1 ABC مثلث متساوي الساقين رأسه الأساسي A.
I و J منتصفا الضلعين $[AB]$ و $[AC]$ على الترتيب.
(1) برهن أنّ المثلثين BIC و BJC متقايسان.
(2) برهن أنّ $BJ = CI$.

2 ABC مثلث كيفي.
نسمي I، J و K منتصفات الأضلاع $[AB]$، $[AC]$ و $[BC]$ على الترتيب.
برهن أنّ المثلثات AIJ، BIK، JKI و KJC متقايسة.

3 $ABCD$ متوازي أضلاع.
I و J منتصفا $[AD]$ و $[AB]$ على الترتيب.
المستقيم (IJ) يقطع (BC) في E و يقطع (CD) في F .
(1) برهن أنّ المثلثين DFI و AIJ متقايسان.
(2) برهن أنّ المثلثين JBE و IFD متقايسان.
(3) برهن أنّ $FI = IJ = JE$.

4 ABC و $A'B'C'$ مثلثان متقايسان.
G مركز ثقل المثلث ABC و G' مركز ثقل المثلث $A'B'C'$.
برهن أنّ $\widehat{AGB} = \widehat{A'G'B'}$.

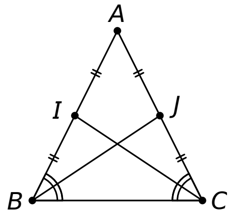
5 $[AB]$ و $[CD]$ قطران من دائرة مركزها O .
(1) برهن أنّ المثلثين OAD و OBC متقايسان.
(2) برهن أنّ المثلثين ABC و ADB متقايسان.

6 ABC مثلث متساوي الساقين رأسه الأساسي A و M نقطة من $[BC]$.
نسمي P المسقط العمودي للنقطة M على المستقيم (AB)، Q المسقط العمودي للنقطة M على المستقيم (AC) و R المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (MP).
برهن أنّ المثلثين MQC و MRC متقايسان.

7 $\widehat{xOy}$ زاوية و A و B نقطتان من الضلع $[Ox)$. نعيِّن النقطتين C و D على الضلع $[Oy)$ بحيث $OC = OA$ و $OD = OB$ و لتكن I نقطة تقاطع $[BC]$ و $[AD]$.
(1) برهن أنّ المثلثين OBC و ODA متقايسان.
(2) برهن أنّ المثلثين IAB و ICD متقايسان.
(3) برهن أنّ المثلثين OIB و OID متقايسان.
(4) ماذا يمثِّل نصف المستقيم $[OI)$ بالنسبة للزاوية $\widehat{xOy}$ ؟ علِّل.
(5) استنتج طريقة لإنشاء منصِّف زاوية باستعمال المسطرة.

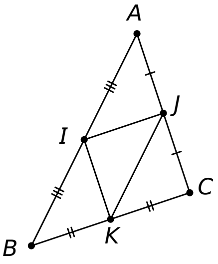
الحلول

1



بما أنّ المثلث ABC متساوي الساقين رأسه الأساسي A فإنّ $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ إذن $\widehat{IBC} = \widehat{JCB}$. و بما أنّ $AB = AC$ فإنّ $IB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}AC = JC$.
لدينا إذن :
$\begin{bmatrix} IB = JC \\ \widehat{IBC} = \widehat{JCB} \\ [BC] \text{ ضلع مشترك} \end{bmatrix}$ و بالتالي فالمثلثان IBC و JCB متقايسان (ضلعان و الزاوية المحصورة بينهما).
من تقايسهما نستنتج أنّ الضلع الثالث في المثلث IBC يقايس الضلع الثالث في المثلث JCB أي $BJ = CI$.

2

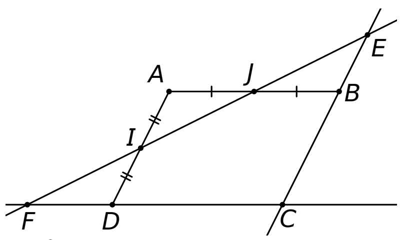


- في المثلث ABC لدينا : I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[AC]$ فحسب نظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ $(IJ)//(BC)$ و $IJ = \frac{1}{2}BC$ إذن $IJ = BK = KC$.
- في المثلث ABC لدينا : I منتصف $[AB]$ و K منتصف $[BC]$ فحسب نظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ $(IK)//(AC)$ و $IK = \frac{1}{2}AC$ إذن $IK = AJ = JC$.
- في المثلث ABC لدينا : J منتصف $[AC]$ و K منتصف $[BC]$ فحسب نظرية مستقيم المتصفين نستنتج أنّ $(JK)//(AB)$ و $JK = \frac{1}{2}AB$ إذن $JK = AI = IB$.

لدينا إذن :
- $AI = IB$، $IK = AJ$ و $IJ = BK$ إذن فالمثلثان AIJ و BIK متقايسان (تقايس الأضلاع الثلاثة مثنى مثنى).
- $JK = IB$، $IJ = BK$ و $[IK]$ ضلع مشترك إذن فالمثلثان JKI و BIK متقايسان (تقايس الأضلاع الثلاثة مثنى مثنى).
- $IJ = KC$، $IK = JC$ و $[JK]$ ضلع مشترك إذن فالمثلثان JKI و KJC متقايسان (تقايس الأضلاع الثلاثة مثنى مثنى).

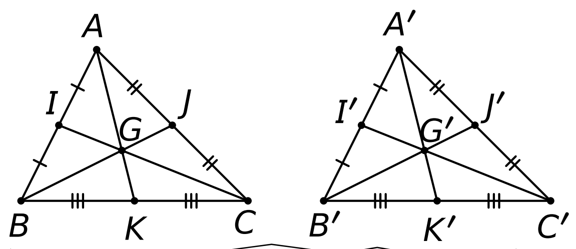
هذا يعني أنّ المثلثات AIJ، BIK، JKI و KJC متقايسة.

3



(1) بما أنّ $(AB)//(CD)$ و (AD) قاطع لهما فإنّ $\widehat{IAJ} = \widehat{IDF}$ (متبادلتان داخليا). من جهة أخرى، $\widehat{AIJ} = \widehat{DIF}$ (متقابلتان بالرأس).
و بما أنّ $AI = ID$ فالمثلثان DFI و AIJ متقايسان (زاويتان و الضلع المحصور بينهما).
(2) بنفس الطريقة نبرهن أنّ المثلثين JBE و AIJ متقايسان.
و بما أنّ كل من JBE و DFI يُقايس المثلث AIJ فنستنتج أنّ المثلثين JBE و DFI متقايسان.
(3) من تقايس المثلثات الثلاثة DFI، AIJ و JBE نستنتج أنّ $FI = IJ = JE$.

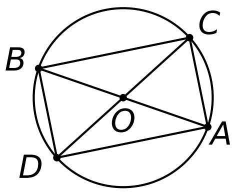
4



حتى نبرهن أنّ الزاويتين $\widehat{AGB}$ و $\widehat{A'G'B'}$ متقايستان، سنبرهن أنّ المثلثين AGB و $A'G'B'$ متقايسان.
بما أنّ المثلثين ABC و $A'B'C'$ متقايسان فإنّ $AB = A'B'$، $BC = B'C'$ و $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$.
نسمي K منتصف $[BC]$ و K' منتصف $[B'C']$. لدينا :
$BK = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}B'C' = B'K'$.
و بما أنّ $AB = A'B'$ و $\widehat{ABK} = \widehat{A'B'K'}$ (لأنّ $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$) فإنّ المثلثين ABK و $A'B'K'$ متقايسان و بالتالي $AK = A'K'$.
لكن G مركز ثقل المثلث ABC إذن $AG = \frac{2}{3}AK$ ؛ و G' مركز ثقل المثلث $A'B'C'$ إذن $A'G' = \frac{2}{3}A'K'$ و هذا يعني أنّ $AG = A'G'$.

نبرهن بنفس الطريقة أنّ $BG = B'G'$.
في الأخير لدينا : $AB = A'B'$ ، $AG = A'G'$ و $BG = B'G'$.
نستنتج إذن أنّ المثلثين ABG و $A'B'G'$ متقايسان.
من تقايسهما ينتج $\widehat{AGB} = \widehat{A'G'B'}$.

5

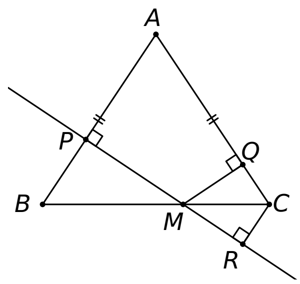


(1) المثلثان OAD و OBC متقايسان لأنّ :
- $OA = OB$ (أنصاف أقطار للدائرة)
- $\widehat{AOD} = \widehat{BOC}$ (متقابلتان بالرأس)
- $OD = OC$ (أنصاف أقطار للدائرة)

[**طريقة أخرى** : المثلثان OAD و OBC متناظران بالنسبة إلى O إذن متطابقان أي متقايسان].

(2) الرباعي $ACBD$ مستطيل (لأنّ قطريه متناصفان و متقايسان) و بالتالي مركزه O هو مركز تناظر له.
إذن فالمثلثان ABC و ABD متناظران بالنسبة إلى O و بالتالي متقايسان.

6



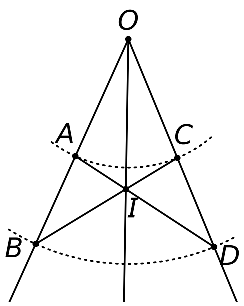
بما أنّ $(PR) \perp (CR)$ و $(PR) \perp (AB)$ فإنّ $(CR)//(AB)$ (المستقيمان العموديان على نفس المستقيم هما مستقيمان متوازيان).
لدينا إذن $(CR)//(AB)$ و (BC) قاطع لهما و بالتالي $\widehat{PBM} = \widehat{MCR}$ (متبادلتان داخليا). لكن المثلث ABC متساوي الساقين إذن $\widehat{PBM} = \widehat{QCM}$ منه $\widehat{MCR} = \widehat{QCM}$. لدينا إذن :

- $\widehat{MCR} = \widehat{QCM}$
- $[MC]$ وتر مشترك.

نستنتج أنّ المثلثين القائمين MQC و MRC متقايسان.

7

(1) لدينا : $OB = OD$ ، $OA = OC$ و $\widehat{AOD} = \widehat{BOC}$ إذن فالمثلثان BOC و AOD متقايسان.



(2) بما أنّ المثلثين BOC و AOD متقايسان فإنّ $\widehat{OCB} = \widehat{OAD}$ منه :
$$180° - \widehat{OCB} = 180° - \widehat{OAD}$$
أي $\widehat{ICD} = \widehat{IAB}$. من جهة أخرى :
$$OB = OD \quad \text{و} \quad OA = OC$$
إذن بالطرح طرفا إلى طرف ينتج $AB = CD$. لكن $\widehat{AIB} = \widehat{CID}$ (متقابلتان بالرأس) ، نستنتج إذن أنّ المثلثين IAB و ICD متقايسان (ضلعان و الزاوية المحصورة بينهما).

(3) بما أنّ المثلثين IAB و ICD متقايسان فإنّ $IB = ID$، و بما أنّ $OB = OD$ و $[OI]$ ضلع مشترك فإنّ المثلثين OIB و OID متقايسان (تقايس الأضلاع الثلاثة مثنى مثنى).

(4) بما أنّ المثلثين OIB و OID متقايسان فإنّ $\widehat{IOB} = \widehat{IOD}$ و بالتالي فنصف المستقيم $[OI)$ هو منصِّف الزاوية $\widehat{xOy}$.

(5) لإنشاء منصف زاوية $\widehat{xOy}$ ، نعيِّن نقطتين A و B على الضلع $[Ox)$ ثمّ النقطتين C و D على الضلع $[Oy)$ بحيث $OA = OC$ و $OB = OD$ (بالمدور مثلا). نسمّي I نقطة تقاطع $[AD]$ و $[BC]$.
حسب ما سبق، نصف المستقيم $[OI)$ هو منصف الزاوية $\widehat{xOy}$.