الثالثة تسيير واقتصاد	المحور: الاحتمـــــــــــالات الموضوع: قانون احتمال تجربة عشوائية	المدة:

الكفاءة القبلية:

الكفاءة المستهدفة: تعيين قانون احتمال مرفق بتجربة عشوائية لها عدد منته من الإمكانيات

مراحل الدرس	الـــــــــــــدرس	ملاحظات
	دراسة أمثلـــــــــــــــــة **مثال01:** يحتوي صندوق على 5 كريات حمراء مرقمة من 1 الى 5 و7 كريات بيضاء مرقمة من 1 الى 7 نسحب كرية من الصندوق. 1. أحسب احتمال الأحداث التالية: A:" الكرية المسحوبة حمراء" B:" الكرية المسحوبة بيضاء" C:"الكرية المسحوبة تحمل رقم فردي " D:" الكرية المسحوبة تحمل رقم مضاعف للعدد 3" 2. أحسب احتمال الأحداث التالية: $A \cap B$ ، $A \cap C$ ، $B \cup D$ ، $\bar{A} \cap \bar{C}$ ، $\bar{A} \cup \bar{B}$ ، $\overline{C \cap D}$ **مثال02:** صندوق به 9 بطاقات متماثلة لا نفرق بينهم باللمس، مكتوب على كل واحد منها سؤالا واحدا، منها ثلاثة أسئلة في الهندسة مرقمة بـ 1، 2، 3 أربعة أسئلة في الجبر مرقمة بـ 1، 2، 3، 4 وسؤالين في التحليل مرقمين بـ 1 و2. نسحب عشوائيا بطاقة واحدة من الصندوق ونعتبر الحوادث التالية: A :"سحب سؤال في الهندسة" B :" سحب سؤال في التحليل" C :"سحب سؤال في الجبر يحمل رقما زوجيا ". 1. أحسب $P(A)$ ، $P(B)$ ، $P(C)$ احتمال الحوادث A ، B و Cعلى الترتيب. 2. أحسب احتمال سحب سؤال رقمه يختلف عن 1.	يجب التذكير بم تم تناوله في السنة الثانية من تعريف مصطلحات الاحتمال وقانون الاحتمال واحتمال حادثة وتوظيف شجرة الإمكانيات والجداول لحساب احتمال حادثة

مثال03:

تحتوي ثانوية على 80 موظفا موزعون في فئات مرسم، متربص ومستخلف كمايلي: 40% من الموظفين رجال و75% من الرجال مرسمون

يحتوي صنف المتربصين على 20% من موظفي الثانوية منهم 6 رجال، يحتوي صنف المستخلفين على نفس عدد الرجال والنساء.

أتمم الجدول التالي اعتمادا على المعطيات السابقة:

	مرسم	متربص	مستخلف	المجموع
رجال				
نساء				
المجموع				

نسحب اسم أحد الموظفين بصفة عشوائية ونعتبر الاحداث التالية:

A: الشخص امرأة B: الشخص مرسم C: الشخص امرأة مرسمة

1. أحسب $P(A)$، $P(B)$، $P(C)$، $P(A \cup B)$
2. نسحب اسم موظف من كل فئة من الفئات الثلاثة بصيغة عشوائية، يمكن كتاب نتيجة هذا السحب في شكل ثلاثية (x,y,z) حيث x هو موظف مرسم، y هو موظف متربص، z هو موظف مستخلف

أ- ما هو عدد الثلاثيات الممكنة.

ب- نقبل ان كل النتائج متساوية الاحتمال.

أحسب احتمال كل من الحدثين:

D: نحصل على 3 رجال، E: نحصل على امرأة واحدة على الأقل

مثال 02:

يبين الجدول التالي توزيع الأشخاص العاملين في إحدى المستشفيات:

	رجـــــــل H	امـــــــرأة F	المجموع
الطبيب M	28	14	42
ممرض	20	232	252
تقني إداري T	22	34	56
المجموع	70	280	350

نختار عشوائيا شخصا من بين العاملين في المستشفى:

1. أحسب احتمال كل حدث من الأحداث التالية:

I: " الشخص ممرض" ، F:" الشخص امرأة" ، M: "الشخص طبيب" .

2. أحسب احتمال $\bar{I}$ "الشخص ليس ممرض".
3. أحسب احتمال الحدث: "الشخص طبيب "
4. أحسب احتمال كل من الحدثين: $F \cup M$ ، $I \cup M$

مثال03: باك تسيير 2019 الموضوع الأول

نرمي زهر نرد غير مزيف ذات ستة أوجه مرقمة من 1 إلى 6 مرتين متتاليتين ونسجل الرقم الظاهر على الوجه العلوي في كل مرة

1. باستعمال مخطط الجدول وضح جميع الإمكانيات
2. أحسب احتمال الأحداث التالية:

A : " الحصول على رقمين فرديين"

B :"الحصول على رقمين زوجيين أحدها 4"

C :"الحصول على رقمين أحدهما مضاعف للآخر "

D:" الحصول على رقمين مجموعهما يساوي 6"

الثالثة تسيير و اقتصاد	المحور: الاحتمـــــــــالات الموضوع: الامل الرياضياتي -التباين-الانحراف المعياري	المدة: 02 ساعة

الكفاءة القبلية:

الكفاءة المستهدفة: حساب الامل الرياضياتي والتباين والانحراف المعياري المرفق لتجربة عشوائية

مراحل الدرس	الـــــــــــــدرس	ملاحظات

نشـــــــــــــاط

نعتبر $\Omega=\{-1,0,2,5,6,10\}$ ونعرف قانون الاحتمال على Ω كما في الجدول:

x_i	-1	0	2	5	6	10
p_i	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	A

1- عين العدد الحقيقي a

2- أحسب الوسط الحسابي للقيم x_i مرفقة باحتمالاتها وليكن E.

3- أحسب النسبتين: $\sum_{i=1}^{n}P_i(x_i-E)^2$ ، $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}P_i(x_i-E)^2}$

تعريف:

لتكن Ω مجموعة النتائج الممكنة لتجربة عشوائية(نعتبر هذه النتائج أعداد حقيقية)

$\Omega=\{x_1;x_2;...;x_n\}$ وليكن P احتمالا على Ω ، نرمز بالرمز P_i للاحتمال $P_i=P(x_i)$

1. الأمل الرياضياتي لقانون احتمال هو المعدل E حيث $E=\sum_{i=1}^{n}P_ix_i$
2. التباين لقانون احتمال هو العدد V حيث $v=\sum_{i=1}^{n}P_i(x_i-E)^2$
3. الانحراف المعياري هو $\sigma=\sqrt{V}$

ملاحظة:

يمكن حساب V بالدستور $v=\sum P_ix_i^2-E^2$

مثال:

يدفع لاعبان A وB، 6 و10 دينارا على الترتيب ويرمي منظم اللعبة حجري نرد متوازنين كل منهما ذو أربعة أوجه مرقمة من 1 إلى 4 ويدفع للاعبين ضعف مجموع رقمي الوجهين الظاهرين بعد الرمي

- أحسب أمل الربح لكل لاعب.
- أحسب التباين والانحراف المعياري.

خـــــــــــواص:

1. عند إضافة عدد ثابت a لكل القيم x_i يضاف a الى الأمل الرياضياتي.
2. عند ضرب كل قيم x_i يضرب الأمل الرياضياتي في العدد a

تمرين:

نعتبر زهري نرد أوجههما مرقمة كمايلي:

زهر النرد الأول: 1، 2، 2، 3، 4، 4. زهر النرد الثاني: 1، 3، 4، 5، 6 ،8

نرمي زهري النرد ونسجل مجموع الرقمين x المحصل عليها (نفرض أن كل الأوجه لها نفس احتمال الظهور)

1. عرف قانون الاحتمال لهذه التجربة.
2. أحسب الأمل الرياضياتي لقانون الاحتمال.
3. أحسب التباين والانحراف المعياري.

الثالثة تسيير و اقتصاد	المحور: الاحتمـــــــــالات الموضوع: الاحتمالات الشرطية	المدة: 02 ساعة

الكفاءة القبلية:
الكفاءة المستهدفة: حساب احتمال حادثة علما أن حادثة أخرى محققة

مراحل الدرس	الـــــــــــــدرس	ملاحظات

نشاط

يتوزع 400 تلميذ من الأقسام النهائية في ثانوية ما الى فوجين A وB وذلك حسب اللغة الحية التي يدرسونها (إنجليزية أو ألمانية).
يوضح الجدول التالي هذا التوزيع بالنسبة للبنين (G) والبنات (F)

اللغة الحية	إنجليزية (A)	ألمانية (D)
بنونG	130	50
بناتF	140	80

تم اختيار تلميذ عشوائيا من بين قوائم تلاميذ السنة النهائية

1) أحسب احتمال أن يكون التلميذ المختار بنتا. (نرمز لهذا الاحتمال بالرمز $P(F)$)
2) أحسب احتمال أن يكون التلميذ المختار يدرس اللغة الألمانية.
3) علما أن التلميذ المختار بنت، ما هو احتمال أن تكون تدرس الألمانية؟
4) قارن النتيجة السابقة مع $\frac{P(D\cap F)}{P(F)}$

حيث $P(D\cap F)$ هو احتمال أن يكون التلميذ المختار بنتا وتدرس الألمانية

تعريف

نعتبر تجربة عشوائية مجموعة مخارجها E وقانون احتمالها P، A وB حادثتان من E حيث احتمال A غير معدوم يرمز لاحتمال الحادثة B علما أن A محققة بالرّمز $p_A(B)$ ويعرّف بالنسبة $p_A(B)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$

مثال:

نريد اختبار فعالية دواء على مجتمع معطى، ربع أفراد هذا المجتمع تم تطعيمهم بهذا الدواء .
تبين خلال فترة انتشار وباء معين أن من بين كل 10 مرضى مصابون بهذا الوباء واحد فقط منهم مطعم.
وتبين أيضا أن $\frac{1}{9}$ من الأفراد المطعمين هم مرضى بهذا الوباء.
نختار عشوائيا شخصا واحدا من هذا المجتمع
نرمز بالرمز M إلى الحادثة " الشخص المريض" وبالرمز V إلى الحادثة "الشخص مطعم"

1. أحسب $P(M \cap V)$ ، احتمال أن يكون الشخص المختار مريض ومطعم
   - استنتج أن: $P(M)=\frac{5}{18}$.
2. أحسب الاحتمال $P(M \cap \overline{V})$ استنتج الاحتمال الشرطي $P_{\overline{V}}(M)$

نتيـــــــــــــــــــجة:

$$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$$
$$= p(B) \times p_B(A)$$

مثال01:

نرمي حجر نرد متوازن ونعتبر الحادثتين A "الحصول على رقم فردي"، B "الحصول على مضاعف للعدد 3"

$p_A(B)=\frac{p(A \cap B)}{p(A)}=\frac{1}{3}$ **لأن** $A=\{1,2,3\}$ ، $B=\{3,6\}$ ، $C=\{3\}$

تمرين:

يحتوي صندوق على 6 كرات حمراء و3 كرات خضراء لا نميز بينها عند اللمس.
نسحب كرتين على التوالي ودون إرجاع.
لتكن الحادثة A " الكرة المسحوبة الأولى حمراء "
وb الحادثة " الكرة المسحوبة الثانية خضراء "
أحسب $p(A)$ ، $p_A(B)$ ثم استنتج $p(A \cap B)$

الحل:

الكريات لا نميز بينها عند اللمس (حالة تساوي احتمال) وبالتالي $p(A)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

إذا تحققت الحادثة A تصبح الوضعية في الصندوق كالتالي:

5 كرات حمراء و3 كرات خضراء ومنه $p_A(B)=\frac{3}{8}$

وبالتالي $p(A\cap B)=p(A)\times p_A(B)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{4}$

الثالثة تسيير و اقتصاد	المحور: الاحتمـــــــــالات الموضوع: الشجرة المتوازنة	المدة: 02 ساعة

الكفاءة القبلية:

الكفاءة المستهدفة: استعمال الشجرة المتوازنة لحساب الاحتمالات-دستور الاحتمالات الكلية- التمييز بين السحب في ان واحد والسحب بالإرجاع ودون

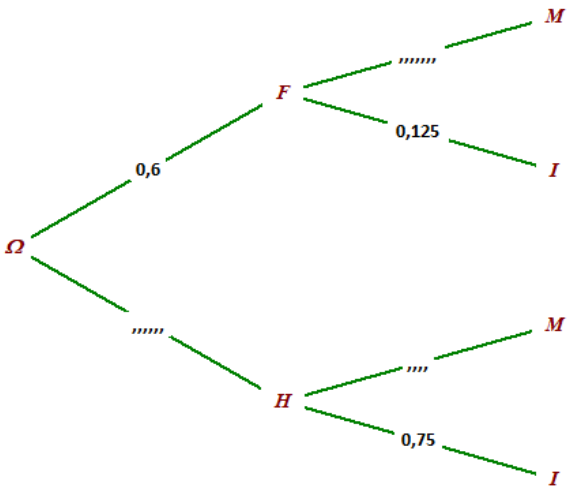
مراحل الدرس	الـــــــــــــدرس	ملاحظات

دراســــــــــة مثال:

يتكون فريق طبي من 240 شخصا ينقسمون إلى فئتين أطباء وممرضون، 60 %من الأشخاص نساء منهن 12.5% ممرضات و75% من الرجال ممرضون.

أكمل المخطط التالي:

H : رجل F: امرأة M: طبيب I: ممرض



هذا المخطط يسمى شجرة الاحتمالات (أو شجرة المتوازنة)

- يسمى مبدأ الشجرة جذر الشجرة
- تسمى نقطة الوصل بين بين غصنين عقدة.
- الأغصان التي تنطلق من الجذر تسمى أغصان ابتدائية.
- الأغصان التي تصل بين عقدتين تسمى أغصان ثانوية.
- كل طريق واصل بين الجذر والعقدة يسمى مسارا.

قواعد إنشاء شجرة الاحتمالات

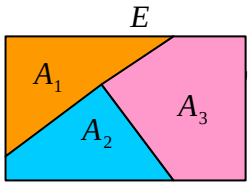
1. الحوادث الموجودة في نهاية الأغصان الابتدائية تشكل تجزئة للمجموعة Ω.
2. مجموع أوزان الأغصان الابتدائية يساوي 1.
3. مجموع أوزان الأغصان الثانوية النابعة من نفس العقدة يساوي 1.
4. وزن غصن ثانوي هو الاحتمال الشرطي للحادثة الموجودة في نهايته علما أن المسار الذي يتصل إلى مبدأه محقق.

مثـــــــــــــــال:

يحتوي صندوق على 6 كرات حمراء و3 كرات خضراء لا نميز بينها عند اللمس.
نسحب كرتين على التوالي ودون إرجاع.
لتكن الحادثة A " الكرة المسحوبة الأولى حمراء "والحادثة B "الكرة المسحوبة الثانية خضراء "
أحسب $p(A)$ ، $p_A(B)$ ثم استنتج $p(A\cap B)$

تعريف

نقول أن الحوادث A_1 ،A_2 ،A_n تشكل تجزئة للمجموعة E عندما تكون هذه الحوادث غير متلائمة مثنى مثنى واتحادها هو E وكلها ليست خالية



من أجل كل i وj يكون $A_i \cap A_j = \varnothing$ ، $A_2 \cup .....\cup A_n = E$
ومن أجل كل i يكون $A_i \neq \varnothing$

دستور الاحتمالات الكلية

A حادثة احتمالها غير معدوم ، $\overline{A}$ حادثتها العكسية. A و $\overline{A}$ تشكل تجزئة لـ E
B حادثة من E.
إذن الحادثتان $B \cap A$ و $B \cap \overline{A}$ غير متلائمتين و $(B \cap \overline{A}) \cup (B \cap A) = B$
وبالتالي $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A}) = p_A(B) \times p(A) + p_{\overline{A}}(B) \times p(\overline{A})$

تمرين باك 2017 الموضوع الأول

استقبل مركز إجراء امتحان شهادة البكالوريا مترشحين موزعين على ثلاث شعب هي: شعبة الآداب والفلسفة (L)، شعبة العلوم التجريبية (S)، شعبة التسيير والاقتصاد (G).
47% من المترشحين ذكور (M) و الباقي اناث (F).
من بين الذكور يوجد 35% في شعبة العلوم التجريبية و49% في شعبة الآداب والفلسفة.
من بين الاناث يوجد 10% في شعبة التسيير والاقتصاد و37% في العلوم التجريبية.
نختار عشوائيا مترشحا من هذا المركز.

1. أنجز شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية.
2. احسب احتمال كل حادثة مما يلي:

A " المترشح المختار انثى ومن شعبة التسيير والاقتصاد".
B " المترشح المختار من شعبة التسيير والاقتصاد".
C " المترشح المختار انثى علما أنه من شعبة التسيير والاقتصاد".

مثال: تمرين باك 2017 الموضوع الثاني

أجريت دراسة إحصائية حول العلاقة بين استعمال الإنترنت وامتلاك جهاز حاسوب في مدينة ما، فكانت النتائج كما يلي:
80% من سكان هذه المدينة يملكون جهاز حاسوب.
90% من سكان هذه المدينة الذين يملكون جهاز حاسوب يستعملون الإنترنت.
60% من سكان هذه المدينة الذين لا يملكون جهاز حاسوب يستعملون الإنترنت.
نختار عشوائيا شخصا من هذه المدينة.
يرمز A إلى الحادثة: الشخص المختار يملك جهاز حاسوب.
يرمز B إلى الحادثة: الشخص المختار يستعمل الإنترنت.

1. أنجز شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية.
2. أ) بين أن احتمال أن يكون الشخص المختار لا يملك جهاز حاسوب يساوي 0,20
ب) ما احتمال أن يكون الشخص المختار يملك جهاز حاسوب ويستعمل الإنترنت.
ج) ما احتمال أن يكون الشخص المختار لا يملك جهاز حاسوب ويستعمل الإنترنت.

3. احسب احتمال أن يكون الشخص المختار يستعمل الإنترنت.
4. احسب احتمال أن يكون الشخص المختار يملك جهاز حاسوب علما أنه يستعمل الانترنت.

تمرين باك 2015 الموضوع الثاني

مصنع سيارات يشتغل بوحدتين A وB وينتج نوعين: سيارات تسير بالبنزين يرمز إليها بالرمز E وأخرى بغير البنزين $\overline{E}$ ربع إنتاج هذا المصنع تصنعه الوحدة A.
اشترى شخص سيارة من إنتاج هذا المصنع، احتمال أن تكون هذا السيارة من صنع الوحدة A وتسير بالبنزين يساوي $\frac{1}{6}$ ، واحتمال أن تكون من صنع الوحدة B وتسير بالبنزين يساوي $\frac{3}{8}$ (تعطى كل النتائج على شكل كسر غير قابل للاختزال)

1. بين أن احتمال أن تكون السيارة تسير بالبنزين علما أنها من صنع الوحدة A يساوي $\frac{2}{3}$
2. احسب احتمال أن تكون السيارة تسير بالبنزين علما أنها من صنع الوحدة B
3. أ) احسب احتمال أن تكون السيارة تسير بالبنزين.
   ب) علما ان السيارة تسير بالبنزين ما احتمال أن تكون من صنع الوحدة A؟
4. أنجز شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية.

تمرين باك 2013 الموضوع الأول

في رف من رفوف مكتبة " ثانوية النجاح "، يوجد 150 كتاب رياضيات و50 كتاب فلسفة، حيث 40% من كتب الرياضيات و70% من كتب الفلسفة تخص شعبة التسيير والاقتصاد.
نختار عشوائيا من الرف كتابا واحدا.
عيّن مع التبرير، الجواب الوحيد الصحيح من بين الأجوبة المقترحة، في كل حالة من الحالات التالية:
1) احتمال ان يكون الكتاب المختار كتاب رياضيات هو:

(أ) $\frac{3}{4}$ (ب) $\frac{2}{5}$ (جـ) $\frac{1}{150}$

2) احتمال أن يكون الكتاب المختار خاصا بشعبة التسيير والاقتصاد هو:

(أ) 0,24 (ب) 0,475 (جـ) 0,21

3) احتمال ان يكون الكتاب المختار كتاب رياضيات خاصا بشعبة التسيير والاقتصاد هو:

(أ) 0,15 (ب) 0,4 (جـ) 0,3

4) إذا كان الكتاب المختار يخص شعبة التسيير والاقتصاد، فإن احتمال ان يكون كتاب رياضيات هو:

(أ) $\frac{2}{75}$ (ب) $\frac{12}{19}$ (جـ) $\frac{3}{10}$

تمرين باك 2013 الموضوع الثاني:

وضعت أسئلة امتحان شفوي في علبتين متماثلتين A و B. العلبة A تحتوي على 4 أسئلة في الثقافة العامة، و6 أسئلة في مادة الاختصاص؛ والعلبة B تحتوي على 3 أسئلة في الثقافة العامة، و7 أسئلة في مادة الاختصاص. (عمليات سحب الأسئلة واختيار إحدى العلبتين متساوية الاحتمال)

1. يختار مرشح إحدى العلبتين ليسحب منها عشوائيا، سؤالا واحدا.
   أ- شكل شجرة الاحتمالات المتوازنة.
   ب- ما هو احتمال سحب المترشح لسؤال في مادة الاختصاص من العلبة A
   ج- ما هو احتمال سحب المترشح لسؤال في مادة الاختصاص من العلبة B
   د- ما هو احتمال سحب المترشح لسؤال في مادة الاختصاص؟
   هـ- علما ان المترشح سحب سؤالا في الثقافة العامة، ما احتمال ان يكون من العلبة B؟
2. مترشح آخر يسحب عشوائيا سؤالا واحدا من العلبة A وسؤالا واحدا من العلبة B.
   بيّن أن احتمال سحب سؤالين في مادة الاختصاص هو 0,42.

تمرين بكالوريا تسيير 1996

يحتوي كيس على 5 كريات حمراء و6 كريات صفراء و4 كريات بيضاء، لا نفرق بينهما عند اللمس. نسحب من هذا الكيس كريتين في آن واحد.

- ما هو عدد إمكانيات السحب؟
- ما هو احتمال الحصول على:

كريتين من اللون الأحمر، كرية حمراء وكرية صفراء، كريتين ليستا من اللون الأبيض.

تمرين بكالوريا 2008 الموضوع الثاني:

يحتوي كيس على 10 قريصات لا يمكن التفريق بينها باللمس، من بينها 6 حمراء اللون تحمل الأرقام 1 ،2، 2 4، 6، 8 والبقية بيضاء اللون تحمل الأرقام 1، 3، 5، 5.

1) نسحب ثلاثة قريصات من هذا الكيس واحدة تلو الأخرى دون إرجاع.

المطلوب حساب:

ا- احتمال الحصول على ثلاثة قريصات من نفس اللون.

ب- احتمال الحصول على ثلاثة قريصات بلونين مختلفين.

ج - احتمال الحصول على ثلاثة قريصات تحمل ثلاثة أرقام مجموعها 15

د- احتمال الحصول على ثلاثة قريصات مجموعها 15 علما أنها من نفس اللون.

الثالثة تسيير و اقتصاد	المحور: الاحتمـــــــــالات الموضوع: الحـــــــــوادث المستقلة	المدة:

الكفاءة القبلية:

الكفاءة المستهدفة: التعرف على حادثتين مستقلتين

مراحل الدرس	الـــــــــــــدرس	ملاحظات

تعـــــــــريف:

E مجموعة النتائج الممكنة لتجربة عشوائية قانون احتمالها P

A و B حادثتان احتمالاهما غير معدومين.

نقول أن A و B مستقلتان عندما يكون احتمال إحداهما مستقلا عن تحقق الأخرى بعبارة أخرى $p_B(A) = p(A)$ ($p(B)=p_A(B)$

أي أن استقلال A وB معناه أن احتمال " A وB " هو جداء احتماليهما

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

مثال:

في مسابقة يجيب الطالب عن عددين من الأسئلة ويشار للجواب الصحيح بالعدد 1 وللخاطئ بالعدد 0.

نعتبر الحادثتين A"ليس للأجوبة نفس الإشارة "، B " جواب واحد على الأكثر ذو إشارة 0 "

1) إذا كان عدد الأسئلة اثنين، هل A وB مستقلتان؟

2) إذا كان عدد الأسئلة ثلاثة، هل A وB مستقلتان؟

تمرين بكالوريا 2011 الموضوع الثاني:

عدد تلاميذ ثانوية هو 900 يتوزعون حسب المستوى والصنف (داخلي أو خارجي) كما يلي:

المستوى / الصنف	السنة الأولى	السنة الثانية	السنة الثالثة	المجموع
خارجيون	250	200	150	600
داخليون	100	120	80	300

نختار تلميذا بطريقة عشوائية، احسب الاحتمالات التالية:

1. احتمال أن يكون التلميذ خارجيا.
2. احتمال أن يكون التلميذ من السنة الأولى
3. احتمال أن يكون التلميذ من السنة الأولى خارجيا.
4. احتمال أن يكون التلميذ من السنة الأولى علما أنه خارجي.
5. هل الحادثتان " التلميذ من السنة الأولى" التلميذ خارجي" مستقلتان؟