موضوع البكالوريا التجريبي رقم 01

التمرين الأول:

أجب بصحيح أو خاطئ مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية:

1) إذا كانت $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{2}{3}} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{2}{3}} f(x) = -\infty$ فإن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{3}{2}} f\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$

2) إذا كان $S = \ln(2) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{2025}{2024}\right)$ فإن $e^S = 2024$

3) f و g دالتان. إذا كانت $f(x) = g\left(\ln\sqrt{x}\right)$ و $g'(x) = e^{3x}$ فإن $f'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{2x}$

4) حلول المتراجحة $\log(x+1) + \log(3-x) \le \log(2x+1) + \log 3$ في $\mathbb{R}$ هي $S =]0;3[$

5) إذا كانت الدالة f المعرفة والقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ دالة فردية فإن f' دالتها المشتقة على $\mathbb{R}$ دالة زوجية.

التمرين الثاني:

يحتوي كيس على 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس، موزعة كالتالي: كريتان بيضاوان مرقمتان بـ -1 ، 2 وخمس كريات خضراء مرقمة بـ -1 ، 0 ، 0 ، 1 ، 2 وثلاث كريات حمراء مرقمة بـ -1 ، 1 ، 2

I− نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من الكيس.

ونعتبر الأحداث التالية: A : "الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون"

B : "الحصول على ثلاث كريات تحمل نفس الرقم" C : "الحصول على ثلاث كريات مجموع أرقامها معدوم"

1) أ− احسب $p(A)$ ، $p(B)$ وبين أن $p(C) = \frac{7}{40}$

ب− احسب $p(A \cap C)$ ثم استنتج $p(\bar{A} \cap C)$

جـ− ما احتمال سحب ثلاث كريات مجموع أرقامها معدوم علما أنها ليست من نفس اللون؟

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب لثلاث كريات عدد الكريات التي تحمل الرقم 2

أ− عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$

ب− احسب احتمال الحدث "$X \ge 1$"

II− نسحب الآن عشوائيا على التوالي دون إرجاع ثلاث كريات من الكيس.

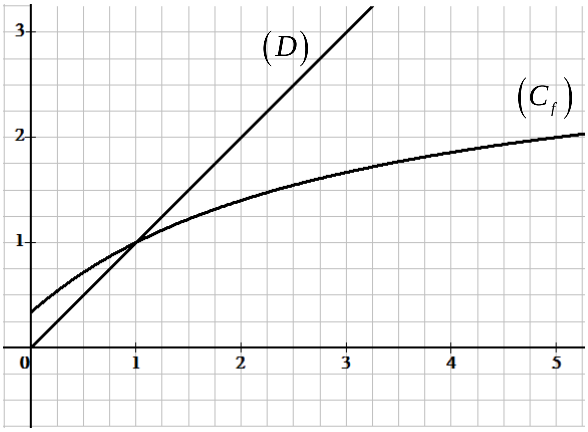
احسب احتمال الحدث D : "الحصول على ثلاث كريات جداء أرقامها معدوم"

التمرين الثالث:

I− f الدالة العددية المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{3x+1}{x+3}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$ و (D) المستقيم ذو المعادلة $y = x$

– بين أن الدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$



II– α عدد حقيقي موجب و (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0=\alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$

1) عين قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

2) نضع $\alpha=5$

أ– أعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل، الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 مبرزا خطوط الإنشاء.

ب– ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

3) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $1\leq u_n\leq 5$

4) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

5) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+1}$

أ– أثبت أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$ يطلب تعيين حدها الأول.

ب– عبر عن v_n و u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

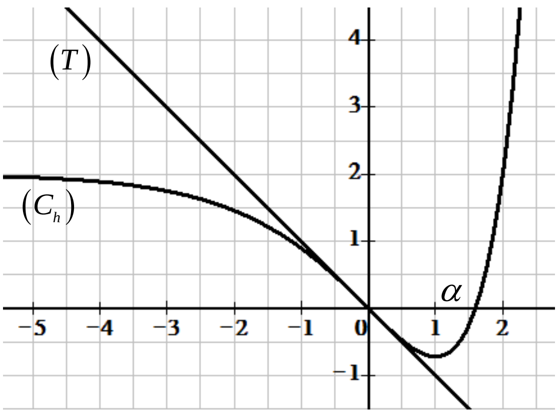
6) نضع: $S_n=v_n+v_{n+1}+\ldots+v_{n+1446}$ و $S_n'=\dfrac{1}{u_n+1}+\dfrac{1}{u_{n+1}+1}+\ldots+\dfrac{1}{u_{n+1446}+1}$

احسب بدلالة n المجموعين S_n و S_n'

التمرين الرابع:

I– (C_h) التمثيل البياني للدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=(x-2)e^x+2$

حيث (C_h) يقطع حامل الفواصل في النقطتين ذات الفاصلتين 0 و α و (T) المماس للمنحنى (C_h) عند المبدأ O كما في الشكل المقابل.



1) تحقق أن $1{,}5<\alpha<1{,}6$ ثم بقراءة بيانية، حدد حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $h(x)$

2) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=h(x)+x$

أ– بقراءة بيانية، عين $h'(0)$ ثم اكتب معادلة للماس (T)

ب– حدد وضعية (C_h) بالنسبة إلى (T) ثم استنتج إشارة $g(x)$

II– لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2(x-2)^2e^x+2x^2-8$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

2) أ– بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=2xh(x)$

بـ– استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

جـ– ماذا يمثل المبدأ O بالنسبة للمنحنى $\left(C_f\right)$؟

3) أ– بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f\left(x\right)=2\left(x-2\right)g\left(x\right)$

بـ– حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f\left(x\right)=0$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

4) أ– أنشئ $\left(C_f\right)$ بدقة (نأخذ $f\left(\alpha\right)=-1{,}3$)

بـ– ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m الموجب تماما عدد وإشارة حلول المعادلة $f\left(x\right)=\ln m$

5) أ– تحقق أن الدالة $K:x\mapsto\left(x^2-2x+2\right)e^x$ هي دالة أصلية للدالة $k:x\mapsto x^2e^x$ على $\mathbb{R}$

بـ– باستعمال المكاملة بالتجزئة، بين أن $\int_0^2 xe^x dx=e^2+1$

جـ– احسب $\mathcal{A}$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $\left(C_f\right)$ والمستقيمات التي معادلاتها $x=0$ ، $x=2$ و $y=0$

انتهى الموضوع

التمرين الخامس: (خاص بشعبتي رياضي / تقني رياضي)

1) عين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n التي من أجلها يكون العدد $M_n=4C_{n+1}^2-A_{n+3}^2+2$ مضاعفا للعدد 7

(لاحظ أن: $n^2+4n+3=\left(n+2\right)^2-1$)

2) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7

3) ليكن T_n العدد الطبيعي الذي يكتب في نظام العدد ذو الأساس 5 على الشكل $T_n=\underbrace{\overline{111...1}}_{(n+1)\ \text{رقما}}$

أ– أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $4T_n=5^{n+1}-1$ ثم استنتج أن $PGCD\left(T_n;5^n\right)=1$

بـ– ليكن m عددا طبيعيا.

بين أن ($4T_n\equiv m\left[7\right]$) تكافئ ($T_n\equiv 2m\left[7\right]$)

جـ– استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $N=T_{2024}+2T_{1445}$ على 7

4) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $5^nx+T_ny=1...\left(E_n\right)$

بين أن المعادلة $\left(E_n\right)$ تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$ ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $\left(E_2\right)$

حل الموضوع التجريبي رقم 01

التمرين 01 : صحيح / خطأ :

(1) الجواب : صحيح

التبرير :

لمّا $x \xrightarrow{>} \frac{3}{2}$ أي $x > \frac{3}{2}$

أي: $\frac{1}{x} < \frac{2}{3}$

أي: $\frac{1}{x} \xrightarrow{<} \frac{2}{3}$

1

ومنه:

$$\lim_{x \xrightarrow{>} \frac{3}{2}} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \xrightarrow{<} \frac{2}{3}} f(x) = +\infty.$$

(2) الجواب : خاطئ.

التبرير :

$$S = \ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \dots + \ln\frac{2025}{2024}.$$

$$S = \cancel{\ln 2} + \cancel{\ln 3} - \cancel{\ln 2} + \cancel{\ln 4} - \cancel{\ln 3} + \dots + \ln 2025 - \cancel{\ln 2024}$$

$$S = \ln 2025$$

$$e^S = e^{\ln 2025}$$

ومنه : $\boxed{e^S = 2025}$

(3) الجواب : خاطئ

التبرير :

$g'(x) = e^{3x}$ و $f(x) = g(\ln\sqrt{x})$.

ومنه f قابلة للاشتقاق على D_f و

دالتها المشتقة f' حيث :

$$f'(x) = (\ln\sqrt{x})' \times g'(\ln\sqrt{x})$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \times e^{3\ln\sqrt{x}}.$$

$$f'(x) = \frac{1}{2x} \cdot \sqrt{x}^3$$

$\sqrt{x}^3 = x\sqrt{x}$

$$f'(x) = \frac{x\sqrt{x}}{2x}.$$

(4) الجواب : خاطئ.

التبرير :

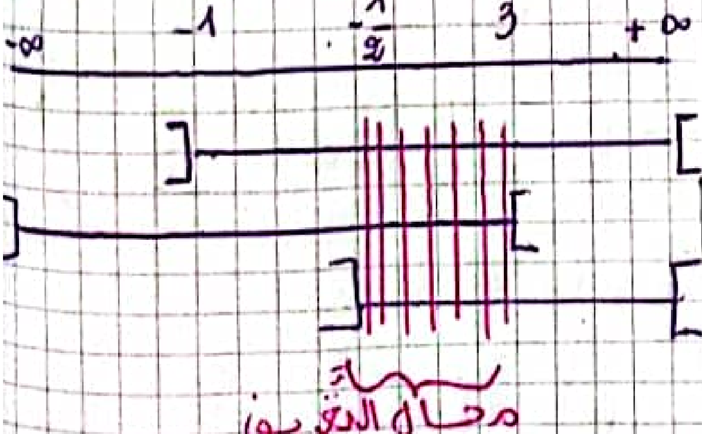
حلول المتراجحة:

$$\log(x+1) + \log(3-x) \leq \log(2x+1) - \log 3$$

المتراجحة معرّفة من أجل :

$2x+1>0$ و $3-x>0$ و $x+1>0$

$x > -\frac{1}{2}$ و $x<3$ و $x>-1$



مجال التعريف

المتراجحة معرّفة من أجل

$x \in]-\frac{1}{2}, 3[$

ومنه، المتراجحة تكافئ:

$\log(x+1)(3-x) \leq \log 3(2x+1)$.

$(x+1)(3-x) \leq 3(2x+1)$.

$3x - x^2 + 3 - x \leq 6x + 3$.

$-x^2 - 4x \leq 0$

$x^2 + 4x \geq 0$

$x(x+4) \geq 0$

$\boxed{\begin{array}{l} x=0 \\ x+4=0 \\ x=-4 \end{array}}$

x	$-\infty$		-4		$-\frac{1}{2}$		0		3		$+\infty$
x		$-$		$-$		$+$	0	$+$		$+$	
$(x+4)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$x(x+4)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	

المجال لي نحققوه (داخل المجال لي لقيناه)

ومنه: $S = [0,3[$.

5) الجواب: صحيح:

التبرير:

لدينا f دالة فردية.

ومنه: من أجل كل x من $\mathbb{R}$ و $-x \in \mathbb{R}$ لدينا

$f(-x) = -f(x)$.

باشتقاق الطرفين:

$[f(-x)]' = [-f(x)]'$.

2

$-f'(-x) = -f'(x)$

$f'(-x) = f'(x)$.

ومنه f' دالة زوجية.

التمرين 02: احتمالات.

2B (-1) (2)

5V (-1) (0) (0) (1) (2)

3R (-1) (1) (2)

I]- نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من الكيس.

• عدد الحالات الممكنة لهذا السحب:

$Card(\Omega) = C_{10}^3 = 120$.

1) حساب $P(A)$، $P(B)$ وتبيان أن $P(C) = \frac{7}{40}$

A: "الحصول على 3 كريات من نفس اللون":

000 أو 000 أو ~~000~~

$$P(A) = \frac{C_5^3 + C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{11}{120}$$

B: "الحصول على 3 كريات تحمل نفس الرقم":

$-1-1-1$ أو ~~000~~ أو ~~111~~ أو 222

$$P(B) = \frac{C_3^3 + C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{60}.$$

C: "الحصول على 3 أرقام مجموع أرقامها معدوم":

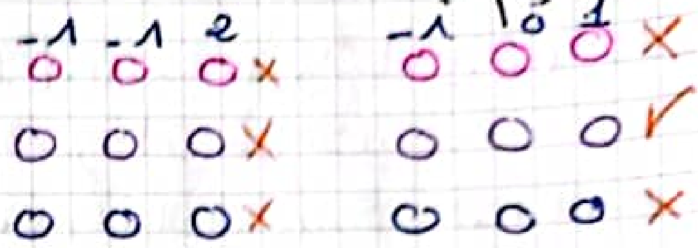
-101 أو $-1-12$.

$$P(C) = \frac{C_3^1 \times C_2^1 \times C_2^1 + C_3^2 \times C_3^1}{C_{10}^3}$$

$P(C) = \frac{7}{40}$.

ب) حساب $P(A\cap C)$ ثم استنتاج $P(\bar{A}\cap C)$:

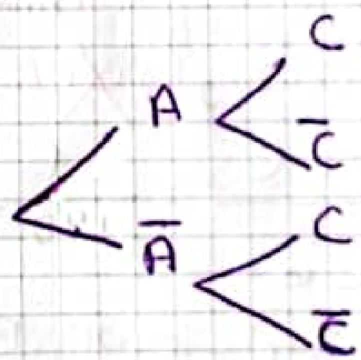
$(A\cap C)$ "الحصول على 3 كريات من نفس اللون ومجموع أرقامها معدوم"



ومنه:

$$P(A\cap C)=\frac{C_1^1\times C_2^1\times C_3^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{60}$$

بتطبيق قانون الاحتمالات الكلية:



3

$$P(C)=P(A\cap C)+P(\bar{A}\cap C).$$

ومنه:

$$P(\bar{A}\cap C)=P(C)-P(A\cap C).$$
$$=\frac{7}{40}-\frac{1}{60}=\frac{19}{120}.$$

ج/ احتمال سحب 3 كريات مجموع أرقامها معدوم علما أنها ليست من نفس اللون. $P_{\bar{A}}(C)$

$$P_{\bar{A}}(C)=\frac{P(\bar{A}\cap C)}{P(\bar{A})}=\frac{P(\bar{A}\cap C)}{1-P(A)}.$$

$$P_{\bar{A}}(C)=\frac{\frac{19}{120}}{1-\frac{11}{120}}=\frac{19}{109}.$$

II] X: عدد الكريات التي تحمل الرقم 0.

أ- قانون احتمال X.

$$X=\{0,1,2,3\}$$

$$P(X=0)=\frac{C_7^3}{C_{10}^3}=\frac{35}{120}.$$

$$P(X=1)=\frac{C_3^1\times C_7^2}{C_{10}^3}=\frac{63}{120}$$

$$P(X=2)=\frac{C_3^2\times C_7^1}{C_{10}^3}=\frac{21}{120}.$$

$$P(X=3)=\frac{C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{120}.$$

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{35}{120}$	$\frac{63}{120}$	$\frac{21}{120}$	$\frac{1}{120}$

حساب $E(X)$:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{4} x_i\times P(X=x_i)$$

$$E(X)=\frac{0+63+42+3}{120}=\frac{9}{10}$$

ب) حساب $P(X \geq 1)$

$X \geq 1$ تكافئ:

$X=1$ أو $X=2$ أو $X=3$

ومنه:

$P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$

$P(X \geq 1) = \frac{17}{24}$.

طريقة أخرى:

$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0)$.

$= 1 - \frac{35}{120}$.

$= \frac{17}{24}$.

II] نسحب عشوائيا على التوالي دون إرجاع 3 كريات من الكيس:

عدد الحالات الممكنة لهذا السحب:

$Card(\Omega) = A_{10}^3 = 720$.

حساب $P(D)$:

D: الحصول على 3 كريات جداء أرقامها معدوم.

$0\ \bar{0}\ \bar{0}$ أو $0\ 0\ \bar{0}$

$P(D) = 1 - P(\bar{D}) = 1 - \frac{A_8^3}{A_{10}^3}$.

$P(\bar{D}) = \frac{8}{15}$

4

طريقة أخرى:

$$P(D) = \frac{3A_2^1 \times A_8^2 + 3A_2^2 \times A_8^1}{A_{10}^3}$$

$P(D) = \frac{8}{15}$.

سؤال إضافي:

• هل الحدثان A و C مستقلان:

لدينا: $P(A) \times P(C) = \frac{77}{4800}$.

$P(A \cap C) = \frac{1}{60}$.

بما أن $P(A) \times P(C) \neq P(A \cap C)$

فإن A و C غير مستقلين.

التمرين 03: (متتاليات عددية).

I] $D_f = [0, +\infty[$; $f(x) = \frac{3x+1}{x+3}$

نبين أن f متزايدة تماما على $[0, +\infty[$:

f قابلة للاشتقاق على $[0; +\infty[$ ودالتها المشتقة f' حيث:

$$f'(x) = \frac{3(x+3) - 3x - 1}{(x+3)^2} = \frac{8}{(x+3)^2} > 0$$

ومنه f متزايدة تماما على $[0, +\infty[$

II] $\alpha \geq 0$; $n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

ب) تعيين قيمة α حتى تكون (U_n) ثابتة:

(U_n) ثابتة معناه

$U_{n+1} = U_n = U_0 = \alpha$.

ومنه: $\alpha = f(\alpha)$

$\alpha = \frac{3\alpha + 1}{\alpha + 3}$

$\alpha^2 - 1 = 0$

$\alpha = -1$ أو $\alpha = 1$

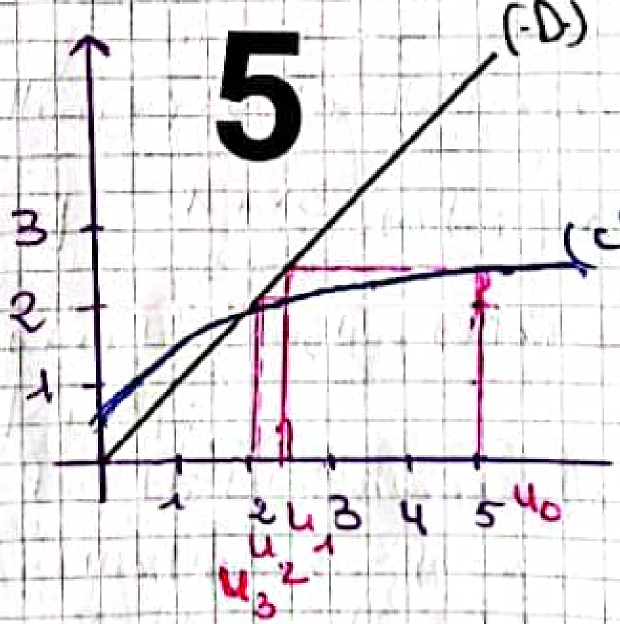
و نعلم أن $\alpha \geq 0$

أي: $\boxed{\alpha = 1}$

تكون (U_n) ثابتة من أجل $\alpha = 1$

3) نضع $\alpha = 5$.

أ) تمثيل الحدود U_0، U_1، U_2 و U_3:



ب) التخمين:

نلاحظ أن $U_0 > U_1 > U_2 > U_3$

(U_n) متتالية متناقصة،

وحدودها تتقارب نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) و (D)

(U_n) متقاربة.

3) البرهان بالتراجع:

$1 \leq U_n \leq 5$

نسمي $P(n)$ الخاصية "$1 \leq U_n \leq 5$".

من أجل $n=0$ لدينا، $U_0 = 5$

و: $1 \leq 5 \leq 5$

أي، $1 \leq U_0 \leq 5$

ومنه: $P(0)$ صحيحة.

من أجل $n \in \mathbb{N}$:

نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي

$1 \leq U_n \leq 5$.

ونبرهن صحة $P(n+1)$ من أجل $n+1$ أي $1 \leq U_{n+1} \leq 5$.

لدينا $1 \leq U_n \leq 5$

ولدينا الدالة المرفقة بالمتتالية (U_n) متزايدة على $[1;5]$.

أي $f(1) \leq f(U_n) \leq f(5)$.

$1 \leq U_{n+1} \leq 2 \leq 5$

ومنه: $P(n+1)$ صحيحة.

حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n

$1 \leq U_n \leq 5$

ب) دراسة اتجاه تغير (U_n):

ندرس إشارة الفرق $U_{n+1} - U_n$.

$U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n$.

$$= \frac{3U_n+1}{U_n+3} - U_n$$

$$= \frac{1-U_n^2}{U_n+3}$$

$$= \frac{(1-U_n)(1+U_n)}{U_n+3}.$$

من 3) [البرهان بالتراجع].

$$1 \leq U_n \leq 5$$

$U_n+3>0 \qquad 1+U_n>0 \qquad 1-U_n\leq 0$

ومنه

$U_{n+1}-U_n \leq 0$.

(U_n) متتالية متناقصة.

[يؤكد صحة التخمين].

وبما أن (U_n) متناقصة محدودة من الأسفل بالعدد 1

فهي متقاربة نحو نهاية ℓ.

5) $V_n = \frac{U_n-1}{U_n+1}$.

أ/ إثبات أن (V_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$:

من أجل $n\in\mathbb{N}$ لدينا:

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1}-1}{U_{n+1}+1}$$

$$V_{n+1} = \frac{\frac{3U_n+1}{U_n+3}-1}{\frac{3U_n+1}{U_n+3}+1}$$

$$V_{n+1} = \frac{3U_n+1-U_n-3}{3U_n+1+U_n+3}.$$

$$V_{n+1} = \frac{2U_n-2}{4U_n+4} = \frac{2}{4}\times\frac{(U_n-1)}{(U_n+1)}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot V_n$$

ومنه (V_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

وحدها الأول V_0 حيث:

$$V_0 = \frac{U_0-1}{U_0+1} = \frac{5-1}{5+1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

ب) V_n بدلالة n و U_n بدلالة n و $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

من أجل n من $\mathbb{N}$ لدينا:

$$V_n = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n ; n\in\mathbb{N}.$$

ولدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}$

$$V_n = \frac{U_n-1}{U_n+1} = \frac{U_n+1-2}{U_n+1}$$

$$= 1-\frac{2}{U_n+1}.$$

ومنه:

$$\frac{2}{U_n+1} = 1-V_n \quad ---(*)$$

$$U_n = \frac{2}{1-V_n} - 1$$

$$U_n = \frac{1+V_n}{1-V_n}.$$

$U_n = \frac{2}{1-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n} - 1$

حساب النهاية :

$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{1-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n} - 1$

$= \frac{2}{1} - 1 = \boxed{1}$

لأنّ : $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

$0 < \frac{1}{2} < 1$

6) حساب S_n و S_n' :

$S_n = V_n + V_{n+1} + \dots + V_{n+1446}$

$S_n = V_n \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$

$S_n = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n \left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{1447}\right]$

$S_n' = \frac{1}{U_n+1} + \frac{1}{U_{n+1}+1} + \dots + \frac{1}{U_{n+1446}+1}$

لدينا من (*) $\frac{1}{U_n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}V_n$

$S_n' = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}V_n\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}V_{n+1}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}V_{n+1446}\right)$

$S_n' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\underbrace{V_n + V_{n+1} + \dots + V_{n+1446}}_{S_n}\right)$

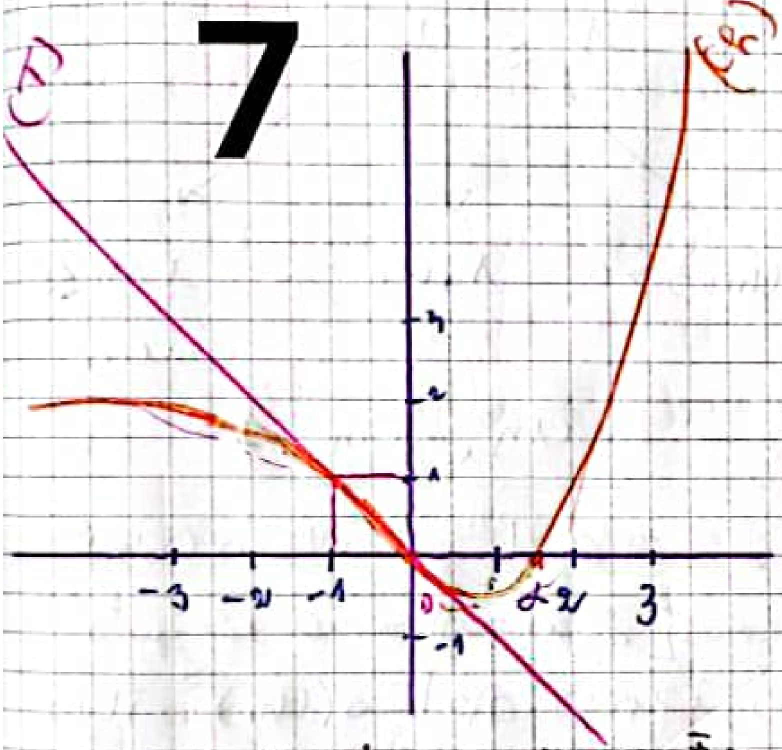
$S_n' = \frac{1447}{2} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n \left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{1447}\right]$

$S_n' = \frac{8}{3}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1447} - \left(\frac{1}{2}\right)^n + 43.41\right]$

التمرين الرابع :

I] $D_h = \mathbb{R}$; $h(x) = (x-2)e^x + 2$

7



1) التحقق أنّ $1,5 < \alpha < 1,6$.

لدينا: (Ch) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين إحداهما فاصلتها α أي $h(\alpha)=0$.

ولدينا: h مستمرة ومتزايدة تماما على $[1,5 ; 1,6]$.

ولدينا:

$h(1,5) \simeq -0,24$ و $h(1,6) \simeq 0,019$.

أي

$h(1,5) \times h(1,6) < 0$.

ومنه

$1,5 < \alpha < 1,6$

إشارة $h(x)$:
بقراءة بيانية:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

[وضعية (C_h) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل].

2- $D_g=\mathbb{R}$ ؛ $g(x)=h(x)+x$

أ- بقراءة بيانية تعيين $h'(0)$:

شرح:
قراءة بيانية:
$f(1)$: الصورة $\longrightarrow (C_f)$
$f'(1)$: المماس
أفقي: $f'(1)=0$
مائل: a
عمودي: /
$f''(1)$: نقطة الانعطاف
$f''(1)=0$

لدينا: (C_h) يقبل مماسا (T) عند 0.

$h'(0)$: الميل (معامل توجيه المماس T)

$$h'(0)=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-1}{0-(-1)}$$

$$\boxed{h'(0)=-1.}$$

معادلة المماس (T):

$$(T): y=h'(0)(x-0)+h(0)$$

$$y=-1(x-0)+0$$

ومنه $\boxed{(\Delta): y=-x}$

ب) وضعية (C_h) بالنسبة إلى (T):

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h(x)-(-x)$ $h(x)+x$ $g(x)$		$-$	0	$+$	
الوضعية النسبية		(C_h) تحت (T)	(C_h) يقطع (T)	(C_h) فوق (T)	

استنتاج إشارة $g(x)$:
من الوضعية السابقة نستنتج أن:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II] $f(x)=2(x-2)^2e^x+2x^2-8$

$D_f=\mathbb{R}$

أ) حساب النهايات:

تذكير:

$$\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty}e^x=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty}x^ne^x=0$$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[2(x-2)^2e^x + 2x^2 - 8\right]$$

$+\infty \times 0$ ، $+\infty$

ح.ع.ت

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[2(\underbrace{x^2e^x}_{0} - \underbrace{4xe^x}_{0} + \underbrace{4e^x}_{0}) + \underbrace{2x^2 - 8}_{+\infty}\right]$$

$$= \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{2(x-2)^2}_{+\infty}\underbrace{e^x}_{+\infty} + \underbrace{2x^2-8}_{+\infty}\right]$$

$$= \boxed{+\infty}$$

2) أ- نبين أن $f'(x) = 2x\,h(x)$: $x \in \mathbb{R}$

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$

ودالتها المشتقة f' حيث:

$$f'(x) = 2\left[2(x-2)e^x + (x-2)^2e^x\right] + 4x$$

$$f'(x) = 2\left[\left(2(x-2) + (x-2)^2\right)e^x + 2x\right]$$

$$f'(x) = 2\left[(2x - \cancel{4} + x^2 - 4x + \cancel{4})e^x + 2x\right]$$

$$f'(x) = 2\left[(x^2 - 2x)e^x + 2x\right]$$

$$f'(x) = 2\left[x(x-2)e^x + 2x\right]$$

$$f'(x) = 2x\left[(x-2)e^x + 2\right]$$

ومنه : $\boxed{f'(x) = 2x.h(x)}$

4) إستنتاج إتجاه تغير الدالة f

إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$ من إشارة $h(x)$ ، x

كما يلي :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

- الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty, \alpha]$
- الدالة f متزايدة تماما على المجال $[\alpha, +\infty[$

9

- جدول تغيرات f :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

ج) المبدأ O هو نقطة إنعطاف لـ (C_f) لأن المشتقة الأولى إنعدمت عنده ولم تغير إشارتها بجوار O

3) نبين أن: $f(x) = 2(x-2)g(x)$

$$f(x) = 2(x-2)^2e^x + 2x^2 - 8$$

$$f(x) = 2\left[(x-2)^2e^x + (x^2-4)\right]$$

$$f(x) = 2\left[(x-2)^2e^x + (x-2)(x+2)\right]$$

$$f(x) = 2(x-2)\left[(x-2)e^x + (x+2)\right]$$

$f(x)=2(x-2)\left[\underbrace{(x-2)e^x+2}_{h(x)}+x\right]$.

$f(x)=2(x-2)\left[\underbrace{h(x)+x}_{g(x)}\right]$.

ومنه، $f(x)=2(x-2)g(x)$

ب) حل المعادلة: $f(x)=0$ في $\mathbb{R}$

$f(x)=0$ معناه $2(x-2)g(x)=0$

معناه $x-2=0$ أو $g(x)=0$

معناه $x=2$ أو $x=0$

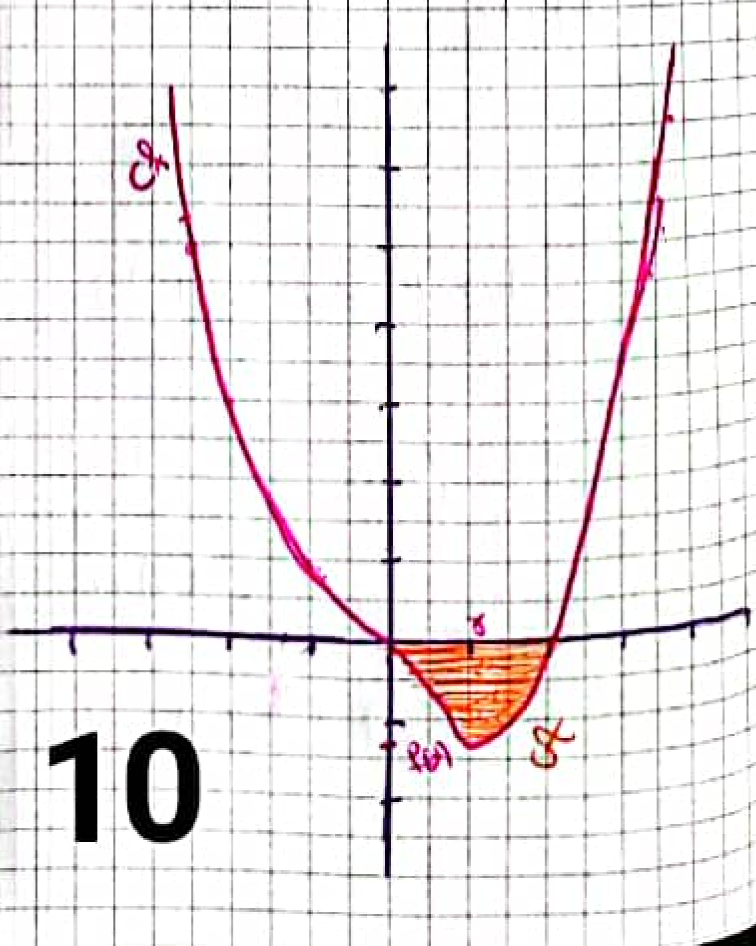
حلا المعادلة $f(x)=0$ هما $x=0$ أو $x=2$

تفسير النتيجة بيانيا:

(C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطتين ذات الفاصلتين 0 و 2.

$(C_f)\cap(x'x)=\{(0,0);(2,0)\}$.

4) إنشاء (C_f) بدقة مع: $f(\alpha)=-1.3$.



10

ب) المناقشة البيانية لعدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=\ln m$ $(m>0)$.

حلول المعادلة $f(x)=\ln m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع (Δm) ذو المعادلة $y=\ln m$

• المناقشة:

- $\ln m<f(\alpha)$ أي $0<m<e^{f(\alpha)}$: ليست للمعادلة حلول
- $\ln m=f(\alpha)$ أي $m=e^{f(\alpha)}$: للمعادلة حل واحد موجب هو α
- $f(\alpha)<\ln m<0$

$e^{f(\alpha)}<m<1$

للمعادلة حلين موجبين.

- $\ln m=0$ أي $m=1$

للمعادلة حلين أحدهما معدوم و الآخر موجب

- $\ln m>0$ أي $m>1$

للمعادلة حلين أحدهما سالب والآخر موجب.

6) التحقق أن $K'(x)=K(x)$:

الدالة K قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة K' حيث:

$K'(x)=(2x-2)e^x+(x^2-2x+2)e^x$

$=(\cancel{2x}-\cancel{2}+x^2-\cancel{2x}+\cancel{2})e^x$

$=x^2\cdot e^x$

$=K(x)$.

ومنه: k دالة أصلية لـ k' على $\mathbb{R}$.

ب) نبيّن أنّ $\int_0^2 xe^x dx = e^2+1$

$$\int_0^2 \underbrace{x}_{u}.\underbrace{e^x}_{v'} dx = [\underbrace{x}_{u}\underbrace{e^x}_{v}]_0^2 - \int_0^2 \underbrace{1}_{u'}.\underbrace{e^x}_{v} dx$$

$$= [xe^x - e^x]_0^2$$

$$= [(x-1)e^x]_0^2$$

$$= [e^2] - [-1]$$

ومنه:

$$\int_0^2 x.e^x dx = e^2+1.$$

ج) حساب A:

(C_f) يقع أسفل حامل محور الفواصل في المجال $[0,2]$.

$$A = \int_0^2 -f(x)\, dx$$

$$A = -\int_0^2 \left(2(x-2)^2 e^x + 2x^2 - 8\right) dx$$

$$A = -2\int_0^2 \left[(x-2)^2 e^x + x^2 - 4\right] dx.$$

$$A = -2\int_0^2 x^2 e^x dx - 4\int_0^2 xe^x dx + 4\int_0^2 e^x dx + \int_0^2 (x^2-4)\, dx.$$

$$A = -2\left[[k(x)]_0^2 - 4(e^2+1) + 4[e^x]_0^2 + \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_0^2\right].$$

$$A = -2\left[k(2) - k(0) - 4(e^2+1) + 4(e^2-1) + \left(\frac{8}{3} - 8\right)\right].$$

$$A = -2\left[2e^2 - 2 - 4e^2 - 4 + 4e^2 - 4 + \frac{8}{3} - 8\right]$$

$$A = -2\left[2e^2 + \frac{8}{3} - 18\right].$$

$$A = \frac{92}{3} - 4e^2.$$

$$\boxed{A = \frac{92 - 12e^2}{3}}$$ ومنه $(u.a)$

الموضوع 1:

التمرين الخامس: (... ن)

4) تعيين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n ($n\in\mathbb{N}^*$) التي من أجلها M_n مضاعف لـ 7.

$$M_n = 4C_{n+1}^2 - A_{n+3}^2 + 2$$

$$M_n = 4\frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} - \frac{(n+3)!}{(n+1)!} + 2$$

$$M_n = 2(n+1)n - (n+3)(n+2) + 2$$

$$M_n = 2n^2 + 2n - n^2 - 5n - 4$$

0.25 ومنه: $\boxed{M_n = n^2 - 3n - 4}$

M_n مضاعف لـ 7 معناه: $n^2 - 3n - 4 \equiv 0[7]$

بالإرفاق: $n^2 + 4n - 4 \equiv 0[7]$

$(n+2)^2 - 1 \equiv 0[7]$

$(n+2-1)(n+2+1) \equiv 0[7]$

$(n+1)(n+3) \equiv 0[7]$

$n+1 \equiv 0[7]$ أو $n+3 \equiv 0[7]$

$n \equiv -1[7]$ أو $n \equiv -3[7]$

$n \equiv 6[7]$ أو $n \equiv 4[7]$

$n = 7k+6$ أو $n = 7k+4$ ، $k\in\mathbb{N}$

0.50 ومنه: $n = \{7k+4 ; 7k+6 / k\in\mathbb{N}\}$

2) بواقي قسمة 5^n على 7:

$n=$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
$5^n \equiv$	1	5	4	6	2	3

3) $T_n = \overline{\underbrace{11\ldots11}_{(n+1)\text{ رقماً}}}^{5}$

1) اثبات أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $4T_n = 5^{n+1} - 1$

لدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$$T_n = 1\times5^0 + 1\times5^1 + \dots + 1\times5^n$$

$$T_n = 1\cdot\frac{5^{n+1}-1}{5-1}$$

$$T_n = \frac{5^{n+1}-1}{4}$$

0.25 ومنه: $\boxed{4T_n = 5^{n+1} - 1}$

استنتاج أن: $PGCD(T_n ; 5^n) = 1$

لدينا:

$$4T_n = 5^{n+1} - 1$$

$$4T_n = 5\cdot5^n - 1$$

$$\boxed{T_n(-4) + 5^n(5) = 1}$$

0.25 ومنه: حسب مبرهنة بيزو فإنه T_n و 5^n أوليان فيما بينهما

أي: $\boxed{PGCD(T_n ; 5^n) = 1}$

$n \in \mathbb{N}$:ب

نبين أن: $4T_n \equiv n[7]$ تكافئ $T_n \equiv 2n[7]$

لدينا: $4T_n \equiv n[7]$ ومنه $8T_n \equiv 2n[7]$

$T_n \equiv 2n[7]$

لأن: $8 \equiv 1[7]$

لدينا: $T_n \equiv 2n[7]$ ومنه: $4T_n \equiv 8n[7]$

$4T_n \equiv n[7]$

لأن: $8 \equiv 1[7]$

ومنه: $\boxed{4T_n \equiv n[7] \text{ تكافئ } T_n \equiv 2n[7]}$

ج) استنتاج باقي قسمة N على 7:

$N = T_{2024} + 2T_{4047}$

لدينا: $4T_{2024} = 5^{2025} - 1$

$4T_{2024} \equiv 5^{2025} - 1[7]$

$4T_{2024} \equiv 5^{6k+3} - 1[7]$

$4T_{2024} \equiv 5[7]$

ومنه: $T_{2024} \equiv 10[7]$

$T_{2024} \equiv 3[7] \ldots (1)$

$4T_{4047} = 5^{4048} - 1$

$4T_{4047} \equiv 5^{4048} - 1[7]$

$4T_{4047} \equiv 5^{6k} - 1[7]$

$4T_{4047} \equiv 0[7]$

ومنه: $T_{4047} \equiv 0[7] \ldots (2)$

من (1) و (2):

$N \equiv T_{2024} + 2T_{4047}[7]$

$N \equiv 3 + 2.0[7]$

$N \equiv 3[7]$

0.50 باقي قسمة N على 7 هو 3

4) $n \in \mathbb{N}^*$:

$5^n x + T_n y = 1 \ldots (E_n)$

نبين أن (E_n) تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$:

لدينا: $PGCD(T_n; 5^n) = 1$

و: $PGCD(T_n; 5^n)$ قاسم لـ 1

0.25 ومنه: المعادلة (E_n) تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$

$ax + by = d \ldots (E)$

إذا كان $PGCD(a;b) = d$

فإن (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$

$5^2 = 25$

$T_2 = 31$

حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E_1)

(E_1) تكافئ: $\begin{cases} 25x + 31y = 1 \\ 25(5) + 31(-4) = 1 \end{cases}$ ولدينا

ومنه: $25x + 31y = 25(5) + 31(-4)$

$25x - 25.5 = -31y - 31.4$

$\boxed{25(x-5) = 31(-y-4)}$

معناه:

31 قاسم لـ $25(x-5)$

و 25 و 31 أوليان فيما بينهما

حسب مبرهنة غوص فإن 31 قاسم لـ $x-5$

ومنه: $x = 31\lambda + 5$

بالتعويض نجد: $y = -25\lambda - 4$

ومنه:

0.50 $\boxed{S_{(E_1)} = \{(x;y) = (31\lambda + 5; -25\lambda - 4) / \lambda \in \mathbb{Z}\}}$