الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية غليزان — **ثانوية :سيدي سعادة–موحد مع بعض ولايات–**

بكالوريا تجريبي — **يوم : 15 ماي 2023**

المستوى : 03 علوم تجريبية

يفتح رابط التصحيح QR بعد إنتهاء الإمتحان

اختبار في مادة : الرياضيات — **المدة : 03 ساعات ونصف**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأوّل :

التمرين الأول: (04 نقاط)

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الأتية : $z^2-2z+4=0$

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها $z_A=1+i\sqrt{3}$ ، $z_B=1-i\sqrt{3}$ و $z_C=z_A e^{i\frac{5\pi}{6}}$

1) أكتب z_C على الشكل الجبري ثم أكتب z_B و z_A على الشكل الأسي

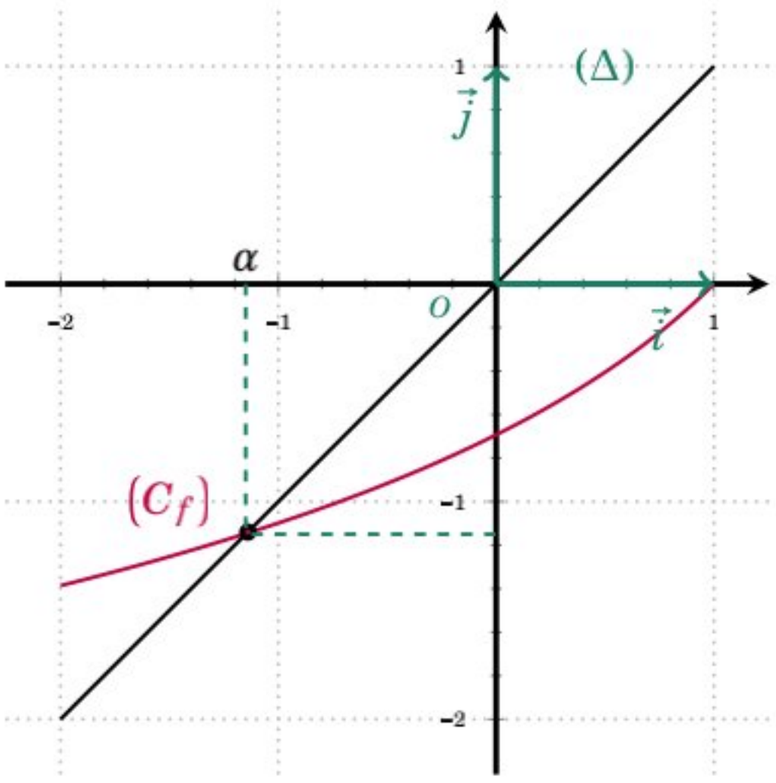
2) إستنتج الشكل الأسي للعدد $\frac{z_A}{z_B}$.ثم عين طبيعة المثلث OAB

3) عين لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $OADB$ متوازي أضلاع

4) عين قيم عدد طبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{3n}$ حقيقي موجب تماما.ثم أكتب على الشكل الجبري العدد $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2023}$

5) عين (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي من أجلها يكون: $z=z_A+2e^{i\theta}$ حيث $\theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

التمرين الثاني: (05 نقاط)



I) f الدالة المعرفة على $[-2,0]$ بـ: $f(x)=-\ln(2-x)$ و (C_f) تمثيلهاالبياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ و (Δ) مستقيم ذا المعادلة $y=x$ حيث $f(\alpha)=\alpha$ كماهو موضح في الشكل المقابل:

1) تحقق أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-2;0]$

2) بين أنه من أجل كل $x\in[-2;0]$ فإن: $f(x)\in[-2;0]$

II) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كمايلي:

$$\begin{cases} u_0=-2 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_0=0 \\ v_{n+1}=f(v_n) \end{cases}$$

1) أ) برر وجود متتاليتين (u_n) و (v_n)

ب) مثل على محور الفواصل الحدود : u_0 ، u_1 و u_2 ، v_0 ، v_1 و v_2 دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء

ج) خمن إتجاه و تقارب كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n)

2) أ) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $0 \leq v_{n-1} \leq u_n \leq v_n \leq u_{n-1} \leq 2-$

ب) إستنتج إتجاه تغير و تقارب كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n)

3) أ) نقبل أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{v_n - u_n}{2 - v_n}$.بين أن $0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$

ب) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq v_n - u_n \leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$

د) أثبت أن: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \alpha$. ماذا يمكن القول عن المتتاليتين (u_n) و (v_n) ؟

التمرين الثالث: (04 نقاط)

في إطار تعيين فريق لكرة القدم يمثل الثانوية ، تم إختيار أربعة لاعبين من القسم S_1 يحملون الأرقام من 1 إلى 4 وستة لاعبين من القسم S_2 يحملون الأرقام من 5 إلى 10 وثلاث لاعبين من القسم S_3 يحملون الأرقام من 11 إلى 13 نختار الآن لاعبين إثنين من الفريق ليبقيا في الإحتياط علما أن كل الإختيارات متساوية الإحتمال

1) أ) أحسب إحتمال الحوادث التالية :

A " اللاعبين الإثنين المختارين يحملان رقمين زوجيين" B " اللاعبين الإثنين المختارين من نفس القسم

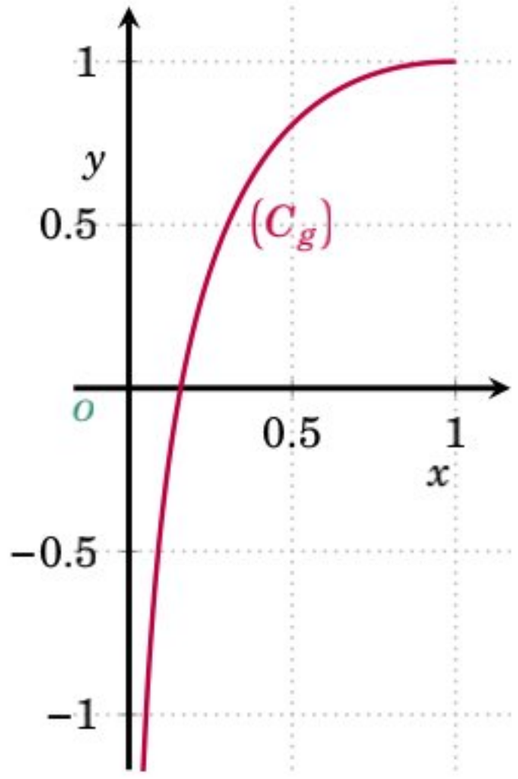
ب) هل الحادثتان A و B مستقلتان؟ برر

2) ما إحتمال أن يكون اللاعبين الإثنين المختارين في الإحتياط من قسمين مختلفين و يحملان رقمين زوجيين

3) إذا كان اللاعبين الإثنين المختارين في الإحتياط من قسمين مختلفين .ماإحتمال أن يكون حاملين رقمين زوجيين؟

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) g الدالة المعرفة على $]0;1[$ بـ: $g(x) = 2 - x + \ln x$ و (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ كما هو مبين في الشكل المقابل :



1) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.15 < \alpha < 0.16$

2) إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;1[$

II) f دالة معرفة على $]1;+\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{1 - 2x + \ln x}{x - 1}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. ثم فسر النتيجة بيانيا

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ فإن: $f'(x) = \frac{g\left(\frac{1}{x}\right)}{(x-1)^2}$

ب) بين أن f متزايدة تماما على $\left]1;\frac{1}{\alpha}\right]$ و متناقصة تماما على $\left[\frac{1}{\alpha};+\infty\right[$. ثم شكل جدول تغيراتها .

3) أدرس الوضع النسبي لـ: (C_f) و المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y = -2$

4) أرسم (Δ) ، (C_f) (يعطى $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) \approx -1.8$)

5) عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $|f(x)| = m$ حلين متمايزين

6) h الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $h(x) = f(e^x)$. إعتمادا على السؤال 2 .إستنتج إتجاه تغير الدالة h

الموضوع الثّاني :

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر في كل مايلي المستوي المركب المنسوب إلى المعلم $(O;\vec{u},\vec{v})$

عين الإقتراح الصحيح الوحيد من بين الإقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية مع التبرير

1) k عدد صحيح و $arg(z)$ عمدة للعدد المركب z حيث $z=-3\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$ هي:

أ) $arg(z)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ب) $arg(z)=\frac{4\pi}{3}+2k\pi$ ج) $arg(z)=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$

2) (E) مجموعةالنقط M ذات اللاحقة z حيث $|2z-2+4i|=8$ هي دائرة مركزها A ونصف قطرها r حيث:

أ) $A(-2,4)$ و $r=8$ ب) $A(1,-2)$ و $r=4$ $A(-2,4)$ و $r=3$

3) ب) A ، B و C نقط لاحقاتها $z_A=1+2i$ ، $z_B=1-2i$ و $z_C=i$

Z_D .لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع هي :

أ) $z_D=5i$ ب) $z_D=1-i\sqrt{3}$ ج) $z_D=-3i$

4) الجذريين التربيعيين للعدد المركب i هما :

أ) $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ و $-\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ ب) $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ و $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ ج) $1+i$ و $1-i$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0=1+\sqrt{e}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{u_n^2+e}{2u_n}$

1) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-\sqrt{e}=\frac{1}{2u_n}\left(u_n-\sqrt{e}\right)^2$

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n>\sqrt{e}$

ج) أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) و إستنتج أنها متقاربة

2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\ln\left(\frac{u_n-\sqrt{e}}{u_n+\sqrt{e}}\right)$

أ) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}+\sqrt{e}=\frac{1}{2u_n}\left(u_n+\sqrt{e}\right)^2$

ب) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 2 يطلب تعيين حدها الأول v_0

ج) أكتب v_n بدلالة n ثم إستنتج u_n بدلالة n ، أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

يحتوي صندوق U_1 على كرتين حمراوين تحمل العدد المركب i و ثلاث كرات خضراء تحمل العدد 1 ويحتوي الصندوق U_2 على ثلاث كرات حمراء تحمل العدد المركب $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ وكرتين خضراوين تحمل العدد 0 و يحتوي الصندوق U_3 على كرتين حمراوين تحمل العدد المركب $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ و كرتين خضراوين تحمل العدد 2

نسحب كرتين على التوالي و بالإرجاع من أحد الصناديق الثلاثة . علما أن إحتمال إختيار أحد الصناديق هي النسبة بين عدد الكريات الموجودة في كل صندوق و العدد الإجمالي للكريات الموجودة في الصناديق الثلاثة معا

نعتبر الحوادث التالية : A " الحصول على كرتين من نفس اللون " B " الحصول على كرتين حمراوين"

C "الحصول على كرة خضراء على الأقل "

1) شكل شجرة الإحتمالات الموافقة لهذه التجربة

2) بين أن $p(A)=\frac{18}{35}$ ثم أحسب $p(B)$ و $p(C)$

3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب كرتين مجموع طويلة الأعداد مسجلة على الكريات المسحوبة

أ) برر أن قيم المتغير العشوائي X هي : 0 ، 1 ، 2 ، 3 و 4 ثم عرف قانون إحتماله

ب) أحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ ثم أحسب $P\left(C_5^X=5\right)$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1-x+e^x$

1) ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها

2) استنتج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x)=x+1+xe^{-x}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل لـ: (C_f) بجوار $+\infty$

ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ)

3) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=e^{-x}g(x)$

ب) إستنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

4) بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة. فاصلتها α حيث $-0.5<\alpha<-0.4$

5) أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 ثم أدرس الوضع النسبي لـ: (C_f) و (T)

6) أرسم (Δ) ، (T) و (C_f) في نفس المعلم

7) عين قيم m الوسيط الحقيقي حتى تقبل المعادلة $f(x)=mx+1$ حلين متمايزين

III) H دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كمالي : $H(x)=(ax+b)e^{-x}$ حيث a و b عددين حقيقين

1) عين a و b حتى تكون H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$ حيث: $h(x)=xe^{-x}$

2) أحسب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و (T) والمستقيمن اللذين معادلتيهما: $x=1$ و $x=3$

تم تحميل من مجموعة محفظة

الرياضيات للتعليم بالجزائر

التمرين الأول :

1) حل في C المعادلة $z^2-2z+4=0$

$\Delta=-12=12i^2$ (0,25)

ومنه $\sqrt{\Delta}=2\sqrt{3}i$

$z_1=\frac{2+2\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3}$ (0,25) و $z_2=\frac{2-2i\sqrt{3}}{2}=1-i\sqrt{3}$ (0,25)

II)

1) كتابة z_C على الشكل الجبري :

لدينا: $e^{i\frac{5\pi}{6}}=e^{i(\pi-\frac{\pi}{6})}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$

ومنه $e^{i\frac{5\pi}{6}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$ (0,25)

إذن $z_C=z_A e^{i\frac{5\pi}{6}}=(1+i\sqrt{3})(\frac{-\sqrt{3}+i}{2})=\frac{-\sqrt{3}-i}{2}$

• كتابة الشكل الأسي لـ Z_A

لدينا: $|z_A|=|1+i\sqrt{3}|=2$ ومنه $\begin{cases}\cos\theta=\frac{1}{2}\\ \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

ومنه $arg(z_A)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ حيث $k\in Z$

ومنه $z_A=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ (0,25)

• كتابة الشكل الأسي لـ Z_B

$z_B=\overline{z_A}=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ (0,25)

2) إستنتاج الشكل الأسي للعدد $\frac{z_A}{z_B}$

$\frac{z_A}{z_B}=\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ (0,25)

• إستنتاج طبيعة المثلث OAB

$\left|\frac{z_A}{z_B}\right|=|e^{i\frac{2\pi}{3}}|$ (0,25)

ومنه $\frac{|z_A|}{|z_B|}=1$ أي $OB=OA$ ومنه المثلث OAB متساوي الساقين (0,25)

3) تعيين لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي OADB متوازي أضلاع

OADB متوازي أضلاع معناه $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{DB}$ وهذا يعني $z_A=z_B-z_D$ (0,25)

ومنه $z_D=z_B-z_A=2$ (0,25)

4) تعيين قيم n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{3n}$ حقيقي موجب تماما.

$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{3n}$ عدد حقيقي موجب تماما يعني $3n\times\frac{2\pi}{3}=2k\pi$

ومنه $n=k$ حيث $k\in N$ (0,25)

• كتابة العدد $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2023}$ على الشكل الجبري

$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2023}=\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{2023}$ (0,25)

$=e^{i\frac{4046\pi}{3}}$

$=\cos\left(\frac{4046\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4046\pi}{3}\right)$

$=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (0,25)

5) تعيين (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي من أجلها يكون: $z=z_A+2e^{i\theta}$ حيث $\theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ (0,25)

$z-z_A=2e^{i\theta}$ تكافئ $z=z_A+2e^{i\theta}$ ومنه $|z-z_A|=2$

ومنه $AM=2$ و بما أن $arg(z-z_A)\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ فإن (E) هي الربع الأول للدائرة التي مركزها النقطة A ذات اللاحقة z_A و نصف قطرها $r=2$ (0,25)

التمرين الثاني :

الجزء الأول

1) التحقق أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-2;0]$ (0,25)

الدالة f قابلة للإشتقاق على $[-2;0]$ ودالتها المشتقة f'

حيث: $f'(x)=\frac{1}{2-x}$ ولدينا من أجل $x\in[-2;0]$

$2-x>0$ ومنه $f'(x)>0$ يعني الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-2;0]$

2) إثبات أنه من أجل كل $x\in[-2;0]$ فإن $f(x)\in[-2;0]$ (0,25)

لدينا: $-2\le x\le 0$ و بما أن الدالة f متزايدة فإن $f(-2)\le f(x)\le 0$

أي $-\ln 4\le f(x)\le -\ln 2$ و بما أن $-\ln 2\le 0$ و $-2\le -\ln 4$ (0,25)

فإن: $f(x)\in[-2;0]$

الجزء الثاني

1) أ) تبرير وجود متتاليتين (u_n) و (v_n)

لدينا: $\begin{cases}u_0\in[-2;0]\\ v_0\in[-2;0]\end{cases}$ (0,25) و $f(x)\in[-2;0]$ (0,25)

ومنه (u_n) و (v_n) موجودتين

ب) تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و v_0 ، v_1 ، v_2 (0,25) (0,25)

• التخمين:

نلاحظ أن $u_2>u_1>u_0$ و بالتالي (u_n) متتالية متزايدة على N (0,25)

و نلاحظ أن $v_2<v_1<v_0$ وبالتالي (v_n) متتالية متناقصة على N (0,25)

2) أ) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم:

$-2\le u_{n-1}\le u_n\le v_n\le v_{n-1}\le 0$

لتكن الخاصية $p(n)$: $-2\le u_{n-1}\le u_n\le v_n\le v_{n-1}\le 0$

من أجل n عدد طبيعي غير معدوم :

التحقق من أجل $n=1$ لدينا: $\begin{cases} u_1 = -\ln 4 \\ v_1 = -\ln 2 \end{cases}$ (0,25)

إذن $0 \le 0 = v_0 \le v_1 = -\ln 2 \le u_1 = -\ln 4 \le -2$ ومنه $p(1)$ محققة

نفرض أن $p(n)$ محققة من أجل $n \in \mathbb{N}^*$ و نثبت صحة $p(n+1)$

لدينا من الفرض : $0 \le v_{n-1} \le v_n \le u_n \le u_{n-1} \le -2$ و بما أن f دالة متزايدة تماما

فإن : $f(0) \le f(v_{n-1}) \le f(v_n) \le f(u_n) \le f(u_{n-1}) \le f(-2)$ (0,25)

ومنه $-\ln 4 u_n \le u_{n+1} \le v_{n+1} \le v_n \le -\ln 2$

ومنه $0 \le v_n \le v_{n+1} \le u_{n+1} \le -2n$ ومنه $p(n+1)$ محققة

إذن من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم الخاصية $p(n)$ محققة

ب) إستنتاج إتجاه تغير و تقارب كل من (u_n) و (v_n)

لدينا: من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n-1} \le u_n$ ومنه $f(u_{n-1}) \le f(u_n)$

أي $u_n \le u_{n+1}$ ومنه $u_{n+1} - u_n \ge 0$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما على N و بما أنها محدودة من أعلى فهي متقاربة (0,25) (0,25)

لدينا: $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n \le v_{n-1}$ ومنه $f(v_n) \le f(v_{n-1})$ أي $v_{n+1} \le v_n$

ومنه $v_{n+1} - v_n \le 0$ ومنه المتتالية (v_n) متناقصة تماما على N

و بما أنها محدودة من الأسفل فهي متقاربة

3) التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \ln\left(1 + \frac{v_n - u_n}{2 - v_n}\right)$$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - u_{n+1} &= -\ln(2 - v_n) + \ln(2 - u_n) \\ &= \ln\left(\frac{2 - u_n}{2 - v_n}\right) \\ &= \ln\left(\frac{2 - v_n + v_n - u_n}{2 - v_n}\right) \\ &= \left(1 + \frac{v_n - u_n}{2 - v_n}\right) \end{aligned}$$ (0,25)

4) إثبات أن من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le v_{n+1} - u_{n+1} \le \frac{1}{2}(v_n - u_n)$

لدينا: $u_n \le v_n$ ومنه $f(u_n) \le f(v_n)$ أي $u_{n+1} \le v_{n+1}$

ومنه (1)... $0 \le v_{n+1} - u_{n+1}$ (0,25)

ولدينا: $0 \le v_n$ ومنه $-v_n \le 0$ ومنه $2 - v_n \ge 2$ ومنه $\frac{1}{2 - v_n} \le \frac{1}{2}$

و بالضرب في العدد الموجب $(v_n - u_n)$ نجد $\frac{v_n - u_n}{2 - v_n} \le \frac{1}{2}(v_n - u_n)$

أي (2)... $v_{n+1} - u_{n+1} \le \frac{1}{2}(v_n - u_n)$ (0,25)

من (1) و (2) نستنتج أن : $0 \le v_{n+1} - u_{n+1} \le \frac{1}{2}(v_n - u_n)$

ب) إستنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le v_n - u_n \le 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$

وجدنا : $0 \le v_{n+1} - u_{n+1} \le \frac{1}{2}(v_n - u_n)$

ومنه

$$0 \le v_1 - u_1 \le \frac{1}{2}(v_0 - u_0)$$

$$0 \le v_2 - u_2 \le \frac{1}{2}(v_1 - u_1)$$ (0,25)

$$0 \le v_3 - u_3 \le \frac{1}{2}(v_2 - u_2)$$

$$\vdots$$

$$0 \le v_{n-1} - u_{n-1} \le \frac{1}{2}(v_{n-2} - u_{n-2})$$

$$0 \le v_n - u_n \le \frac{1}{2}(v_{n-1} - u_{n-1})$$

بالضرب طرفا لطرف بين المتباينات السابقة مع الإختزال

نجد : $0 \le v_n - u_n \le (v_0 - u_0)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ أي $0 \le v_n - u_n \le 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$

د) أثبت أن: $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = a$

لدينا: $\lim_{n\to+\infty} 2\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ (0,25) ومنه حسب مبرهنة النهاية بالحصر نستنتج أن

$\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$ أي $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n$

وبالتالي المتتاليتين متقاربتين إلى نفس النهاية a التي تحقق $f(a) = a$

ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = a$ (0,25)

ومنه نستنتج أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان (0,25)

التمرين الثالث :

1) أ) حساب $p(A)$ و $p(B)$

عدد الإمكانيات الإختيار هو $C_{13}^2 = 78$ (0,25)

$$p(A) = \frac{C_6^2}{C_{13}^2} = \frac{15}{78} = \frac{5}{26}$$ (0,5)

$$p(B) = \frac{C_4^2 + C_6^2 + C_3^2}{C_{13}^2} = \frac{24}{78} = \frac{4}{13}$$ (0,5)

ب) لدينا: $p(A \cap B) = \frac{C_2^2 + C_3^2}{C_{13}^2} = \frac{4}{78} = \frac{2}{39}$ (0,5)

ولدينا: $p(A) \times p(B) = \frac{20}{338} = \frac{10}{169}$ (0,5)

إذن $p(A \cap B) \neq p(A) \times p(B)$ (0,25)

و بالتالي A و B غير مستقلتان

2) حساب إحتمال أن يكون اللاعبين الإثنين المختارين من قسمين مختلفين و يحملان رقمين زوجيين أي حساب $p(\bar{B} \cap A)$

$$p(\bar{B} \cap A) = \frac{C_1^1 \times C_3^1 + C_1^1 \times C_2^1 + C_3^1 \times C_2^1}{C_{13}^2} = \frac{11}{78}$$ (0,5)

3) حساب إحتمال أن يكون اللاعبين المختارين حاملين الرقمين زوجيين علما أنهما من نفس القسم أي حساب $p_{\bar{B}}(A)$

$$p_{\bar{B}}(A) = \frac{p(A \cap \bar{B})}{p(\bar{B})} = \frac{\frac{11}{78}}{\frac{54}{78}} = \frac{11}{78}$$ (0,5) $p(\bar{B}) = \frac{54}{78}$ (0,5)

التمرين الرابع :

1) إثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا a حيث $0.15 < a < 0.16$

لدينا الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على $[0.15, 0.16]$ (0,25)

و $\begin{cases} g(0.15) \approx -0.047 \\ g(0.16) \approx 0.007 \end{cases}$ ومنه $g(0.15) < g(0.16)$ (0,25)

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.15<\alpha<0.16$

2) إشارة $g(x)$ على $]0;1[$

x	0		α		1
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖

(0,5)

1) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

لدينا: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0^+\\ \lim\limits_{x\to 1}(1-2x+\ln x)=-1\end{cases}$ ومنه $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-\infty$ (0,25)

ومنه المستقيم ذي المعادلة $x=1$ مقارب لـ (C_f) (0,25)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-2x+\ln x}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\frac{1}{x}-2+\frac{\ln x}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} \quad (0,25)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}-2+\frac{\ln x}{x}}{1-\frac{1}{x}}$$

$$=-2 \quad (0,25)$$

لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}-2+\frac{\ln x}{x}=-2\\ \lim\limits_{x\to+\infty}1-\frac{1}{x}=1\end{cases}$

ومنه المستقيم ذي المعادلة $y=-2$ مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$ (0,25)

2) أ) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$

فإن: $f'(x)=\frac{g(\frac{1}{x})}{(x-1)^2}$

الدالة f قابلة للإشتقاق على $]1;+\infty[$ و دالتها المشتقة $f'(x)$ حيث:

$$f'(x)=\frac{(2-\frac{1}{x})(x-1)-(1-2x+\ln x)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{-2x+2-2x+1-\frac{1}{x}-1+2x-\ln x}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{2-\frac{1}{x}-\ln x}{(x-1)^2} \quad (0,5)$$

$$=\frac{2-\frac{1}{x}+\ln(\frac{1}{x})}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{g(\frac{1}{x})}{(x-1)^2}$$

ب) إشارة $f'(x)$

إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(\frac{1}{x})$

• $g(\frac{1}{x})\geq 0$ يعني $\frac{1}{x}\in]\alpha;1[$ ومنه $x\in]1;\frac{1}{\alpha}]$ (0,25)

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1;\frac{1}{\alpha}]$

• $g(\frac{1}{x})\leq 0$ يعني $\frac{1}{x}\in]1;\alpha[$ ومنه $x\in[\frac{1}{\alpha};1[$ (0,25)

ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجال $[\frac{1}{\alpha};1[$

• $g(\frac{1}{x})=0$ يعني $\frac{1}{x}=\alpha$ ومنه $x=\frac{1}{\alpha}$ (0,25)

جدول التغيرات الدالة f

x	1		$\frac{1}{\alpha}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	(0,5) ↗	$f(\frac{1}{\alpha})$	↘	-2
	‖	$-\infty$			

3) دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=-2$

لدينا: $f(x)-(-2)=\frac{-1+\ln x}{x}$ (0,25)

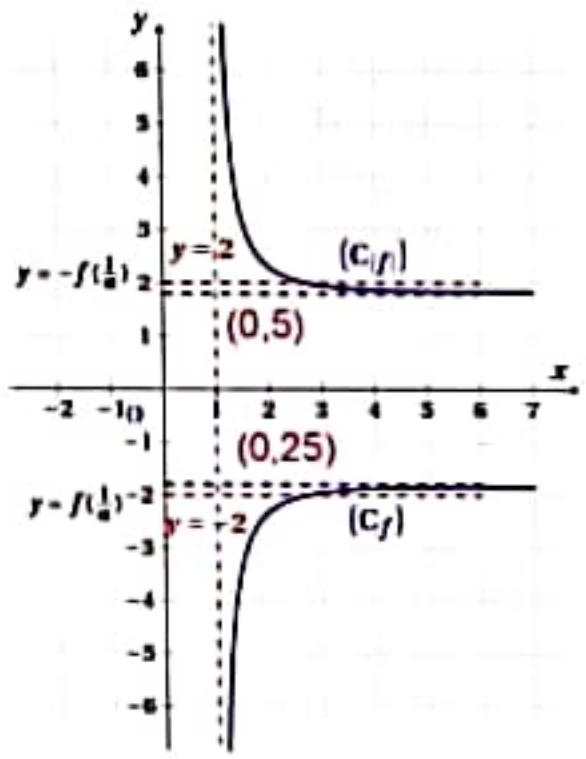
لدينا من أجل $x\in]1;+\infty[$: $x-1>0$

ومنه إشارة الفرق من نفس إشارة $-1+\ln x$

إذن $-1+\ln x=0$ تكافئ $\ln x=1$ ومنه $x=e$

x	1		e		$+\infty$
$f(x)-y$	‖	$-$	0	$+$	
الوضعية النسبية	‖	(C_f) تحت (Δ) (0,25)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(e;f(e))$ (0,25)	(C_f) فوق (Δ) (0,25)	

4) • الإنشاء



5) تعيين قيم m حتى تقبل المعادلة $|f(x)|=m$ حلين متمايزين (0,25)

المعادلة $|f(x)|=m$ تقبل حلان متمايزان من أجل $m\in\left]-f\left(\frac{1}{\alpha}\right);2\right[$

6) إستنتاج إتجاه تغير الدالة h

الدالة h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و دالتها المشتقة h'

حيث : $h'(x) = e^x f'(e^x)$

ومنه إشارة $h'(x)$ من نفس إشارة $f'(e^x)$

- لدينا: $f'(e^x) > 0$ من أجل $e^x \in \left]1;\frac{1}{\alpha}\right[$ ومنه $x \in]0;-\ln\alpha[$ (0,25)
- لدينا: $f'(e^x) < 0$ من أجل $e^x \in \left]\frac{1}{\alpha};+\infty\right[$ ومنه $x \in]-\ln\alpha;+\infty[$ (0,25)
- لدينا: $f'(e^x) = 0$ من أجل $e^x = \frac{1}{\alpha}$ ومنه $x = -\ln\alpha$ (0,25)
- حساب النهايات

$$\lim_{x \to 0} h(x) = \lim_{x \to 0} f(e^x) = \lim_{X \to 1} f(X) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} f(e^x) = \lim_{X \to +\infty} f(x) = -2$$

- جدول تغيرات الدالة h

x	0		$-\ln\alpha$		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$h(x)$	‖	$-\infty$ ↗	$f(-\ln\alpha)$ (0,25)	↘	-2

التمرين الأول :

1) الإجابة : ب) (0,25)

التبرير :

لدينا: $z = -3\left|\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right| = 3\left|-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right|$

ومنه $z = 3\left|\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right|$ (0,75)

ومنه $z = 3\left|\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right|$

ومنه $\arg(z) = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$

2) الإجابة : ب) (0,25)

التبرير :

لدينا : $|2z - 2 + 4i| = 8$ تكافئ $|2(z - (1 - 2i))| = 8$ (0,75)

تكافئ $|z - (1 - 2i)| = 4$ أي $AM = 4$

ومنه (E) مجموعة النقط M التي تحقق $|2z - 2 + 4i| = 8$ هي الدائرة التي مركزها النقطة A حيث $z_A = 1 - 2i$ أي $A(1,-2)$ ونصف قطرها $r = 4$

3) الإجابة : أ) (0,25)

التبرير: ABCD متوازي أضلاع يعني $z_B - z_A = z_C - z_D$ (0,75)

ومنه $-z_D = z_B - z_A - z_C = 1 - 2i - 1 - 2i - i = -5i$

$z_D = 5i$

4) الإجابة :أ) (0,25)

التبرير:

$\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1-1+2i}{2} = i$ (0,75)

التمرين الثاني:

1) أ) التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1} - \sqrt{e} = \frac{1}{2u_n}(u_n - \sqrt{e})^2$

$u_{n+1} - \sqrt{e} = \frac{u_n^2 + e}{2u_n} - \sqrt{e} = \frac{u_n^2 + e - 2\sqrt{e}u_n}{2u_n}$ (0,5)

$= \frac{u_n^2 + (\sqrt{e})^2 - 2\sqrt{e}u_n}{2u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{e})^2}{2u_n}$

ب) إثبات بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \sqrt{e}$

• لتكن الخاصية $p(n)$: $u_n > \sqrt{e}$ من أجل كل عدد طبيعي n

لدينا من أجل $n = 0$: $u_0 = 1 + \sqrt{e}$ ومنه $u_0 - \sqrt{e} = 1 > 0$ (0,25)

ومنه $p(0)$ محققة

• الفرضية : نفرض أن $p(n)$ محققة من أجل $n \in \mathbb{N}$ و نثبت صحة $p(n+1)$

• إثبات صحة $p(n+1)$ (0,5)

لدينا: $\frac{1}{2u_n} > 0$ لأن $u_n > \sqrt{e}$ حسب الفرض ولدينا $(u_n - \sqrt{e})^2 > 0$

ومنه $u_{n+1} - \sqrt{e} > 0$ يعني $u_{n+1} > \sqrt{e}$ ومنه $p(n+1)$ صحيحة

إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \sqrt{e}$

ج) دراسة إتجاه تغير المتالية (u_n)

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + e}{2u_n} - u_n = \frac{u_n^2 + e - 2u_n^2}{2u_n} = \frac{-u_n^2 + e}{2u_n}$

ومنه $u_{n+1} - u_n = \frac{(\sqrt{e} - u_n)(\sqrt{e} + u_n)}{2u_n} < 0$ (0,5)

لأن من اجل كل عدد طبيعي n لدينا: $\sqrt{e - u_n} < 0$ ، $u_n + \sqrt{e} > 0$

و $2u_n > 0$ ومنه المتالية (u_n) متناقصة تماما على N و بما أنها محدود من الأسفل $(u_n > \sqrt{e})$ فهي متقاربة (0,25)

2) أ) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n

$u_{n+1} + \sqrt{e} = \frac{1}{2u_n}(u_n + \sqrt{e})^2$

لدينا: (0,5)

$u_{n+1} + \sqrt{e} = \frac{u_n^2 + e}{2u_n} + \sqrt{e} = \frac{u_n^2 + e + 2\sqrt{e}u_n}{2u_n} = \frac{(u_n + \sqrt{e})^2}{2u_n}$

وهو المطلوب

ب) إثبات أن (v_n) متالية هندسية أساسها $q = 2$ و حساب حدها الأول:

$v_{n+1} = \ln\left(\frac{u_{n+1} - \sqrt{e}}{u_{n+1} + \sqrt{e}}\right) = \ln\left(\frac{\frac{(u_n - \sqrt{e})^2}{2u_n}}{\frac{(u_n + \sqrt{e})^2}{2u_n}}\right)$

$= \ln\left(\frac{(u_n - \sqrt{e})^2}{(u_n + \sqrt{e})^2}\right)$

$= \ln\left(\frac{u_n - \sqrt{e}}{u_n + \sqrt{e}}\right)^2$ (0,5)

$= 2\ln\left(\frac{u_n - \sqrt{e}}{u_n + \sqrt{e}}\right) = 2v_n$

ومنه (v_n) متالية هندسية أساسها $q = 2$ وحدها الأول

$v_0 = \ln\left(\frac{u_0 - \sqrt{e}}{u_0 + \sqrt{e}}\right) = \ln\left(\frac{1}{1 + 2\sqrt{e}}\right) = -\ln(1 + 2\sqrt{e})$ (0,25)

ج) • كتابة v_n بدلالة n : $v_n = v_0(q)^n = -\ln(1 + 2\sqrt{e}) \times 2^n$ (0,5)

• إستنتاج عبارة u_n

لدينا : $v_n = \ln\left(\frac{u_n - \sqrt{e}}{u_n + \sqrt{e}}\right) = \ln\left(\frac{u_n + \sqrt{e} - 2\sqrt{e}}{u_n + \sqrt{e}}\right)$

ومنه $e^{v_n} = 1 - \frac{2\sqrt{e}}{u_n + \sqrt{e}}$ ومنه $v_n = \ln\left(1 - \frac{2\sqrt{e}}{u_n + \sqrt{u_n}}\right)$

ومنه $\frac{2\sqrt{e}}{1 - e^{v_n}} = u_n + \sqrt{e}$ ومنه $1 - e^{v_n} = \frac{2\sqrt{e}}{u_n + \sqrt{e}}$

ومنه $u_n = \frac{2\sqrt{e}}{1 - e^{v_n}} - \sqrt{e}$ (0,5)

ومنه $u_n = \frac{2\sqrt{e}}{1 - e^{-\ln(1+2\sqrt{e}) \times 2^n}} - \sqrt{e}$

• حساب $\lim_{n \to +\infty} u_n$

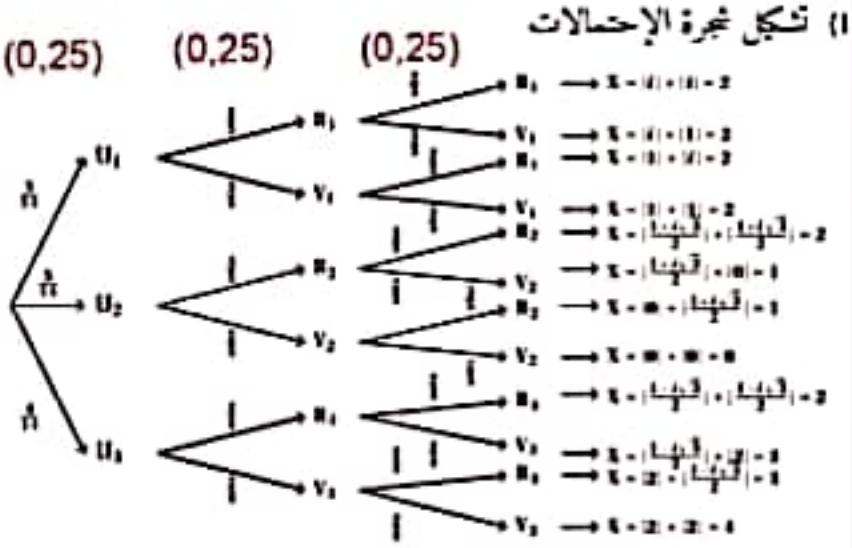
لدينا: $\lim_{n \to +\infty} e^{-\ln(1+2\sqrt{e}) \times 2^n} = 0$ (0,25)

ومنه $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{2\sqrt{e}}{1 - e^{-\ln(1+2\sqrt{e}) \times 2^n}} - \sqrt{e} = \sqrt{e}$

(0,5)

التمرين الثالث :

1) تشكيل شجرة الإحتمالات



2) إثبات أن $p(A)=\frac{18}{35}$

(0,25) $p(A)=\frac{5}{14}\times\frac{13}{25}+\frac{5}{14}\left(\frac{13}{25}\right)+\frac{2}{7}\left(\frac{8}{16}\right)=\frac{18}{35}$

• حساب $p(B)$ و $p(C)$

(0,5) $p(B)=\frac{5}{15}\times\frac{4}{25}+\frac{5}{14}\times\frac{6}{25}+\frac{5}{15}\times\frac{4}{16}=\frac{9}{35}$

(0,5) $p(C)=1-p(\overline{C})=1-\frac{9}{35}=\frac{26}{35}$

3) أ) تبرير أن قيم المتغير العشوائي X هي : 0 ، 1 ، 2 ، 3 و 4 (0,25)

التبرير في مخطط الشجرة

• قانون إحتمال المتغير العشوائي X

(0,25) $p(X=0)=\frac{5}{14}\times\frac{4}{25}=\frac{20}{350}=\frac{2}{35}$

(0,25) $p(X=1)=\frac{5}{14}\times\frac{12}{25}=\frac{60}{350}=\frac{6}{35}$

(0,25) $p(x=2)=\frac{5}{14}\times\frac{34}{25}+\frac{4}{14}\times\frac{4}{16}=\frac{39}{70}$

(0,25) $p(x=3)=\frac{4}{14}\times\frac{8}{16}=\frac{1}{7}$

(0,25) $p(x=4)=\frac{4}{14}\times\frac{4}{16}=\frac{1}{14}$

X_i	0	1	2	3	4
$p(X_i)$	$\frac{2}{35}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{39}{70}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{14}$

ب) • حساب الأمل الرياضياتي E(X)

(0,25) $E(x)=0\times\frac{2}{35}+1\times\frac{6}{35}+2\times\frac{39}{70}+3\times\times\frac{1}{7}+4\times\frac{1}{14}$

ومنه $E(X)=2$

• حساب $p(C_5^2=5)$

(0,25) $p(C_5^2=5)=p(X=1)+p(X=4)=\frac{17}{70}$

التمرين الرابع :

I) g دالة عددية معرفة على R بـ: $g(x)=1-x+e^x$

1) دراسة تغيرات الدالة g :

أ) النهايات:

(0,25) $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}1-x+e^x=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\frac{1}{x}-1+\frac{e^x}{x}\right)=+\infty$

(0,25) $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}1-x+e^x=+\infty$

ب) الدالة g قابلة للإشتقاق على R ولدينا: $g'(x)=-1+e^x$. (0,25)

$g'(x)=0$ يكافئ $x=0$

$g'(x)>0$ يكافئ $x>0$ و $g'(x)<0$ يكافئ $x<0$.

ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $[0,+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty,0]$.

ج) جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	(0,5) $g(0)=2$	↗	$+\infty$

2) استنتاج اشارة $g(x)$ على R : من جدول التغيرات لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x)\geq 2>0$. (0,25)

II) f دالة معرفة على R كالتالي : $f(x)=x+1+xe^{-x}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) حساب النهايات:

(0,25) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x+1+\overbrace{xe^{-x}}^{0}=+\infty$

(0,25) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x+1+\overbrace{xe^{-x}}^{-\infty}=-\infty$

2) تبين ان المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x+1$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$:

(0,25) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-x-1=\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}=0$

دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) :

لدينا $f(x)-x-1=xe^{-x}=0$

ومنه $x=0$ إذن:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
xe^{-x}		$-$	0	$+$	
الوضعية النسبية	(C_f) تحت (Δ)		(C_f) يتقاطع (Δ) في النقطة ذات الفاصلة 0		(C_f) فوق (Δ)

(0,5)

3) أ) ،بين انه من اجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=e^{-x}g(x)$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على R ولدينا:

(0,25) $f'(x)=1+e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(e^x+1-x)=e^{-x}g(x)$

ب) من اجل كل عدد حقيقي x : $e^{-x}>0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ على R ، إذن $f'(x)>0$ وعليه الدالة f متزايدة تماما على R .

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(0,25)

4) نبين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة. فاصلتها α حيث $-0.5 < \alpha < -0.4$.

الدالة f معرفة ومستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-0.5;-0.4[$ و لدينا $f(-0.5) = -0.32$ ، $f(-0.4) = 0.003$ إذن $f(-0.5) \times f(-0.4) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة. فاصلتها α حيث $-0.5 < \alpha < -0.4$. (0,25)

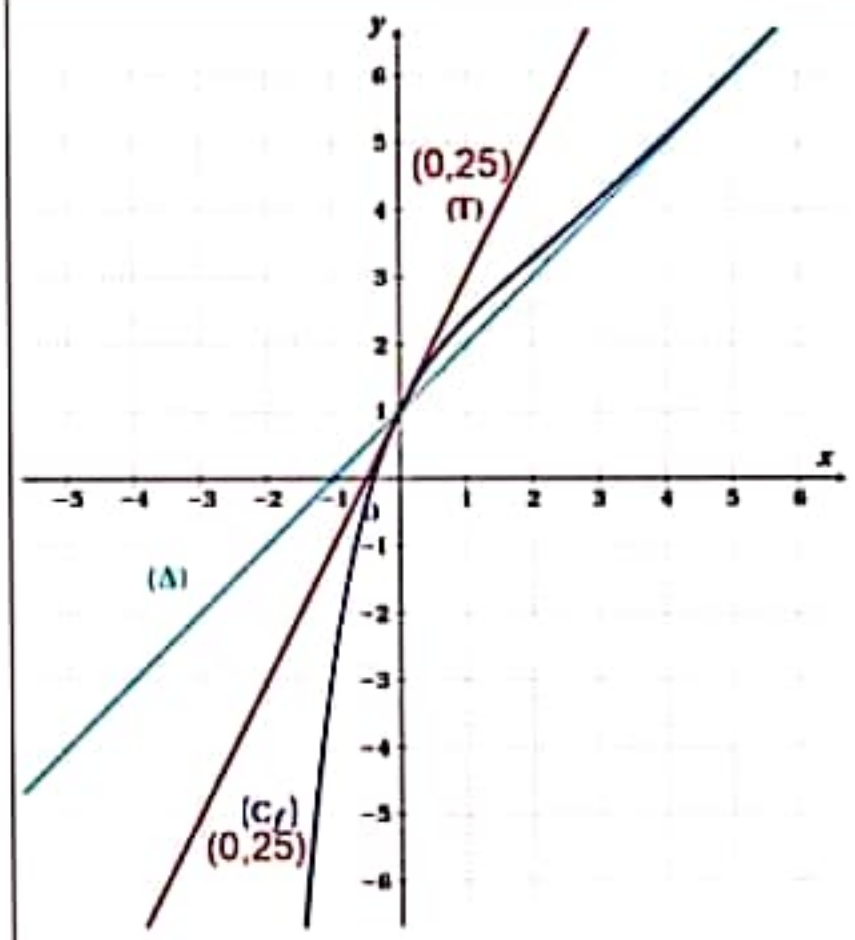
5) أ) كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 :
$(T): y = f'(0)x + f(0)$ ومنه $(T): y = 2x + 1$. (0,5)

ب) دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المماس (T) :

لدينا $f(x) - 2x - 1 = xe^{-x} - x = x(e^{-x} - 1)$.
$x(e^{-x} - 1) = 0$ يكافئ $x = 0$. (0,25)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	−	0	+
$e^{-x} - 1$	+	0	−
$x(e^{-x} - 1)$	−	0	−
الوضعية النسبية	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة m ıı (0,5)	(C_f) فوق (Δ)

6) إنشاء (Δ) ، (T) و (C_f) في نفس المعلم .



7) نناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = mx + 1$:

الحلول هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حزمة المستقيمات $y = mx + 1$ التي تشمل النقطة الثابتة (0;1) (0,25)

قيم m	عدد الحلول
$]-\infty;1[$	حل وحيد
$]1;2[$	حلان (0,25)
$m = 2$	حل وحيد
$]2;+\infty[$	حلان (0,25)

III) H دالة معرفة على R كما يلي : $H(x) = (ax + b)e^{-x}$ حيث a و b عددين حقيقيين

1) تعيين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون H دالة أصلية للدالة h على R المعرفة كما يلي : $h(x) = xe^{-x}$.

$$H'(x) = ae^{-x} - (ax + b)e^{-x} = (a - b - ax)e^{-x} = xe^{-x}$$

بالمطابقة نجد $a - b = 0$ أي $a = b$ و $a = -1$ إذن $b = -1$ (0,25) (0,25)
ومنه $H(x) = -(x + 1)e^{-x}$.

2) نحسب بوحدة المساحة $u.a$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمماس (T) و المستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = 1$ و $x = 3$

$$\int_1^3 2x + 1 - f(x)dx = \int_1^3 x - xe^{-x}dx$$

$$= \int_1^3 xdx - \int_1^3 h(x)dx \quad (0,25)$$

$$= \frac{1}{2}3^2 - \frac{1}{2} - [H(3) - H(1)]$$

$$= 4 + 4e^{-3} - 2e^{-1}u.a \quad (0,25)$$