## تمرين 1

أحسب الجداء السلمي $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ في كل حالة من الحالات التالية :

1- $\|\vec{u}\| = 3$ و $\|\vec{v}\| = 2$ و $(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\pi}{4}$

2- $\|\vec{u}\| = \frac{4}{7}$ و $\|\vec{v}\| = \frac{1}{2}$ و $(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\pi}{6}$

3- $\|\vec{u}\| = 5$ و $\|\vec{v}\| = \frac{3}{2}$ و $(\vec{u},\vec{v}) = \frac{2\pi}{3}$

4- $\|\vec{u}\| = 3$ و $\|\vec{v}\| = 4$ و $(\vec{u},\vec{v}) = \frac{7\pi}{6}$

5- $\|\vec{u}\| = 6$ و $\|\vec{v}\| = 5$ و $(\vec{u},\vec{v}) = -\frac{\pi}{4}$

6- $\|\vec{u}\| = 4\sqrt{3}$ و $\|\vec{v}\| = \frac{7}{3}$ و $(\vec{u},\vec{v}) = -\frac{\pi}{6}$

## حل التمرين رقم 1

1- $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 3 \times 2 \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}$

2- $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{7}$

3- $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 5 \times \frac{3}{2} \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-15}{4}$

لأن : $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

4- $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 3 \times 4 \times \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -6\sqrt{3}$

لأن : $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

5- $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 6 \times 5 \times \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 15\sqrt{2}$

لأن : $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

6- $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 4\sqrt{3} \times \frac{7}{3} \times \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 14$

لأن : $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$



## تمرين 2

أحسب الجداءات السلمية التالية : $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{AD}\,.\,\overrightarrow{CB}$ ، $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{CD}\,.\,\overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{DO}\,.\,\overrightarrow{OI}$ ، $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{DB}$ حيث: $OI = 1$ .

## حل التمرين رقم 2

1- بما أن : الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطين خطيا و لهما نفس الاتجاه .

فان : $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = 9 \times 6 = 54$

2- بما أن : الشعاعين $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{CB}$ مرتبطين خطيا و متعاكسين في الاتجاه .

فان : $\overrightarrow{AD}\,.\,\overrightarrow{CB} = -4 \times 3 = -12$

3- بما أن : الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطيا و متعاكسين في الاتجاه .

فان : $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{CD} = -9 \times 10 = -90$

4- بما أن : الشعاعين $\overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{AD}$ مرتبطين خطيا و لهما نفس الاتجاه .

فان : $\overrightarrow{CD}\,.\,\overrightarrow{AD} = 10 \times 4 = -40$

5- بما أن : الشعاعين $\overrightarrow{DO}$ و $\overrightarrow{OI}$ مرتبطين خطيا و لهما نفس الاتجاه .

فان : $\overrightarrow{DO}\,.\,\overrightarrow{OI} = 6 \times 1 = 6$

6- بما أن : الشعاعين $\overrightarrow{IA}$ و $\overrightarrow{DB}$ مرتبطين خطيا و متعاكسين في الاتجاه .

فان : $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{DB} = -3 \times 13 = -39$

**النجاح** يحققه فقط الذين **يواصلون المحاولة** بنظرة ايجابية للأشياء

## تمرين 3

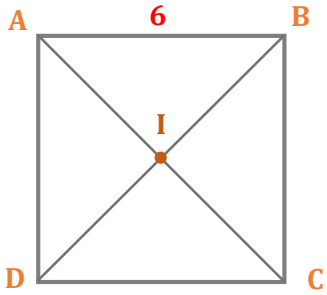
$ABCD$ مربع حيث:

$AB = 6$ و $I$ نقطة تقاطع قطريه.

أحسب الجداءات السلمية التالية :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}$ ، $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{BI}$ ، $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}$




## حل التمرين رقم 3

1- بما أن : الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DC}$ مرتبطين خطيا و لهما نفس الاتجاه .

فان : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} = 6 \times 6 = 36$

2- بما أن : الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CB}$ متعامدين .

فان : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB} = 0$

3- بما أن : قطرا المربع متعامدين فان الشعاعين $\overrightarrow{IB}$ و $\overrightarrow{IC}$ متعامدين.

ومنه : $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC} = 0$

4- بما أن : الشعاعين $\overrightarrow{BI}$ و $\overrightarrow{DI}$ مرتبطين خطيا و متعاكسين في الاتجاه .

فان : $\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{BI} = -6 \times 6 = -36$

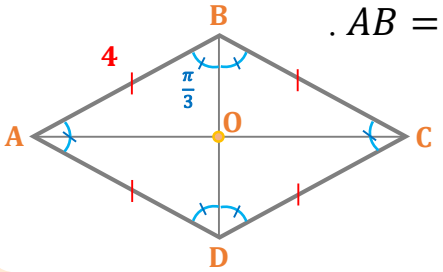
## تمرين 4

$ABD$ و $BCD$ مثلثان متقايسا الأضلاع حيث $AB = 4$ .

أحسب الجداءات السلمية التالية :

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB}$ ، $\overrightarrow{DO}.\overrightarrow{CD}$






## حل التمرين رقم 4

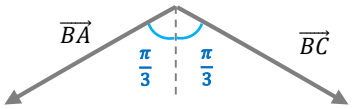
1- لدينا : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \text{AB} \times \text{AD} \times \cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$

ومنه : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 4 \times 4 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ اذن : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 8$

2- لدينا : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \text{BA} \times \text{BC} \times \cos(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$

ومنه : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 4 \times 4 \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ اذن : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = -8$

لأن : $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

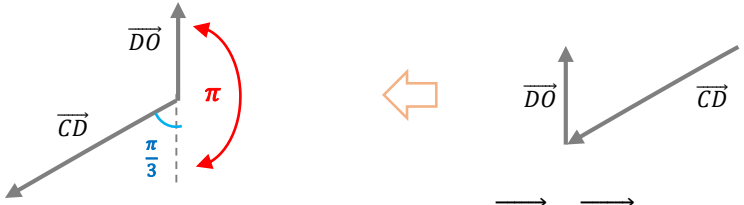



3- لدينا : $\overrightarrow{DO}.\overrightarrow{CD} = \text{DO} \times \text{CD} \times \cos(\overrightarrow{DO},\overrightarrow{CD})$

ومنه : $\overrightarrow{DO}.\overrightarrow{CD} = 2 \times 4 \times \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ اذن : $\overrightarrow{DO}.\overrightarrow{CD} = -4$

لأن : $(\overrightarrow{DO},\overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{DO},-\overrightarrow{DC}) = (\overrightarrow{DO},\overrightarrow{DC}) + \pi = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$

حيث : $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$




4- بما أن : الشعاعين $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{CB}$ مرتبطين خطيا و متعاكسين في الاتجاه .

فان : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB} = -4 \times 4$ اذن : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB} = -8$

يقوم **الناجحون** بما لا يرغب به **الفاشلون** ، لذا **لا** تتمنى ان يكون الامر **سهلا**
بل تمنى ان تكون **انت الأفضل**

تمرين 5

أحسب بطريقتين الجداء السلمي $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ في كل حالة من الحالات التالية :

1- $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

2- $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

3- $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}$

4- $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$

## حل التمرين رقم 5

**الطريقة الأولى : نستعمل " $\vec{u}\,.\,\vec{v} = xx' + yy'$ "**

1- $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 3\times(-1) + (-2) = 5$

2- $\vec{u}\,.\,\vec{v} = (4\times 2) + (-6)\times(1) = 2$

3- $\vec{u}\,.\,\vec{v} = (5\times 7) + (2\times 8) = 51$

4- $\vec{u}\,.\,\vec{v} = (2)\times(-4) + (-4)\times(-2) = 0$

**الطريقة الثانية : نستعمل " $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$ "**

1- لدينا :

$\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2}$

$\|\vec{u}-\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2}$

وعليه : $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 8$ ، $\|\vec{v}\|^2 = 2$ ، $\|\vec{u}\|^2 = 13$

اذن : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \frac{1}{2}(13 + 5 - 8) = 5$

2- لدينا :

$\|\vec{u}\| = \sqrt{4^2 + (-6)^2}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + 1^2}$

$\|\vec{u}-\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + (-7)^2}$



وعليه : $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 53$ ، $\|\vec{v}\|^2 = 5$ ، $\|\vec{u}\|^2 = 52$

اذن : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \frac{1}{2}(52 + 5 - 53) = 2$

3- لدينا :

$\|\vec{u}\| = \sqrt{5^2 + 2^2}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{7^2 + 8^2}$

$\|\vec{u}-\vec{v}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2}$

وعليه : $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 40$ ، $\|\vec{v}\|^2 = 113$ ، $\|\vec{u}\|^2 = 29$

اذن : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \frac{1}{2}(29 + 113 - 40) = 51$

4- لدينا :

$\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + (-4)^2}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2}$

$\|\vec{u}-\vec{v}\| = \sqrt{6^2 + (-2)^2}$

وعليه : $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 40$ ، $\|\vec{v}\|^2 = 20$ ، $\|\vec{u}\|^2 = 20$

اذن : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \frac{1}{2}(20 + 20 - 40) = 0$

## ملاحظة

اذا كان $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ فان حساب مركبات الشعاع $\vec{u}-\vec{v}$ هي كتالي :

$$\vec{u}-\vec{v}\begin{pmatrix}x-x'\\y-y'\end{pmatrix}$$

تمرين 6

في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ لدينا النقط $A(5,2)$ ، $B(3,4)$ و $C(0,1)$ .

1- أحسب الجداء السلمي لـ : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ .

2- ماذا يمكن القول عن المثلث $ABC$ .

## حل التمرين رقم 6

**الطريقة الأولى : نستعمل " $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$ "**

1- ▪ لدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-5\\4-2\end{pmatrix}$ و منه $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ و لدينا $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0-5\\1-2\end{pmatrix}$ ومنه $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\-1\end{pmatrix}$ .

اذن : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=(-2)\times(-5)+(2)\times(-1)=8$

▪ لدينا : $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}5-3\\2-4\end{pmatrix}$ و منه $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$ و لدينا $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0-3\\1-4\end{pmatrix}$ ومنه $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}$ .

اذن : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=(2)\times(-3)+(-2)\times(-3)=0$

▪ لدينا : $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}5-0\\2-1\end{pmatrix}$ و منه $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ و لدينا $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}3-0\\4-1\end{pmatrix}$ ومنه $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ .

اذن : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=(5)\times(3)+(1)\times(3)=18$

**الطريقة الثانية : نستعمل " $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$ "**

1- لدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-5\\4-2\end{pmatrix}$ و منه $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ و لدينا $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0-5\\1-2\end{pmatrix}$ ومنه $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\-1\end{pmatrix}$ .

ولدينا أيضا : $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}$ وعليه $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}3-0\\4-1\end{pmatrix}$ ومنه $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ .

اذن :

$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(-2)^2+(2)^2}$

$\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{(-5)^2+(-1)^2}$

$\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\|=\|\overrightarrow{CB}\|=\sqrt{3^2+3^2}$

وعليه : $\|\overrightarrow{AB}\|^2=8$ و $\|\overrightarrow{AC}\|^2=26$ و $\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\|^2=18$



اذن : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(8+26-18)=8$

▪ لدينا : $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}5-3\\2-4\end{pmatrix}$ و منه $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$ و لدينا $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0-3\\1-4\end{pmatrix}$ ومنه $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}$ .

ولدينا أيضا : $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}$ وعليه $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0-5\\1-2\end{pmatrix}$ ومنه $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\-1\end{pmatrix}$ .

اذن :

$\|\overrightarrow{BA}\|=\sqrt{(2)^2+(-2)^2}$

$\|\overrightarrow{BC}\|=\sqrt{(-3)^2+(-3)^2}$

$\|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}\|=\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{(-5)^2+(-1)^2}$

وعليه : $\|\overrightarrow{BA}\|^2=8$ و $\|\overrightarrow{BC}\|^2=18$ و $\|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}\|^2=26$

اذن : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(8+18-26)=0$

▪ لدينا : $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}5-0\\2-1\end{pmatrix}$ و منه $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ و لدينا $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}3-0\\4-1\end{pmatrix}$ ومنه $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ .

ولدينا أيضا : $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}$ وعليه $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}5-3\\2-4\end{pmatrix}$ ومنه $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$ .

اذن :

$\|\overrightarrow{CA}\|=\sqrt{5^2+1^2}$

$\|\overrightarrow{CB}\|=\sqrt{3^2+3^2}$

$\|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}\|=\|\overrightarrow{BA}\|=\sqrt{2^2+(-2)^2}$

وعليه : $\|\overrightarrow{CA}\|^2=26$ و $\|\overrightarrow{CB}\|^2=18$ و $\|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}\|^2=8$

اذن : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}(26+18-8)=18$

2- لدينا : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=0$ وعليه الشعاعين $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدين .

اذن : المثلث $ABC$ قائم في $B$ .

لايهم من اين انت قادم ، المهم الى اين انت ذاهب .

**تمرين 7** ★★

في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ يعطى :

1- $\vec{u}(3,-2)$ و $\vec{v}(2,4)$ ـــــــــ أحسب $\vec{u}.\vec{v}$ و $\|\vec{v}\|$ و $\vec{u}^2$ .

2- $\vec{u}\left(\frac{1}{2},-2\right)$ و $\vec{v}(4,-1)$ ـــــــــ أحسب $\vec{u}.\vec{v}$ و $\cos(\vec{u},\vec{v})$ .

3- $\vec{u}.\vec{v}=-\frac{4\sqrt{3}}{2}$ و $(\vec{u},\vec{v})=\frac{5\pi}{6}$ و $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$ ـــــــــ أحسب $\|\vec{u}\|$ .

4- $\vec{u}\left(\cos\frac{2\pi}{3},\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ و $\vec{v}\left(\cos\frac{\pi}{4},\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ـــــــــ أحسب $\vec{u}.\vec{v}$ و $\cos(\vec{u},\vec{v})$ .

## حل التمرين رقم 7

1- لدينا : $\vec{u}.\vec{v}=(3\times 2)+(-2)\times(4)=-2$

و لدينا : $\|\vec{v}\|=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}$

و لدينا أيضا : $\vec{u}^2=\vec{u}.\vec{u}=(3\times 3)+(-2)\times(-2)=13$

2- لدينا : $\vec{u}.\vec{v}=\left(\frac{1}{2}\times 4\right)+(-2)\times(-1)=4$

و لكن : $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$

و عليه : $\|\vec{u}\|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+(-2)^2}=\sqrt{\frac{17}{4}}$ و $\|\vec{v}\|=\sqrt{4^2+(-1)^2}=\sqrt{17}$

ومنه : $4=\sqrt{\frac{17}{4}}\times\sqrt{17}\times\cos(\vec{u},\vec{v})$ اذن : $\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{8}{17}$

3- لدينا : $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$

و منه : $-\frac{4\sqrt{3}}{2}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{u}\|\times\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

و عليه : $\|\vec{u}\|^2=4$ (لأن : $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$)

اذن : $\|\vec{u}\|=2$



4- أولا نقوم بتبسيط مركبات الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ :

لدينا $\vec{u}\left(\cos\frac{2\pi}{3},\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ فتصبح $\vec{u}\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(لأن : $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

و لأن : $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ )

و لدينا $\vec{v}\left(\cos\frac{\pi}{4},\sin\frac{\pi}{4}\right)$ فتصبح $\vec{v}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

وعليه : $\vec{u}.\vec{v}=\left(-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{4}$

و لدينا : $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$

و منه : $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{4}=1\times 1\times\cos(\vec{u},\vec{v})$

(لأن : $\|\vec{u}\|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$ و $\|\vec{v}\|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$)

اذن : $\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{4}$

ليس النجاح هو مفتاح السعادة **بل** السعادة هي مفتاح النجاح
فان انت **احببت** ما تقوم به فلسوف يكون **النجاح** من نصيبك.

**تمرين 8** ★

$ABC$ مثلث حيث $AB=2$ ، $AC=3$ ، $BC=\frac{3}{2}$ .

1- أحسب $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

2- أحسب $\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

لدينا : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{CA}\|^2+\|\overrightarrow{CB}\|^2-\|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}\|^2\right)$

و منه : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\left(CA^2+CB^2-\|\overrightarrow{BA}\|^2\right)$

و عليه : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\left(3^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2-2^2\right)=\frac{29}{8}$

(ملاحظة : $AB=BA$ و $AC=CA$ و $BC=CB$ )

## تمرين 9

$ABC$ مثلث حيث $AB=2$ ، $BC=\frac{3}{2}$ ، $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{11}{8}$.

- أحسب $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ .

## حل التمرين رقم 9

لدينا : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}\|^2+\|\overrightarrow{AC}\|^2-\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\|^2\right)$

و منه : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-\|\overrightarrow{BC}\|^2\right)$

و منه : $\frac{11}{8}=\frac{1}{2}\left(2^2+AC^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)$ أي: $AC^2=1$ وعليه : $AC=1$

لكن : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ و منه : $\frac{11}{8}=2\times1\times\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$

اذن : $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{11}{16}$

## تمرين 10

$ABC$ مثلث حيث : $AB=2$ و $AC=3$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=4$ .

- بين ان المثلث $ABC$ قائم في $B$ .

## حل التمرين رقم 10

لدينا : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=4$ أي: $\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=4$

و منه : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=4$ أي: $AB^2+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=4$

و عليه : $4+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=4$ أي : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=0$

اذن : المثلث $ABC$ قائم في $B$ .



## تمرين 11

1- $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان حيث : $\|\vec{u}\|=3$ و $\|\vec{v}\|=2$ و $\vec{u}.\vec{v}=-3$

- أحسب : $(4\vec{u}-3\vec{v})(\vec{u}+2\vec{v})$ ، $(3\vec{u}-2\vec{v})^2$ .

2- $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان حيث : $\|\vec{u}\|=3$ و $\|\vec{v}\|=2$ و $\vec{u}.\vec{v}=-3$

- أحسب : $(\vec{u}+\vec{v})^2$ ، $(\vec{u}-\vec{v})^2$ ، $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})$ .

## حل التمرين رقم 11

1- حساب : $(4\vec{u}-3\vec{v})(\vec{u}+2\vec{v})$ :

$$(4\vec{u}-3\vec{v})(\vec{u}+2\vec{v})=4\vec{u}^2+8\vec{u}.\vec{v}-3\vec{v}.\vec{u}-6\vec{v}^2$$
$$=4\times(3)+2\times(-3)-6\times(-3)=24$$

- حساب : $(3\vec{u}-2\vec{v})^2$ :

$$(3\vec{u}-2\vec{v})^2=9\vec{u}^2+4\vec{v}^2-2((3\vec{u}).(-2\vec{v}))$$
$$=9\vec{u}^2+4\vec{v}^2+12\vec{u}.\vec{v}$$
$$=9\times(9)+4\times(4)+12\times(-3)=61$$

2- - حساب : $(\vec{u}+\vec{v})^2$ :

$$(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2+2\vec{u}.\vec{v}=9+4+2\times(-3)=7$$

- حساب : $(\vec{u}-\vec{v})^2$ :

$$(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2-2\vec{u}.\vec{v}=9+4-2\times(-3)=19$$

- حساب : $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})$ :

$$(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2=9-4=5$$

أحيانا يغلق الله سبحانه و تعالى امامنا بابا لكي يفتح لنا بابا آخر أفضل منه
ولكن الانسان يضيع تركيزه في النظر الى الباب الذي أغلق
بدلا من باب الامل الذي انفتح امامه على مصراعيه.