ثانوية محمد خميستي - مستغانم

المستوى : ثانية تقني رياضي

السنة الدراسية : 2022 – 2023

اختبار الفصل الثالث في مادة الرياضيات

120 دقيقة

التمرين الأول

(I) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{u_n + 2}$

❶ احسب u_1 و u_2.

❷ بين أن : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-u_n^2 + 2u_n}{u_n + 2}$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) علما أن $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.

(II) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n}$.

❶ بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$ ثم عين حدها الأول v_0.

❷ اكتب v_n بدلالة n ثم بين أن : $u_n = \dfrac{2}{1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n}$ ، لاحظ أن : $\dfrac{u_n - 2}{u_n} = 1 - \dfrac{2}{u_n}$

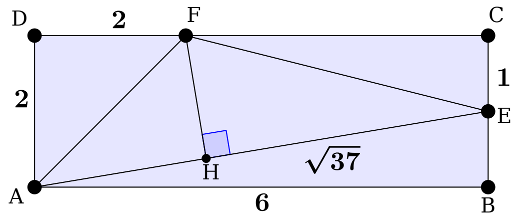
❸ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ، ماذا تستنتج.

❹ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_1 = v_0 + v_1 + \cdots\cdots\cdots + v_n$ و $S_2 = \dfrac{1}{u_0} + \dfrac{1}{u_1} + \cdots\cdots\cdots + \dfrac{1}{u_n}$

◄ احسب S_1 ثم بين أن : $S_2 = \dfrac{n+1}{2} + \left[1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$

التمرين الثاني

(I) $ABCD$ مستطيل حيث $AD = DF = 2$ ، $AE = \sqrt{37}$ و $AB = 6$ ، لتكن E منتصف $[BC]$ و H هي المسقط العمودي للنقطة F على $[AE]$.



❶ احسب : $\overrightarrow{FH}.\overrightarrow{AE}$ ، $\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{EB}$ و $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{FC}$.

❷ بين أن $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AE} = 14$ ثم استنتج قيس الزاوية $\widehat{EAF}$.

(2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

نعتبر النقط : $A(1,3)$ ، $B(3,3)$ و $C(3,1)$ و لتكن (C_1) مجموعة

النقط $M(x,y)$ حيث : $(C_1) : x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$

❶ بين أن (C_1) دائرة يطلب تعيين مركزها ω_1 و نصف قطرها r_1.

❷ بين أن المثلث ABC قائم في B ثم جد معادلة الدائرة (C_2) المحيطة به.

❸ هل الدائرتان (C_1) و (C_2) متماستان ؟ برر ذلك.

❹ جد معادلة للمستقيم (T) مماس الدائرة (C_2) في النقطة B.

❺ بين أن المستقيم (T) يقطع الدائرة (C_1) ثم جد نقط تقاطعهما.

❻ أوجد (C') صورة (C_1) بالتحاكي h الذي مركزه النقطة A و نسبته 3.

الإجابة النموذجية

حل التمرين الأول

I ❶ **حساب** : $u_1=\frac{4}{3}$ و $u_2=\frac{8}{5}$.

❷ **تبيان أن** : $u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n^2+2u_n}{u_n+2}$:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{4u_n}{u_n+2}-u_n=\frac{4u_n-u_n(u_n+2)}{u_n+2}=\frac{-u_n{}^2+2u_n}{u_n+2}\quad\frac{4u_n}{u_n+2}-u_n=\frac{4u_n-u_n(u_n+2)}{u_n+2}=\frac{-u_n{}^2+2u_n}{u_n+2}$$

◄ استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

u_n	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$u_{n+1}-u_n$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	

ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

II ❶ **اثبات أن (v_n) متتالية هندسية** :

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}}=\frac{\frac{4u_n}{u_n+2}-2}{\frac{4u_n}{u_n+2}}=\frac{4u_n-2u_n-4}{4u_n}=\frac{2u_n-4}{4u_n}=\frac{2}{4}\left[\frac{u_n-2}{u_n}\right]=\frac{1}{2}v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول : $v_0=\frac{u_0-2}{u_0}=\frac{1-2}{1}=-1$.

❷ **كتابة v_n بدلالة n** : $v_n=v_0\times q^n=-\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

◄ استنتاج u_n بدلالة n : لدينا $v_n=1-\frac{2}{u_n}$ أي $1-v_n=\frac{2}{u_n}$ أي $u_n=\frac{2}{1-v_n}$ اذن : $u_n=\frac{2}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

❸ **نهاية (u_n)** : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{1+\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{0}}=2$ و منه نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

❹ **حساب S_1** : $S_1=\left(\frac{\text{الحد الأول}}{1-q}\right)\times[1-q^{\text{عدد الحدود}}]=\frac{v_0}{1-q}\left(1-q^{n-0+1}\right)=-2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$.

▲ استنتاج S_2 : لدينا $\frac{1}{2}(1-v_n)=\frac{1}{u_n}$ و بالتالي :

$$S_2=\frac{1}{2}(1-v_0)+\cdots+\frac{1}{2}(1-v_n)=\frac{1}{2}\left[1(n-0+1)-\left(\underbrace{v_0+\cdots+v_n}_{S_1}\right)\right]=\frac{(n+1)}{2}+\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

حل التمرين الثاني

I ❶ **حساب** : $\overrightarrow{FH}.\overrightarrow{AE}=0$ لأنهما متعامدان ، $\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{EB}=-EC.EB=-1\times1=-1$ لأنهما متوازيان و متعاكسان في الإتجاه.

$\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{FC}=DF.FC=2\times4=8$ لأنهما متوازيان و لهما نفس الإتجاه.

❷ **تبيان أن $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AE}=14$** : في المثلث AEF لدينا : $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}(AF^2+AE^2-EF^2)=\frac{1}{2}(8+37-17)=14$

▲ استنتاج قيس الزاوية $\widehat{EAF}$: $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AE}=AF\times AE\times cos\left(\widehat{EAF}\right)$ أي $cos\left(\widehat{EAF}\right)=\frac{14}{\sqrt{37}.\sqrt{8}}\approx0.81$ ومنه $\widehat{EAF}\approx35.54°$

II ❶ **تبيان أن (C_1) دائرة** : $(C_1):x^2+y^2-8x+2y+12=0$ أي $(C_1):(x-4)^2-4^2+(y+1)^2-1^2+12=0$

ومنه $(C_1):(x-4)^2+(y+1)^2=(\sqrt{5})^2$ اذن (C_1) دائرة مركزها $\omega_1(4,-1)$ و نصف قطرها $r_1=\sqrt{5}$.

❷ **تبيان أن المثلث ABC قائم في B** : $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$ ومنه $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=0$ اذن المثلث ABC قائم في B.

يمكن استعمال طريقة فيثاغورث.

▲ ايجاد معادلة الدائرة (C_2) :

✍ طريقة أولى : لتكن $\omega_2(2,2)$ منتصف $[AC]$ و مركز الدائرة (C_2) و ليكن نصف قطرها $r_2=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

اذن $(C_2):(x-2)^2+(y-2)^2=(\sqrt{2})^2$.

✌ طريقة ثانية : نحسب الجداء $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=0$ نجد $(x-x_A)(x-x_C)+(y-y_A)(y-y_C)=0$ أي $x^2+y^2-4x-4y+6=0$

اذن : $(C_2):(x-2)^2+(y-2)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$.

❸ هل الدائرتان (C_1) و (C_2) متماستان : لا لأن $\omega_1\omega_2=\sqrt{13}\neq r_1+r_2=\sqrt{5}+\sqrt{2}$.

❹ معادلةالمستقيم (T) : بما أن (T) مماس فإن شعاعه الناظمي هو $\overrightarrow{\omega_1 B}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ أي $(T):x+y+c=0$

بما أن $B\in(T)$ فإن : $x_B+y_B+c=0$ أي $c=-6$ اذا معادلة المستقيم هي : $(T):x+y-6=0$.

❺ تبيان أن (T) يقطع (C_1) : $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}<r_1=\dfrac{|1.x_{\omega_1}+1.y_{\omega_1}-6|}{\sqrt{1^2+1^2}}=d_{(\omega_1,(T))}$ اذن المستقيم (T) يقطع الدائرة (C_1).

▲ تعيين احداثييهما : لدينا $y=-x+6\cdots(*)$ نعوض العلاقة $(*)$ في معادلة الدائرة (C_2) نجد $2x^2-22x+60=0$ نحل المعادلة

من أجل $x=5$ نعوض في $(*)$ نجد $y=1$ اذن $E(5,1)$ و من أجل $x=6$ نعوض في $(*)$ نجد $y=0$ اذن $F(6,0)$.

❻ ايجاد (C') صورة (C_1) : مركز الدائرة (C') : $\overrightarrow{A\omega'}\begin{pmatrix}x'-x_A\\y'-y_A\end{pmatrix}=3\overrightarrow{A\omega_1}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$ أي $x'-x_A=3\times 3$

و $y'-y_A=3\times(-4)$ ومنه $\omega'(10,-9)$.

نصف قطر الدائرة : $r'=|k|.r_1=3\sqrt{5}$ و بالتالي : $(C'):(x-10)^2+(y+9)^2=\left(3\sqrt{5}\right)^2$.