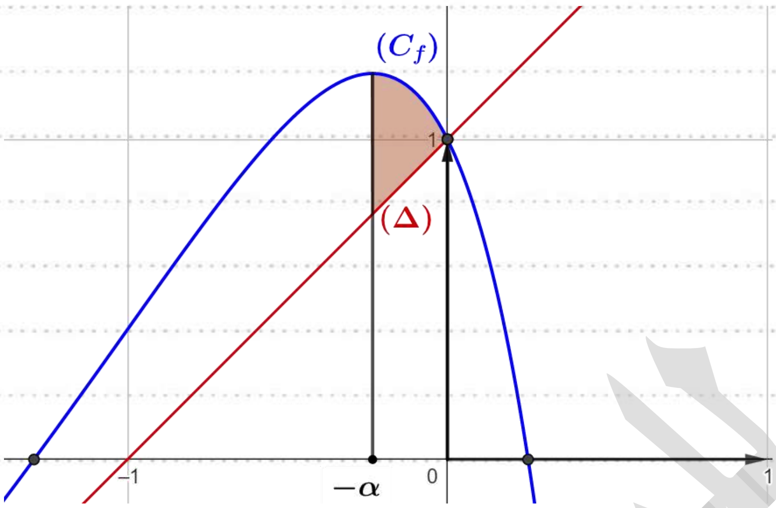
أ/ حساب العدد الحقيقي $\int_{-\alpha}^{0} xe^{2x}dx$**:**

حساب: $I = \int_{-\alpha}^{0} xe^{2x}dx$ نضع: $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{2x} \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ u(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

وعليه:

$$\begin{aligned}\int_{-\alpha}^{0} xe^{2x}dx &= \left[\frac{1}{2}xe^{2x}\right]_{-\alpha}^{0} - \int_{-\alpha}^{0}\frac{1}{2}e^{2x}dx \\ &= \left[\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}\right]_{-\alpha}^{0} \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\alpha e^{-2\alpha} + \frac{1}{4}e^{-2\alpha} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{2\alpha + 1 - e^{2\alpha}}{e^{2\alpha}}\right)\end{aligned}$$

ب/ استنتاج بالسنتمتر المربع $\mathcal{A}$:



$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_{-\alpha}^{0}(f(x) - (x+1))dx \\ &= -3\int_{-\alpha}^{0} xe^{2x}dx \\ &= -3I \\ &= \frac{3}{4}\left(\frac{e^{2\alpha} - 2\alpha - 1}{e^{2\alpha}}\right)u.a \\ &= \frac{3}{4}\left(\frac{e^{2\alpha} - 2\alpha - 1}{e^{2\alpha}}\right)\times 2 \times 2cm^2 \\ &= 3\left(\frac{e^{2\alpha} - 2\alpha - 1}{e^{2\alpha}}\right)cm^2\end{aligned}$$

ج/ التحقق أنّ $\mathcal{A} = 2\left(\frac{4\alpha-1}{2\alpha-1}\right)cm^2$

لدينا: $g(\alpha) = 0$

ومنه: $1 + (6\alpha - 3)e^{-2\alpha} = 0$

ومنه: $e^{-2\alpha} = -\frac{1}{6\alpha - 3}$

ومنه: $e^{2\alpha} = 3 - 6\alpha$

وعليه:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= 3\left(\frac{e^{2\alpha} - 2\alpha - 1}{e^{2\alpha}}\right) \\ &= 3\left(\frac{3 - 6\alpha - 2\alpha - 1}{3 - 6\alpha}\right) \\ &= 2\left(\frac{4\alpha - 1}{2\alpha - 1}\right)cm^2\end{aligned}$$

بالتوفيق في شهادة البكالوريا

الخليل للرياضيات

لا تنسونا من صالح دعائكم

الموضوع الثاني

◄ التمرين الأول:

1

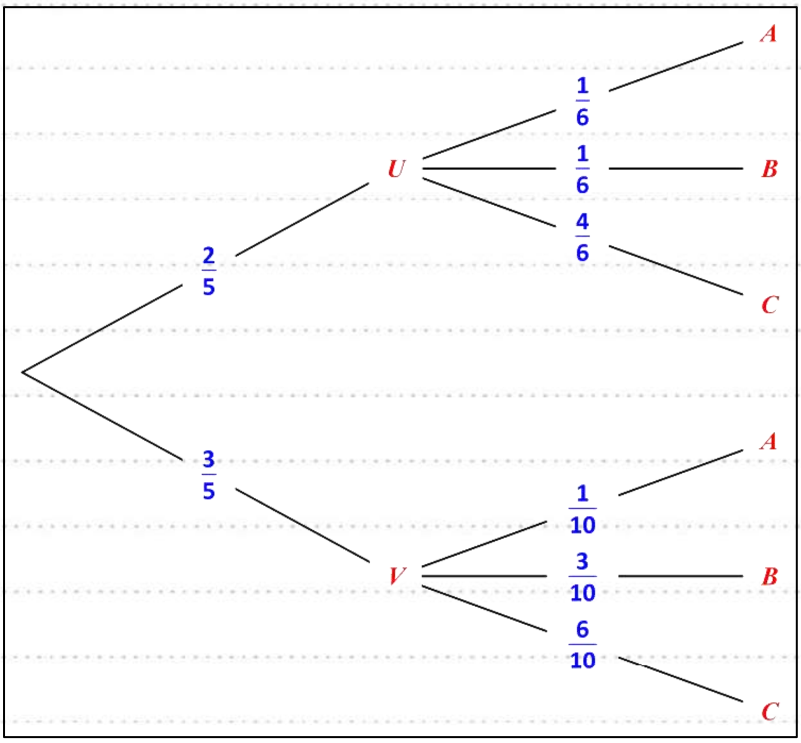
أ/ انجاز شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه التجربة:

لدينا: الأعداد الأولية الأقل من 10 هي: $\{2;3;5;7\}$، **ومنه:**

- $P(V)=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$
- $P(U)=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$

ولدينا:

- $P_U(A)=\dfrac{C_2^2}{C_4^2}=\dfrac{1}{6}$
- $P_U(B)=\dfrac{C_2^2}{C_4^2}=\dfrac{1}{6}$
- $P_U(C)=\dfrac{C_2^1C_2^1}{C_4^2}=\dfrac{4}{6}$
- $P_V(A)=\dfrac{C_2^2}{C_5^2}=\dfrac{1}{10}$
- $P_V(B)=\dfrac{C_3^2}{C_5^2}=\dfrac{3}{10}$
- $P_V(C)=\dfrac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}=\dfrac{6}{10}$



ب/ تبيين أنّ $P(A)=\frac{19}{150}$ و $P(B)=\frac{37}{150}$

- $P(A)=P(U\cap A)+P(V\cap A)=\left(\frac{2}{5}\times\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{3}{5}\times\frac{1}{10}\right)=\frac{19}{150}$
- $P(A)=P(U\cap B)+P(V\cap B)=\left(\frac{2}{5}\times\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{3}{5}\times\frac{3}{10}\right)=\frac{37}{150}$

- استنتاج $P(C)$:

$$P(C)=1-P(A)-P(B)=\frac{94}{150}$$

❷

أ/ تعيين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X:

لدينا:

$$X(\Omega)=\{0;1;2\}$$

حيث:

- $P(X=0)=P(B)=\frac{37}{150}$
- $P(X=1)=P(C)=\frac{94}{150}$
- $P(X=2)=P(A)=\frac{19}{150}$

وعليه:

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{37}{150}$	$\frac{94}{150}$	$\frac{19}{150}$

- حساب $E(X)$:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{3}x_iP(x_i)=\frac{132}{150}=\frac{22}{25}$$

ب/ احسب احتمال الحدث "$\ln x\leq 1$"

$$P(\ln x\leq 1)=P(X=1)+P(X=2)=\frac{113}{150}$$

◄ التمرين الثاني:

❶ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $(\bar{z}-1+i\sqrt{3})(z^2-2\sqrt{2}z+4)=0$:

◄ لدينا: $(\bar{z}-1+i\sqrt{3})(z^2-2\sqrt{2}z+4)=0$

معناه: $\bar{z}-1+i\sqrt{3}=0$ أو $z^2-2\sqrt{2}z+4=0$

معناه: $\bar{z}=1-i\sqrt{3}$ أو $z^2-2\sqrt{2}z+4=0$

◄ لدينا: $\bar{z}=1-i\sqrt{3}$

معناه: $z=1+i\sqrt{3}$

◄ ولدينا: $z^2-2\sqrt{2}z+4=0$ ، $\left(\Delta=-8=\left(2i\sqrt{2}\right)^2\right)$

معناه: $z=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ أو $z=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$

◄ إذن: $S=\{(1+i\sqrt{3});(\sqrt{2}+i\sqrt{2});(\sqrt{2}-i\sqrt{2})\}$

❷

أ/ كتابة z_A، z_B و z_C على الشكل المثلثي:

نضع: θ_A و θ_C عمدة لـ z_A و z_C على الترتيب

• لدينا: $\begin{cases} |z_A| = 2 \\ \cos\theta_A = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_A = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ ومنه: $\theta_A \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$

وعليه: $\boxed{z_A = 2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)}$

• ولدينا: $z_B = \overline{z_A}$

وعليه: $\boxed{z_B = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)}$

• ولدينا: $\begin{cases} |z_C| = 2 \\ \cos\theta_C = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta_c = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ ومنه: $\theta_C \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$

وعليه: $\boxed{z_C = 2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)}$

ب/ استنتاج أنّ النقط A، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها:

لدينا: $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 2$

وعليه: $OA = OB = OC = 2$

إذن: النقط A، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 2

❸ نضع: $K = \dfrac{z_C}{2z_A}$

أ/ حساب طويلة العدد المركب K وعمدة له:

• $|K| = \left|\dfrac{z_C}{2z_A}\right| = \dfrac{2}{2\times 2} = \dfrac{1}{2}$

• $\arg(K) = \arg\left(\dfrac{z_C}{2z_A}\right) = \arg\left(\dfrac{z_C}{z_A}\right) = \arg(z_C) - \arg(z_A) = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{12}$

إذن: $K\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\pi}{12}\right)$

• كتابة K على الشكل الجبري:

$$\begin{aligned} K &= \frac{z_C}{2z_A} \\ &= \frac{1+i\sqrt{3}}{2\sqrt{2}(1+i)} \times \frac{1-i}{1-i} \\ &= \frac{1-i+i\sqrt{3}+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{4\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}-1}{4\sqrt{2}} \\ &= \boxed{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}} \end{aligned}$$

ب/ استنتاج القيمة المضبوطة كل من $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$:

لدينا: $K = \dfrac{1}{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + i\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8} + i\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}$

ومنه: $\begin{cases} \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8} \\ \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8} \end{cases}$

إذن: $\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

4 تبيين أنه: من أجل كل عدد طبيعي n، العدد المركب L_n حقيقي:

$$\begin{aligned} L_n &= z_A^n + z_B^n \\ &= 2^n\left(\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right) + 2^n\left(\cos\left(-n\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-n\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= 2^n\left(\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= 2^n\left(2\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= 2^{n+1}\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

◀ التمرين الثالث:

1 تعيين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 9^n على 11

لدينا:

$9^0 \equiv 1[11]$ ، $9^1 \equiv 9[11]$ ، $9^2 \equiv 4[11]$ ،

$9^3 \equiv 3[11]$ ، $3^4 \equiv 5[11]$ ، $9^5 \equiv 1[11]$

ومنه بواقي القسمة الاقليدية للعدد 9^n على 11 نلخصها في الجدول التالي:

$k \in \mathbb{N}$	$5k+4$	$5k+3$	$5k+2$	$5k+1$	$5k$	$n =$
$[11]$	5	3	4	9	1	$9^n \equiv$

- **استنتاج باقي القسمة الاقليدية للعدد 1945^{2023} على 11:**

لدينا: $\begin{cases} 1945 \equiv 9[11] \\ 2023 \equiv 3[5] \end{cases}$

ومنه: $1945 \equiv 9[11]$

معناه: $1945^{2023} \equiv 9^{5k+3}[11]$ **حيث:** $k \in \mathbb{Z}$

وعليه: $1945^{2023} \equiv 3[11]$

ب/ تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة $\begin{cases} n \equiv 2023[5] \\ 3n + 9^n \equiv 1444[11] \end{cases}$:

لدينا: $\begin{cases} n \equiv 2023[5] \\ 3n + 9^n \equiv 1444[11] \end{cases}$

معناه: $\begin{cases} n \equiv 3[5] \\ 3n + 9^n \equiv 3[11] \end{cases}$

معناه: $\begin{cases} n = 5p+3 \\ 3n + 9^{5p+3} \equiv 3[11] \end{cases}$ **حيث:** $p \in \mathbb{N}$

معناه: $\begin{cases} n = 5p+3 \\ 3n \equiv 0[11] \end{cases}$ **حيث:** $p \in \mathbb{N}$

معناه: $\begin{cases} n = 5p+3 \\ n = 11q \end{cases}$ **حيث:** $p, q \in \mathbb{N}$

لدينا: $n = 5p + 3 = 11q$

معناه: $11q \equiv 3[5]$

معناه: $q \equiv 3[5]$

معناه: $q = 5k' + 3$

إذن: $n = 11q = 11(5k' + 3)$

أي: $n = 55k' + 33$

❷

أ/ تبيين أنّ (v_n) هندسية أساسها 9 :

لدينا:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 4u_{n+1} - 8(n+1) + 2 \\ &= 4(9u_n - 16n + 6) - 8n - 8 + 2 \\ &= 36u_n - 72n + 18 \\ &= 9(4u_n - 8n + 2) \\ &= 9v_n \end{aligned}$$

إذن: (v_n) هندسية أساسها 9 وحدها الأول v_0 حيث:

$$v_0 = 4u_n - 8n + 2 = 8$$

ب/ تعيين عبارة v_n بدلالة n:

$$v_n = v_0 \times q^n = 8(9)^n$$

- **استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 2 \times 9^n + 2n - \frac{1}{2}$:**

لدينا: $v_n = 4u_n - 8n + 2$

ومنه: $u_n = \dfrac{1}{4}v_n + 2n - \dfrac{1}{2}$

ومنه: $u_n = \dfrac{1}{4}8(9)^n + 2n - \dfrac{1}{2}$

ومنه: $u_n = 2(9)^n + 2n - \dfrac{1}{2}$

❸ حساب S_n بدلالة n :

$$\begin{aligned} S_n &= v_0 + v_1 + \cdots + v_n \\ &= 8\left(\frac{9^{n+1} - 1}{9 - 1}\right) \\ &= 9^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

- **استنتاج أنه: من أجل كل عدد طبيعي n، $T_n = \frac{1}{4}(9^{n+1} + 4n^2 + 2n - 3)$:**

لدينا: $v_n = 4u_n - 8n + 2$

ومنه: $u_n = \dfrac{1}{4}v_n + \underbrace{2n - \dfrac{1}{2}}_{w_n}$

ومنه: $u_n = \dfrac{1}{4}v_n + w_n$

حيث: (w_n) متتالية حسابية أساسها 2 وحدها الأول $-\dfrac{1}{2}$

وعليه:

$$\begin{aligned} T_n &= u_0 + u_1 + \cdots + u_n \\ &= \frac{1}{4}v_0 + w_0 + \frac{1}{4}v_1 + w_1 + \cdots + \frac{1}{4}v_n + w_n \\ &= \frac{1}{4}S_n + \frac{1}{2}(n+1)\left(-\frac{1}{2} + 2n - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}(9^{n+1} - 1) + \frac{1}{2}(2n^2 + n - 1) \\ &= \frac{1}{4}(9^{n+1} - 1 + 4n^2 + 2n - 2) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}(9^{n+1} + 4n^2 + 2n - 3)$$

❹ تبيين أنه: من أجل كل عدد طبيعي n، $4T_{5n} - n^2 + n + 5 \equiv 0[11]$:

لدينا:

$$4T_{5n} - n^2 + n + 5 \equiv 4\left(\frac{1}{4}(9^{5n+1} + 4(5n)^2 + 2(5n) - 3)\right) - n^2 + n + 5[11]$$
$$\equiv 9^{5n+1} + 99n^2 + 11n + 2[11]$$
$$\equiv 9 + 0 + 0 + 2[11]$$
$$\equiv 0[11]$$

◄ التمرين الرابع:

(I

❶

أ/ حساب كل من $g'(x)$ و $g''(x)$ حيث: $x > 0$:

لدينا الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$، ودالتها المشتقة هي:

$$g'(x) = \ln x + \frac{1}{x}(x-3) + 1$$
$$= \ln x - \frac{3}{x} + 2$$

لدينا الدالة g' قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$، ودالتها المشتقة هي:

$$g''(x) = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}$$
$$= \frac{x+3}{x^2}$$

ب/ تبيين أنّ الدالة g' متزايدة تماما على $]0; +\infty[$:

$$g''(x) = \frac{x+3}{x^2}$$

لما: $x \in]0; +\infty[$ **لدينا:** $x + 3 > 0$ و $x^2 > 0$

إذن: **الدالة g' متزايدة تماما على** $]0; +\infty[$

❷

أ/ تبيين أن المعادلة $g'(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1.3 < \alpha < 1.4$:

لدينا: g' **مستمرة ورتيبة على** $]0; +\infty[$

ولدينا: $\begin{cases} g'(1.4) \approx 0.19 \\ g'(1.3) \approx -0.05 \end{cases}$ **أي:** $g'(1.4) \times g'(1.3) < 0$

إذن: **حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة** $g'(x) = 0$ **تقبل حلا وحيدا** α **حيث:** $1.3 < \alpha < 1.4$

ب/ علما أنّ $g(\alpha) = 0.85$، استنتاج أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$، $g(x) > 0$:

لدينا:

x	0	α	$+\infty$
$g''(x)$	$+$		$+$
$g'(x)$	$- - - -$ ↗	0	$+ + + +$ ↗
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	$g(\alpha)$	↗

لدينا الدالة g تبلغ قيمة حدية دنيا $g(\alpha) = 0.85 > 0$

إذن: $g(x) > 0$

❸

أ/ حساب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} f(x)$ وتفسير النتيجة هندسيا:

$$\bullet \lim_{\substack{x\to 0\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\>}} \left(\left(x - \frac{3}{2}\ln x\right)\ln x\right) = -\infty$$

لأنّ: $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} \left(x - \frac{3}{2}\ln x\right) = +\infty \end{cases}$

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x = 0$ بجوار $+\infty$

ب/ تبيين أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$:

$$\bullet \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\left(x - \frac{3}{2}\ln x\right)\ln x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(x\left(1 - \frac{3}{2}\frac{\ln x}{x}\right)\ln x\right) = +\infty$$

لأنّ: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{3}{2}\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty \end{cases}$

❹ تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$:

لدينا الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$، ودالتها المشتقة هي:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(1 - \frac{3}{2}\frac{1}{x}\right)\ln x + \frac{1}{x}\left(x - \frac{3}{2}\ln x\right) \\ &= \left(\frac{2x-3}{2x}\right)\ln x + \left(\frac{2x - 3\ln x}{2x}\right) \\ &= \frac{2x\ln x - 3\ln x + 2x - 3\ln x}{2x} \\ &= \frac{2(x-3)\ln x + 2x}{2x} \\ &= \frac{(x-3)\ln x + x}{x} \\ &= \frac{g(x)}{x} \end{aligned}$$

• تشكيل جدول تغيرات الدالة f:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x}$$

لدينا: $x > 0$ على المجال $\mathbb{R}_+^*$

إذن: إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

❺ تبيين أنّ (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') معامل توديه كل منهما يساوي 1:

لدينا: $f'(a) = 1$

معناه: $\frac{(a-3)\ln a + a}{a} = 1$

معناه: $(a-3)\ln a = 0$

معناه: $a - 3 = 0$ أو $\ln a = 0$

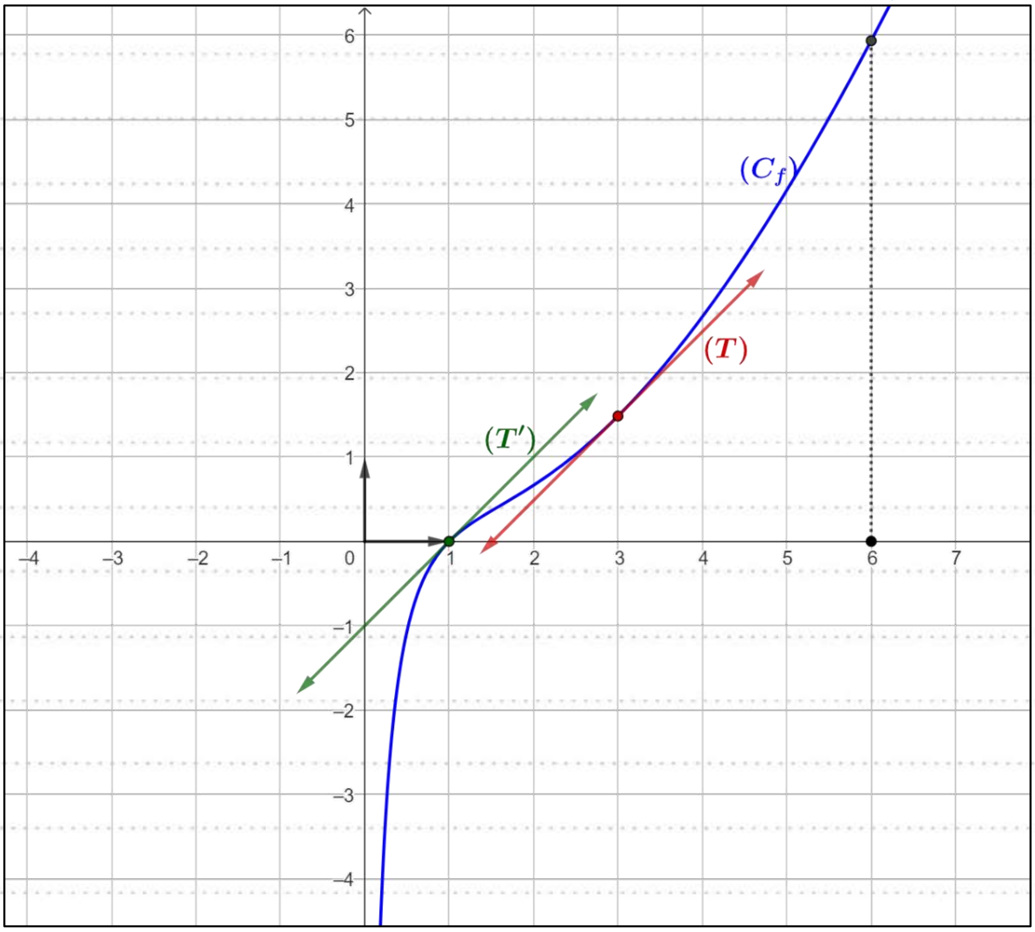
إذن: $a = 3$ أو $a = 1$

وعليه: (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') معامل توديه كل منهما يساوي 1

- $(T): y = f'(3)(x-3) + f(3)$
$$= x - 3 + \left(3 - \frac{3}{2}\ln 3\right)\ln 3$$
$$= x - 3 + 3\ln 3 - \frac{3}{2}\ln^2(3)$$
$$= x + 3\left(\ln 3 - \frac{\ln^2(3)}{2} - 1\right)$$
- $(T'): y = f'(1)(x-1) + f(1)$
$$= x - 1$$

6

أ/ رسم (T) ، (T') و (C_f) (نأخذ $f(6) \approx 5.9$):



ب/ تعيين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها المعادلة $f(x) = x + m$ ثلاثة حلول بالضبط:

حلول المعادلة $f(x) = x + m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y = x + m$

ونجد أنه لما: $m \in \left]3\left(\ln 3 - \frac{\ln^2(3)}{2} - 1\right); -1\right[$ المعادلة تقبل ثلاثة حلول بالضبط

7

أ/ التحقق أنّ F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$:

$$F'(x) = \left(\frac{1}{2}2x + 3\right)\ln x + \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}x^2 + 3x\right) - \frac{3}{2}(\ln x)^2 + \left(-\frac{3}{2}x\right)\left(2\frac{1}{x}\ln x\right) - \frac{1}{2}\,2x - 3$$
$$= (x+3)\ln x - \frac{3}{2}(\ln x)^2 - 3\ln x$$
$$= \left(x - \frac{3}{2}\ln x\right)\ln x$$
$$= f(x)$$

ب/ حساب A:

حيث: A **هي مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى** (C_f) **والمستقيمات التي معادلاتها** $y = 0$ ، $x = 1$ **و** $x = e$

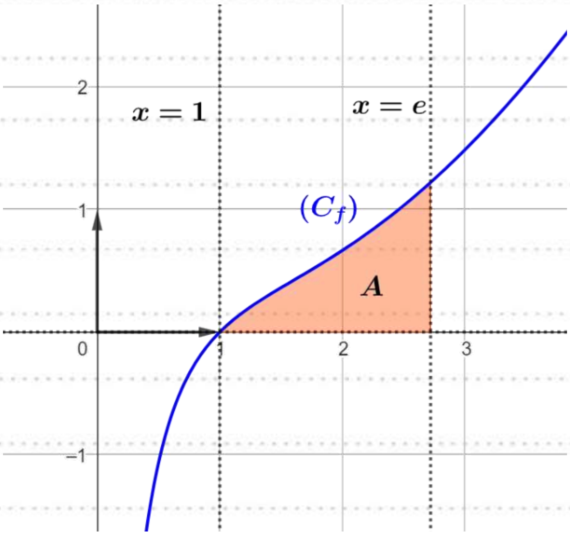
◄ **لدينا:** **الدالة** f **متزايدة تماما على** $\mathbb{R}_+^*$

ولدينا: $f(1) = 0$

إذن: $f(x) \geq 0$ **لما:** $x \in [1; e]$

◄ **وعليه:**

$$A = \int_1^e f(x)dx$$
$$= \left[\left(\frac{1}{2}x^2 + 3x\right)\ln x - \frac{3}{2}x(\ln x)^2 - \frac{1}{4}x^2 - 3x\right]_1^e$$
$$= \frac{1}{4}e^2 - \frac{6}{4}e + \frac{13}{4}$$
$$= \frac{e^2 - 6e + 13}{4}u.a$$
$$= \left(\frac{e^2 - 6e + 13}{4}\right)2 \times 2cm^2$$
$$= (e^2 - 6e + 13)cm^2$$



بالتوفيق في شهادة البكالوريا

لا تنسونا من صالح دعائكم