الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية | الديوان الوطني للامتحانات و المسابقات

امتحان البكالوريا التجريبي | المقاطعة رقم 1 لولاية غرداية

الشعبة : علوم تجريبية | دورة : ماي 2019

اختبار في مادة : الرياضيات | المدة :03 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأوّل :

التمرين الأول: (04 نقاط)

(U_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي $U_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1} = 5 - \dfrac{4}{U_n}$

1) أحسب U_1 ، U_2 ثم برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n: $2 \leq U_n \leq 4$

2) بين ان (U_n) متزايدة .ثم استنتج أنها متقاربة .

3) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n: $4 - U_{n+1} \leq \dfrac{4 - U_n}{2}$.

4) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n: $0 \leq 4 - U_n \leq (\frac{1}{2})^{n-1}$ ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. نعتبر النقط A ، B ، C و D لواحقها على الترتيب Z_A ، Z_B ، Z_C و Z_D حيث: $Z_A = i\sqrt{3}$ ، $Z_B = \overline{Z_A}$ ، $Z_C = 3 + 2i\sqrt{3}$ و $Z_D = \overline{Z_C}$

1) بين أن: $\left(\dfrac{1+Z_A}{2}\right)^{2019} + \left(\dfrac{1-Z_A}{2}\right)^{2019} = -2$

– عين قيم العدد الطبيعي n بحيث: $\left(\dfrac{1+Z_A}{2}\right)^{n} - \left(\dfrac{1-Z_A}{2}\right)^{n} = 0$

2) تحقق أن: $\dfrac{Z_D - Z_B}{Z_B - Z_C} = \dfrac{Z_C - Z_A}{Z_D - Z_A}$ ثم استنتج أن النقط A, B, C, D تنتمي إلى نفس الدائرة يطلب تعيين عناصرها المميزة.

3) عين طبيعة الرباعي $ABDC$ ثم احسب مساحته.

4) f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث:

$$Z' = \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}(Z - Z_A) + Z_A$$

. عين طبيعة التحويل f و عناصره المميزة .

5) (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z حيث: ($Z \neq Z_A$ و $Z \neq Z_B$) المعرفة بالعلاقة:

$(E) : arg(Z^2 + 3) = arg(Z + i\sqrt{3}) + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$

– بين أنه يمكن كتابة العلاقة للمجموعة (E) على الشكل: $arg(Z - Z_A) = 2k\pi$ ثم استنتج طبيعة المجموعة (E) .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

تتكون باقة ورد من أربع وردات حمراء وثلاث وردات بيضاء ووردتين لونهما أصفر.

ا) نختار عشوائيا وفي آن واحد ثلاث وردات من هذه الباقة.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الوردات الصفراء المختارة.

1) أعط قانون احتمال المتغير العشوائي X.

2) أحسب $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X.

اا) نختار على التوالي وبدون إرجاع ثلاث وردات من هذه الباقة.

نعتبر الحادثتان التاليتان:

الحدث A: " اختيار ثلاث وردات من نفس اللون ".

الحدث B: " اختيار وردتين على الأقل لونهما أحمر ".

1) أحسب الإحتمالات التالية $P(A)$ ، $P(B)$ و $P(A \cap B)$.

2) علما أن الوردات المختارة من نفس اللون ، ما هو الاحتمال أن تكون حمراء. (الحدث R: اختيار ثلاث وردات حمراء)

التمرين الرابع: (07 نقاط)

ا) يعطى في الشكل المرفق المنحنيين (C_1) و (C_2) لدالتين معرفتين وقابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، نعلم أن احدى هاتين الدالتين هي الدالة المشتقة للأخرى ، نرمز إليهما إذن بـ g و g' .

1) أرفق كل دالة منهما بتمثيلها البياني.

2) على المجال $[-\frac{3}{2};5]$ شكل جدول تغيرات الدالة g.

3) ماهو معامل توجيه المماس للمنحني (C_1) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

اا) لتكن المعادلة التفاضلية (E): $y' + y = 2(x+1)e^{-x}$

1) بين أن الدالة f_0 المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f_0(x) = (x^2+2x)e^{-x}$ حل للمعادلة (E).

2) حل المعادلة التفاضلية (E'): $y' + y = 0$.

3) بين أن f حل للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كانت الدالة u حيث $u = f - f_0$ حلا للمعادلة (E').

4) استنتج من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، عبارة $f(x)$ عندما تكون f حلا للمعادلة (E).

5) علما أن الدالة g المعرفة في الجزء (I) حلا للمعادلة (E) عين $g(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x.

6) عين الحل h للمعادلة (E) الذي تمثيله البياني يقبل في النقطة ذات الفاصلة 0 مماسا معامل توجيهه معدوما.

ااا) f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (x^2+2x+2)e^{-x}$.

1) عين نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

2) نعلم أن الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، عين دالتها المشتقة وأدرس اشارتها، ثم أنجز جدول تغيراتها.

3) في معلم متعامد ومتجانس $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$ (وحدة الطول $2cm$) ، نسمي (C_f) التمثيل البياني للدالة f.

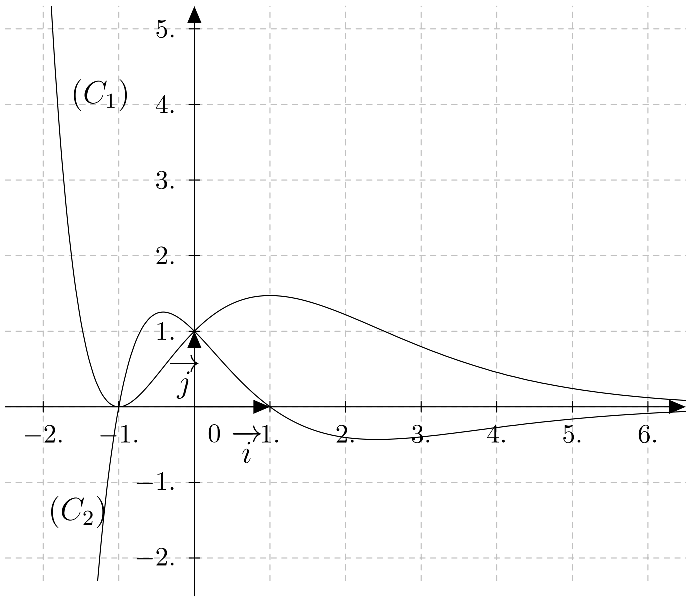
ا) عين معادلة لـ (d) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة -1.

ب) أنشئ المماس (d) والمنحنى (C_f) في المعلم $\left(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right)$.

4) لتكن الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $F(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$.

ا) عين الأعداد الحقيقية a، b و c حتى تكون F دالة أصلية لـ f على $\mathbb{R}$.

ب) أحسب مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) وبمحور التراتيب و محور الفواصل والمستقيم ذي المعادلة $x=1$.



الموضوع الثّاني :

التمرين الأول: (04 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

f الدالة المعرفة على المجال $[1,+\infty[$ بالشكل: $f(x)=1+\sqrt{x-1}$, و ليكن (C_f) المنحنى الممثل لها.

(Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$ (كما هو موضح في الشكل 1).

ولتكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $U_0=\dfrac{3}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1}=f(U_n)$

1) ا) مثل على حامل محور الفواصل الحدود U_0 ، U_1 ، U_2 دون حسابها مبينا خطوط الإنشاء.(الشكل 1)

ب) خمن إتجاه تغير المتتالية (U_n) وتقاربها.

ج) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n فان $1<U_n<2$.

2) أثبت ان المتتالية (U_n) متزايدة تماما.ثم استنتج أنها متقاربة .

3) نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالشكل: $V_n=ln(U_n-1)$

ا) بين أنّ المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الأول.

ب) أكتب عبارة الحد العام (V_n) بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

4) احسب كلا من Π_n و S_n بدلالة n حيث:

$\Pi_n=(U_0-1)(U_1-1)(U_2-1)...(U_n-1)$

$S_n=V_0^2+V_1^2+V_2^2+...+V_n^2$.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(Z+\sqrt{3}-3i)(Z^2-6Z+12)=0$

2) في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B ، C التي لواحقها على الترتيب. $Z_A=3+i\sqrt{3}$ ، $Z_B=3-i\sqrt{3}$ ، $Z_C=-\sqrt{3}+3i$

ا) أكتب كلا من Z_A و Z_C و $\dfrac{Z_C}{Z_A}$ على الشكل الأسي ثم استنتج طبيعة المثلث OAC.

ب) أحسب $\left(\dfrac{Z_A}{2\sqrt{3}}\right)^{1440}+i\left(\dfrac{Z_B}{2\sqrt{3}}\right)^{2019}$

3) لتكن النقطة D نظيرة C بالنسبة إلى محور الفواصل ، بين أن المستقيمين (AD) و (BC) متعامدان.

4) عين نسبة وزاوية التشابه المباشر S الذي مركزه $E(3-\sqrt{3},0)$ ويحول النقطة A إلى النقطة C.

5) بين أن النقط A, E, O, C تنتمي إلى دائرة واحدة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

يحتوي صندوق U_1 على 4 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء ، و يحتوي صندوق U_2 على كرتين حمراوين و 5 كرات بيضاء ، و يحتوي صندوق U_3 على 3 كرات تحمل الرقم 1 و كرتين تحملان معا الرقم 2.

1) نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كرات من U_1، (ولا نهتم بالصندوقين U_2 و U_3).

ا) ما هو عدد الحالات الممكنة .

ب) ما هو احتمال الحصول على 3 كرات من نفس اللون.

ج) ماهو احتمال الحصول على كرة بيضاء على الأقل.

د) ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات البيضاء المسحوبة.

– حدد قانون احتمال X.

2) نسحب الآن كرة من U_3. إذا كان رقمها هو 1 نسحب كرة من U_1، أما إذا كان رقمها هو 2 فنسحب كرة من U_2.

ا) ما هو احتمال الحصول على كرة حمراء.

ب) علما أن الكرة المسحوبة حمراء ، ماهو احتمال كونها مسحوبة من U_1.

(نسمي الأحداث التالية الحدث R: الكرة المسحوبة حمراء ، الحدث A_1: الكرة مسحوبة من الصندوق U_3 وتحمل الرقم 1 ، الحدث A_2: الكرة مسحوبة من الصندوق U_3 وتحمل الرقم 2 ، الحدث B: الكرة مسحوبة من الصندوق U_1)

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;2\}$ كمايلي: $f(x)=\dfrac{3x^2-x-2}{x^2-x-2}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1) أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها ثم فسر النتائج هندسيا.

2) ا) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1;2\}$ لدينا: $f'(x)=\dfrac{-2x(x+4)}{(x^2-x-2)^2}$

ب) استنتج إتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

3) ا) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) المقارب الأفقي له.

ب) عين نقاط تقاطع (C_f) مع محوري الإحداثيات.

ج) ارسم المستقيمات المقاربة و المنحنى (C_f).

د) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة:

$$(3-m)x^2+(m-1)x+2(m-1)=0$$

4) ا) عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن -1 و 2 لدينا:

$$f(x)=a+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}$$

ب) إستنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]2,+\infty[$.

5) لتكن $S(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات $y=3$ و $x=3$ و $x=\lambda$ حيث: λ عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $]2,3[$.

ا) أحسب المساحة $S(\lambda)$ بدلالة λ.

ب) أحسب $\lim_{\lambda \to 2} S(\lambda)$.

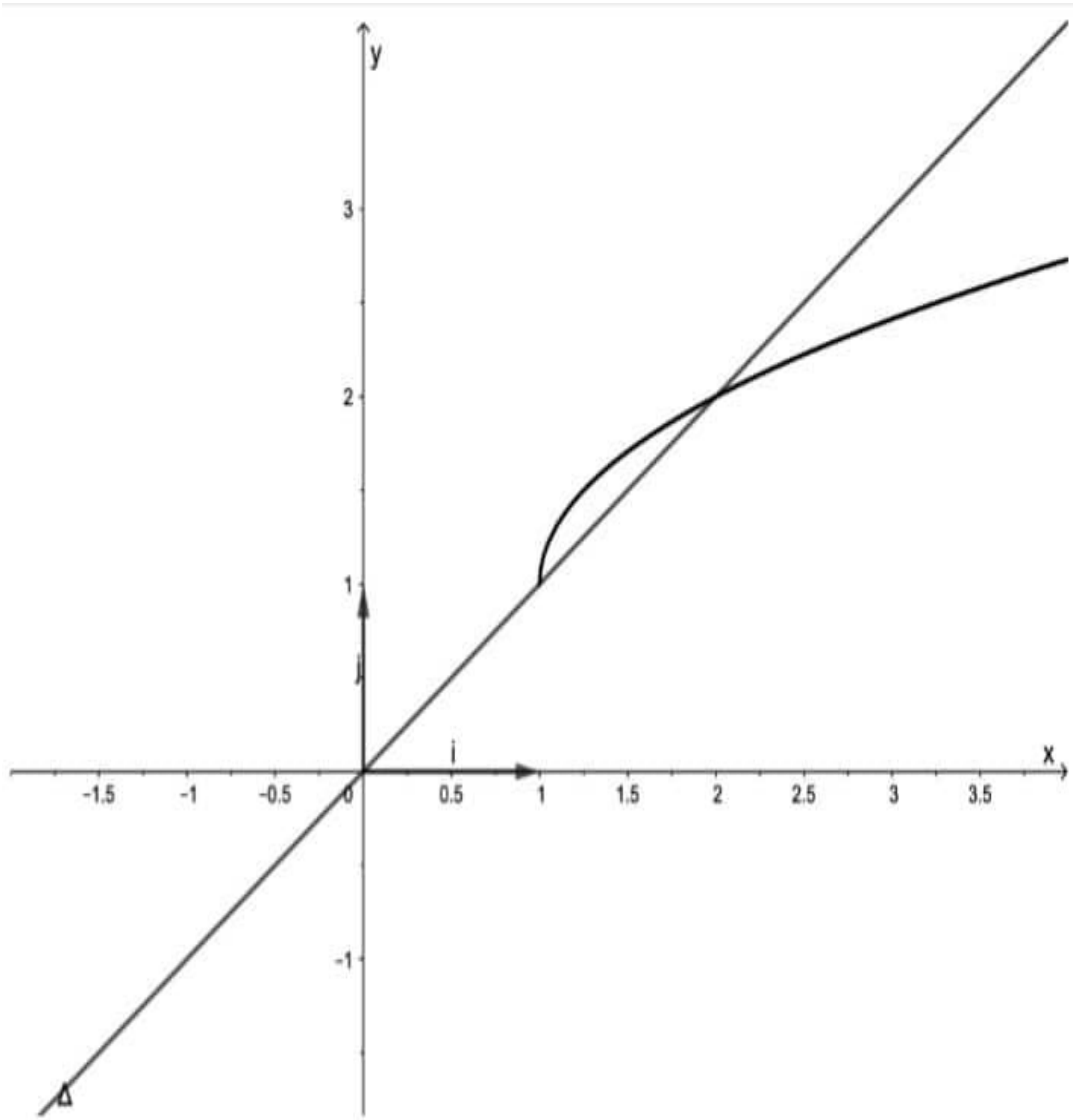
6) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ كمايلي: $g(x) = \dfrac{3x^2 - |x| - 2}{x^2 - |x| - 2}$

ا) برهن أن g دالة زوجية على مجموعة تعريفها.

ب) أدرس قابلية إشتقاق الدالة g عند $x_0 = 0$ وفسر النتيجة هندسيا.

7) أكتب الدالة g دون رمز القيمة المطلقة. و بإستعمال المنحنى (C_f) أنشئ المنحنى (C_g) الممثل للدالة g.

الشكل-1-



التمرين الأول:4ن

المتتالية (u_n) المعرفة على N بـ: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 5 - \dfrac{4}{u_n} \end{cases}$

1- حساب u_2, u_1 $\quad u_2 = 5 - \dfrac{4}{3} = \dfrac{11}{3}; u_1 = 5 - \dfrac{4}{2} = 3$

- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي أنّ: $2 \le u_n \le 4$

من أجل $n = 0$ $u_0 = 2$ ومنه $2 \le u_0 \le 4$ محققة.

نفرض صحة الخاصية $P(n)$ من أجل كل $n \in N$ أي $2 \le u_n \le 4$

نبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي $2 \le u_{n+1} \le 4$

لدينا $2 \le u_n \le 4$ ومنه $\dfrac{1}{4} \le \dfrac{1}{u_n} \le \dfrac{1}{2}$ ومنه $-\dfrac{4}{4} \ge -\dfrac{4}{u_n} \ge -\dfrac{4}{2}$ تكافئ

$-1 \ge -\dfrac{4}{u_n} \ge -2$ ومنه $4 \ge 5 - \dfrac{4}{u_n} \ge 3$ بالتعدي $2 \le u_{n+1} \le 4$

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل $n \in N$: $2 \le u_n \le 4$

2- بيان أن (u_n) متزايدة $\quad u_{n+1} - u_n = 5 - \dfrac{4}{u_n} - u_n = \dfrac{-u_n^2 + 5u_n - 4}{u_n}$

نضع $x = u_n$ ولدينا $a+b+c=0$ ومنه

x	$-\infty$ 1	4	$+\infty$
$-x^2+5x-4$	$-$	$+$	$-$

وبما أنه $n \in N$: $2 \le u_n \le 4$ فإن (u_n) متزايدة تماما على N

وبما أن (u_n) متزايدة تماما على N ومحدودة من الأعلى بالعدد 4 فإنها متقاربة.

3- البرهان إنه من أجل كل $n \in N$: $4 - u_{n+1} \le \dfrac{4 - u_n}{2}$

نبرهن أن $4 - u_{n+1} - \dfrac{4-u_n}{2} \le 0$ ومنه

$$4 - 5 + \frac{4}{u_n} - \frac{4-u_n}{2} = \frac{-2u_n + 8 - 4u_n + u_n^2}{2u_n} = \frac{u_n^2 - 6u_n + 8}{2u_n}$$

نضع $u_n = x$ ومنه $\Delta = 4$ و $x_2 = 2; x_1 = 4$

x	$-\infty$ 2	4	$+\infty$
x^2-6x+8	$+$	$-$	$+$

بما أنه $n \in N$: $2 \le u_n \le 4$ فإن $\dfrac{u_n^2 - 6u_n + 8}{2u_n} \le 0$

ومنه $n \in N$: $4 - u_{n+1} \le \dfrac{4 - u_n}{2}$

4- استنتاج أنه من أجل كل $n \in N$: $0 \le 4 - u_n \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

الطريقة 1- لدينا $n \in N$: $4 - u_{n+1} \le \dfrac{4-u_n}{2}$ تكافئ

من أجل $n = 0$ فإن $\quad 4 - u_1 \le \dfrac{4 - u_0}{2}$

من أجل $n = 1$ فإن $\quad 4 - u_2 \le \dfrac{4 - u_1}{2}$

⋮

من أجل $n-1$ فإن $\quad 4 - u_n \le \dfrac{4 - u_{n-1}}{2}$

لدينا $4 - u_n \succ 0$ بضرب طرف لطرف نجد:

$$(4-u_1)(4-u_2)...(4-u_n) \le \frac{1}{2}(4-u_0)\frac{1}{2}(4-u_1)\frac{1}{2}(4-u_2)...\frac{1}{2}(4-u_{n-1})$$

بالتبسيط نجد $0 \le 4 - u_n \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ وهو المطلوب.

الطريقة 2- استعمال البرهان بالتراجع

حساب النهاية المتتالية (u_n): $0 \le 4 - u_n \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

لدينا $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ لأن: $-1 \prec \dfrac{1}{2} \prec 1$

باستعمال النهاية بالحصر نجد $\lim\limits_{n \to \infty} 4 - u_n = 0$ ومنه $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 4$

التمرين الثاني:5ن

$$z_D = \overline{z_C}; z_C = 3 + 2i\sqrt{3}; z_B = \overline{z_A}, z_A = i\sqrt{3}$$

1- بيان أن $\left(\dfrac{1+z_A}{2}\right)^{2019} + \left(\dfrac{1-z_A}{2}\right)^{2019} = -2$

$$\left(\frac{1+z_A}{2}\right)^{2019} + \left(\frac{1-z_A}{2}\right)^{2019} = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2019} + \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{2019}$$

$$= \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{2019} + \left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{2019} = e^{i\frac{2019\pi}{3}} + e^{-i\frac{2019\pi}{3}} = e^{i673\pi} + e^{-i673\pi}$$

$$= \cos(673\pi) + i\sin(673\pi) + \cos(-673\pi) + i\sin(-673\pi) = -2$$

-تعيين قيم العدد الطبيعي بحيث $\left(\dfrac{1+z_A}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-z_A}{2}\right)^n = 0$ يكافئ:

$$\left(\frac{1+z_A}{2}\right)^n - \left(\frac{1-z_A}{2}\right)^n = 0$$

$$e^{i\frac{n\pi}{3}} - e^{-i\frac{n\pi}{3}} = 0$$

$$\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)-\cos\left(-\frac{n\pi}{3}\right)-i\sin\left(-\frac{n\pi}{3}\right)=0$$

ومنه $\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)-\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)=0$

$$2i\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)=0$$

ومنه $\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)=0$ يكافئ $\frac{n\pi}{3}=k\pi$ ومنه $n=3k$ $(k\in N)$

2- التحقق أن $\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}=\frac{z_D-z_B}{z_B-z_C}$

$$\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}=\frac{3+2i\sqrt{3}-i\sqrt{3}}{3-2i\sqrt{3}-i\sqrt{3}}=\frac{3+i\sqrt{3}}{3-3i\sqrt{3}}=\frac{\left(3+i\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)}{3\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)}=\frac{i\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{z_D-z_B}{z_B-z_C}=\frac{3-2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{-i\sqrt{3}-3-2i\sqrt{3}}=\frac{3-i\sqrt{3}}{-3-3i\sqrt{3}}=\frac{\left(3-i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)}{-3\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)}=\frac{i\sqrt{3}}{3}$$

ومنه $\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}=\frac{z_D-z_B}{z_B-z_C}$

لدينا $\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}=\frac{i\sqrt{3}}{3}$ ومنه المثلث ADC قائم في A والنقط A,C وD تنتمي إلي الدائرة ذات القطر $[CD]$

ولدينا $\frac{z_D-z_B}{z_B-z_C}=\frac{i\sqrt{3}}{3}$ ومنه المثلث BDC قائم في B والنقط B,C وD تنتمي إلي الدائرة ذات القطر $[CD]$

ومنه النقط A,B,C وD تنتمي إلى نفس الدائرة التي قطرها $[CD]$.

3- طبيعة الرباعي $ABCD$

الطريقة 1

لدينا $z_D=\overline{z_C};z_B=\overline{z_A}$ نستنتج أن $(AB)//(CD)$ ..(1)

و النقط A,B,C وD تنتمي إلى نفس الدائرة التي قطرها $[CD]$

يكافئ $[AB]$ وتر ومنه $CD\succ AB$ ..(2)

من (1)و (2) نستنتج أن الرباعي $ABCD$ شبه منحرف متساوي الساقين.

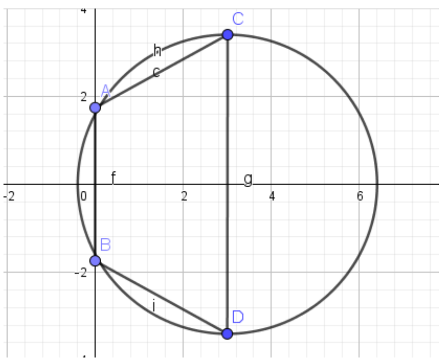
الطريقة 2

التوازي $(AB)//(CD)$ ..(1)

والقطران $[AD]$و $[BC]$ غير متناصفان (3)

من (1)و (3) نستنتج أن الرباعي $ABCD$ شبه منحرف متساوي الساقين.

حساب المساحة:



النقطة F منتصف القطعة $[AB]$ و النقطة G منتصف القطعة $[DC]$

بما أن $(AB)//(CD)$ والنقط من نفس الدائرة فإن الارتفاع هو $[FG]$

ومنه $z_G=3;z_F=0$ ومنه $FG=3$

ومنه $AB=|z_B-z_A|=2\sqrt{3}$; $DC=|z_C-z_D|=4\sqrt{3}$ ومنه

$$S_{ABCD}=\frac{(AB+CD)}{2}\times FG=\frac{2\sqrt{3}+4\sqrt{3}}{2}\times 3=9\sqrt{3}\,(ua)$$

4- تعيين طبيعة التحويل f حيث $z'=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}(z-z_A)+z_A$

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{3+2i\sqrt{3}-i\sqrt{3}}{-i\sqrt{3}-i\sqrt{3}}=\frac{\left(3+i\sqrt{3}\right)\times i\sqrt{3}}{-2i\sqrt{3}\times i\sqrt{3}}$$

$$=\frac{3i\sqrt{3}-3}{6}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

ومنه $z'-z_A=e^{i\frac{2\pi}{3}}(z-z_A)$ إذن طبيعة التحويل النقطي f هو دوران مركزه النقطة A وزاويته $\frac{2\pi}{3}$.

5- (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $(z\neq z_A, z\neq z_B)$

$(E): Arg\left(z^2+3\right)=Arg\left(z+i\sqrt{3}\right)+2k\pi$ مع $(k\in Z)$

-بيان أن المجموعة (E) تكافئ $Arg\left(z-z_A\right)=2k\pi$

$$Arg\left(z^2+3\right)=Arg\left(z^2-(-3)\right)=Arg\left(z^2-\left(i^2\sqrt{3}^2\right)\right)$$

$$=Arg\left(z^2-\left(i\sqrt{3}\right)^2\right)=Arg\left(\left(z-i\sqrt{3}\right)\right)$$

$$=Arg\left(z-i\sqrt{3}\right)+Arg\left(z+i\sqrt{3}\right)$$

لدينا $(E): Arg\left(z^2+3\right)=Arg\left(z+i\sqrt{3}\right)+2k\pi$ بالتعويض نجد

$$Arg\left(z-i\sqrt{3}\right)+Arg\left(z+i\sqrt{3}\right)==Arg\left(z+i\sqrt{3}\right)+2k\pi$$

ومنه $Arg\left(z-z_A\right)=2k\pi$

طبيعة المجموعة (E) $\left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right)=2k\pi$ ومنه مجموعة النقط هي نصف المستقيم مبدأه A وموجه بالشعاع $\vec{u}$ باستثناء النقطة A

التمرين الثالث:4ن

I)– وردة حمراء نرمز لها بـ R وردة بيضاء نرمز لها بـ B و الصفراء بـ J.

السحب في آن واحد 3وردات ومنه عدد الامكانية الكلية $C_9^3=84$

1- قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X الذي يشمل عدد الوردات الصفراء المسحوبة $X=\{0;1;2\}$.

$$P(X=0)=\frac{C_7^3}{84}=\frac{35}{84}$$

$$P(X=1)=\frac{C_2^1C_7^2}{84}=\frac{42}{84}=\frac{1}{2};\quad P(X=2)=\frac{C_2^2C_7^1}{84}=\frac{7}{84}$$

قانون الاحتمال للمتغير العشوائي

X	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{35}{84}$	$\frac{42}{84}$	$\frac{7}{84}$

الامل الرياضياتي: $E(x)=\frac{56}{84}$

II) السحب على التوالي وبدون ارجاع:

1- الحدث A " اختيار ثلاث وردات من نفس اللون"

الحدث "اختيار وردتين على الأقل لونهما أحمر"

$$P(A)=\frac{A_4^3}{A_9^3}+\frac{A_3^3}{A_9^3}=\frac{5}{84}$$

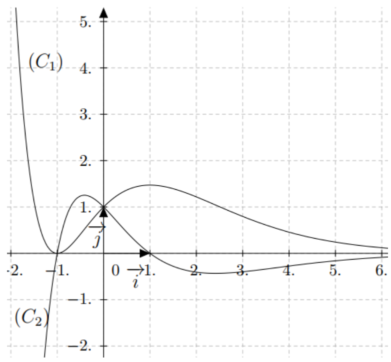
$$P(B)=\frac{A_4^2\times A_5^1}{A_9^3}\times 3+\frac{A_4^3}{A_9^3}=\frac{17}{42}$$

$$P(A\cap B)=\frac{A_4^3}{A_9^3}=\frac{1}{21}$$

2- $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1/21}{5/84}=\frac{4}{5}$

التمرين الرابع:7ن

I)- 1- ارفاق كل من g و g' بمنحناها البياني



المنحنى (C_2) هو منحنى الدالة المشتقة g'.

المنحنى (C_1) هو منحنى الدالة g.

1- جدول التغيرات للدالة على المجال $\left[-\frac{3}{2};5\right]$

x	$-\frac{3}{2}$		-1		1		5
$g'(x)$		$-$		$+$		$-$	
$g(x)$	1	↘	0	↗	$\frac{3}{2}$	↘	$1/4$

2- معامل توجيه المماس للمنحنى عند النقطة ذات الفاصلة 0

هو $g'(0)=1$ انطلاقا من المنحنى (C_2)

II)- المعادلة التفاضلية $(E):y'+y=2(x+1)e^{-x}$

- بيان أن الدالة f_0 المعرفة على R بـ: $f_0(x)=(x^2+2x)e^{-x}$

حل للمعادلة (E) لدينا $f_0'(x)=(-x^2+2)e^{-x}$

ومنه $f_0'+f_0=f_0'(x)=(-x^2+2)e^{-x}+(x^2+2x)e^{-x}$

$=2(x+1)e^{-x}$

ومنه الدالة f_0 حل للمعادلة (E)

1- حل المعادلة التفاضلية (E'): $y'+y=0$ تكافئ $y'=-y$

ومنه الحل العام للمعادلة (E') هي الدوال من الشكل $f(x)=Ce^{-x}$

حيث $C\in R$ ثابت.

2- بيان أن f حل للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كانت الدالة $u=f-f_0$

حلا للمعادلة (E')

أولا: - f حل للمعادلة (E) يكافئ: $f'-f=2(x+1)e^{-x}$

و الدالة u حل للمعادلة (E') يكافئ: $u'-u=0$

نفرض أن f حل للمعادلة (E) أي: $f'+f=2(x+1)e^{-x}$

نبرهن أن: $u'-u=0$ يكافئ

$$(f-f_0)'+(f-f_0)=f'-f_0'+f-f_0=(f'+f)-(f_0'+f_0)$$

لدينا $f_0'+f_0$ حل للمعادلة (E) من الجواب $(1-(II)$

و $f'+f$ حل للمعادلة (E) من الفرضية

ومنه $(f'+f)-(f_0'+f_0)=2(x+1)e^{-x}-2(x+1)e^{-x}=0$

ثانيا: نفرض أن u حل للمعادلة (E') أي: $u'+u=0$

نبرهن أن: f حل للمعادلة (E)

لدينا الدالة u حل للمعادلة (E') معناه: $(f'+f)-(f_0'+f_0)=0$

ومنه $(f'+f)=(f_0'+f_0)$ من الفرضية

لدينا f_0 حل للمعادلة (E) $f_0'+f_0=2(x+1)e^{-x}..(1)$

ومن الفرضية $f'+f=f_0'+f_0....(2)$

من (1) و (2) ينتج $f'+f=2(x+1)e^{-x}$

ومنه f حل للمعادلة (E)

ومنه من أولا و ثانيا نجد أن f حلا للمعادلة (E) إذا وفقط

إذا كان u حل للمعادلة (E')

3- استنتاج عبارة $f(x)$ عندما تكون f حل للمعادلة (E')

$$\begin{cases} y'+y=2(x+1)e^{-x} \\ y'+y=0 \end{cases}$$

لدينا مما سبق f حل للمعادلة (E) و u حل للمعادلة (E')

ولدينا حلول المعادلة (E') هي $u(x) = Ce^{-x}$

ومنه $f - f_0 = Ce^{-x}$ يكافئ $f = f_0 + Ce^{-x}$

ومنه $f(x) = (x^2 + 2x + C)e^{-x}$

-4 g حلا للمعادلة (E) و المنحنى البياني يشمل النقطة $(0;1)$

ومنه $g(x) = (x^2 + 2x + 1)e^{-x}$

-5 h حلا للمعادلة (E) و المنحنى البياني يقبل مماس عن النقطة ذات الفاصلة 0 معامل توجيهه معدوم يكافئ $h'(0) = 0$

لدينا $h(x) = (x^2 + 2x + C)e^{-x}$

ومنه $h'(x) = (-x^2 + 2 - C)e^{-x}$

$h'(0) = 0$ ومنه $C = 2$

إذا $h(x) = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$

(III– $f(x) = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ $\quad D_f = R$

-1 حساب النهايات $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0;$

-2 دراسة اتجاه التغير $f'(x) = -x^2e^{-x}$

ومنه $f'(x) \le 0$ ومنه الدالة f متناقصة تماما على R

جدول التغيرات

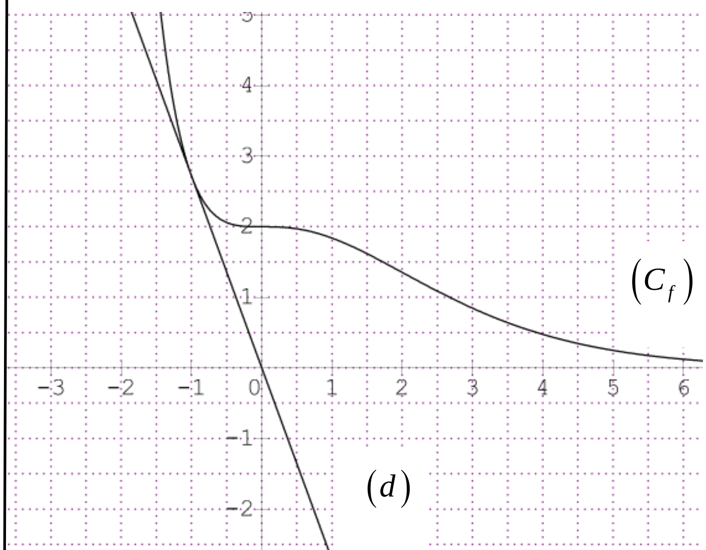
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\searrow$	0

-3 أ- تعيين (d) معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة -1.

$y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$

ومنه معادلة المستقيم (d) هي: $y = -ex$

ب- انشاء المنحنى (C_f) (d)



-4 $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$

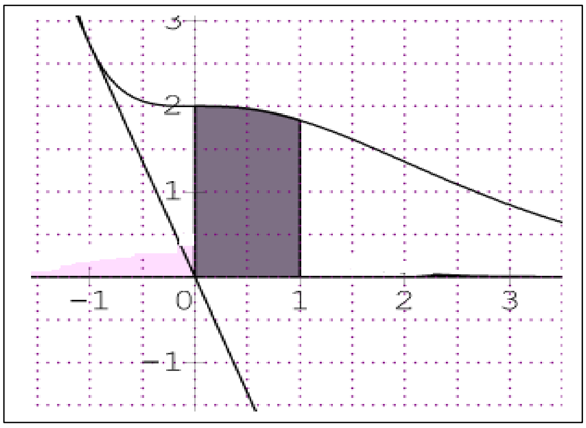
أ- تعيين الاعداد الحقيقية b, a و c حتى تكون F دالة اصلية لـ f على R

يكافئ $F'(x) = f(x)$ ومنه $F'(x) = (-ax^2 + (2a-b)x + b - c)e^{-x}$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases} -a = 1 \\ 2a - b = 2 \\ b - c = 2 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} a = -1 \\ b = -4 \\ c = -6 \end{cases}$

ومنه $F(x) = (-x^2 - 4x - 6)e^{-x}$

ب- حساب S مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) و $x = 0\ ; x = 1\ ; y = 0$



$$I = \int_0^1 f(x)dx = [F(x)]_0^1 = -11e^{-1} + 6(ua)$$

ومنه $S = I \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| = 4(-11e^{-1} + 6)cm^2$

انتهى بالتوفيق

الأستاذ قشار صالح

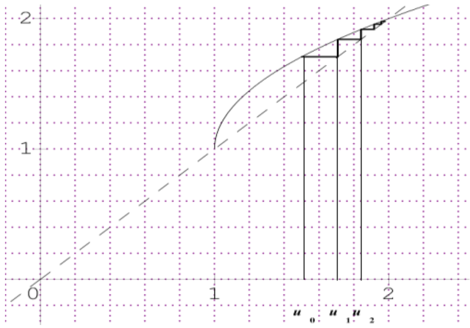
التمرين الاول:4ن

f الدالة العددية المعرفة على $[1;+\infty[$ بالشكل $f(x)=1+\sqrt{x-1}$

(C_f) منحنها البياني و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$

(u_n) متتالية عددية معرفة على N بـ : $u_0=3/2$ $\quad u_{n+1}=f(u_n)$

1- أ- التمثيل على محور الفواصل الحدود u_2,u_1,u_0



ب- تخمين اتجاه المتتالية (u_n)

بما أن $u_0 \prec u_1 \prec u_2$ فإن (u_n) متزايدة تماما على N ومتقاربة نحو العدد 2.

جـ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $1 \prec u_n \prec 2$

من أجل $n=0$ $\quad u_0=\frac{3}{2}$ ومنه $1 \prec u_0 \prec 2$ ومنه محققة

نفرض صحة الخاصية $P(n)$ من أجل $n\in N$ أي: $1\prec u_n \prec 2$

نبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $1\prec u_{n+1} \prec 2$

لدينا: $1\prec u_n \prec 2$ ومنه $0\prec u_n-1 \prec 1$ ومنه $0\prec \sqrt{u_n-1}\prec 1$

ومنه $1\prec 1+\sqrt{u_n-1}\prec 2$ ومنه $1\prec u_{n+1}\prec 2$

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل $n\in N$ فإن $1\prec u_n \prec 2$

2- اثبات أن (u_n) متزايدة تماما على N

$$u_{n+1}-u_n=1+\sqrt{u_n-1}-u_n=\sqrt{u_n-1}-(u_n-1)$$
$$=\frac{\left(\sqrt{u_n-1}-(u_n-1)\right)\left(\sqrt{u_n-1}+(u_n-1)\right)}{\sqrt{u_n-1}+(u_n-1)}$$
$$=\frac{-u_n^2+3u_n-2}{\sqrt{u_n-1}+(u_n-1)}$$

نضع $x=u_n$ ولدينا $a+b+c=0$ ومنه

x	$-\infty$ 1	2	$+\infty$
$-x^2+5x-4$	$-$	$+$	$-$

وبما أنه $n\in N$: $1\prec u_n\prec 2$ فإن (u_n) متزايدة تماما على N

وبما أن (u_n) متزايدة تماما على N ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 فإنها متقاربة.

3- (v_n) متتالية معرفة على N بـ: $v_n=\ln(u_n-1)$

أ- اثبات أن (v_n) هندسية مع تعيين الأساس والحد الأول

$$v_{n+1}=\ln(u_{n+1}-1)=\ln\left(1+\sqrt{u_n-1}-1\right)=\ln(u_n-1)^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}\ln(u_n-1)=\frac{1}{2}v_n$$

ومنه (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ و حدها الاول $v_0=-\ln 2$

ب- عبارة الحد العام $v_n=-\ln 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$

- حساب $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ لدينا $v_n=\ln(u_n-1)$ يكافئ $e^{v_n}=u_n-1$

ومنه $u_n=e^{v_n}+1$

$\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$ لأن $-1\prec q\prec 1$ ومنه $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}e^{v_n}+1=2$

4- حساب $\Pi_n=(u_0-1)(u_1-1).....(u_n-1)$

لدينا $e^{v_n}=u_n-1$ ومنه $\Pi_n=(u_0-1)(u_1-1).....(u_n-1)$ يكافئ

ومنه $\Pi_n=e^{v_0}e^{v_1}....e^{v_n}$ ومنه $\Pi_n=e^{v_0+v_1+....+v_n}$

$$\Pi_n=e^{\left[-\ln 2\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right]\right]}=e^{\left[-2\ln 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)\right]}$$

حساب $S_n=v_0^2+v_1^2+.....+v_n^2$

بما أن (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ و حدها الاول $v_0=-\ln 2$

فإن (v_n^2) هندسية أساسها $q^2=\frac{1}{4}$ و حدها الاول $v_0^2=(\ln 2)^2$

ومنه
$$S_n=v_0^2\left[\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}\right]=4(\ln 2)^2\left[\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{3}\right]$$

التمرين الثاني:5ن

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $\left(z+\sqrt{3}-3i\right)\left(z^2-6z+12\right)=0$

يكافئ: $\left(z^2-6z+12\right)=0$ أو $\left(z+\sqrt{3}-3i\right)=0$

ومنه $\Delta=-12=i^2 12$ أو $z=-\sqrt{3}+3i$

ومنه $\Delta=2i\sqrt{3}$ ومنه الحلين

$$z_2=\overline{z_1}=3-i\sqrt{3},\quad z_1=\frac{6+2i\sqrt{3}}{2}=3+i\sqrt{3}$$

2- $z_c=-\sqrt{3}+3i$, $z_B=3-i\sqrt{3}$, $z_A=3+i\sqrt{3}$

أ- كتابة كلا من $\frac{z_c}{z_A},z_c,z_A$ على الشكل الاسي

$$z_A=2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}, z_c=2\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

ومنه
$$\frac{z_c}{z_A}=\frac{2\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}}{2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}}=e^{i\left[\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right]}=e^{i\frac{\pi}{2}}$$

منه طبيعة المثلث OAC قائم في O ومتساوي الساقين.

ب- حساب

$$\left(\frac{z_A}{2\sqrt3}\right)^{1440}+i\left(\frac{z_C}{2\sqrt3}\right)^{2019}=\left(\frac{2\sqrt3e^{i\frac{\pi}{6}}}{2\sqrt3}\right)^{1440}+i\left(\frac{2\sqrt3e^{-i\frac{\pi}{6}}}{2\sqrt3}\right)^{2019}$$

$$=\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{1440}+i\left(e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^{2019}=e^{i\frac{1440\pi}{6}}+ie^{-i\frac{2019\pi}{6}}$$

$$=e^{i240\pi}+ie^{-\frac{673}{2}\pi}$$

$$=\cos(240\pi)+i\sin(240\pi)+i\cos\left(336\pi+\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(336\pi+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=2$$

3- النقطة D نظيرة النقطة C بالنسبة إلى محور الفواصل ومنه $z_D=\overline{z_C}$

بيان أن المستقيمين $(BC),(AD)$ متعامدان

$$\frac{z_D-z_A}{z_C-z_B}=\frac{-\sqrt3-3i-3-i\sqrt3}{-\sqrt3+3i-3+i\sqrt3}=-\frac{3+\sqrt3+i\left(3+\sqrt3\right)}{-\left(3+\sqrt3\right)+i\left(3+\sqrt3\right)}$$

$$=-\frac{i\left[3+\sqrt3+i\left(3+\sqrt3\right)\right]}{i\left[-\left(3+\sqrt3\right)+i\left(3+\sqrt3\right)\right]}=-i\frac{\left[3+\sqrt3+i\left(3+\sqrt3\right)\right]}{-\left[3+\sqrt3+i\left(3+\sqrt3\right)\right]}$$

$$=i$$

ومنه $(BC)\perp(AD)$

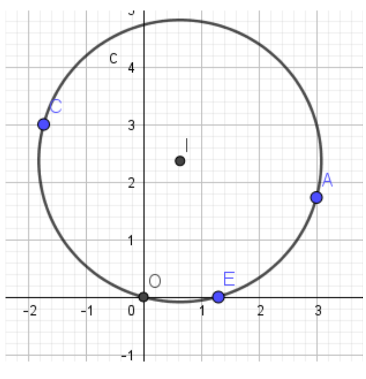
4- تعيين نسبة وزاوية التشابه المباشر S الذي مركزه $E\left(3-\sqrt3,0\right)$

ويحول النقطة A إلى النقطة C نحل الجملة $\begin{cases} z_C=az_A+b\\ z_E=az_E+b\end{cases}$

ومنه $a=\frac{z_C-z_E}{z_A-z_E}=\frac{-\sqrt3+3i-3+\sqrt3}{3+i\sqrt3-3+\sqrt3}=i\sqrt3$

ومنه النسبة $\sqrt3$ وزاويته $\theta=\frac{\pi}{2}$.

5- بيان ان النقط C,O,E,A تنتمي إلى نفس الدائرة



نبين أن $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}\right)=\left(\overrightarrow{EA};\overrightarrow{EC}\right)$

لدينا مما سبق $\frac{z_c-z_0}{z_A-z_0}=i$

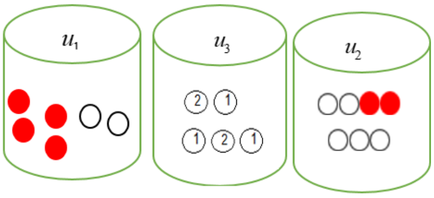
ولدينا التشابه المباشر S الذي مركزه $E\left(3-\sqrt3,0\right)$

ويحول النقطة A إلى النقطة C وزاويته $\theta=\frac{\pi}{2}$ ومنه $\left(\overrightarrow{EA};\overrightarrow{EC}\right)=\frac{\pi}{2}$

ومنه النقط C,O,E,A تنتمي إلى نفس الدائرة

ذات المركز $\left(\frac{3-\sqrt3}{2};\frac{\sqrt3+3}{2}\right)$ ونصف القطر $r=\sqrt6$

التمرين الثالث:4ن



1- سحب في آن واحد 3 كرات من u_1

أ- عدد الحالات الممكنة: $C_7^3=35$

ب- احتمال الحصول على كرات من نفس اللون $\frac{C_4^3+C_3^3}{C_7^3}=\frac{5}{35}$

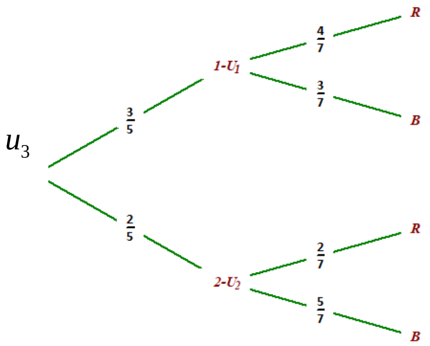
جـ- احتمال كرة بيضاء على الأقل $\frac{C_3^1C_4^2+C_3^2C_4^1+C_3^3}{C_7^3}=\frac{31}{35}$

د- تحديد قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X الذي يساوي عدد الكرات البيضاء المسحوبة $P(X=1)=\frac{C_3^1C_4^2}{35}=\frac{18}{35}$; $P(X=0)=\frac{C_4^3}{35}=\frac{4}{35}$

$P(X=2)=\frac{C_3^2C_4^1}{35}=\frac{12}{35}$; $P(X=3)=\frac{C_3^3}{35}=\frac{1}{35}$

X	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

أ- احتمال سحب كرة حمراء



$P(R)=\frac{3}{5}\times\frac{4}{7}+\frac{2}{5}\times\frac{2}{7}=\frac{16}{35}$

ب- $P_R\left(u_{1(R)}\right)=\frac{\frac{12}{35}}{\frac{16}{35}}=\frac{3}{4}$

التمرين الرابع:7ن

f الدالة المعرفة على $R-\{-1;2\}$ بـ: $f(x)=\frac{3x^2-x-2}{x^2-x-2}$

1- حساب النهايات: $\lim_{|x|\to+\infty}f(x)=3$; $\lim_{x\overset{<}{\to}-1}f(x)=+\infty$

$\lim_{x\overset{>}{\to}2}f(x)=+\infty$; $\lim_{x\overset{<}{\to}2}f(x)=-\infty$; $\lim_{x\overset{>}{\to}-1}f(x)=-\infty$

المستقيمات المقاربة: $y=3$; $x=-1$; $x=2$

2- دراسة اتجاه تغير الدالة f

أ-بيان أنه من أجل كل x من $R-\{-1;2\}$ فإن: $f'(x)=\frac{-2x(x+4)}{\left(x^2-x-2\right)^2}$

$$f'(x)=\frac{(6x-1)\left(x^2-x-2\right)-(2x-1)\left(3x^2-x-2\right)}{\left(x^2-x-2\right)^2}$$

$$=\frac{6x^3-6x^2-12x-x^2+x+2-6x^3+2x^2+4x+3x^2-x-2}{\left(x^2-x-2\right)^2}$$

$$=\frac{-2x^2-8x}{\left(x^2-x-2\right)^2}=\frac{-2x(x+4)}{\left(x^2-x-2\right)^2}$$

- دراسة اتجاه التغير:

x	$-\infty$	-4		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	||	$-$	

ومنه الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;-4],[0;2[,]2;+\infty[$

ومتزايدة تماما على $[4;-1[,]-1;0]$

- جدول التغيرات

x	$-\infty$	-4		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	||	$-$	
$f(x)$	$3\searrow$	$\frac{25}{9}$	$\nearrow+\infty$	||	$-\infty\nearrow$	1	$\searrow-\infty$	||	$+\infty\searrow$	3

3- دراس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ) $y=3$

$$f(x)-3=\frac{3x^2-x-2}{x^2-x-2}-3=\frac{2x+4}{x^2-x-2}$$

x	$-\infty$ -2	-1	2	$+\infty$
x^2-x-2	$+$	$+$	$-$	$+$
$2x+4$	$-$	$+$	$+$	$+$
$f(x)-3$	$-$	$+$	$-$	$+$

ومنه المنحنى (C_f) فوق المستقيم (Δ) على $]-2;1[,]2;+\infty[$

و المنحنى (C_f) تحت المستقيم (Δ) على $]-\infty;-2[,]-1;2[$

و المنحنى (C_f) يقطع المستقيم (Δ) في النقطة $(-2;3)$

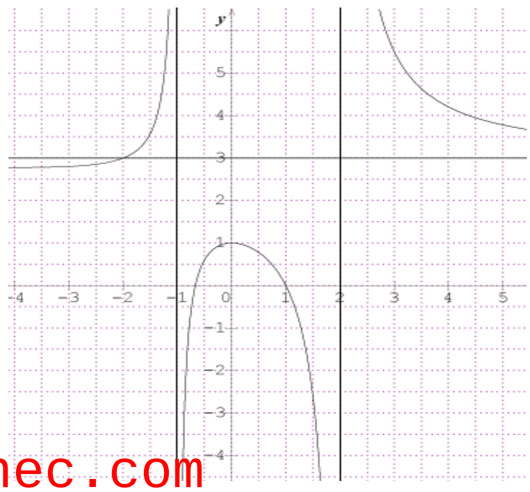
ب- نقاط التقاطع مع محوري الاحداثيات

محور التراتيب $f(0)=1$; محور الفواصل $f(x)=0$

ومنه $\frac{3x^2-x-2}{x^2-x-2}=0$ يكافئ $3x^2-x-2=0$

ومنه $\Delta=25$,$x_1=1$, $x_2=\frac{-2}{3}$ ومنه $s=\left\{(1;0),\left(\frac{-2}{3};0\right)\right\}$

جـ - انشاء المنحنى



د- المناقشة البيانية:

$$(3-m)x^2+(m-1)x+2(m-1)=0$$
$$3x^2-mx^2+mx-x+2m-2=0$$

ومنه
$$3x^2-x-2=mx^2-mx-2m$$
$$3x^2-x-2=m\left(x^2-x-2\right)$$

ومنه
$$\frac{3x^2-x-2}{x^2-x-2}=m$$

ومنه $f(x)=m$ ومنه حلول المعادلة هي نقط تقاطع المنحنى (C_f) والمستقيم $y=m$ (مناقشة افقية)

$m\in]-\infty;1[$ المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة.

$m=1$ المعادلة تقبل حل مضاعف معدوم.

$m\in\left]1;\frac{25}{9}\right[$ المعادلة لا تقبل حلول.

$m=\frac{25}{9}$ المعادلة تقبل حل مضاعف سالب.

$m\in\left]\frac{25}{9};3\right[$ المعادلة تقبل حلين سالبين.

$m=\frac{25}{9}$ المعادلة تقبل حل مضاعف سالب.

$m=3$ المعادلة تقبل حل سالب.

$m\in]3;+\infty[$ المعادلة تقبل حلين موجبين وحل سالب.

4- أ- تعيين قيم الاعداد الحقيقية c,b,a بحيث $f(x)=a+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}$

ومنه
$$f(x)=\frac{ax^2+(b-a+c)x+c-2a-2b}{x^2-x-2}$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases}a=3\\b-a+c=-1\\c-2a-2b=-2\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}a=3\\b+c=2\\c-2b=4\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}a=3\\b=-\frac{2}{3}\\c=\frac{8}{3}\end{cases}$

ومنه $f(x)=3-\frac{\frac{2}{3}}{x+1}+\frac{\frac{8}{3}}{x-2}$ وتكافئ $f(x)=3-\frac{2}{3}\times\frac{1}{x+1}+\frac{8}{3}\times\frac{1}{x-2}$

ب- استنتاج الدالة الاصلية للدالة f

$F(x)=3x-\frac{2}{3}\ln|x+1|+\frac{8}{3}\ln|x-2|+c$ حيث $c\in R$ ثابت

5- أ- حساب مساحة الحيز المحدد بـ: (C_f) والمستقيمات $x=\lambda, x=3, y=3$

حيث $\lambda\in]2;3[$

$$S(\lambda)=\int_{\lambda}^{3}f(x)dx=\left[F(x)\right]_{\lambda}^{3}=\left[3x-\frac{2}{3}\ln|x+1|+\frac{8}{3}\ln|x-2|\right]_{\lambda}^{3}$$

$$S(\lambda)\ =9-\frac{2}{3}\ln 4-3\lambda+\frac{2}{3}\ln(\lambda+1)-\frac{8}{3}\ln(\lambda-2)(ua)$$

ب- $\lim\limits_{\lambda\xrightarrow{>}2}S(\lambda)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{\lambda\xrightarrow{>}2}-\frac{8}{3}\ln(\lambda-2)=+\infty$

6- g الدالة المعرفة على $R-\{-2;2\}$ بـ: $g(x)=\dfrac{3x^2-|x|-2}{x^2-|x|-2}$

أ- بيان أن g دالة زوجية

لدينا D_g متناظرة بالنسبة للمبدأ O أي من أجل كل $x\in D_g$ فإن $-x\in D_g$

لدينا $|-x|=|x|$ ومنه

$$g(-x)=\frac{3(-x)^2-|-x|-2}{(-x)^2-|-x|-2}=\frac{3x^2-|x|-2}{x^2-|x|-2}=g(x)$$

ومنه g دالة زوجية.

ب- دراسة قابلية الاشتقاق عند $x_0=0$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)=f'(0)=0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)=f'(0)=0$$

ومنه الدالة g تقبل الاشتقاق عند $x_0=0$ وتقبل مماس افقي

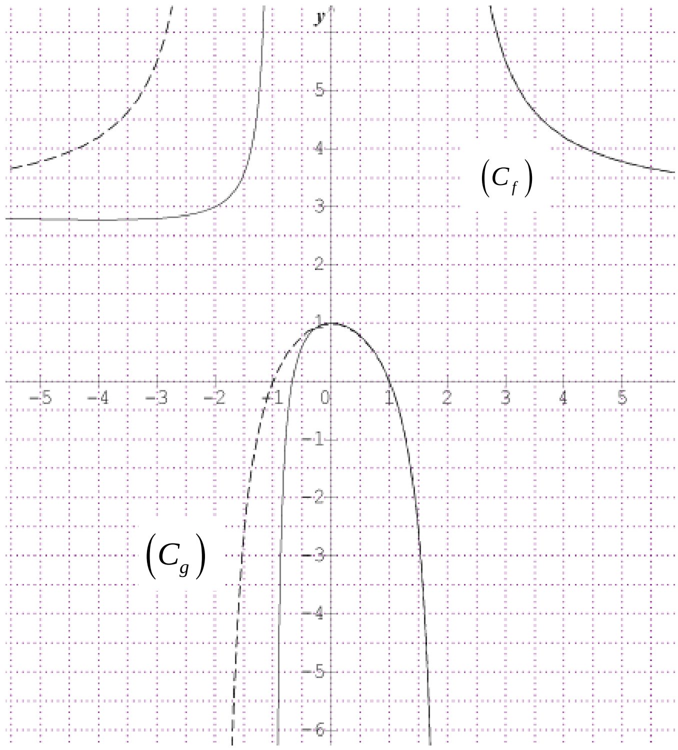
7- كتابة الدالة g دون رمز القيمة المطلقة.

$$\begin{cases} g(x)=f(x) & x\geq 0\\ g(x)=f(-x) & x\leq 0\end{cases}$$

ومنه المنحنى (C_f) و (C_g) متطابقان من أجل $x\geq 0$

ومن أجل $x\leq 0$ فإن المنحنى (C_g) نظير المنحنى (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب.

أي نحتفظ بالجزء من المنحنى الواقع في الربع 1 و4 ونرسم نظيرها بالنسبة لمحور التراتيب.



انتهى بالتوفيق والنجاح والتميز

لكل الطلبة الأعزاء في اجتياز شهادة

البكالوريا 2019

الأستاذ: قشار صالح

ثانوية الشهيد بن قرون احمد-بن سرور-مسيلة-

المستوى:3 ثانوي علوم تجريبية	السنة الدراسية:2019/2018	المادة:رياضيات	المدة:3ساعات ونصف

اختبار البكالوريا التجريبية

اختر احد الموضوعين:

الموضوع الاول

التمرين الاول(5نقاط)

يحتوي صندوق U_1 على أربع كرات بيضاء وثلاث كرات سوداء وكرتين حمراوين .نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات من الصندوق U_1 (علما ان الكرات لا يمكن التمييز بينها باللمس)

1) احسب احتمالات الاحداث الاتية :

A : "سحب كرتين سوداوين وكرة حمراء" B:سحب ثلاث كرات من نفس اللون " C : "سحب كرة بيضاء واحدة على الاقل"

2) أ) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الالوان المحصل عليها .

- عين قيم المتغير العشوائي X
- بين ان $p(X=3)=\frac{24}{84}$ ثم استنتج $p(X=2)$ ، ثم عين قانون احتمال X.

ب) اللاعب يدفع 50DA قبل اجراء السحب ،ويكسب 25DA لكل لون من الالوان المحصل عليها .

- هل اللعبة مربحة له؟

3) نعتبر صندوقا آخر U_2 يحتوي على كرتين بيضاوين وكرة سوداء واحدة .

نضع الكرات الثلاث المسحوبة من الصندوق U_1 في الصندوق U_2 ثم نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من U_2 .

- احسب احتمال ان تكون الكرتان المسحوبتان من U_2 بيضاوين علما ان الكرات الثلاث المسحوبة من U_1 لها نفس اللون .

التمرين الثاني:(4نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0=3$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}$

1) احسب الحدود $u_3;u_2;u_1$ ثم اعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n).

2) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n \succ 1$.

3) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ ثم استنتج أنها متقاربة معينا نهايتها .

4) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=u_n^2-1$.

أ) –بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول .

ب) اكتب بدلالة n كلا من v_n و u_n ثم احسب $\lim u_n$.

ت) احسب بدلالة n كلا من المجاميع التالية : $S_n=u_0^2+u_1^2+u_2^2+...+u_n^2$ ، $T_n=v_0+2v_1+2^2v_2+....+2^nv_n$

$$L_n=\ln(v_0)+\ln(v_1)+\ln(v_2)+....+\ln(v_n)$$

التمرين الثالث:(4نقاط)

1) حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الاعداد المركبة ،المعادلة ذات المجهول z التالية : $(z^2-2\sqrt{3}z+4)(z-2i)=0$

2) نعتبر في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ النقط $D;C;B;A$ التي لواحقها على الترتيب:

$z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=2i$. ، $z_D=-z_A$

أ)اكتب كل من الاعداد $z_A ; z_B ; z_C ; z_D$ على الشكل الاسي

ب)استنتج ان النقط $A ; B ; C ; D$ تنتمي لنفس الدائرة التي يطلب تعيين مركزها وطول نصف قطرها ثم علم بدقة النقط السابقة.

3)بين أن $\left(\frac{z_D}{2}\right)^{2019} = -i$ ثم عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{2}\right)^n$ تخيلي صرف جزؤه التخيلي سالب .

4) عين العبارة المركبة للتشابه S الذي يحول O الى A ويحول C الى D ، ثم عين عناصره المميزة .

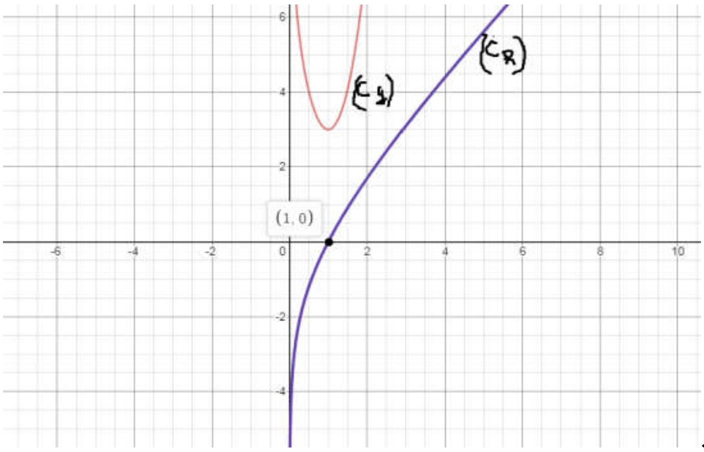
5) أ)عين ثم انشئ (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي التي تحقق $\arg\left(\frac{z}{z-2i}\right) = 2\pi k ; k \in \mathbb{Z}$

ب)عين ثم انشئ مجموعة النقط (Γ') صورة (Γ) بالتشابه المباشر S.

التمرين الرابع: (7نقاط)

I. g و h الدالتان العدديتان المعرفتان على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = x^3 - x - 2\ln x + 3$ و $h(x) = x - 1 + \ln x$

(C_g) و (C_h) تمثيلهما البياني الظاهر في الشكل المقابل



1) عين بيانيا اشارة $g(x)$ و $h(x)$ حسب قيم x.

II. لتكن الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = x - 1 + \frac{x - 1 + \ln x}{x^2}$ ، (C_f) التمثيل البياني للدالة في المعلم المتعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\| = 1cm ; \|\vec{j}\| = 2cm$

1) احسب $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا . ثم احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

2) بين ان المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب مائل لـ (C_f)، ثم حدد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة الى (Δ).

3) بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

4) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة $A(1;0)$.

5) ارسم كل من (Δ)، (T) والمنحني (C_f).

6) لتكن (d_m) عائلات المستقيمات المعرفة بـ: $y = mx - m$ حيث m وسيط حقيقي

أ) تحقق ان جميع المستقيمات (d_m) تمر بالنقطة A.

ب) عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة $f(x) = mx - m$ حلان متمايزان.

III. 1) باستعمال التكامل بالتجزئة بين أن : $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = 1 - \frac{2}{e}$.

2)احسب بـ cm^2 مساحة الحيز المحدد بالمنحني (C_f) و (Δ) والمستقيمين الذين معادلتهما $x = 1$ و $x = e$.(يطلب اعطاء القيمة المظبوطة)

انتهى الموضوع الاول

الموضوع الثاني

التمرين الاول(5نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;1]$ بـ: $f(x)=2x-x^2$

1) أ) بين ان الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$.

ب) بين انه من اجل كل عددحقيقي x من المجال $[0;1]$ فان $f(x)$ من المجال $[0;1]$

2) - لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة بـ: $u_0=\frac{3}{7}$ ومن اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $0\prec u_n\prec 1$.

ب) بين ان (u_n) متزايدة ثم استنتج انها متقاربة.

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=1-u_n$.

أ) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1}=v_n^{\ 2}$

ب) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=v_0^{\ 2^n}$

ت) استنتج بدلالة n عبارة u_n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

4) احسب p_n بدلالة n، حيث : $p_n=(1-u_0)(1-u_1)(1-u_2)....(1-u_n)$

التمرين الثاني:(4نقاط)

المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ النقط $A;B;C;D$ التي لواحقها على الترتيب:

$z_A=1+i$ ، $z_B=-1+3i$ ، $z_C=-3+i$. ، $z_D=1+5i$

1) h التحاكي الذي نسبته 2 ويحول A الى C،عين z_Ω لاحقة النقطة Ω مركز التحاكي h.

2) لتكن E مرجح الجملة $\{(A;1);(B;-1);(C;1)\}$ و I منتصف القطعة $[BC]$.

أ) عين z_E و z_I لاحقتي النقطتين E و I على الترتيب .

ب) عين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$

3) أ)اكتب العدد المركب $\frac{z_I-z_A}{z_E-z_D}$ على الشكل الاسي .

ب)استنتج نسبة وزاوية التشابه المباشر S الذي يحول E الى I ويحول D الى A

4) K نقطة من المستوي تحقق : $z_K-z_D=-2e^{\frac{\pi}{6}i}(z_I-z_A)$.

اثبت ان K هي صورة النقطة E بدوران مركزه D يطلب تعيين زاوية له .

5)أ-عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث : $z-1-5i=\frac{4}{\overline{z}-1+5i}$

ب-عين (Γ') صورة (Γ) بالتشابه المباشر S وعين عناصرها المميزة .

التمرين الثالث:(4نقاط)

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

(Δ_1) و (Δ_2) مستقيمان من الفضاء معرفان بتمثيليهما الوسيطيين التاليين:

$$(\Delta_1):\begin{cases}x=3+2t\\ y=-2-2t\ (t\in\mathbb{R})\\ z=1-t\end{cases} \quad و \quad (\Delta_2):\begin{cases}x=1\\ y=-1-t'\ (t'\in\mathbb{R})\\ z=4+2t'\end{cases}$$

1)أ) عين احداثيات النقطة B تقاطع المستقيمين (Δ_1)و (Δ_2)

ب) عين تمثيلا وسيطيا للمستوي (P)المعين بالمستقيمين (Δ_1)و(Δ_2)

2)أ)اثبت ان النقطة $A(6;4;4)$ لاتنتمي الى المستوي (P)

ب)بين ان النقطة B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P)

3)أ)عين معادلة ديكارتيه للمستوي (Q) الذي يشمل النقطة A و $\vec{n}(5;1;-7)$ شعاع ناظمي له.

ب)عين احداثيات Cو D نقطتي تقاطع (Q) مع كل من (Δ_1) و (Δ_2) على الترتيب .

4)أ)عين طبيعة المثلث BCD،ثم احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$

ب)استنتج مساحة المثلث ACD

التمرين الرابع: (7نقاط)

I. g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=2+(x-2)e^{-x+2}$

1) ادرس تغيرات الدالة g.

2) بين ان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1.14 \prec \alpha \prec 1.15$.

3) استنتج اشارة $g(x)$ حسب قيم x.

II. لتكن الدالة العددية fالمعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2x-1-(x-1)e^{-x+2}$، (C_f)التمثيل البياني للدالة في المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=2cm;\|\vec{j}\|=2cm$

1) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

ج-بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

د-بين أن $f(\alpha)=2\alpha+1+\dfrac{2}{\alpha-2}$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

2) أ-اثبت ان المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته: $y=2x-1$

ب-ادرس الوضع النسبي للمحنى (C_f) بالنسبة الى (Δ) .

ج-بين ان المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) يطلب اعطاء معادلة ديكارتية له .

ب-احسب $f(0)$، $f(2)$ ثم ارسم (Δ)، (T) و (C_f).

3) عين بيانا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة (E) ذات المجهول الحقيقي x التالية حلين متمايزين :

$$(E): 2m-1-(x-1)e^{-x+2}=0$$

III. أ)عين باستعمال التكامل بالتجزئة الدالة الاصلية H للدالة $h: x\mapsto (x-1)e^{-x+2}$ على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم عند 0.

ب)ليكن λ عددا حقيقيا حيث $\lambda \succ 1$ ، $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمات التي معادلاتها: $x=1; x=\lambda$

- احسب المساحة $A(\lambda)$ بدلالة λ ثم احسب $\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$

انتهى

موفقون باذن الله

الاجابة النموذجية لاختبار البكالوريا التجريبية

الموضوع الاول

التمرين الاول(5نقاط)

يحتوي صندوق U_1 على أربع كرات بيضاء وثلاث كرات سوداء وكرتين حمراوين .نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات من الصندوق U_1 (علما ان الكرات لا يمكن التمييز بينها باللمس)

1) حساب احتمالات الاحداث الاتية :

A : "سحب كرتين سوداوين وكرة حمراء" B:سحب ثلاث كرات من نفس اللون " C : "سحب كرة بيضاء واحدة على الاقل"

$$p(A)=\frac{C_3^2C_2^1}{C_9^3}=\frac{6}{84}=\frac{1}{14};p(B)=\frac{C_3^3+C_4^3}{C_9^3}=\frac{5}{84};p(C)=1-p(\overline{C})=1-\frac{C_5^3}{C_9^3}=\frac{37}{42}$$

2) أ) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الالوان المحصل عليها

- **تعيين قيم المتغير العشوائي X**
- القيم هي $\{1,2,3\}$
- **تبيين ان $p(X=3)=\frac{24}{84}$ ثم استنتج $p(X=2)$ ، ثم تعيين قانون احتمال X.**

$$p(X=3)=\frac{C_4^1C_3^1C_2^1}{C_9^3}=\frac{24}{84}=\frac{2}{7}$$

استنتاج $p(X=2)$:

لدينا $p(X=1)=p(B)=\frac{5}{84}$ و $p(X=1)+p(X=2)+p(X=3)=1$ اذن :

$$p(X=2)=1-p(X=1)-p(X=3)$$

أي : $p(X=2)=1-\frac{5}{84}-\frac{24}{84}=1-\frac{29}{84}=\frac{55}{84}$

قانون ا حتمال X:

x_i	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{5}{84}$	$\frac{55}{84}$	$\frac{24}{84}$

ب) اللاعب يدفع 50DA قبل اجراء السحب ،ويكسب 25DA لكل لون من الالوان المحصل عليها .

- **هل اللعبة مربحة له؟**
- قيم الربح الجبري المكنه هي $\{25-50,50-50,75-50\}$ أي $\{-25,0,25\}$ اذن:

الربح	-25	0	25

الاحتمال	$\frac{5}{84}$	$\frac{55}{84}$	$\frac{24}{84}$

وبالتالي: $E(X)=-25\times\frac{5}{84}+0\times\frac{55}{84}+25\times\frac{24}{84}=\frac{475}{84}\succ 0$ اذن اللعبة في مصلحة اللاعب

3) نعتبر صندوقا آخر U_2 يحتوي على كرتين بيضاويين وكرة سوداء واحدة .

نضع الكرات الثلاث المسحوبة من الصندوق U_1 في الصندوق U_2 ثم نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من U_2 .

- **حساب احتمال ان تكون الكرتان المسحوبتان من U_2 بيضاويين علما ان الكرات الثلاث المسحوبة من U_1 لها نفس اللون :**

نسمي D الحادثة : "الكرتان المسحوبتان من U_2 بيضاويين علما ان الكرات الثلاث المسحوبة من U_1 لها نفس اللون "
و E الحادثة:" الكرتان المسحوبتان من U_2 بيضاويين"وبالتالي:

$$p(D)=p_B(E)=\frac{p(E\cap B)}{p(B)}=\frac{\frac{C_3^3}{C_9^3}\cdot\frac{C_2^2}{C_6^2}+\frac{C_4^3}{C_9^3}\cdot\frac{C_5^2}{C_6^2}}{\frac{5}{84}}=\frac{41}{75}$$

التمرين الثاني:(4نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0=3$ ومن اجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}$

1) **حساب الحدود $u_1;u_2;u_3$ ثم اعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n).**

$$u_1=\sqrt{\frac{1+u_0^2}{2}}=\sqrt{5},u_2=\sqrt{\frac{1+u_1^2}{2}}=\sqrt{3},u_3=\sqrt{\frac{1+u_2^2}{2}}=\sqrt{2}$$

التخمين: (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

2) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n\succ 1$.

البرهان بالتراجع الخاصية: "من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n\succ 1$."

- الخاصية صحيحة من اجل $n=0$ لان $u_0=3\succ 1$
- نفرض ان $u_n\succ 1$ من اجل n عدد طبيعي كيفي ونثبت ان $u_{n+1}\succ 1$

لدينا $u_n\succ 1$ معناه $u_n^2\succ 1$ أي $u_n^2+1\succ 2$ وبالتالي $\frac{u_n^2+1}{2}\succ 1$ اذن: $u_{n+1}\succ 1$

- اذن من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n\succ 1$.

3) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ ثم استنتج أنها متقاربة معينا نهايتها .

$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}-u_n=\frac{\sqrt{1+u_n^2}}{\sqrt{2}}-u_n=\frac{\sqrt{1+u_n^2}-\sqrt{2}u_n}{\sqrt{2}}=\frac{1+u_n^2-2u_n^2}{\sqrt{2}\left(\sqrt{1+u_n^2}+\sqrt{2}u_n\right)}=\frac{1-u_n^2}{\sqrt{2}\left(\sqrt{1+u_n^2}+\sqrt{2}u_n\right)}$$

وبما ان $u_n\succ 1$ فان $\sqrt{2}\left(\sqrt{1+u_n^2}+\sqrt{2}u_n\right)\succ 0$ و $1-u_n^2\prec 0$ وبالتالي $u_{n+1}-u_n\prec 0$ أي ان المتتالية (u_n) متناقصة تماما

استنتاج التقارب:

بما ان (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الاسفل ($u_n\succ 1$ على $\mathbb{N}$) فهي متقاربة .

تعيين نهاية (u_n):

نضع $\lim u_n=l$ من العلاقة التراجعية نجد $l=\sqrt{\frac{1+l^2}{2}}$ أي $l^2=\frac{1+l^2}{2}$ وبالتالي: $2l^2=1+l^2$

اذن $l^2=1$ أي $l=1$ او $l=-1$ وبما ان $u_n\succ 1$ فان $l=-1$ مرفوضة وبالتالي $\lim u_n=1$.

4) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n^2 - 1$.

أ) –اثبات أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول .

$v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 1 = \frac{1+u_n^2}{2} - 1 = \frac{u_n^2 - 1}{2} = \frac{1}{2}v_n$ وبالتالي (v_n) هندسية اساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الاول

$v_0 = u_0^2 - 1 = 8$

ب) اكتب بدلالة n كلا من v_n و u_n ثم احسب $\lim u_n$.

- $v_n = 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ و $u_n^2 = v_n + 1$ أي $u_n = \sqrt{v_n + 1}$ وبالتالي $u_n = \sqrt{8\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}$

- $\lim u_n = \lim \sqrt{8\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1} = \sqrt{1} = 1$ لان $-1 \prec \frac{1}{2} \prec 1$ أي $\lim\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

ت) احسب بدلالة n كلا من المجاميع التالية : $S_n = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2$ ، $T_n = v_0 + 2v_1 + 2^2 v_2 + ... + 2^n v_n$

$L_n = \ln(v_0) + \ln(v_1) + \ln(v_2) + ... + \ln(v_n)$

$$S_n = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2 = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n = 8\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right) = 16\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$T_n = v_0 + 2v_1 + 2^2 v_2 + ... + 2^n v_n = 8 + 2\times 8\left(\frac{1}{2}\right)^1 + 2^2\times 8\left(\frac{1}{2}\right)^2 + ... + 2^n \times 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= 8 + 8 + 8 + ... + 8 = 8(n+1)$$

$$L_n = \ln(v_0) + \ln(v_1) + \ln(v_2) + ... + \ln(v_n)$$

المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ حدها العام $\ln(v_n)$ حيث

$$\ln(v_n) = \ln\left(8\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = \ln 8 + \ln\left(\frac{1}{2}\right)^n = \ln 8 + n\ln\frac{1}{2} = \ln 8 - n\ln 2$$

هي متتالية حسابية حدها الاول $\ln 8$ واساسها $-\ln 2$ اذن:

$$L_n = \ln(v_0) + \ln(v_1) + \ln(v_2) + ... + \ln(v_n) = \frac{(\ln(v_0) + \ln(v_n))(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(\ln 8 + \ln 8 - n\ln 2)(n+1)}{2} = \frac{(2\ln 8 - n\ln 2)(n+1)}{2}$$

التمرين الثالث:(4نقاط)

1) حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الاعداد المركبة، المعادلة ذات المجهول z التالية : $(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)(z - 2i) = 0$

$S = \{2i, \sqrt{3} + i, \sqrt{3} - i\}$

2) نعتبر في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ النقط $A;B;C;D$ التي لواحقها على الترتيب:

$z_A = \sqrt{3} + i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = 2i$ ، $z_D = -z_A$

أ)كتابة كل من الاعداد $z_A;z_B;z_C;z_D$ على الشكل الاسي:

$$z_A=\sqrt{3}+i=2e^{\frac{\pi}{6}i}\ ،\ z_B=\overline{z_A}=\overline{2e^{\frac{\pi}{6}i}}=2e^{-\frac{\pi}{6}i}\ ،\ z_C=2i=2e^{\frac{\pi}{2}i}\ ،\ z_D=-z_A=-2e^{\frac{\pi}{6}i}=2e^{\pi i}.e^{\frac{\pi}{6}i}=2e^{\frac{7\pi}{6}i}$$

ب)استنتاج ان النقط $A;B;C;D$ تنتمي لنفس الدائرة التي يطلب تعيين مركزها وطول نصف قطرها ثم تعليم بدقة النقط السابقة.

لدينا $|z_A|=|z_B|=|z_C|=|z_D|=2$ اذن $OA=OB=OC=OD=2$ وبالتالي النقط A,B,C,D تنتمي للدائرة التي مركزها O وطول نصف قطرها 2

3)بين أن $\left(\frac{z_D}{2}\right)^{2019}=-i$ ثم عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{2}\right)^{n}$ تخيلي صرف جزؤه التخيلي سالب.

$$\left(\frac{z_D}{2}\right)^{2019}=\left(\frac{2e^{\frac{7\pi}{6}i}}{2}\right)^{2019}=\left(e^{\frac{7\pi}{6}i}\right)^{2019}=e^{\frac{2019\times7\pi}{6}i}=e^{\frac{14133\pi}{6}i}=e^{\frac{14130\pi+3\pi}{6}i}=e^{2355\pi i}\,e^{\frac{\pi}{2}i}=-i$$

قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{2}\right)^{n}$ تخيلي صرف جزؤه التخيلي سالب:

لدينا $\left(\frac{z_A}{2}\right)^{n}=\left(\frac{2e^{\frac{\pi}{6}i}}{2}\right)^{n}=e^{\frac{n\pi}{6}i}$ اذن $\left(\frac{z_A}{2}\right)^{n}$ تخيلي صرف جزؤه التخيلي سالب معناه $\frac{n\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}+2\pi k;k\in\mathbb{N}$

أي $n=9+12k;k\in\mathbb{N}$

4) تعيين العبارة المركبة للتشابه S الذي يحول O الى A ويحول C الى D:

لدينا $\begin{cases}S(O)=A\\S(C)=D\end{cases}$ اذن: $\begin{cases}z_A=az_O+b...(1)\\z_D=az_C+b...(2)\end{cases}$ وبالتالي من (1) نجد ان $b=z_A=\sqrt{3}+i$

ومن (2) نجد $a=\frac{z_D-b}{z_C}=\frac{-2\sqrt{3}-2i}{2i}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ وبالتالي العبارة المركبة لـالتشابه S هي

$$z'=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+\sqrt{3}+i$$

5) أ)تعين ثم انشاء (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوى التي تحقق $\arg\left(\frac{z}{z-2i}\right)=2\pi k;k\in\mathbb{Z}$

$\arg\left(\frac{z}{z-2i}\right)=2\pi k;k\in\mathbb{Z}$ معناه $\arg\left(\frac{z-z_O}{z-z_C}\right)=2\pi k;k\in\mathbb{Z}$ أي: $\left(\overrightarrow{CM};\overrightarrow{OM}\right)=2\pi k;k\in\mathbb{Z}$ وبالتالي

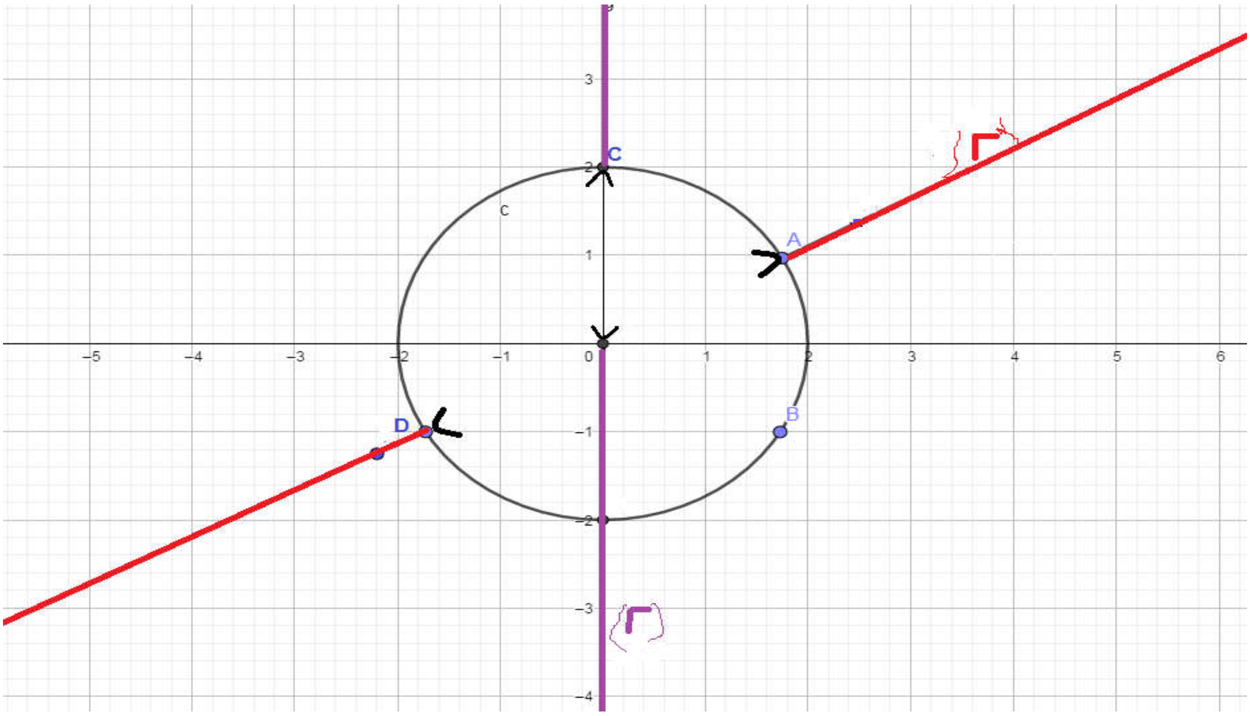
(Γ) هي المستقيم (OC) ماعدا القطعة $[OC]$.

ب)عين ثم انشئ مجموعة النقط (Γ') صورة (Γ) بالتشابه المباشر S.

(Γ') هي المستقيم $(S(O)S(C))$ ماعدا القطعة $[S(O)S(C)]$ أي ان (Γ') هي المستقيم (AD) ماعدا القطعة $[AD]$ لان

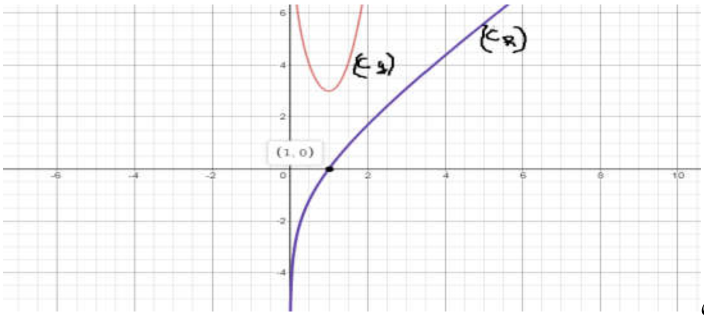
$$\begin{cases}S(O)=A\\S(C)=D\end{cases}$$

الانشاء:



التمرين الرابع: (7نقاط)

I. g و h الدالتان العدديتان المعرفتان على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^3-x-2\ln x+3$ و $h(x)=x-1+\ln x$



(C_g) و (C_h) تمثيلهما البياني الظاهر في الشكل المقابل

1) تعيين بيانيا اشارة $g(x)$ و $h(x)$ حسب قيم x.

$g(x)\succ 0$ على $]0;+\infty[$ ،

x	0		1		$+\infty$
$h(x)$	|	-	0	+	

II. لتكن الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-1+\dfrac{x-1+\ln x}{x^2}$ ، (C_f) التمثيل البياني للدالة في المعلم المتعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\|=1cm;\|\vec{j}\|=2cm$

1) حساب $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x)$ ثم تفسير النتيجة هندسيا . ثم حساب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

- $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x)=\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0}\left(x-1+\dfrac{x-1+\ln x}{x^2}\right)=-\infty$ لان $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \ln x=-\infty$
- التفسير: $x=0$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f)
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x \to +\infty}\left(x-1+\dfrac{x-1+\ln x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x \to +\infty}\left(x-1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{\ln x}{x^2}\right)=+\infty$

لان $\lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=0$

2) بيان ان المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x-1$ مقارب مائل لـ (C_f)، ثم تحديد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة الى (Δ):

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-y)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1+\ln x}{x^2}=0$ اذن (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

ولدينا $f(x)-y=\dfrac{h(x)}{x^2}$ اذن اشارة الفرق من اشارة $h(x)$ أي :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-y$	‖	-	0	+	
الوضع النسبي	‖	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	

3) بيان أنه من اجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

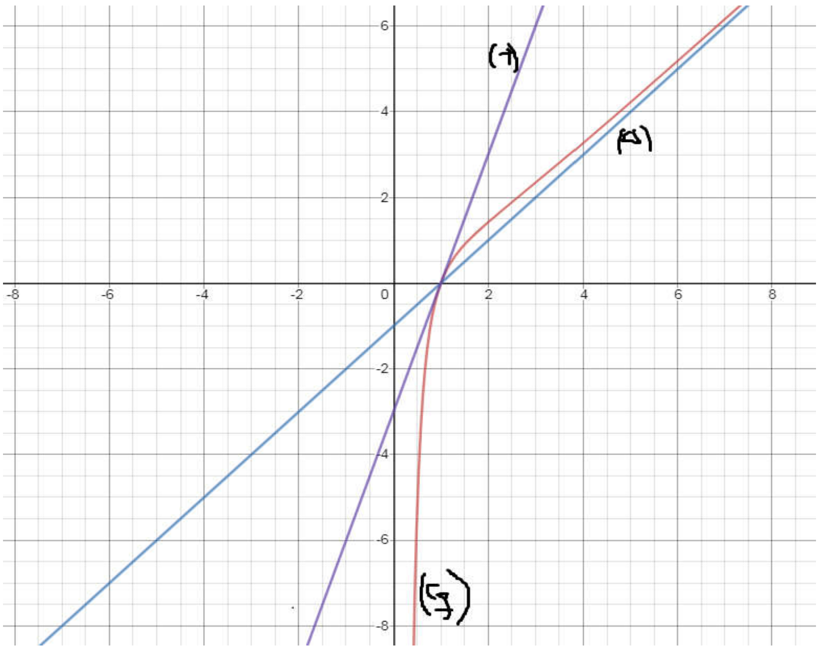
جدول تغيرات f:

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

4) كتابة معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة $A(1;0)$.

$$(T):y=f'(1)(x-1)+f(1)=3x-3$$

5) رسم كل من (Δ)، (T) والمنحني (C_f).



6) لتكن (d_m) عائلات المستقيمات المعرفة بـ : $y=mx-m$ حيث m وسيط حقيقي

أ) التحقق ان جميع المستقيمات (d_m) تمر بالنقطة A.

لدينا $y=m.1-m=0$ اذن جميع المستقيمات (d_m) تمر بالنقطة A.

ب) تعيين قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة $f(x)=mx-m$ حلان متمايزان.

القيم المطلوبة هي $1 \prec m \prec 3$

III. 1) باستعمال التكامل بالتجزئة بيان أن : $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = 1-\frac{2}{e}$.

$$\begin{cases} u(x)=\ln x \\ v'(x)=\frac{1}{x^2} \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} u'(x)=\frac{1}{x} \\ v(x)=\frac{-1}{x} \end{cases}$$ اذن : $$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx=\left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^e-\int_1^e -\frac{1}{x^2}=-\frac{\ln e}{e}+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^e=-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}+1=1-\frac{2}{e}$$

2) احسب بـ cm^2 مساحة الحيز المحدد بالمنحني (C_f) و (Δ) والمستقيمين الذين معادلتهما $x=1$ و $x=e$.(يطلب اعطاء القيمة المظبوطة)

$$s=\int_1^e (f(x)-y)dx=\int_1^e\left(\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right)dx=\int_1^e\left(\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}+\frac{\ln x}{x^2}\right)dx=\int_1^e\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{\ln x}{x^2}\right)dx$$

$$s=\left[\ln x+\frac{1}{x}\right]_1^e+1-\frac{2}{e}=\left(1-\frac{1}{e}\right)u.a=\left(1-\frac{1}{e}\right)\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|=2\left(1-\frac{1}{e}\right)cm^2$$

الموضوع الثاني

التمرين الاول(5نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;1]$ بـ: $f(x)=2x-x^2$

1) أ) بيان ان الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$

الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $[0;1]$ ولدينا : $f'(x)=2-2x$ وبما ان $x\in[0;1]$ فان $f'(x)\geq 0$ أي ان f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$

ت) بين انه من اجل كل عددحقيقي x من المجال $[0;1]$ فان $f(x)$ من المجال $[0;1]$

$x\in[0;1] \Leftarrow f(x)\in[f(0);f(1)]$ (لان f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$) وبالتالي $f(x)\in[0;1]$

2) - لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة بـ: $u_0=\frac{3}{7}$: ومن اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) البرهان بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $0\prec u_n \prec 1$.

البرهان بالتراجع الخاصية :"من اجل كل عدد طبيعي n : $0\prec u_n\prec 1$ ".

- الخاصية صحيحة من اجل $n=0$ لان $0\prec u_0=\frac{3}{7}\prec 1$
- نفرض ان $0\prec u_n\prec 1$ من اجل n عدد طبيعي كيفي ونثبت ان $0\prec u_{n+1}\prec 1$

لدينا $0\prec u_n\prec 1$ اذن $f(0)\prec f(u_n)\prec f(1)$ أي $0\prec u_{n+1}\prec 1$

اذن من اجل كل عدد طبيعي n : $0\prec u_n\prec 1$.

ب) بين ان (u_n) متزايدة ثم استنتج انها متقاربة.

لدينا $u_{n+1}-u_n=2u_n-u_n^2-u_n=u_n-u_n^2=u_n(1-u_n)$ وبما ان $0\prec u_n\prec 1$ فان $u_n(1-u_n)\succ 0$

أي $u_{n+1}-u_n\succ 0$ وبالتالي (u_n) متزايدة

وبما ان (u_n) متزايدة ومحدودة من الاعلى ($u_n\prec 1$ على $\mathbb{N}$) فهي متقاربة.

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=1-u_n$.

أ) بيان انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1}=v_n^2$

لدينا $v_n=1-u_n$ اذن $v_{n+1}=1-u_{n+1}$ أي $v_{n+1}=1-2u_n+u_n^2$ أي $v_{n+1}=(1-u_n)^2=v_n^2$

ب) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=v_0^{2^n}$

$$v_0=1-u_0=1-\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$$

البرهان بالتراجع الخاصية :"من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\left(\frac{4}{7}\right)^{2^n}$ ".

- الخاصية صحيحة من اجل $n=0$ لان $v_0=\frac{4}{7}=\left(\frac{4}{7}\right)^{2^0}$
- نفرض ان $v_n=\left(\frac{4}{7}\right)^{2^n}$ من اجل n عدد طبيعي كيفي ونثبت ان $v_{n+1}=\left(\frac{4}{7}\right)^{2^{n+1}}$

لدينا $v_{n+1}=v_n^{\,2}$ اذن $v_{n+1}=\left(\left(\frac{4}{7}\right)^{2^n}\right)^2=\left(\frac{4}{7}\right)^{2\times 2^n}=\left(\frac{4}{7}\right)^{2^{n+1}}$

اذن من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\left(\frac{4}{7}\right)^{2^n}$.

ت) استنتاج بدلالة n عبارة u_n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

- لدينا $v_n=1-u_n$ اذن $u_n=1-v_n$ وبالتالي $u_n=1-\left(\frac{4}{7}\right)^{2^n}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\left(\frac{4}{7}\right)^{2^n}\right)=1$ (لان $-1\prec\frac{4}{7}\prec 1$ أي $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{7}\right)^{2^n}=0$)

4) احسب p_n بدلالة n ، حيث : $p_n=(1-u_0)(1-u_1)(1-u_2)....(1-u_n)$

لدينا $p_n=(1-u_0)(1-u_1)(1-u_2)....(1-u_n)$ معناه $p_n=v_0\times v_1\times v_2....\times v_n$

اذن $\ln p_n=\ln v_0+\ln v_1+\ln v_2+....+\ln v_n$

ولدينا $\ln v_n=\ln\left(\frac{4}{7}\right)^{2^n}=2^n\ln\left(\frac{4}{7}\right)$ أي ان المتتالية $(\ln v_n)$ هي متتالية هندسية اساسها 2

وبالتالي: $\ln p_n=\ln v_0.\left(\frac{1-2^{n+1}}{1-2}\right)$ أي $\ln p_n=\ln\frac{4}{7}.(2^{n+1}-1)$ أي $p_n=\left(\frac{4}{7}\right)^{2^{n+1}-1}$

التمرين الثاني:(4نقاط)

المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ النقط $D;C;B;A$ التي لواحقها على الترتيب:

$z_A=1+i$ ، $z_B=-1+3i$ ، $z_C=-3+i$. ، $z_D=1+5i$

1) h التحاكي الذي نسبته 2 ويحول A الى C ، عين z_Ω لاحقة النقطة Ω مركز التحاكي h .

h التحاكي الذي نسبته 2 ويحول A الى C اذن $z_C=2z_A+b \Leftarrow b=z_C-2z_A=-3+i-2(1+i)=-5-i$

وبالتالي: $z_\Omega=\frac{b}{1-a}=\frac{-5-i}{1-2}=5+i$

2) لتكن E مرجح الجملة $\{(A;1);(B;-1);(C;1)\}$ و I منتصف القطعة $[BC]$.

أ) عين z_E و z_I لاحقتي النقطتين E و I على الترتيب .

$$z_E=\frac{z_A-z_B+z_C}{1}=-1-i \text{ ، } z_I=\frac{z_B+z_C}{2}=-2+2i$$

ب) تعيين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$ -

لدينا $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$ معناه $\left\|\overrightarrow{ME}\right\|=\frac{1}{2}\left\|2\overrightarrow{MI}\right\|$ أي $ME=MI$ اذن هذه المجموعة هي المستقيم محور القطعة $[EI]$

3) أ)اكتب العدد المركب $\frac{z_I-z_A}{z_E-z_D}$ على الشكل الاسي .

$$\frac{z_I-z_A}{z_E-z_D}=-\frac{1}{2}i$$

ب)استنتاج نسبة وزاوية التشابه المباشر S الذي يحول E الى I ويحول D الى A

النسبة هي $\left|-\frac{1}{2}i\right|=\frac{1}{2}$ والزاوية هي $\arg\left(-\frac{1}{2}i\right)=-\frac{\pi}{2}$

4) K نقطة من المستوى تحقق : $z_K-z_D=-2e^{\frac{\pi}{6}i}(z_I-z_A)$.

اثبات ان K هي صورة النقطة E بدوران مركزه D يطلب تعيين زاوية له .

لدينا $z_K-z_D=-2e^{\frac{\pi}{6}i}(z_I-z_A)$ و $\frac{z_I-z_A}{z_E-z_D}=-\frac{1}{2}i$ اذن

$$z_K-z_D=-2e^{\frac{\pi}{6}i}.\frac{-1}{2}i\,(z_E-z_D)=e^{\frac{\pi}{6}i}e^{\frac{\pi}{2}i}(z_E-z_D)=e^{\frac{2\pi}{3}i}(z_E-z_D)$$

ومنه نستنتج ان K هي صورة النقطة E بدوران مركزه D وزاويته $\frac{2\pi}{3}$

5)أ-عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوى ذات اللاحقة z بحيث : $z-1-5i=\frac{4}{\overline{z-1+5i}}$

لدينا $z-1-5i=\frac{4}{\overline{z-1+5i}}$ معناه $(z-z_D)\left(\overline{z-z_D}\right)=4$ أي $|z-z_D|^2=4$ أي $|z-z_D|=2$ أي $DM=2$

وبالتالي (Γ) هي دائرة مركزها D ونصف قطرها 2

ب-عين (Γ') صورة (Γ) بالتشابه المباشر S وعين عناصرها المميزة .

(Γ') هي الدائرة التي مركزها $S(D)$ أي مركزها A ونصف قطرها $2\times\frac{1}{2}=1$

التمرين الثالث:(4نقاط)

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

(Δ_1) و(Δ_2) مستقيمان من الفضاء معرفان بتمثيليهما الوسيطيين التاليين:

$$(\Delta_1):\begin{cases}x=3+2t\\ y=-2-2t\ (t\in\mathbb{R})\\ z=1-t\end{cases}\quad و\quad (\Delta_2):\begin{cases}x=1\\ y=-1-t'\ (t'\in\mathbb{R})\\ z=4+2t'\end{cases}$$

1)أ) تعيين احداثيات النقطة B تقاطع المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2)

نقوم بحل الجملة $\begin{cases}3+2t=1\\ -2-2t=-1-t'\\ 1-t=4+2t'\end{cases}$ فنجد ان $\begin{cases}t=-1\\ t'=-1\end{cases}$ أي ان $B(1,0,2)$

ت) تعيين تمثيلا وسيطيا للمستوى (P) المعين بالمستقيمين (Δ_1) و (Δ_2)

$$(P):\begin{cases}x=1+2t\\ y=-2t-t'\ (t,t'\in\mathbb{R})\\ z=2-t+2t'\end{cases}$$

2)أ)اثبات ان النقطة $A(6;4;4)$ لاتنتمي الى المستوى (P)

لنقم بحل الجملة $\begin{cases}6=1+2t \dots(1)\\ 4=-2t-t' \dots(2)\\ 4=2-t+2t' \dots(3)\end{cases}$ نجد من (1) و (2) ان $t=\frac{5}{2};t'=-9$ وبتعويض القيمتين في (3)

نجد ان هناك تناقض وبالتالي $A(6;4;4)$ لاتنتمي الى المستوي (P)

ب)تبيين ان النقطة B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P)

نعلم ان B نقطة من المستوي (P) اذن بقي اثبات ان الشعاع $\overrightarrow{AB}$ يعامد كل من $\vec{u}$ و $\vec{u'}$ اشعة توجيه لـ(P)

$\overrightarrow{AB}(-5,-4,-2)$ و $\vec{u}(2,-2,-1)$، $\vec{u'}(0,-1,2)$ وبالتالي $\overrightarrow{AB}.\vec{u}=0,\overrightarrow{AB}.\vec{u'}=0$ اذن B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P)

3)أ)تعيين معادلة ديكارتيه للمستوى (Q) الذي يشمل النقطة A و $\vec{n}(5;1;-7)$ شعاع ناظمي له.

$(Q):5x+y-7z+d=0$ وبما $A(6;4;4)$ من (Q) فان $34-28+d=0$ أي $d=-6$

وبالتالي : $(Q):5x+y-7z-6=0$ معادلة ديكارتية لـ(Q)

ب)تعيين احداثيات C وD نقطتي تقاطع (Q) مع كل من (Δ_1) و (Δ_2) على الترتيب .

$5(3+2t)-2-2t-7(1-t)-6=0$ اذن $15t=0$ أي $t=0$ وبالتالي $C(3,-2,1)$

$5(1)-1-t'-7(4+2t')-6=0$ اذن $-15t'-30=0$ أي $t'=-2$ اذن $D(1,1,0)$

4)أ)تعيين طبيعة المثلث BCD، ثم احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$

لدينا $\overrightarrow{BC}(2,-2,-1),\overrightarrow{BD}(0,1,-2),\overrightarrow{CD}(-2,3,-1)$ اذن $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}=0-2+2=0$ وبالتالي BCD مثلث قائم في B

حجم رباعي الوجوه $ABCD$:

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{BCD}\times d(A,(BCD))=\frac{1}{3}S_{BCD}\times d(A,(P))=\frac{1}{3}\frac{BC.BD}{2}\times AB=\frac{15}{2}(uv)$$

ب)استنتاج مساحة المثلث ACD:

لدينا $V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{ACD}\times d(B,(ACD))=\frac{1}{3}S_{ACD}\times d(B,(Q))$ اذن $S_{ACD}=\frac{3V_{ABCD}}{d(B,(Q))}$ وبالتالي :

$$S_{ACD}=\frac{3\times\frac{15}{2}}{\frac{3}{\sqrt{5}}} \text{ أي } S_{ACD}=\frac{15}{2}\sqrt{5}(u.a)$$

التمرين الرابع: (7نقاط)

I. g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=2+(x-2)e^{-x+2}$

1) **دراسة تغيرات الدالة g:**

الدالة g معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $g'(x)=(3-x)e^{-x+2}$ اذن اشارة $g'(x)$ من اشارة $3-x$

وبالتالي لدينا:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-

اذن g متزايدة على $]-\infty,3]$ ومتناقصة على $[3,+\infty[$

2) **بيان ان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1.14 \prec \alpha \prec 1.15$.**

g مستمرة ومتزايدة على المجال $]1.14;1.15[$ و $g(1.14)\times g(1.15)\prec 0$ حيث
$g(1.14)-0.03; g(1.15)=0.01$ اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α
حيث: $1.14\prec\alpha\prec 1.15$

3) استنتج اشارة $g(x)$ حسب قيم x:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

II. لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2x-1-(x-1)e^{-x+2}$، (C_f) التمثيل البياني للدالة في المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=2cm;\|\vec{j}\|=2cm$

1) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2x-1-(x-1)e^{-x+2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2x-1-\frac{xe^2}{e^x}+e^{-x+2}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(2x-1-(x-1)e^{-x+2}\right)=\lim_{x\to-\infty} x\left(2-\frac{1}{x}-e^{-x+2}+\frac{e^2}{xe^x}\right)=+\infty$$

لان $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0;\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0;\ \lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty;\ \lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$

ج-بيان أنه من اجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

د-بيان أن $f(\alpha)=2\alpha+1+\dfrac{2}{\alpha-2}$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

$$\begin{cases} f(\alpha)=2\alpha-1-(\alpha-1)e^{-\alpha+2} \\ g(\alpha)=2+(\alpha-2)e^{-\alpha+2}=0 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} f(\alpha)=2\alpha-1-(\alpha-1)e^{-\alpha+2}\ldots(1) \\ e^{-\alpha+2}=\dfrac{-2}{\alpha-2}\ldots(2) \end{cases}$$

وبتعويض (2) في (1) نجد :

$$f(\alpha)=2\alpha-1+\frac{2(\alpha-1)}{\alpha-2}=2\alpha+1-2+\frac{2(\alpha-1)}{\alpha-2}=2\alpha+1+\frac{2}{\alpha-2}$$

استنتاج حصر $f(\alpha)$:

لدينا: $1.14\prec\alpha\prec 1.15$ اذن $3.28\prec 2\alpha+1\prec 3.30\ldots(*)$ و $\dfrac{2}{-0.85}\prec\dfrac{2}{\alpha-1}\prec\dfrac{2}{-0.86}$ أي $-2.36\prec\dfrac{2}{\alpha-1}\prec -2.32\ldots(**)$ وبالجمع

بين $(*)$ و $(**)$ طرفا لطرف نجد $0.92\prec f(\alpha)\prec 0.98$

2) أ-اثبات ان المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته: $y=2x-1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x-1)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-(x-1)e^{-x+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-xe^2}{e^x}+e^{-x+2}\right)=0$ اذن مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

ب-دراسة الوضع النسبي للمحنى (C_f) بالنسبة الى (Δ) .

x	$-\infty$	1	$+\infty$

$f(x)-y$	+	0	-
الوضع النسبي	(Δ) فوق (C_f)	(Δ) يقطع (C_f)	(Δ) تحت (C_f)

ج-بيان ان المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) يطلب اعطاء معادلة ديكارتية له .

نقوم بحل المعادلة $f'(x)=2$ أي $g(x)=2$ أي $2+(x-2)e^{-x+2}=2$ اذن $x=2$ وبالتالي (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة 2 وبالتالي معادلة (T) من الشكل : $(T): y=2(x-2)+f(2)$ أي

$(T): y=2x-2$

ب-احسب $f(0)$ ،$f(2)$ ثم رسم (Δ) ،(T) و (C_f).

$f(2)=2$ ، $f(0)=e^2-1\simeq 6.4$

3) تعيين بيانا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة (E) ذات المجهول الحقيقي x التالية حلين متمايزين :

لدينا $(E): 2m-1-(x-1)e^{-x+2}=0$ معناه $-1-(x-1)e^{-x+2}=-2m$ أي

$-1-(x-1)e^{-x+2}+2x=-2m+2x$ وبالتالي $f(x)=-2m+2x$ اذن حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=-2m+2x$

اذن المعادلة (E) تقبل حلين متمايزين من اجل $-2\prec -2m\prec -1 \Leftarrow \frac{1}{2}\prec m\prec 1$

III. أ)عين باستعمال التكامل بالتجزئة الدالة الاصلية H للدالة $h: x\mapsto (x-1)e^{-x+2}$ على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم عند 0.

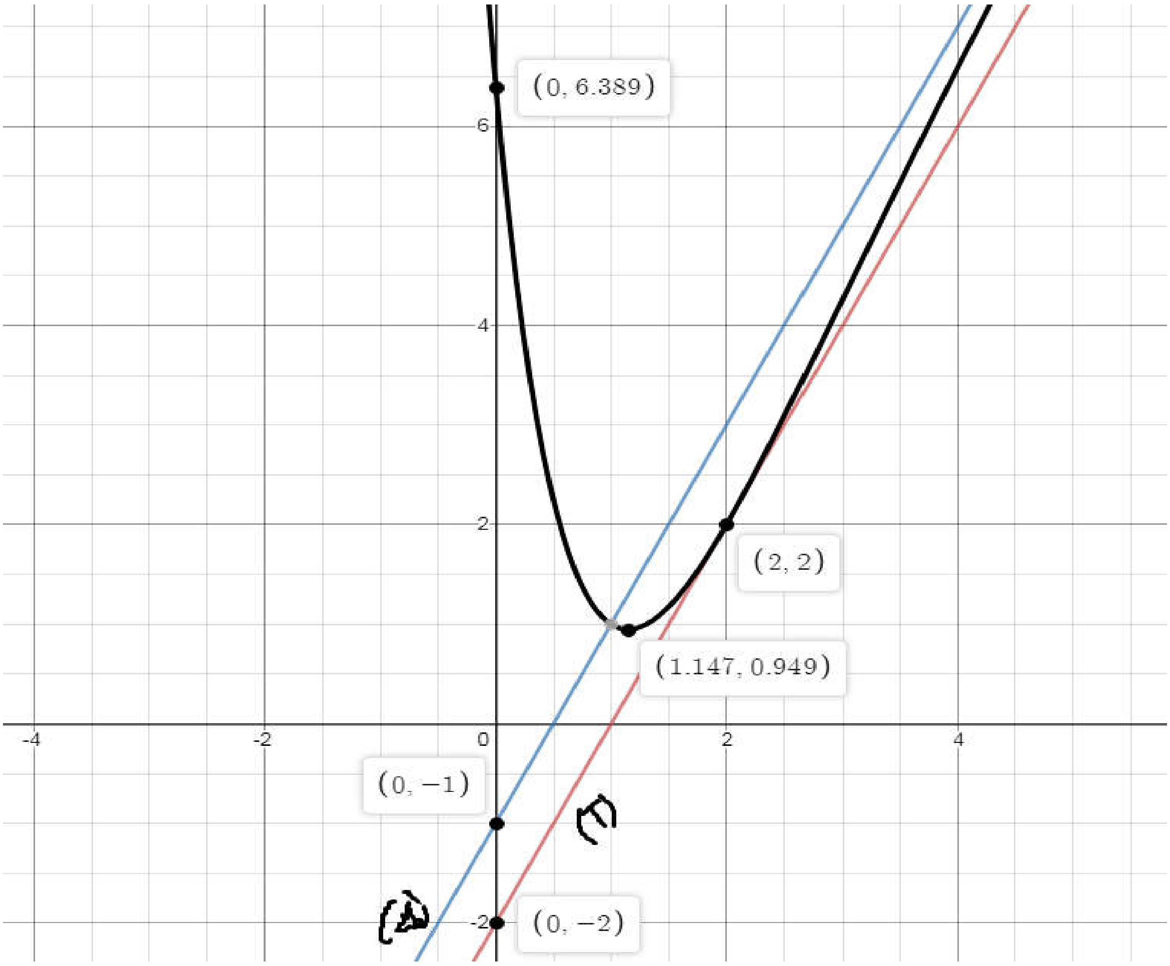
$$H(x)=\int_0^x h(t)dt=\int_0^x (t-1)e^{-t+2}dt$$

$\begin{cases} u(t)=t-1 \\ v'(t)=e^{-t+2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t)=1 \\ v(t)=-e^{-t+2}\end{cases}$ اذن $H(x)=\left[-e^{-t+2}(t-1)\right]_0^x-\int_0^x -e^{-t+2}$ أي

$$H(x)=\left[-e^{-t+2}(t-1)\right]_0^x-\int_0^x -e^{-t+2}=-e^{-x+2}(x-1)+e^2+e^{-x+2}-e^2=-xe^{-x}+2$$

ب)ليكن λ عددا حقيقيا حيث $\lambda\succ 1$ ، $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمات التي معادلاتها : $x=1; x=\lambda$

- حساب المساحة $A(\lambda)$ بدلالة λ ثم حساب $\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$
- $A(\lambda)=\int_1^{\lambda}(2x-1-f(x))dx=\int_1^{\lambda}(x-1)e^{-x+2}dx=H(\lambda)-H(1)=-\lambda e^{-\lambda+2}+e\,(u.a)=4\left(-\lambda e^{-\lambda+2}+e\right)cm^2$
- $\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)=\lim_{\lambda\to+\infty} 4\left(-\lambda e^{-\lambda+2}+e\right)cm^2=4e\,cm*2$



مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح في دراستكم بصفة خاصة وفي حياتكم بصفة عامة .....استاذكم زاوي شعيب ....

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبية — ثانوية الشهيد محمد بوجمعة لوطاية بسكرة

الشعبة : العلوم التجريبية — دورة ماي 2019

اختبار في مادة : الرياضيات — المدة : 3 ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول :

I) نعرف في $\mathbb{C}$ كثير الحدود P كثير حدود للمتغير المركب z بـ : $P(z)=z^3-4z^2+8z-8$

1) تحقق انه من اجل كل z من $\mathbb{C}$ لدينا : $P(z)=(z-2)(z^2-2z+4)$

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$.

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O\,,\vec{u};\vec{v}\right)$

نعتبر النقط A ، B و C ذات اللواحق $z_A=2$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_C=\overline{z_B}$ على الترتيب .

1) اكتب على الشكل الاسي العدد المركب $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$

2) عين طبيعة التحويل النقطي f الذي يحول النقطة C الى النقطة B مع ذكر عناصره المميزة

3) استنتج نوع المثلث ABC

4) (E) مجموعة النقط M من المستوي المركب ذات اللاحقة z التي تحقق: $\left|z^2\right|-\left(z+\overline{z}\right)-2=0$

أ) تحقق ان النقطة B من المجموعة (E)

ب) عين ثم انشئ المجموعة (E) في المعلم $\left(O\,,\vec{u};\vec{v}\right)$

التمرين الثاني :

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0=-1$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\dfrac{3u_n+4}{u_n+3}$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $0<u_n<2$

2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

3) بين مع التبرير أن المتتالية (u_n) متقاربة.

4) من اجل كل n من $\mathbb{N}$ نضع : $v_n=\dfrac{u_n-2}{u_n+2}$

أ) أكتب $5v_{n+1}$ بدلالة v_n ثم استنتج طبيعة المتتالية (v_n)

ب) أكتب v_n بدلالة n ثم إستنتج عبارة u_n بدلالة n

ج) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الثالث :

يحتوي وعاء على ثلاث قريصات بيضاء مرقمة بالشكل **1** ، **5** ، **5** واربع قريصات حمراء مرقمة بالشكل **1** ، **1** ، **3** ، **3** . القريصات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس،
نسحب عشوائيا من هذا الوعاء قريصتين في آن واحد .

1) أحسب احتمال الحدثين التاليين:
A : " الحصول على قريصتين من نفس اللون"
B : " الحصول على قريصتين مجموع رقميهما **6**"

2) احسب $P(A\cap B)$ ، هل الحدثين A ، B مستقلين ؟.

3) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لقريصتين مجموع الرقميين المسجلين عليهما.
أ) ما هي قيم المتغير العشوائي X ؟.
ب) أعط قانون احتمال المتغير العشوائي X
ج) احسب أمله الرياضي و انحرافه المعياري.

التمرين الرابع:

I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[-4;+\infty[$ بـ: $f(x)=x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+2}$

و (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$ (الوحدة $2cm$)

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) أ)اثبت أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x-2$ مقارب مائل لـ(C_f) بجوار $+\infty$
ب) ادرس الوضع النسبي بين (C_f) و (D).

3) أ) بين انه من اجل كل x من $[-4;+\infty[$ لدينا : $f'(x)=\left(\dfrac{e^x-2}{e^x+2}\right)^2$
ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f على $[-4;+\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f
ج) استنتج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تحديد احداثييها.
د) بين أن المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $-1.7<\alpha<-1.6$

4) أنشئ (C_f) و (D) في المعلم $(O,\vec{i};\vec{j})$.

II) 1) اوجد مجموعة الدوال الاصلية للدالة $x\mapsto \dfrac{e^x}{e^x+2}$ على $[-4;+\infty[$.

2) λ عدد حقيقي حيث $\lambda>0$
احسب بـcm^2 المساحة $A(\lambda)$ للسطح المستوي المحدد بـ (C_f) و (D)
و المستقيمين الذين معادلتيهما $x=0$ $x=\lambda$

3) احسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول :

I) حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 = 3z - 9$

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O, \vec{u}; \vec{v}\right)$

نعتبر النقطتين A ، B ذات اللاحقتين $z_A = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ على الترتيب .

1) احسب $|z_A|$ ، $|z_B|$ ثم استنتج ان النقطتين A ، B تنتميان الى دائرة (C) يطلب تحديد عناصرها المميزة.

2) T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z$

أ) حدد طبيعة التحويل النقطي T ، مع ذكر عناصره المميزة

ب) عين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتحويل النقطي T.

3) أ) اكتب العدد المركب $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ على الشكل الأسي.

ب) استنتج طبيعة التحويل النقطي S الذي يحول النقطة C الى النقطة B ، مع ذكر عناصره المميزة.

التمرين الثاني :

المتتالية العددية $\left(u_n\right)$ المعرفة بحدها الأول $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 2}$$

1) أحسب u_1 ، u_2

2) بين أن المتتالية العددية $\left(u_n\right)$ ليست حسابية و ليست هندسية

3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n = u_n^2 + 3$

أ) برهن أن المتتالية $\left(v_n\right)$ حسابية اساسها 2 ، ثم احسب حدها الاول v_0

ب) أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n

ج) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4) أكتب بدلالة n المجموعين S ، S' حيث:

$$S = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$
$$S' = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2$$

التمرين الثالث :

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقط $A(0;4;1)$ ، $B(1;3;0)$ ، $C(2;-1;-2)$ ، $E(7;-1;4)$

1) بين أن النقط A ، B و C تشكل مستو.

2) ليكن (D) المستقيم المار من النقطة E و $\vec{u}(2;-1;3)$ شعاع توجيه له.

أ) بين أن المستقيم (D) عمودي على المستوي (ABC) .

ب) استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

3) ليكن (P) و (P') مستويين معرفين بمعادلتيهما كما يلي :

$$(P): x+y+z=0$$

$$(P'): x+4y+2=0$$

أ) بين أن (P) و (P') متقاطعين وفق مستقيم (D') المعرف بتمثيله الوسيطي :

$$(D') : \begin{cases} x=-2-4t \\ y=t \qquad ; \quad t\in\mathbb{R} \\ z=2+3t \end{cases}$$

ب) ادرس الوضع النسبي بين المستقيم (D') و المستوي (ABC).

التمرين الرابع :

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$ ، $\|\vec{i}\|=1cm$

I) g الدالة العددية المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $g(x)=\dfrac{x}{x+1}-\ln(x+1)$

1) ادرس تغيرات الدالة g على المجال $[0;+\infty[$

2) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $[0;+\infty[$

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=e^{-x}\ln\left(e^{x}+1\right)$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المعلم $(O,\vec{i};\vec{j})$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتيجتين بيانيا.

2) أ) بين أنه من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $f'(x)=e^{-x}g(e^{x})$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

3) أنشئ (C_f) في المعلم $(O,\vec{i};\vec{j})$

4) أ) بين أن الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $F(x)=x-\left(e^{-x}+1\right)\ln\left(e^{x}+1\right)$ هي دالة أصلية لدالة f على $\mathbb{R}$

ب) A مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) و المستقيمات $y=0$ ، $x=0$ ، $x=\ln 2$ ،احسب بـ cm^2 المساحة A

بالتوفيق في شهادة البكالوريا

الإجابة النموذجية وسلم التنقيط

اختبار مادة : الرياضيات المستوى: الثالثة ثانوي

محاور الموضوع	عناصر الإجابة الموضوع الاول	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
الأعداد المركبة	التمرين الاول:		05

التمرين الاول:

$(I$

أ) التحقق انه من اجل كل z من $\mathbb{C}$ فان $P(z)=(z-2)(z^2-2z+4)$:

$$(z-2)(z^2-2z+4)=z^3-4z^2+8z-8=P(z)$$

ب) الحل في $\mathbb{C}$ ، للمعادلة $P(z)=0$:

$P(z)=0$ معناه: $(z-2)(z^2-2z+4)=0$ ومنه $z=2$ أو $z=1-i\sqrt{3}$ أو $z=1+i\sqrt{3}$ أي $S=\{z=2\,;z=1-i\sqrt{3}\,;z=1+i\sqrt{3}\}$

$(II$

1) كتابة الشكل الاسي للعدد المركب $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$: $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

2) تعيين طبيعة التحويل النقطي f :

لدينا : $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ أي : $z_B-z_A=e^{-i\frac{2\pi}{3}}\left(z_C-z_A\right)$

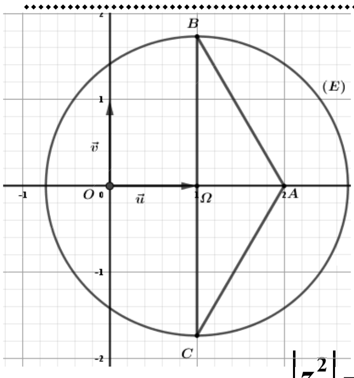
ومنه : التحويل النقطي f هو دوران مركزه النقطة A وزاويته $\theta=-\frac{2\pi}{3}$

3) استنتاج نوع المثلث ABC :

لدينا $|z_B-z_A|=\left|e^{-i\frac{2\pi}{3}}\left(z_C-z_A\right)\right|=\left|e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right|\left|z_C-z_A\right|=\left|z_C-z_A\right|$ ومنه $AB=AC$

اذن: المثلث ABC متساوي الساقين .

4) ....



أ) التحقق من ان النقطة B من المجموعة (E) :

$$\left|{z_B}^2\right|-\left(z_B+\overline{z_B}\right)-2=4-2-2=0$$

إذن: النقطة B من المجموعة (E) .

ب) تعيين و انشاء المجموعة (E) في المعلم $(O,\vec{u};\vec{v})$:

لتكن النقطة M من المستوي المركب لاحقتها $z=x+iy$

لدينا M من المجموعة (E) معناه ان : $\left|z^2\right|-\left(z-\overline{z}\right)-2=0$

ومنه $x^2+y^2-2x-2=0$ أي $(x-1)^2+y^2=3$ وبالتالي مجموعة النقط (E) هي عبارة عن الدائرة التي مركزها النقطة $\Omega(1;0)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{3}\,u.m$

4			**التمرين الثاني:** 1) البرهان بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $0<u_n<2$: • من اجل $n=1$ لدينا $u_1=\frac{1}{2}$ ومنه $0<u_1<2$ وبالتالي الخاصية محققة من أجل $n=1$ • نفرض ان $0<u_n<2$ محققة من أجل العدد الطبيعي n ونبرهن ان $0<u_{n+1}<2$ محققةكذلك لنا $0<u_n<2$ ومنه $3<u_n+3<5$ ومنه $\frac{1}{3}<\frac{1}{u_n+3}<\frac{1}{5}$ ومنه $-1<-\frac{5}{u_n+3}<-\frac{5}{3}$ ومنه $3-1<3-\frac{5}{u_n+3}<3-\frac{5}{3}$ ومنه $2<\frac{3u_n+4}{u_n+3}<\frac{4}{3}$ أي $0<\frac{3u_n+4}{u_n+3}<2$ أي $0<u_{n+1}<2$ ومنه الخاصية $0<u_{n+1}<2$ محققة من أجل العدد الطبيعي n. • نستنتج مما سبق ان الخاصية $0<u_n<2$ محققة اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n . 2) دراسة اتجاه تغير المتتالية العددية (u_n) : $0<\frac{(2-u_n)(2+u_n)}{u_n+3}=u_{n+1}-u_n$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما. 3) تبرير ان المتتالية (u_n) متقاربة: بماان (u_n) متتالية متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 فهي اذن متقاربة 4) أ) كتابة $5v_{n+1}$ بدلالة v_n ثم استنتاج طبيعة المتتالية (v_n) : لدينا من اجل كل n من $\mathbb{N}$: $5v_{n+1}=\frac{15u_{n+1}+20}{u_{n+1}+3}=\frac{5u_n-10}{5u_n+10}=\frac{u_n-2}{u_n+2}=v_n$ ومنه المتتالية (v_n) متتالية هندسية اساسها $q=\frac{1}{5}$ وحدها الاول $v_0=\frac{u_0-2}{u_0+2}=\frac{-1-2}{-1+2}=-3$ ب) كتابة v_n بدلالة n ثم استنتاج u_n بدلالة n : $n\in\mathbb{N}$, $v_n=-3\left(\frac{1}{5}\right)^n$ بالتعويض نجد $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\frac{-2v_n-2}{v_n-1}=\frac{2(5^n)-6}{5^n+3}$. ج) استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2(5^n)-6}{5^n+3}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2(5^n)}{5^n+3}=2$.	المتتاليات العددية

الاحتمالات			
			04

التمرين الثالث :

1) حساب احتمال الحدثين A ، B :

$$P(A)=\frac{C_3^2+C_4^2}{C_7^2}=\frac{3}{7} \quad , \quad P(B)=\frac{C_2^1\times C_3^1+C_2^2}{C_7^2}=\frac{1}{3}$$

2) حساب احتمال $P(A\cap B)$ ، و هل الحدثين A ، B مستقلين:

$$P(A\cap B)=\frac{C_2^1\times C_1^1+C_2^2}{C_7^2}=\frac{1}{7}$$

لدينا: $P(A)\times P(B)=\frac{3}{7}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{7}$

اذن : $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ أي الحدثين A ، B مستقلين

3) أ) القيم الممكنة للمتغير العشوائي X :

$$X\in\{\,2\,;4\,;6;\,8;10\}$$

ب) اعطاء قانون احتمال للمتغير العشوائي X :

$$P(X=2)=\frac{C_3^2}{C_7^2}=\frac{3}{21}$$

$$P(X=4)=\frac{C_3^1\times C_2^1}{C_7^2}=\frac{6}{21}$$

$$P(X=6)=\frac{7}{21}$$

$$P(X=8)=\frac{C_2^1\times C_2^1}{C_7^2}=\frac{4}{21}$$

$$P(X=10)=\frac{C_2^2}{C_7^2}=\frac{1}{21}$$

x_i	2	4	6	8	10
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{21}$	$\frac{6}{21}$	$\frac{7}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{1}{21}$

ب) حساب $E(X)$ ، $\sigma(X)$ للمتغير العشوائي X :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{5}x_iP(X=x_i)=(2)\left(\frac{3}{21}\right)+(4)\left(\frac{6}{21}\right)+(6)\left(\frac{7}{21}\right)+(8)\left(\frac{4}{21}\right)+(10)\left(\frac{1}{21}\right)=\frac{38}{7}$$

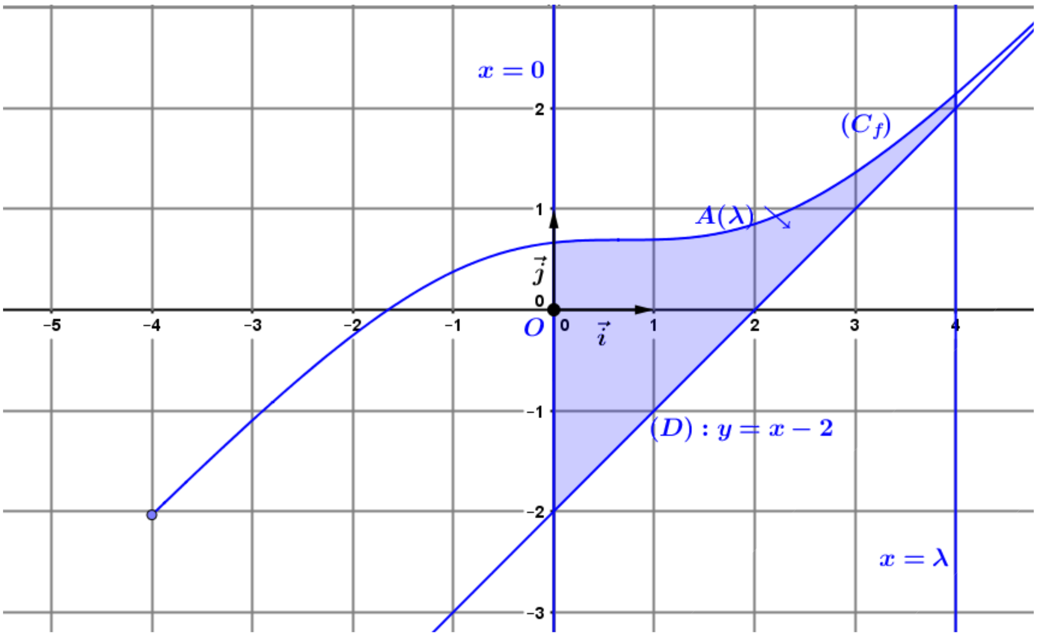
$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\sum_{i=1}^{5}x_i^2P(X=x_i)-(E(X))^2$$

$$=(2)^2\left(\frac{3}{21}\right)+(4)^2\left(\frac{6}{21}\right)+(6)^2\left(\frac{7}{21}\right)+(8)^2\left(\frac{4}{21}\right)+(10)^2\left(\frac{1}{21}\right)-\left(\frac{38}{7}\right)^2$$

$$=\frac{680}{147}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{680}{147}}\approx 2.15$$

		التمرين الرابع: (I 1) حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$: نجد $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. 2) أ) إثبات أن المستقيم (D) ذي المعادلة $y=x-2$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$: لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-2)\right]=0$. إذن المستقيم (D) ذي المعادلة $y=x-2$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$ ب) دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (D) : لدينا : $d(x)=f(x)-(x-2)=\dfrac{8}{e^x+2}$ بما انه من اجل كل x من $[-4;+\infty[$: $0<\dfrac{8}{e^x+2}$ أي : $0<d(x)$ أي ان (C_f) يقع فوق المستقيم (D). 3) أ) حساب $f'(x)$: $f'(x)=1-\dfrac{8e^x}{(e^x+2)^2}=\dfrac{(e^x-2)^2}{(e^x+2)^2}=\left(\dfrac{e^x-2}{e^x+2}\right)^2$ ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f على $[-4;+\infty[$ وتشكيل جدول تغيراتها : دراسة إشارة $f'(x)$: لدينا من اجل كل x من $[-4;+\infty[$ $(e^x+2)^2>0$ و $(e^x-2)^2\geq 0$ ومنه $f'(x)\geq 0$ و لدينا $f'(x)=0$ يكافئ ان $(e^x-2)^2=0$ يكافئ ان $e^x-2=0$ يكافئ ان $x=\ln 2$. تشكيل جدول تغيرات الدالة f : <table><tr><td>x</td><td>-4 $\ln 2$ $+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>+ 0 +</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$-2-\dfrac{4}{2e^4+1}$ ↗ $+\infty$</td></tr></table> ج) استنتاج ان (C_f) يقبل نقطة انعطاف مع تحديد احداثييها: بما ان $f'(x)$ تنعدم من اجل القيمة $\ln 2$ ولا تغير اشارتها عند القيمة $\ln 2$ فان النقطة $\Omega(\ln 2;\ln 2)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) د) تبيين ان (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $-1.7<\alpha<-1.6$ لدينا دالة f مستمرة و متزايدة تماما على $[-4;+\infty[$ و $f(-1.7)\times f(-1.6)<0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث : $-1.7<\alpha<-1.6$ أي ان المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α .	الدوال العددية
07			

الدوال العددية و الحساب التكاملي	4) إنشاء $\left(C_f\right)$ و $\left(D\right)$ في المعلم $\left(O,\vec{i};\vec{j}\right)$:  II) 1) ايجاد الدوال الاصلية للدالة $x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x+2}$ على المجال $\left[-4;+\infty\right[$: الدالة $x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x+2}$ معرفة ومستمرة على المجال $\left[-4;+\infty\right[$ فهي تقبل دوال اصلية . نضع $u(x)=e^x+2$ ومنه $u'(x)=e^x$ ومنه نجد ان الدالة $x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x+2}$ مكتوبة على الشكل $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ اي ان مجموعة الدوال الاصلية للدالة $x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x+2}$ على المجال $\left[-4;+\infty\right[$ هي: $k \in \mathbb{R}\;;\quad x \mapsto \ln\left(e^x+2\right)+k$. 2) حساب المساحة $A\left(\lambda\right)$: $A\left(\lambda\right)=2\times 2\left[\int_0^{\lambda}\left(\left(x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+2}\right)-\left(x-2\right)\right)dx\right]=8\left[\int_0^{\lambda}\left(4-\dfrac{4e^x}{e^x+2}\right)dx\right]$ $=8\left[4x-4\ln(e^x+2)\right]_0^{\lambda}=8\left(4\lambda-4\ln(e^{\lambda}+2)+4\ln 3\right)cm^2$ 3) حساب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A\left(\lambda\right)$: $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty} 8\left(4\lambda-4\ln(e^{\lambda}+2)+4\ln 3\right)=+\infty$		07

الأعداد المركبة	**تصحيح الموضوع الثاني:** **التمرين الأول:** I) الحل في $\mathbb{C}$ للمعادلة $z^2=3z-9$: المعادلة $z^2=3z-9$ تكافيء $z^2-3z+9=0$ ومنه $\Delta=(-3)^2-4\times(1)(9)=-27$ ومنه نجد $S=\left\{\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i;\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i\right\}$. II) 1) حساب $\lvert z_A\rvert,\lvert z_B\rvert$: $\lvert z_A\rvert=\left\lvert 3e^{i\frac{\pi}{6}}\right\rvert=3$ ، $\lvert z_B\rvert=\lvert\overline{z_A}\rvert=3$. لدينا $\lvert z_A\rvert=OA=3$ وأيضا $\lvert z_B\rvert=OB=3$ اذن نستنتج أن النقطتين A و B تنتميان للدائرة ذات المركز O ونصف القطر R=3. 2) أ) تحديد طبيعة التحويل T: لنا العبارة المركبة لهذا الدوران هي $z'=e^{i\frac{2\pi}{3}}z$ وهي من الشكل $z'-z_O=e^{i\frac{2\pi}{3}}(z-z_O)$ وحسب الدرس يتضح ان هذه العبارة هي لدوران مركزه النقطة O وزاويته $\theta=\frac{2\pi}{3}$. ب) تعيين z_C لاحقة النقطة C صورة A بالتحويل T: C صورة A بالتحويل T معناه $z_C=e^{i\frac{2\pi}{3}}z_A=e^{i\frac{2\pi}{3}}\times\left(3e^{i\frac{\pi}{6}}\right)=\frac{-3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$ 3) أ) كتابة العدد المركب $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ على الشكل الأسي: لنا $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right)-\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)}{\left(\frac{-3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)-\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)}=\frac{1}{\sqrt{3}}i=\frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ ومنه $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$. ب) استنتاج طبيعة التحويل النقطي S الذي يحول C الى B مع ذكر عناصره المميزة: لنا $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ ومنه $z_B-z_A=\frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}(z_C-z_A)$ وهو من الشكل $z'-z_\Omega=re^{i\theta}(z-z_\Omega)$ أي ان النقطة B هي صورة C بتشابه مباشر وعليه نستنتج ان S هو التشابه المباشر الذي نسبته $r=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ومركزه النقطة A وزاويته $\theta=\frac{\pi}{2}$.		04

المتتاليات العددية

التمرين الثاني:

1) حساب الحدود u_1 ، u_2:

$$u_1=\sqrt{u_0^{\,2}+2}=\sqrt{1+2}=\sqrt{3} \quad ، \quad u_2=\sqrt{u_1^{\,2}+2}=\sqrt{3+2}=\sqrt{5}$$

2) تبيين ان المتتالية (u_n) ليست حسابية وليست هندسية:

$\sqrt{5}\neq 3$ أي $u_2u_0\neq u_1^{\,2}$ اذن المتتالية (u_n) ليست هندسية خاصية الوسط الهندسي غير محققة

$1+\sqrt{5}\neq 2\sqrt{3}$ أي $u_0+u_2\neq 2u_1$ اذن المتتالية (u_n) ليست حسابية الوسط الحسابي غير محقق

(3

أ) اثبات ان المتتالية (v_n) حسابية أساسها 2 و حساب حدها الاول v_0:

لدينا من اجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1}=u_{n+1}^2+3=\left(u_n^2+3\right)+2=v_n+2$

ومنه المتتالية (v_n) متتالية حسابيةاساسها $r=2$ وحدها الاول $v_0=u_0^2+3=1+3=4$

ب) كتابة v_n بدلالة n ثم استنتاج u_n بدلالة n :

لنا $v_n=2n+4\ ,\ n\in\mathbb{N}$ ومنه $u_n=\sqrt{v_n-3}=\sqrt{2n+1}\ ,\ n\in\mathbb{N}$

ج) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\sqrt{2n+1}=+\infty$$

4) كتابة بدلالة n المجموعين S ، S’ :

نجد $S=v_0+v_1+\ldots+v_n$ ومنه $S=(n+1)(n+4)$

أيضا $S'=u_0^2+u_1^2+\ldots+u_n^2$ ومنه $S'=S-3(n+1)=(n+1)^2$.

04

الهندسة الفضائية

التمرين الثالث:

1) تبيين أن النقط A,B و C تشكل مستو:

لدينا : $\overrightarrow{AB}(1;-1;-1)$ ، $\overrightarrow{AC}(2;-5;-3)$ و لنا : $\dfrac{x_{\overrightarrow{AC}}}{x_{\overrightarrow{AB}}}\neq\dfrac{y_{\overrightarrow{AC}}}{y_{\overrightarrow{AB}}}$

إذن فان الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي النقاط A,B و C تشكل مستو

(2

أ) تبيين ان المستقيم (D) عمودي على المستوي (ABC):

لدينا :

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\,.\,\vec{u}=(1)(2)+(-1)(-1)+(-1)(3)=0\\ \overrightarrow{AC}\,.\,\vec{u}=(2)(2)+(-5)(-1)+(-3)(3)=0\end{cases}$$

اذن المستقيم (D) عمودي على المستوي (ABC) لان شعاع توجيهه يعامد شعاعي توجيهه.

ب) استنتاج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) :

بما أن المستقيم (D) عمودي على المستوي (ABC) فان الشعاع $\vec{u}(2;-1;3)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC) ومنه نجد : $2x-y+3z+d=0$

$A\in(ABC)$: $-2(0)-3(4)+3(1)+d=0$ اذن : $d=4$

و بالتالي : $(ABC):2x-y+3z+4=0$.

04

الدوال العددية

3)

أ) تبيين ان المستويين (P) و (P') متقاطعين وفق مستقيم (D') :

لدينا: المستقيم (D') معرف بتمثيله الوسيطي : $t \in \mathbb{R}$ ......

$$\begin{cases} x = -2-4t & ....(1) \\ y = t & ......(2) \\ z = 2+3t & ....(3) \end{cases}$$

و المستويين (P) و (P') معرفين بمعادلتهما :

$$(P): x+y+z=0.......(4) \qquad (P'): x+4y+2=0.......(5)$$

بتعويض (1) و (2) و(3) في (4) و (5) على التوالي نجد :

$$(-2-4t)+(t)+(2+3t)=0 \text{ و } (-2-4t)+4(t)+2=0$$

اذن : $(P)\cap(P')=(D')$.

ب) دراسة الوضع النسبي بين المستوي (ABC) والمستقيم (D') :

لدينا : $\vec{cn}_{ABC} \cdot \vec{u}_{(D')} = (2)(-4)+(-1)(1)+(3)(3)=0$ و $A \notin (D')$ و

$B \notin (D')$ اذن : $(D') \parallel (ABC)$.

التمرين الرابع:

I)

1) دراسة تغيرات الدالة g على $[0;+\infty[$:

أ) النهايات : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة g على $[0;+\infty[$:

حساب $g'(x)$: $g'(x)=\dfrac{-x}{(x+1)^2}$

08

دراسة إشارة $g'(x)$: لدينا من اجل كل x من $[0;+\infty[$: $(x+1)^2>0$

ومنه إشارة $g'(x)$ تعتمد على إشارة البسط -x لدينا من اجل كل x من $[0;+\infty[$: $-x \le 0$

وبالتالي : من اجل كل x من $[0;+\infty[$: $g'(x) \le 0$

ج) تشكيل جدول تغيرات الدالة g على المجال $[0;+\infty[$:

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	0 $-$	
$g(x)$	0 ↘	$-\infty$

2) استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $[0;+\infty[$:

x	0	$+\infty$
$g(x)$	0 $-$	

II) (1 أ) حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)$:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$

ب) التفسير الهندسي :

(C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أفقيين معدلتيهما $y=0$ و $y=1$

2) أ) تبيين انه من اجل من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=e^{-x}g(e^x)$:

$$f'(x)=(e^{-x}\ln(e^x+1))'=e^{-x}\left(\frac{e^x}{e^x+1}-\ln(e^x+1)\right)=e^{-x}g(e^x)$$

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$، ثم تشكيل جدول تغيراتها:

دراسة إشارة $f'(x)$:

لدينا من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $e^{-x}>0$

و لدينا من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $e^{x}>0$

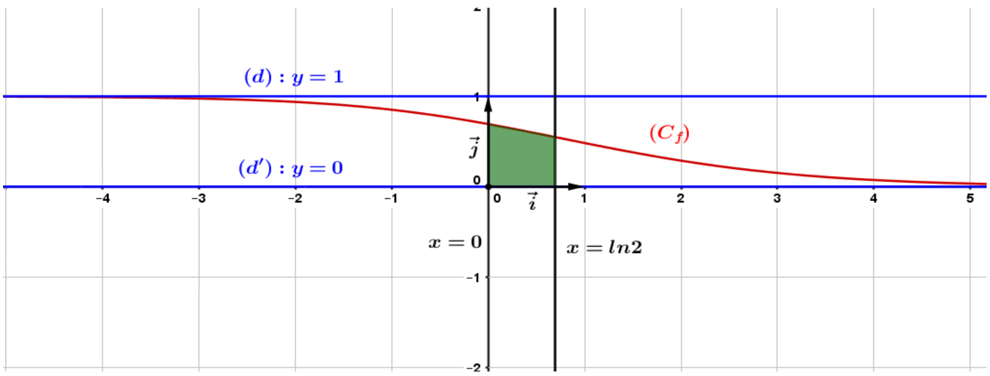
وبما أن $g(x)$ سالبة على المجال $[0;+\infty[$ فان $g(e^x)<0$

وبالتالي : من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)<0$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	1 ↘	0

3) إنشاء (C_f) في المعلم $(O,\vec{i};\vec{j})$:



4) أ) تبيين أن الدالة $F(x)=x-(e^{-x}+1)\ln(e^x+1)$ هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$:

لدينا الدالة F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من اجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$F'(x)=\left(x-(e^{-x}+1)\ln(e^x+1)\right)'=e^{-x}\ln(e^x+1)=f(x)$$

ومنه الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

ب) حساب بـ cm^2 المساحة A:

$$A=1\times1\left[\int_0^{\ln 2}\left(e^{-x}\ln(e^x+1)\right)dx\right]=\left[x-(e^{-x}+1)\ln(x+1)\right]_0^{\ln 2}\approx 0.43\,cm^2$$

لوطاية في 2019/05/23

الدوال الأصلية وحساب المساحات

مديرية التربية لولاية باتنة

ثانوية أجيال المستقبل الخاصة — العام الدراسي 2019/2018

السنة الثالثة : العلوم التجريبية — المدة : 3ساعات ونصف الساعة

الامتحان التجريبي (رياضيات).

على الطالب اختيار أحد الموضوعين

الموضوع الأوّل

التمرين الأوّل :4نقط

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس والمباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$.

الأعداد المركبة $z_A=\sqrt{3}+i$ ؛ $z_B=2\sqrt{3}-2i$ و $z_C=-2i$ هي على الترتيب لواحق النقط A ؛ B و C .

1) – أ) أكتب على الشكل الجبري ثمّ على الشكل المثلّثي العدد المركب $\left(\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right)$.

- ب) فسر هندسيا الطويلة وعمدة للعدد المركب $\left(\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right)$ ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC .

2) النقطة D هي نظيرة النقطة A بالنسبة إلى حامل محور التراتيب .

- أ) عين z_D لاحقة النقطة D .

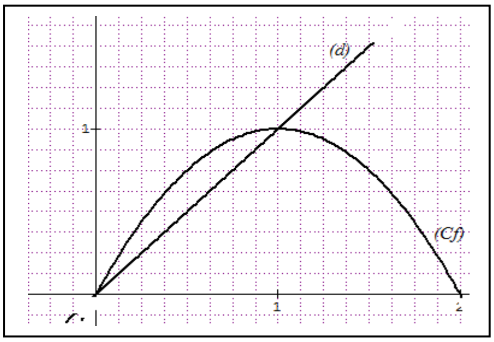
- ب) أكتب على الشكل الأسي العدد المركب z_B ثم العدد المركب z_D .

- جـ) استنتج قسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OB})$.

- د) ماذا يمكنك أن تقول عن النقط O ؛ B ؛ D ؟

3) عين الطبيعة الهندسية والعناصر المميزة لمجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $|z-\sqrt{3}-i|=OC$.

التمرين الثاني: 5 نقط



الشكل المقابل هو التمثيل البياني (C_f) للدالة f المعرّفة على المجال $[0;2]$ بـ : $f(x)=x(2-x)$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. واحدة الأطوال هي $4cm$.

(d) هو المستقيم الذي معادلته $y=x$.

نعرف في مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ المتتالية (u_n) بحدها الأوّل

$u_0=\frac{1}{8}$ وبالعلاقة التراجعية $u_{n+1}=u_n(2-u_n)$

1) أنقل على ورقة الإجابة الشكل ثم على حامل محور الفواصل مثل الحدود u_0 ؛ u_1 ؛ u_2 و u_3 موضحا خطوط الرسم

2) ما هو تخمينك حول رتابة وتقارب المتتالية (u_n) ؟

3) – أ) بالتراجع ؛ برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\prec u_n\prec 1$.

- ب) بين أنّ (u_n) متتالية متزايدة ثمّ استنتج أنّها متقاربة .

4) نعرف في $\mathbb{N}$ المتتاليتين (v_n) و (w_n) كما يلي : $v_n=1-u_n$ و $w_n=\ln(v_n)$.

برهن أنّ $v_{n+1}=v_n^2$ وأنّ (w_n) متتالية هندسية أساسها $q=2$.

التمرين الثّالث :3نقط

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نأخذ النقط :

$A(1;2;3)$ ؛ $B(0;1;4)$ ؛ $C(-1;-3;2)$ ؛ $D(4;-2;5)$ والشعاع $\vec{n}(2;-1;1)$.

1) برهن أن النقط A ؛ B ؛ C تحدد مستويا.

2) – أ) تحقق أنّ $\vec{n}$ عمودي على $\overrightarrow{AB}$ وأنّ $\vec{n}$ عمودي على $\overrightarrow{AC}$.

- ب) استنتج أن $\vec{n}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) .

- جـ) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

3) (Δ) هو المستقيم الذي تمثيله الوسيطي : $\begin{cases} x = 2-2t \\ y = -1+t \quad ; t\in\mathbb{R} \\ z = 4-t \end{cases}$.

تحقق أن النقطة D تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

التمرين الرابع :8 نقط

I) g هي الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = -x-1-\ln x$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to 0^{+}} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) أحسب $g'(x)$ ثمّ تحقّق أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $g'(x) \prec 0$.

3) شكل جدول تغيرات الدالة g .

4) – أ) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاّ وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$ وأن $0,2 \prec \alpha \prec 0,3$.

- ب) استنتج إشارة $g(x)$ في المجال $]0;+\infty[$.

II) نعرّف في المجال $]0;+\infty[$ الدّالة f كما يلي : $f(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \ln x + x$.

(C_f) هو التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) احسب نهايتي الدالة f .

2) – أ) تحقق أنّه من أجل كل x مكن المجال $]0;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{-g(x)}{x}$.

- ب) شكّل بعد ذلك جدول تغيرات الدالة f .

3) أدرس وضع (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$

4) أنشئ (Δ) و (C_f) .

5) h هي الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $h(x) = \frac{1}{2}x(\ln x)^2 + \frac{1}{2}x^2$

- أ) بين أن h هي إحدى الدوال الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

- ب) عين الدالة الأصلية F للدالة f والتي تحقق $F(1)=2$.

- جـ) أحسب مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x=1$ ؛ $x=2$ و $y=x$.

الموضوع الثّاني

التمرين الأوّل:4 نقط

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $\left(z+i\sqrt{3}\right)\left(z^2-2z+2\right)=0$.

II) النقط A ، B ، C هي على الترتيب صور الأعداد المركبة $z_A=1+i$ ؛ $z_B=1-i$ و $z_C=-i\sqrt{3}$.

1) النقطة E هي نظيرة النقطة C بالنسبة إلى النقطة B .

بين أنّ $z_E=2+i\left(\sqrt{3}-2\right)$.

2) R هو الدوران الذي مركزه النقطة O و $\frac{\pi}{2}$ قيسا لزاويته.

نضع $R(C)=F$ و $R(E)=G$.

- أ) جد العبارة المركبة للدوران R ثمّ :

- ب) تحقّق أنّ $z_F=\sqrt{3}$ وأنّ $z_G=\left(2-\sqrt{3}\right)+2i$.

3) h هو التحاكي الذي مركزه النقطة O ونسبته 2 .

ليكن S التحويل المركب من التّحويلين R و h .

عين الطبيعة الهندسية والعناصر المميزة للتحويل S .

التمرين الثاني :4 نقط

لدينا ثلاثة صناديق متماثلة : U_1 ؛ U_2 و U_3 .

كل صندوق يحوي 6 كرات من اللونين : أبيض (B) وأحمر (R)

الصندوق U_1 فيه 2 كرتين بيضاوين و4 كرات حمراء.

الصندوق U_2 فيه 3 كرات بيضاء و 3 كرات حمراء.

الصندوق U_3 فيه 5 كرات بيضاء و1 كرة حمراء.

نختار عشوائيا احد الصناديق ثمّ نسحب منه كرة واحدة.

1) مثّل هذه التجربة بشجرة الاحتمالات .

2) احسب احتمال سحب كرة بيضاء من الصندوق U_3 .

3) أحسب احتمال سحب كرة بيضاء

4) علما أنّ الكرة المسحوبة بيضاء ، ما هو احتمال أن تكون من الصندوق U_3 ؟

التمرين الثالث :4نقط

لتكن (u_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n = e^{3n+2}$

حيث يشير e إلي أساس اللوغاريتم النيبيري.

1) - أ)بين أنّ (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل .

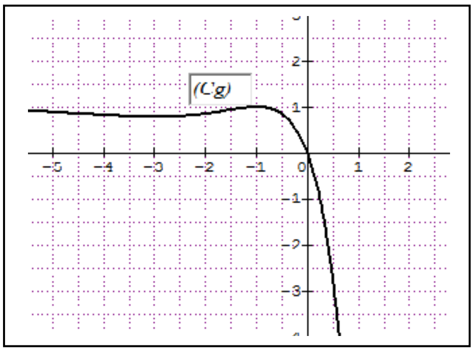
هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟ علّل.

- ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

2) نعرّف المتتالية (v_n) كما يلي : $v_n = \ln(u_n)$

- أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) متتالية حسابية يطلب كتابة v_n بدلالة n .
- ب) أحسب بدلالة n :
  - المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$ ثمّ
  - الجداء : $T_n = u_0 \times u_1 \times ... \times u_{n-1}$

التمرين الرابع 8 نقط



I)الشكل المقابل هو التمثيل البياني (C_g) للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1-(x+1)^2 e^x$.

1) تحقق أنّ $g(0)=0$.

2) اعتمادا على (C_g) برر ما يلي :

- أ) من اجل كل x من $]-\infty;0[$: $g(x) \succ 0$.
- ب) من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g(x) \prec 0$.

II) نعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ الدالة f بما يلي : $f(x) = (x+1) - (x^2+1)e^x$.

(C_f) هو التمثيل البياني لها في المستوي المنسوب غلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) – أ) احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

- ب) تحقق أنّ $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=0$.
- جـ) استنتج ان المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x+1$ مستقيم مقارب لـ (C_f) بجوار$(-\infty)$.
- د) تحقّق أن (C_f) يقع أسفل (Δ) .

3) تحقّق أنه من أجل $x \neq 0$: $f(x) = x\left[1+\frac{1}{x}-\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x\right]$ ثم استنتج $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

4) – أ) بين أنه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=g(x)$

- ب) شكل جدول تغيرات الدالة f .

5) أنشئ (Δ) ثم (C_f) في المعلم السابق. (نأخذ $f(-1) \simeq -0{,}75$ و $f(-3) \simeq -2{,}5$)

6) – أ) تحقق أن الدالة H المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $H(x)=(x-1)e^x$ هي دالة أصلية للدالة h حيث: $h(x)=xe^x$.

- ب) بين أنّ $\int_{-1}^{0} xe^x dx = \frac{2}{e}-1$.
- جـ) باستعمال المكاملة بالأجزاء بين أنّ $\int_{-1}^{0}(x^2+1)e^x dx = 3\left(1-\frac{2}{e}\right)$.

الحل المفصّل للموضوع الأوّل

تمرين 1 :

1) أ –) نكتب على الشكلين الجبري والمثلثي العدد 1 المركب $\left(\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right)$.

لدينا $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=\frac{-2i-2\sqrt{3}+2i}{\sqrt{3}+i-2\sqrt{3}+2i}$

$$=\frac{-2\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+3i}$$

$$=\frac{-2\sqrt{3}\left(-\sqrt{3}-3i\right)}{12}\ .$$

$$\frac{z_C-z_B}{z_C-z_A}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

- ب) التفسير الهندسي للطويلة وعمدة للعدد 0,5 المركب $\left(\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right)$.

لدينا ما يلي :

$$\begin{cases}\left|\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right|=\frac{BC}{BA}\\ Arg\left(\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right)=\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

من خلال ما سبق :

$$\frac{z_C-z_B}{z_C-z_A}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

$$=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=\left[1;\frac{\pi}{3}\right]$$

وبالتّالي :

وعليه: $\begin{cases}BC=BA\\ \left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

المثلث ABC متقايس الأضلاع .

2 -) أ) تعيين z_D . 0,5

النقطة D نظيرة A بالنسبة إلى حامل محور التراتيب وهذا معناه

$\text{Re}\left(z_D\right)=-\text{Re}\left(z_A\right)$ و $\text{Im}\left(z_D\right)=\text{Im}\left(z_A\right)$.

وبالتالي : $z_D=-\sqrt{3}+i$.

- ب) كتابة z_B و z_A على الشكل الأسي. 0,5

$$z_B=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$$

$$=4\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

إذا : $z_B=4e^{-i\frac{\pi}{6}}$ ثمّ :

$$z_D=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

$$=2\left(-\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

وعليه : $=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$$z_D=2e^{i\frac{5\pi}{6}}\ .$$

- جـ) استنتاج قيسا للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OB}\right)$ 0,5

$$\left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OB}\right)\equiv Arg\left(\frac{z_B}{z_D}\right)[2\pi]$$

$$\equiv\left[Arg\left(z_D\right)-Arg\left(z_B\right)\right][2\pi]$$

$$\equiv\frac{5\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)[2\pi]$$

إذا : $\left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OB}\right)=\pi+2k\pi;k\in\mathbb{Z}$.

- د) موضع النقط O ؛ D ؛ B 0,5

النقط O ؛ D ؛ B في استقامية .

3 -) الطبيعة الهندسية والعناصر المميزة 0,5

لمجموعة النقط M .

$\left|z-\sqrt{3}-i\right|=OC$ معناه $\left|z-\left(\sqrt{3}+i\right)\right|=OC$

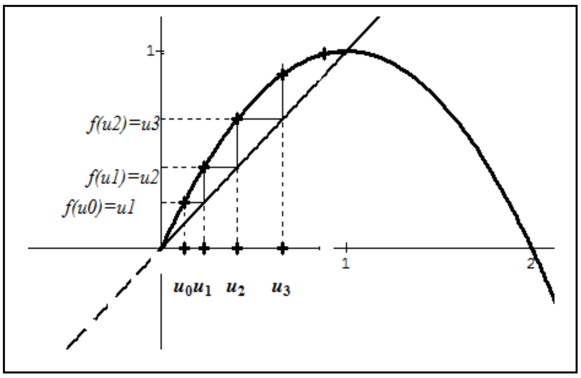
معناه $\left|z_M-z_A\right|=OC$

معناه $MA=OC$

المجموعة هي إذا الدائرة ذات المركز A ونصف القطر المسافة OC .

تمرين 2 :

1) تمثيل الحدود 1



2) التخمين حول رتابة وتقارب (u_n) 0,5

من خلال التمثيل البياني للحدود الأولى للمتتالية (u_n)

نلاحظ ما يلي :

*) $u_0 \prec u_1 \prec u_2 \prec u_3$.

إذا كانت (u_n) رتيبة فهي حتما متزايدة تماما في $\mathbb{N}$.

*) النقط $M_n(u_n; f(u_n))$ من (C_f) تقترب من نقطة تقاطع (C_f) و (Δ) وبالتالي (u_n) متتالية متقاربة .

3) أ –) بالتراجع نبين أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \prec u_n \prec 1$ 1

نضع : $P(n): 0 \prec u_n \prec 1 \,;\, n \in \mathbb{N}$

*) نتحقق من صحة $P(0)$.

لدينا فرضا $u_0 = \dfrac{1}{8}$ إذا : $0 \prec u_0 \prec 1$.

$P(0)$ صحيحة.

**)نفرض أنّه عند الرتبة n ؛ $P(n)$ صحيحة أي

نفرض أنّ : $0 \prec u_0 \prec 1$ ونبين صحة $P(n+1)$

أي نبين ما يلي : $0 \prec u_{n+1} \prec 1$.

لدينا وحسب فرضية التراجع $0 \prec u_n \prec 1$

إذا : $(2-u_n) \succ 0$ وبالتالي : $u_n(2-u_n) \succ 0$ ..(1)

ثمّ $u_{n+1} - 1 = u_n(2-u_n) - 1$

$= -u_n^2 + 2u_n - 1$

$= -(u_n - 1)^2$

أي $u_{n+1} - 1 \prec 0$. إذا $u_{n+1} \prec 1$ ... (2)

من (1) و (2) ينتج : $0 \prec u_{n+1} \prec 1$.

إذا : $P(n+1)$ صحيحة

مما سبق وحسب مبدأ الإستدلال بالتراجع يكون :

من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \prec u_n \prec 1$.

ب-) نبين أن (u_n) متتالية متزايدة ثم نستنتج أنّها متقاربة 0,5

*) لدينا ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1} - u_n = u_n(2-u_n) - u_n$

$= u_n(2 - u_n - 1)$

$= u_n(1-u_n)$

حسب ما سبق : $\begin{cases} u_n \succ 0 \\ (1-u_n) \succ 0 \end{cases}$ إذا $u_n(1-u_n) \succ 0$

أي : $u_{n+1} - u_n \succ 0$

المتتالية (u_n) متزايدة تماما في $\mathbb{N}$.

**) (u_n) متتالية متزايدة تماما و (u_n) محدودة من العلى بالعدد 1 .

إذا وحسب مبرهنة التقارب الرتيب : (u_n) متقاربة.

4) نبرهن ما يلي :

-) $v_{n+1} = v_n^2$ 0,5

لدينا : $v_{n+1} = 1 - u_{n+1}$

$= 1 - u_n(2-u_n)$

$= 1 - 2u_n + u_n^2$

$= (1-u_n)^2$

أي : $v_{n+1} = v_n^2$.

-) (w_n) متتالية هندسية اساسها $q=2$. 0,5

من أجل كل عدد طبيعي n : $w_{n+1} = \ln(v_{n+1})$

$= \ln(v_n^2)$

$= 2\ln(v_n)$

أي : $w_{n+1} = 2w_n$

إذا (w_n) متتالية هندسية أساسها $q=2$.

<u>تمرين 3 :</u>

1) نبرهن أنّ النقطA، B، C تحدد مستويا 1

لدينا :

$\overrightarrow{AB}(-1;-1;1)$ ؛ $\overrightarrow{AC}(-2;-5;-1)$

نلاحظ ما يلي : $\dfrac{x_{\overrightarrow{AB}}}{x_{\overrightarrow{AC}}} \neq \dfrac{y_{\overrightarrow{AB}}}{y_{\overrightarrow{AC}}}$ أي

لا يوجد عدد حقيقي k يحقق : $\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}$ ليس مرتبط خطيا مع $\overrightarrow{AC}$ وهذا معناه أن النقط A ، B ، C ليست في استقامية فهي تعرف إذا المستوي (ABC) .

2) – أ) تحقق أنّ $\vec{n}$ عمودي على $\overrightarrow{AB}$ وعلى $\overrightarrow{AC}$

حسب العبارة التحليلية للجداء السلمي : 0,5

$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 2(-1) + (-1)(-1) + 1(1)$

$= 0$

$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 2(-2) + (-1)(-5) + 1(-1)$

$= 0$

ومنه : $\vec{n}$ عمودي على كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

- ب) **نستنتج أنّ $\vec{n}$ ناظم للمستوي (ABC)**. $0,5$

بما أنّ $\vec{n}$ عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطيا من المستوي (ABC) فهو شعاع ناظمي لهذا المستوي .

- جـ) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

المستوي (ABC) معرّف بالشعاع الناظم $\vec{n}(2;-1;1)$ وبالنقطة $A(1;2;3)$.

من أجل كل نقطة $M(x;y;z)$ من المستوي (ABC)

$\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$ معناه $2(x-1)-1(y-2)+1(z-3)=0$

معناه $2x-y+z-3=0$.

$(ABC):2x-y+z-3=0$.

3) **تتحقق أنّ D نقطة من (Δ)**. $0,5$

نحل في $\mathbb{R}$ الجملة : $\begin{cases}4=2-2t\\-2=-1+t\\5=4-t\end{cases}$ ... (I)

(I) تكافئ $\begin{cases}t=-1\\t=-1\\t=-1\end{cases}$

الجملة تقبل حلا وحيدا وهذا معناه : $D\in(\Delta)$.

<u>تمرين 4 :</u>

(I) 1) **حساب** $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ **ثم** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ 1

$\begin{cases}(-x-1)\to-1\\ \ln x\to-\infty\end{cases}$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ (*

$\begin{cases}(-x-1)\to-\infty\\ \ln x\to+\infty\end{cases}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ (*

2) *) **حساب** $g'(x)$ $0,5$

من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g'(x)=-1-\dfrac{1}{x}$

$=-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

*) **تتحقق أن** $g'(x)\prec 0$

من اجل كل x من $]0;+\infty[$: $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\succ 0$ وعليه :

$-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\prec 0$

أي : من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g'(x)\prec 0$.

أي : من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g'(x)\prec 0$.

3) **إنشاء جدول تغيرات الدالة g**. $0,5$

g دالة متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$+\infty$ ↘	0	↘ $-\infty$

4) أ –) * **نبين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$**. $0,5$

من خلال جدول التغيرات نلاحظ ما يلي :

f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$

وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty;+\infty[$ و $0\in]-\infty;+\infty[$

وعليه : المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]0;+\infty[$.

*)**تتحقق أنّ** $0,2\prec\alpha\prec 0,3$.

لدينا :

$g(0,2)\simeq 0,409$ ؛ $g(\alpha)=0$ و $g(0,3)\simeq-0,096$

نلاحظ ما يلي : $g(0,3)\prec g(\alpha)\prec g(0,2)$

بما أن g دالة متناقصة فهي لا تحفظ الترتيب .

وعليه : $0,2\prec\alpha\prec 0,3$.

- ب) **استنتاج إشارة $g(x)$ في المجال $]0;+\infty[$** $0,5$

حسب جدول التغيرات وبما أنّ $g(\alpha)=0$ فإنّ إشارة $g(x)$ تكون كما يلي :

x	0 ‖		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

II)1) **حساب نهايتي الدّالّة f**. 1

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\ ?\begin{cases}\ln^2 x\to+\infty\\ \ln x\to-\infty\end{cases}$ (*

حالة عدم التعيين من الشكل $(+\infty-\infty)$.

نزيل هذه الحالة .

$f(x)=\ln x\left(\dfrac{1}{2}\ln x+1\right)+x$.

بالإنتقال إلى النهاية نجد :

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln x\left(\dfrac{1}{2}\ln x+1\right)+x\right]$

$=+\infty$; $(\ln x\to-\infty)$

*) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2) أ –) تحقق أن $f'(x)=\frac{-g(x)}{x}$. 0,5

من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left[2.\frac{1}{x}\ln x\right]+\frac{1}{x}+1$$

$$=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}+1$$

$$=\frac{x+1+\ln x}{x}$$

$$=\frac{-(-x-1-\ln x)}{x}$$ أي : $f'(x)=-\frac{g(x)}{x}$

- ب) تشكيل جدول تغيرات الدالة f . 0,5

إشارة $f'(x)$ هي عكس إشارة $g(x)$.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) دراسة وضع (C_f) بالنسبة إلى (Δ) 1

ندرس في المجال $]0;+\infty[$ إشارة الفرق $f(x)-x$

$f(x)-x=\ln x\left(\frac{1}{2}\ln x+1\right)$.

إشارة هذا الفرق هي إذا من إشارة الجداء $\ln x\left(\frac{1}{2}\ln x+1\right)$.

*) إشارة $\ln x$ كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$	

*) لتحديد إشارة $\left(\frac{1}{2}\ln x+1\right)$ نحل في المجال $]0;+\infty[$ المتراجحة : $\frac{1}{2}\ln x+1\ge 0$

$\frac{1}{2}\ln x+1\ge 0$ معناه $\ln x\ge -2$

معناه $x\ge e^{-2}$

إشارة $\left(\frac{1}{2}\ln x+1\right)$:

x	0		1		$+\infty$
$\frac{1}{2}\ln x+1$		$-$	0	$+$	

إشارة الفرق $[f(x)-x]$ في الجدول :

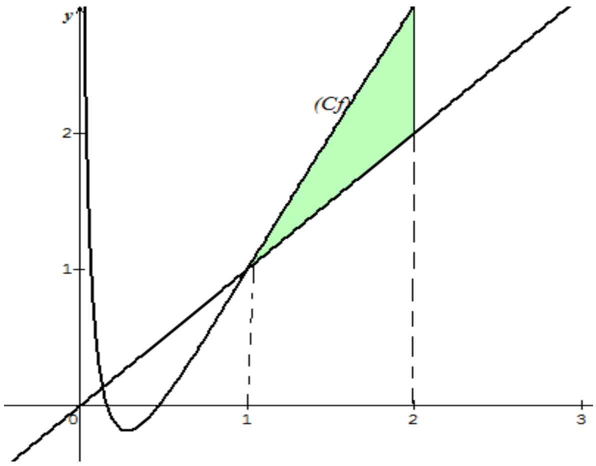
x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
$\ln x$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{1}{2}\ln x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

*) (C_f) أعلى (Δ) على المجالين $]0;e^{-2}[$ و $]1;+\infty[$

*) (C_f) يقطع (Δ) في النقطتين ذات الفاصلتين 1 و e^{-2}

*) (C_f) أسفل (Δ) في المجال $]e^{-2};1[$.

4) إنشاء (Δ) و (C_f) 0,5



5) أ –) نبين أن h دالة أصلية للدالة f . 0,5

h قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا :

$$h'(x)=\frac{1}{2}\left[(\ln x)^2+x.\frac{2}{x}\ln x\right]+x$$

$$=\frac{1}{2}(\ln x)^2+\ln x+x$$ أي $h'(x)=f(x)$

h هي إذا دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

ب-) نعين الدالة الأصلية F حيث $F(1)=2$. 0,5

F تحقق : $F(x)=h(x)+c\,/\,c\in\mathbb{R}$ و $F(1)=2$.

$F(1)=2$ معناه $h(1)+c=2$

معناه $\frac{1}{2}+c=2$ ؛ نجد : $c=\frac{3}{2}$.

إذا : $F(x)=\frac{1}{2}x(\ln x)^2+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}$.

- جـ) حساب المساحة S للحيز. 0,5

(C_f) أعلى (Δ) في المجال $[1;2]$ وبالتالي :

$S=\int_1^2\left[f(x)-x\right]dx.ua$ أي

$S=\int_1^2 f(x)dx.ua-\int_1^2 xdx.ua$

$=\left[\frac{1}{2}x(\ln x)^2\right]_1^2 ua$ نجد : $S\simeq 0,480ua$

الحل المفصل للموضوع الثاني

تمرين 1 :

I) **نحل المعادلة:** 1,5

$$\left(z+i\sqrt{3}\right)\left(z^2-2z+2\right)=0$$

معناه

$$\begin{cases} z+i\sqrt{3}=0 \ ; z=-i\sqrt{3} \\ z^2-2z+2=0 \quad ...(1) \end{cases}$$

المميز Δ للمعادلة (1) هو:

$$\Delta=-4\prec 0$$

للمعادلة (1) حلان مترافقان هما z_1 و z_2 حيث :

$z_1=\frac{2+2i}{2}$ اي $z_1=1+i$ و $z_2=\overline{z_1}=1-i$

إذا كانت S هي مجموعة حلول المعادلة فإنّ :

$$S=\left\{-i\sqrt{3},1+i,1-i\right\}$$

II **1-) نبين أنّ** $z_E=2+i\left(\sqrt{3}-2\right)$ 0,5

E نظيرة C بالنسبة إلى B معناه B منتصف $[CE]$

معناه $z_B=\frac{z_C+z_E}{2}$

معناه $z_E=2z_B-z_C$

بالتعويض : $z_E=2(1-i)-(-i\sqrt{3})$

$$=2+i\left(\sqrt{3}-2\right)$$

2) – أ) إيجاد العبارة المركبة للدوران R 0,5

عبارة R من الشكل $z'=az+b$

بما أن المركز هو O وقيس الزاوية هو $\frac{\pi}{2}$ ينتج :

$a=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$ و $b=0$

$$=i$$

إذا : $R:z'=iz$

- ب) تتحقق أنّ $z_F=\sqrt{3}$ **وأن** $z_G=\left(2-\sqrt{3}\right)+2i$ 1

*) $R(C)=F$ معناه $z_F=iz_C$

$z_F=i\left(-i\sqrt{3}\right)$ أي $z_F=\sqrt{3}$

*) $R(E)=G$ معناه $z_G=iz_E$

$$=i\left[2+i\left(\sqrt{3}-2\right)\right]$$

$$z_G=2i-\left(\sqrt{3}-2\right)$$

$$=\left(2-\sqrt{3}\right)+2i$$

3) تعيين طبيعة التحويل S 0,5

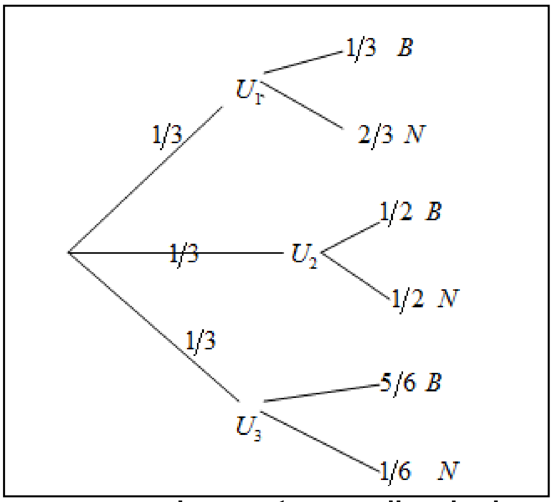
S هو مركب تحاكي موجب ودوران لهما نفس المركز.

إذا : S هو التشابه الذي مركزه النقطة O ؛ نسبته 2

وقيس زاويته $\frac{\pi}{2}$.

تمرين 2 :

1) تمثيل التجربة بشجرة الاحتمالات 1



2) حساب احتمال سحب كرة بيضاء من U_3 1

$$P\left(B\cap U_3\right)=\frac{1}{3}\times\frac{5}{6}$$

$$=\frac{5}{18}$$

3) حساب احتمال سحب كرة بيضاء 1

$$P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{5}{6}$$

$$=\frac{1}{9}+\frac{1}{6}+\frac{5}{18}$$

$$=\frac{5}{9}$$

4) علما أن الكرة المسحوبة بيضاء ؛ نحسب احتمال أن تكون من الصندوق U_3. 1

$$P_B\left(U_3\right)=\frac{P\left(B\cap U_3\right)}{P(B)}$$

$=\frac{\frac{5}{18}}{\frac{5}{9}}$ أي $P_B\left(U_3\right)=\frac{1}{2}$

تمرين 3

1) – أ)نبين أنّ (u_n) **متتالية هندسية** 1

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$u_{n+1}=e^{3n+3+2}$$

$$u_{n+1}=e^{3}\times e^{3n+2}$$

$$=e^{3}\times u_n$$

وعلية المتتالية (u_n) متتالية هندسية أساسه $q=e^{3}$

وحدها الأول $u_0=e^{2}$

*) لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{3n+2}\right)$

$$=+\infty\ ;(3n+2\to+\infty)$$

المتتالية (u_n) لست متقاربة. 0,5

- ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) 0,5

بما أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n\succ 0$ ح نقارن النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ مع العدد 1

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=e^{3}\succ 1\ .$$

إذا المتتالية (u_n) متزايدة تماما في $\mathbb{N}$

2) – I)* نبين أن (v_n) **متتالية حسابية** 0,5

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$v_{n+1}-v_n=\ln(u_{n+1})-\ln(u_n)$$

$$=\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$

وحسب ما سبق: $v_{n+1}-v_n=\ln\left(e^{3}\right)$

$$=3$$

المتتالية (v_n) هي إذا متتالية حسابية أساسها $r=3$

وحدها الأوّل $v_0=\ln(u_0)$

$$=2\qquad(\ u_0=e^{2}\ )$$

***) كتابة** v_n **بدلالة** n 0,5

عبارة الحد العم للمتتالية الحسابية (v_n) معطاة

بالعلاقة : $v_n=v_0+n.r$

بالتعويض نجد : $v_n=3n+2$

- ب) نحسب بدلالة n

- المجموع : $S_n=v_0+v_1+\ldots+v_{n-1}$ 0,5

S_n هو مجموع n جدا الأولى من المتتالية الحسابية (v_n)

ومنه : $S=\frac{n}{2}(v_0+v_{n-1})$

$$=\frac{n}{2}(2+3n-1)$$

$$S_n=\frac{n(3n+1)}{2}$$

- **الجداء:** $T_n=u_0\times u_1\times\ldots\times u_{n-1}$ 0,5

من العلاقة $v_n=\ln(u_n)$ ينتج $u_n=e^{v_n}$.

في هذه الحالة :

$$T_n=e^{v_0}\times e^{v_1}\times\ldots\times e^{v_{n-1}}$$

$$=e^{v_0+v_1+\ldots+v_{n-1}}$$

$$=e^{S_n}$$

بتعويض S_n بقيمته ينتج : $T_n=e^{\frac{n(3n+1)}{2}}$

<u>تمرين 4 :</u>

I)

1) تتحقق أن $g(0)=0$ 0,5

لدينا : $g(0)=1-(0+1)^{2}e^{0}$

$$=1-1$$

$$=0$$

2) اعتمادا على (C_g) **نبرر ما يلي :** 1

- أ) من أجل كل x من $]-\infty;0[$: $g(x)\succ 0$

(C_g) أعلى حامل محور الفواصل في المجال $]-\infty,0[$

إذا g دالة موجبة تماما على هذا المجال .

- ب) من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g(x)\prec 0$.

بيانيا (C_g) يقع أسفل حامل محور الفواصل عل هذا المجال أي g دالة سالبة تماما .

من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g(x)\prec 0$

II)

1) – أ) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 0,5

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=?\ \begin{cases}(x^{2}+1)\to 0\\ e^{x}\to 0\end{cases}$$

لدينا حالة عدم التعيين من الشكل $(0\times\infty)$.

نزيل هذه الحالة :

$$f(x)=(x+1)-x^{2}e^{x}-e^{x}$$

بالانتقال إلى النهاية نجد :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[(x+1)-x^{2}e^{x}-e^{x}\right]$$

$$=-\infty\ ;\ \begin{cases}(x+1)\to-\infty\\ x^{2}e^{x}\to 0;e^{x}\to 0\end{cases}$$

- ب) تتحقق أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=0$ 0,5

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[-\left(x^2+1\right)e^x\right]$$
$$=0$$

-جـ) استنتاج أن (Δ) مستقيم مقارب 0,5

بما أن $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=0$ فإن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x+1$ هو مستقيم مقارب لـ (C_f) في جوار $(-\infty)$.

- د) تتحقق أن (C_f) أسفل (Δ) 0,5

وضع (C_f) بالنسبة إلى (Δ) تحدد إشارة الفرق $\left[f(x)-(x+1)\right]$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $\left[f(x)-(x+1)\right]=-\left(x^2+1\right)e^x$

من اجل كل x من $\mathbb{R}$:

$\begin{cases}-\left(x^2+1\right)\prec 0\\ e^x\succ 0\end{cases}$ وبالتالي $\left[f(x)-(x+1)\prec 0\right]$

(C_f) يقع إذا أسفل مستقيمة المقارب (Δ) .

3) *) تتحقق أن $f(x)=x\left[1+\frac{1}{x}-\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x\right]$ 0,5

من اجل $x\neq 0$

$$x\left[1+\frac{1}{x}-\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x\right]=\left[x+\frac{x}{x}-x\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x\right]$$
$$=\left[x+1-\left(x^2+1\right)e^x\right]$$
$$=f(x)$$

***) استنتاج** $\lim_{x\to-\infty}+f(x)$ 0,5

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left[1+\frac{1}{x}-\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x\right]$$
$$=-\infty\ ;\begin{cases}\left(1+\frac{1}{x}\right)\to 1\\ \left(x+\frac{1}{x}\right)e^x\to+\infty\end{cases}$$

4) نبين أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=g(x)$ 0,5

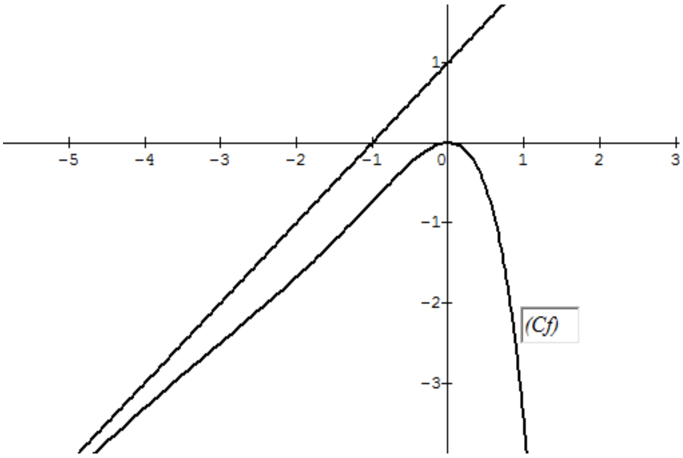
$$f'(x)=1-\left[2xe^x+\left(x^2+1\right)e^x\right]$$
$$=1-\left[\left(2x+x^2+1\right)e^x\right]$$
$$=1-(x+1)^2e^x$$
$$=g(x)$$

- ب) تشكيل جدول تغيرات الدالة f 0,5

أشارة $f'(x)$ هي نفسها إشارة $g(x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0	↘ $-\infty$

5) إنشاء (Δ) ثم (C_f) 0,5



6) تتحقق أنّ H دالة أصلية للدالة h 0,5

H قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا :

$$H'(x)=e^x+(x-1)e^x$$
$$=xe^x$$
$$=h(x)$$

إذا H هي إحدى الدوال الأصلية للدالة h على $\mathbb{R}$.

- ب) نبين أنّ $\int_{-1}^{0}xe^xdx=\frac{2}{e}-1$ 0,5

$$\int_{-1}^{0}xe^xdx=\left[(x-1)e^x\right]_{-1}^{0}$$

$=-1-(-2)e^{-1}$. أي $\int_{-1}^{0}xe^xdx=\frac{2}{e}-1$

-جـ) بالتجزئة نبين أنّ $\int_{-1}^{0}\left(x^2+1\right)e^xdx=3\left(1-\frac{2}{e}\right)$ 1

نضع $\begin{cases}u(x)=x^2+1\\ v'(x)=e^x\end{cases}$ نجد $\begin{cases}u'(x)=2x\\ v(x)=e^x\end{cases}$

حسب مفهوم المكاملة بالتجزئة :

$$\int_{-1}^{0}\left(x^2+1\right)e^xdx=\left[\left(x^2+1\right)e^x\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}2xe^xdx$$
$$=\left[\left(x^2+1\right)e^x\right]_{-1}^{0}-\left[2(x-1)e^x\right]_{-1}^{0}$$
$$=\left[\left(x^2-2x+3\right)e^x\right]_{-1}^{0}$$
$$=3-6e^{-1}$$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة الدفـــــاع الوطـــــني

أركان الجيش الوطني الشعبي

دائرة الاستعمال والتحضير

مديرية مدارس أشبال الأمة

السنة الدراسية: 2019/2018

المستوى: السنة الثالثة ثانوي

الشعبة: علوم تجريبية

المدة: 03 ساعات و 30 دقيقة

امتحان بكالوريا تجريبي في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول : (05 نقاط)

نعتبر $P(z)$ كثير حدود لمتغيّر مركّب z حيث : $P(z)=z^3-(4+3i)z^2+(13+12i)z-39i$

1) أ) بيّن أنّ المعادلة $P(z)=0$ تقبل حلاّ تخيّليا صرفا يطلب تعيينه .

ب) عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يكون من أجل كل عدد مركّب z : $P(z)=(z-3i)(az^2+bz+c)$

ج) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركّب z التالية : $P(z)=0$.

2) المستوي المركّب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

نعتبر أربع نقط A ، B ، C و D من المستوي لواحقها على الترتيب : $z_A=3i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=2-3i$ و $z_D=i$.

أ) أكتب العبارة المركبّة للتشابه المباشر S الذي مركزه B و يحوّل C إلى A .

ب) استنتج طبيعة المثلث ABC ثمّ أحسب مساحته .

ج) لتكن النقطة E صورة A بالتحويل S ، استنتج مساحة المثلث ABE .

3) أ) أحسب العدد $\frac{z_A-z_B}{z_D-z_B}$ ، ثمّ استنتج أنّ A صورة D بتحويل نقطي f يطلب تعيين طبيعته و عناصره المميّزة .

ب) عيّن طبيعة التحويل $S\circ f$ و عناصره المميّزة (الرمز $\circ$ يدل على عملية تركيب التحويلات النقطية).

4) لتكن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $z=z_A+6e^{i\theta}$ ، $\theta\in\mathbb{R}$.

أ) تحقق أنّ B تنتمي إلى (Γ) .

ب) عيّن المجموعة (Γ) .

التمرين الثاني : (04 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_0=2$ و $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$.

1) أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\le n+3$.

ب) أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

ج) استنتج أنّ المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل . هل هي متقاربة ؟ برّر.

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=u_n-n$

أ) برهن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأوّل .

ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n .

ج) أحسب المجموع : $S_n=u_0+u_1+........+u_n$.

3) نعتبر المتتالية (t_n) المعرّفة بـ : $t_n=\ln(v_n)$

أ) برهن أنّ المتتالية (t_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأوّل .

ب) أحسب المجموع : $S_n^{'}=t_0+t_1+.......+t_n$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

يحتوي وعاء على n كرة بيضاء، 5 كرات حمراء و 3خضراء،نسحب عشوائيا كرتين في آن واحد.

1) ما هو احتمال الحصول على كرتين بيضاوين ؟

2) نرمز بـ $P(n)$ إلى احتمال الحصول على كرتين من نفس اللّون .

أ) أثبت أنّ : $P(n)=\dfrac{n^2-n+26}{(n+7)(n+8)}$

ب) أحسب $\lim\limits_{n\to\infty}P(n)$ ثمّ فسّر النتيجة .

3) نضع $n=4$ يقوم لاعب بسحب كرتين من الوعاء في آن واحد ثمّ يرجعهما و يسحب كرتين أخريين.لإجراء هذين السحبين يدفع اللّاعب مبلغا قدره 30 دينارا و بعد كلّ سحب يتحصّل على 40 دينار إذا كانت الكرتان من نفس اللّون، وإلاّ يتحصّل على 5 دنانير فقط.

ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكلّ سحبين ربح هذا اللّاعب .

أ) عيّن قيم المتغيّر العشوائي X .

ب) عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X.

ج) أحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ للمتغيّر العشوائي X .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

الجزء الأوّل : g دالة عددية معرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2+2\ln x$

1) أدرس تغيّرات الدالة g .

2) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0,75<\alpha<0,76$.

3) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني : نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=1-x+\dfrac{2}{x}(1+\ln x)$

نسمّي (C_f) المنحني الممثّل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) أحسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ب) بيّن أنّ المستقيم (Δ)ذا المعادلة : $y=-x+1$ مقارب للمنحى (C_f)بجوار $+\infty$ ، ثمّ أدرس وضعية (C_f)بالنسبة إلى (Δ).

2) أ) أثبت أنّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=-\dfrac{g(x)}{x^2}$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة f و شكّل جدول تغيّراتها .

3) أ) بيّن أنّ المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) يطلب كتابة معادلة له .

ب) أثبت أنّ : $f(\alpha)=1-2\alpha+\dfrac{2}{\alpha}$ و استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

ج) أحسب $f(2)$ و $f(3)$ ثمّ أرسم المستقيمين (Δ) ، (T) و المنحني (C_f) في المعلم السّابق.

4) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة : $\dfrac{2}{x}(1+\ln x)=m$.

5) λ عدد حقيقي أكبر تماما من 1 .

أ) أحسب $A(\lambda)$ مساحة الحيّز من المستوي المحدّد بالمنحني (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها: $x=1$ ، $x=\lambda$ و $y=-x+1$.

ب) عيّن قيمة λ بحيث يكون : $A(\lambda)=\ln\lambda^3$.

الجزء الثّالث : a عدد حقيقي موجب تماما ، f_a دالة معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f_a(x)=1-x+\frac{a}{x}(1+\ln x)$

و ليكن (C_a) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أثبت أنّ جميع المنحنيات (C_a) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيين احداثيها .

2) نعتبر النقط: $A\left(-2;\frac{4}{a}\right)$ ، $B\left(1;\frac{2\ln a}{a}\right)$ و $C(-2a;2a-2)$ ، ولتكن النقطة G_a مرجح الجملة المثقلة :
$\{(A;1),(B;2),(C;-1)\}$

أ) عيّن بدلالة a احداثيي النقطة G_a .

ب) استنتج مجموعة النقط G_a عندما يمسح العدد a المجموعة $\mathbb{R}_+^*$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقط A , B و C التي لواحقها على الترتيب $Z_A = 1+i$, $Z_B = \sqrt{3}-i$ و $Z_C = 4$.

1) أ)أكتب الأعداد المركبة Z_A و Z_B و $\frac{Z_A}{Z_B}$ على الشكل المثلثي ثم على الشكل الأسي.

ب)أكتب العدد المركب $\frac{Z_A}{Z_B}$ على شكله الجبري ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

2) أوجد قيمة العدد الطبيعي n بحيث يكون: $\left(\frac{Z_A}{Z_B}\right)^n = \frac{1}{8}\left(1-i\sqrt{3}\right)$ ثم أحسب $\left(\frac{Z_A}{Z_B}\right)^8$.

3) ليكن التحويل النقطي S الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث :

$$Z' = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}Z$$

عين طبيعة التحويل النقطي S ومع تحديد عناصره المميزة.

4) أ)أوجد المجموعة (Γ_1) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث $Z = Z_C + 2e^{i\theta}$ لما θ تتغير في $\mathbb{R}$.

ب)أوجد المجموعة (Γ_2) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث $Arg(z-z_c) = \frac{\pi}{4}+2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

5) أوجد المجموعة (Γ) صورة (Γ_1) بالتحويل النقطي S محددا عناصرها المميزة.

التمرين الثاني : (04 نقاط)

يحتوي كيس على 12 كرة منها 3 بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 3 و أربعة حمراء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 2 ، 2 و خمس خضراء تحمل الأرقام: 1 ، 2 ، 2 ، 2 ، 3 .

نسحب في آن واحد كرتين من هذا الكيس .

1) نعتبر الحادثتين: A : " سحب كرتين من نفس اللون " و B : " سحب كرة خضراء على الأقل " .

أ) أحسب احتمال الحوادث التالية: A ، B و $A \cap B$.

ب) هل الحادثتين: A و B مستقلتان ؟ .

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب كرتين مجموع الرقمين المسجلين عليهما .

عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X و أحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

f دالة عددية معرفة على $[-1;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = x - \ln(x+2)$.

1) أدرس تغيرات الدالة f .

2) (u_n) متتالية معرفة كما يلي : $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

أ) برهن بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq -1$.

ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

جـــ) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و احسب نهايتها.

3) (v_n) متتالية معرفة كما يلي: $v_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_n=\ln\left[(u_0+2)\times(u_1+2)\times....\times(u_{n-1}+2)\right]$$

أ) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=3-u_n$.

ب) أستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[(u_0+2)\times(u_1+2)\times....\times(u_{n-1}+2)\right]$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=2e.e^{-\frac{x}{2}}-e^{-x}$.

و (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$.

1) أدرس تغيرات الدالة f (لاحظ أن $f(x)=e^{-\frac{x}{2}}\left(2e-e^{-\frac{x}{2}}\right)$)

2) أثبت أن (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها .

3) أكتب معادلة المماس (D) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

4) عين احداثيي نقطة تقاطع المنحنى (C) مع حامل محور الفواصل .

5) أرسم المماس (D) ثم المنحنى (C) .

6) λ عدد حقيقي أكبر تماما من -2 .

أ) أحسب $S(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و المستقيمات التي معادلاتها: $x=-2$ ، $x=\lambda$ و $y=0$.

ب) عين قيمة λ التي من أجلها يكون $S(\lambda)=2e+1$.

جـــ) أحسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}S(\lambda)$.

7) ناقش بيانا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x)=m^2$.

انتهى الموضوع الثاني

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة الدفـــــاع الوطـــــني — **السنة الدراسية: 2019/2018**

أركان الجيش الوطني الشعبي — **المستوى: السنة الثالثة ثانوي**

دائرة الاستعمال والتحضير — **الشعبة: علوم تجريبية**

مديرية مدارس أشبال الأمة

امتحان بكالوريا تجريبي في مادة الرياضيات

تصحيح الموضوع الأول

محاور الموضوع	عناصـــــر الإجـــــابة	العلامـــــة مجزأة	العلامـــــة كاملة
التمرين الأول	أ- إذا كانت المعادلة $P(z)=0$ تقبل حلّا تخيليا صرفا فهو من الشكل $z=ai$ حيث $a\in\mathbb{R}^*$		**05 ن**
	$P(ai)=0$ يكافئ $\left(4a^2-12a\right)+\left(-a^3+3a^2+13a-39\right)i=0$		
	يكافئ $\begin{cases}4a^2-12a=0\\-a^3+3a^2+13a-39=0\end{cases}$ و منه $\begin{cases}a=0a \quad =3\\-a^3+3a^2+13a-39=0\end{cases}$ إذن $a=3$		
	فعلا المعادلة تقبل حلا تخيليا صرفا هو $z=3i$		
	ب- تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث :	**0.5**	
	$P(z)=(z-3i)\left(az^2+bz+c\right)$		
	باستعمال إحدى الطرق المعروفة نجد : $a=1, b=-4, c=13$ و عليه		
	$P(z)=(z-3i)\left(z^2-4z+13\right)$		
	ج- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$	**0.75**	
	تكافئ $z=3i$ أو $z^2-4z+13=0$ ، $\Delta'=(3i)^2$ و عليه الحلان الآخران هما		
	$z=2-3i$ أو $z=2+3i$		
	و منه $S=\{3i;2-3i;2+3i\}$		
	أ- العبارة المركّبة للتشابه المباشر S الذي مركزه B و يحوّل C إلى A هي:	**0.5**	
	$z'=3iz-9-3i$.		
	ب- إستنتاج طبيعة المثلث ABC :	**0.5**	
	$\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_B-z_C}\right)=\arg(3i)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ و $\left\lvert\frac{z_B-z_A}{z_B-z_C}\right\rvert=3$ ، $k\in\mathbb{Z}$ و منه ABC قائم في B ،		
	مساحته : $S_{ABC}=\frac{1}{2}.k.\lvert z_C-z_B\rvert^2=\frac{1}{2}.3.\lvert z_C-z_B\rvert^2=6ua$ ، حيث $k=3$ هي نسبة التشابه S	**0.25**	
	ج- E صورة A و A صورة C إذن مساحة المثلث ABE هي	**0.25**	
	$S_{ABE}=3^2.S_{ABC}=54ua$:		
		0.5	
	3) أ) لدينا $\frac{3}{2}=\frac{z_A-z_B}{z_D-z_B}$.		

	إذن A صورة D بواسطة تحاكي مركزه B و نسبته $k'=\frac{3}{2}$ ب- طبيعة التحويل foS وعناصره المميزة: foS تشابه مباشر مركزه B، نسبته $k\times k'=3\times\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}+2k\pi$ 4) أ- التحقق أنّ B تنتمي إلى (Γ): لاحقة B تحقق العلاقة $z_B=z_A+6e^{-i\frac{\pi}{2}}$، إذن $B\in(\Gamma)$ ب- تعيين المجموعة (Γ): (Γ) دائرة مركزها A و نصف قطرها 6.	0.25 0.25 0.75 0.25 0.25	
التمرين الثاني	أ- برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n\leq n+3$ نتحقق من صحة الخاصية من أجل $n=0$، $u_0\leq 0+3$ صحيحه لأنّ $u_0=2$ نفرض صحّة الخاصيّة من أجل n أي: $u_n\leq n+3$ نبرهن صحّة الخاصيّة من أجل $n+1$، أي $u_{n+1}\leq n+4$: لدينا $u_n\leq n+3$ (الفرضية) و عليه $\frac{2}{3}u_n\leq\frac{2}{3}n+2$ و منه $\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1\leq n+3$ أي $u_{n+1}\leq n+3$ ما يستلزم أنّ $u_{n+1}\leq n+4$ الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n. ب- اتجاه تغيّر (u_n) : ندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$ $u_{n+1}-u_n=-\frac{1}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1=-\frac{1}{3}(u_n-(n+3))$، بما أنّ $u_n\leq n+3$ فإنّ $u_{n+1}-u_n\geq 0$ و عليه (u_n) متزايدة ج- (u_n) متزايدة و حدّها الأوّل $u_0=2$ إذن هي محدودة من الأسفل بـ 2. (u_n) غير متقاربة لأنّها ليست محدودة من الأعلى 2) أ- إثبات أنّ (v_n) هندسية أساسها q، معناه من أجل كل عدد طبيعي n: $v_{n+1}=v_n\times q$ $v_{n+1}=u_{n+1}-n-1=\frac{2}{3}(u_n-n)=\frac{2}{3}v_n$، فعلا (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$ و حدّها الأوّل $v_0=2$ ب- عبارة v_n ثمّ u_n بدلالة n: $v_n=2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{2^{n+1}}{3^n}$ و منه $u_n=v_n+n=\frac{2^{n+1}}{3^n}+n$ ج- حساب المجموع: $S_n=u_0+u_1+......+u_n$ $S_n=v_0+v_1+......+v_n+1+2+......+n=\frac{n^2+n+12}{2}-\frac{2^{n+2}}{3^n}$ 3) أ- (t_n) متتالية حسابية أساسها r معناه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $t_{n+1}=t_n+r$ $t_{n+1}=\ln v_{n+1}=t_n+\ln\frac{2}{3}$، فعلا (t_n) متتالية حسابية أساسها $r=\ln\frac{2}{3}$ و حدّها الأوّل $v_0=\ln 2$ ب- حساب المجموع $S'_n=t_0+t_1+......+t_n$ $S'_n=\frac{n+1}{2}\ln\frac{2^{n+2}}{3^n}$	0.5 0.5 0.5 0.25 0.75 0.25 0.25 0.25	04 ن

التمرين الثالث — 04 ن

حساب احتمال الحصول على كرتين بيضاوين : $P_B=\dfrac{C_n^2}{C_{n+8}^2}=\dfrac{(n-1)n}{(n+7)(n+8)}$ — 0.5

أ- إثبات أنّ : $P(n)=\dfrac{n^2-n+26}{(n+7)(n+8)}$ — 0.25

$$P(n)=\frac{C_n^2+C_3^2+C_5^2}{C_{n+8}^2}=\frac{n^2-n+26}{(n+7)(n+8)}$$

ب- حساب $\lim\limits_{n\to\infty}P(n)$ وتفسير النتيجة : — 0.5

$$\lim_{n\to+\infty}P(n)=1$$

التفسير : كلّما زاد عدد الكرات البيضاء زاد إحتمال سحب كرتين من نفس اللون (بيضاوين) حتى تصبح الحادثة شبه أكيدة

3)أ- قيم المتغيّر العشوائي : $X\in\{-20,15,50\}$ — 0.75

ب- قانون إحتمال X : — 0.25

$X=X_i$	-20	15	50
$P(X=X_i)$	$\frac{2209}{4356}$	$\frac{1786}{4356}$	$\frac{361}{4356}$

ج- الأمل الرياضياتي $E(X)$: — 0.25

$$E(X)=-20\times\frac{2209}{4356}+15\times\frac{1786}{4356}+50\times\frac{361}{4356}=\frac{5}{33}$$

التمرين الرابع — 07 ن

الجزء الأوّل :

تغيّرات الدالة g: — 0.75

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}g(x)=-\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$$ — 0.75

$g'(x)=\dfrac{2x^2+2}{x}$ ، لاحظ أنّ $g'(x)>0$ على $]0;+\infty[$ وعليه فإنّ g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ — 0.75

إثبات أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0.75<\alpha<0.76$

g مستمرّة و متزايدة تماما على $[0.75;076]$ و $g(0.75)\times g(0.76)<0$ لأنّ

$\begin{cases} g(0.75)=-0.012\\ g(0.76)=0.028\end{cases}$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0.75<\alpha<0.76$ — 0.25

إشارة $g(x)$: $g(x)<0$ من أجل $x\in]0;\alpha[$ و $g(x)>0$ من أجل $x\in]\alpha;+\infty[$ — 0.25

الجزء الثاني :

أ- حساب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}f(x)=-\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$$

ب- لدينا $f(x)=1-x+\dfrac{2}{x}(1+\ln x)$ — 0.5

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}(1+\ln x)=0$، إذن $(\Delta):y=1-x$ مقارب لـ (C_f) في جوار $+\infty$. — 0.25

- الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

x	0 $\qquad$ $\frac{1}{e}$ $\qquad$ $+\infty$		
$f(x)-y$	$-$	0	$+$
الوضعية	(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في $\left(\frac{1}{e};\frac{e-1}{e}\right)$	(C_f) يقع فوق (Δ)

0.25

0.25

أ- إثبات أنّ $f'(x)=-\frac{g(x)}{x^2}$ 0.5

ب- إشارة $f'(x)$ عكس إشارة $g(x)$ ، إذن f متزايدة تماما على $]0;\alpha]$ و متناقصة تماما على $[\alpha;+\infty[$

جدول تغيرات f :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f(\alpha)$	↘ $-\infty$

0.25

0.25

3) أ- تبيين أنّ المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) و كتابة معادلة له:

$(T)//(\Delta)$ يكافئ $f'(x)=-1$ و منه $x=1$ ، فعلا يوجد مماس (T) للمنحني (C_f) في النقطة $P(1;2)$ يوازي (Δ).

معادلة له : $y=-x+3$

ب- التحقق من أنّ $f(\alpha)=1-2\alpha+\frac{2}{\alpha}$ 0.25

- استنتاج حصر $f(\alpha)$: باستعمال قواعد الحصر نجد : $2.11<f(\alpha)<2.17$

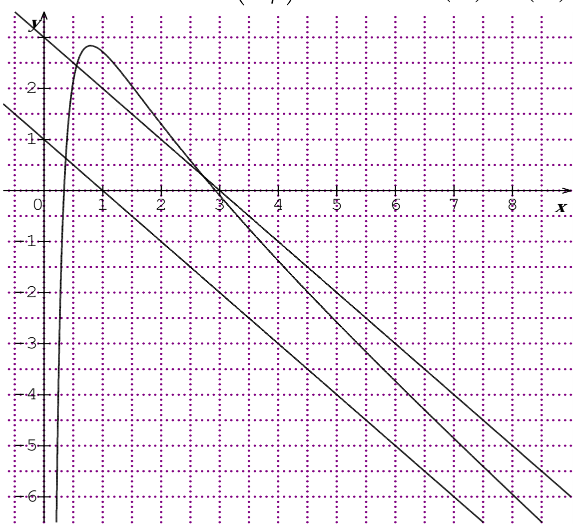
ج- $f(2)=\ln 2$ ، $f(3)=-\frac{4}{3}+\ln 3$ 0.25

رسم المستقيمين (Δ) ، (T) و المنحني (C_f) 0.25

0.25

0.25

0.25



المناقشة البيانية : 01 ن

	المعادلة $\frac{2}{x}(1+\ln x)=m$ تكافئ $f(x)=-x+m+1$ حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم (Δ_m) الذي معادلته $y=-x+m+1$: و الموازي لـ(T) و(Δ). • من أجل $m\in]-\infty;0]$، المعادلة تقبل حلا وحيدا • من أجل $m\in]0;2[$، المعادلة تقبل حلين متمايزين • من أجل $m=2$، المعادلة تقبل حلا مضاعفا • من أجل $m\in]2;+\infty[$، المعادلة لا تقبل حلا أ- حساب المساحة $A(\lambda)=\int_1^{\lambda}\frac{2}{x}(1+\ln x)\,dx=2\ln\lambda+(\ln\lambda)^2=[(2+\ln\lambda)\ln\lambda]ua$: ب- تعيين λ حيث $A(\lambda)=\ln\lambda^3$ المعادلة تكافئ $\ln\lambda=0$ أو $\ln\lambda=1$ أي $\lambda=1$ و هو مرفوض أو $\lambda=e$ و هو المناسب . **<u>الجزء الثالث</u>** : إثبات أنّ جميع المنحنيات (C_a) تشمل نقطة ثابتة : لتكن $M_0(x_0;y_0)\in(C_a)\cap(C_{a'})$ معناه $1-x_0+\frac{a}{x_0}(1+\ln x_0)=1-x_0+\frac{a'}{x_0}(1+\ln x_0)$حيث $a\neq a'$، أي $\frac{a-a'}{x_0}(1+\ln x_0)=0$ و عليه $1+\ln x_0=0$ و منه $x_0=\frac{1}{e}$ فعلا جميع المنحنيات (C_a)تشترك في النقطة الثابتة $H\left(\frac{1}{e};\frac{e-1}{e}\right)$ أ- إحداثيا النقطة G_a $G_a\left(a;1-a+\frac{2}{a}(1+\ln a)\right)$ ب- مجموعة النقط G_aلما يمسح العدد a المجموعة $\mathbb{R}_+^*$ هي المنحني (C_f).	 0.5 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25	

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة الدفـــاع الوطـــني
أركان الجيش الوطني الشعبي
دائرة الاستعمال والتحضير
مديرية مدارس أشبال الأمة

السنة الدراسية: 2019/2018
المستوى: السنة الثالثة ثانوي
الشعبة: علوم تجريبية

امتحان بكالوريا تجريبي في مادة الرياضيات

تصحيح الموضوع الثاني

<table>
<tr><th rowspan="2">محاور الموضوع</th><th rowspan="2">عناصـــر الإجـــابة</th><th colspan="2">العلامـــة</th></tr>
<tr><th>مجزأة</th><th>كاملة</th></tr>
<tr><td>التمرين الأول</td><td>

1 - أ- $z_A=\sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{4})\right)$

$z_B=2\left(\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6})\right)$

$\frac{z_A}{z_B}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos(\frac{5\pi}{12})+i\sin(\frac{5\pi}{12})\right)$

و منه $z_A=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ و $z_B=2e^{i(-\frac{\pi}{6})}$ و $\frac{z_A}{z_B}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i(\frac{5\pi}{12})}$

ب - $\frac{z_A}{z_B}=\frac{\sqrt{3}-1}{4}+i\frac{\sqrt{3}+1}{4}$

و منه $\begin{cases}\cos(\frac{5\pi}{12})=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\\ \sin(\frac{5\pi}{12})=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\end{cases}$ (.

2 - نعلم ان $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\left(\cos(\frac{5n\pi}{12})+i\sin(\frac{5n\pi}{12})\right)$ (مع $n\in\mathbb{N}$)

و لدينا $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n=\frac{1}{8}\left(1-\sqrt{3}i\right)=\frac{1}{4}\left(\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3})\right)$ (مع $n\in\mathbb{N}$)

معناه $\begin{cases}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n=\frac{1}{4}\\ \frac{5n\pi}{12}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbb{Z})\end{cases}$ (مع $n\in\mathbb{N}$)

معناه $n=4$

و لدينا $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^8=\left(\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^4\right)^2=\left(\frac{1}{8}\left(1-\sqrt{3}i\right)\right)^2=\left(\frac{1}{4}\left(\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3})\right)\right)^2$

</td><td>0.25
0.25
0.25
0.75
0.25
0.5
0.5</td><td>05 ن</td></tr>
</table>

التمرين	الإجابة	العلامة	المجموع
	$= \frac{1}{16}\left(\cos(-\frac{2\pi}{3}) + i\sin(-\frac{2\pi}{3})\right) = \frac{1}{16}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{1}{32}\left(1+\sqrt{3}i\right)$	0.25	
	3 - s هو تشابه مباشر مركزه 0 و نسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و زاويته $\frac{5\pi}{12}$.	0.5	
	4 - أ - (Γ_1) هي الدائرة ذات المركز c ونصف القطر 2.	0.5	
	ب - (Γ_2) هي نصف المستقيم الذي مبدؤه c و $\vec{\omega}$ شعاع توجيه له مع $(\vec{u},\vec{\omega}) = \frac{\pi}{4}+2k\pi (k\in\mathbb{Z})$ بستثناء النقطة c	0.5	
	5 - صورة (Γ_1) بالتحويل s هي الدائرة ذات نصف القطر $\sqrt{2}$ و المركز c' ذات الاحقة $z_{c'}$ حيث	0.5	
	$z_{c'} = s(c) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i(\frac{5\pi}{12})}(4) = 2\sqrt{2}e^{i(\frac{5\pi}{12})} = \sqrt{3}-1+i(\sqrt{3}+1)$		
	اي $c'(\sqrt{3}-1,\sqrt{3}+1)$	0.5	
التمرين الثاني	1 . أ. $P(A) = \frac{C_3^2+C_4^2+C_5^2}{C_{12}^2} = \frac{19}{66}$		04 ن
	$P(B) = \frac{C_5^1 \times C_7^1 + C_5^2}{C_{12}^2} = \frac{15}{22}$	0.5	
	$P(A\cap B) = \frac{C_5^2}{C_{12}^2} = \frac{5}{33}$	0.5	
	ب. بما أن: $P(A\cap B) \neq P(A)\times P(B)$	0.5	
	فإن الحادثتان A وB غير مستقلتان .		
	2. المتغير العشوائي X قيمه		
	$X = \{2; 3; 4; 5; 6\}$	0.5	
	قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X هو :		
	قانون الاحتمال للمتغير العشوائي	0.25	
	$X = x_i$: 2, 3, 4, 5, 6 $P(X = x_i)$: $\frac{6}{66}$, $\frac{24}{66}$, $\frac{23}{66}$, $\frac{12}{66}$, $\frac{1}{66}$	1.25	
	الأمل الرياضياتي :		
	$E(X) = 2\frac{1}{11} + 3\frac{4}{11} + 4\frac{23}{66} + 5\frac{2}{11} + 6\frac{1}{66} = \frac{242}{66} = \frac{11}{3}$	0.5	
التمرين الثالث	1) $f'(x) = \frac{x+1}{x+2}$ و $f'(x) > 0$ و $\lim_{x\to -1} f(x) = -1$ من أجل $x > 0$		04 ن
	2) أ) $u_0 > -1$. و $u_n > -1$ فإن $f(u_n) > -1$.	0.5	
	ب) $u_{n+1} - u_n \leq 0$.	0.5	
	ج)محدودة من الأسفل و متناقصة فهي متقاربة.	0.5	
		0.5	

التمرين		النقاط	المجموع
	$\lim u_n = \ell$ حل المعادلة $f(\ell)=\ell$ ..... $\ell=-1$.	0.5	
	3) أ) $v_n = 3 - u_n$.	0.5	
	$\lim (u_0+2)\times\ldots\times(u_{n-1}+2) = \lim e^{v_n} = e^4$.	01	
التمرين الرابع	1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$	0.5	07 ن
	$f'(x) = -ee^{-\frac{x}{2}} + e^{-x} = e^{-\frac{x}{2}}\left(e^{-\frac{x}{2}} - e\right)$	0.5	

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	e^2	↘ 0

0.5

2) $f''(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{e}{2} - e^{-\frac{x}{2}}\right)$ — 0.5

x	$-\infty$	$2\ln 2 - 2$	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

0.25

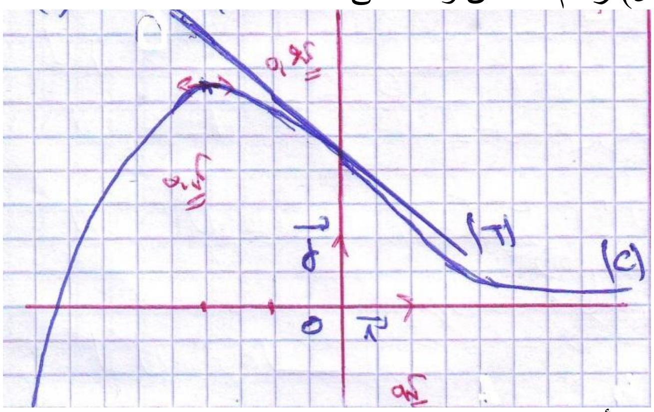
النقطة $A(2\ln 2 - 2\,,\ f(2\ln 2 - 2))$ ، نقطة إنعطاف. — 0.25

3) معادلة المماس (T) .

$(T): y = (1-e)x + 2e - 1$ — 0.25

4) نقطة تقاطع المنحنى مع محور الفواصل — 0.25

5) رسم المماس والمنحنى — 01



6) أ)

$$S_\lambda = \int_{-2}^{\lambda} f(x)\,dx = \left[-4ee^{-\frac{x}{2}}\right]_{-2}^{\lambda} + \left[e^{-x}\right]_{-2}^{\lambda} = \left(-4ee^{-\frac{\lambda}{2}} + e^{-\frac{\lambda}{2}} + 3e^2\right)$$ — 0.75

$S_\lambda = 2e + 1\ ua$

ب) $-4ee^{-\frac{\lambda}{2}} + e^{-\frac{\lambda}{2}} + 3e^2 = 2e + 1$

$$\left(e^{-\frac{\lambda}{2}}\right)^2 - 4e\left(e^{-\frac{\lambda}{2}}\right) + 3e^2 - 2e - 1 = 0$$

نضع $t = e^{-\frac{\lambda}{2}}$ مع $t > 0$

$$t^2 - 4et + 3e^2 - 2e - 1$$

$$t_1 = \frac{4e + 2e + 2}{2} \qquad t_2 = \frac{4e - 2e - 2}{2}$$

$$= 3e + 1 \qquad = e - \frac{1}{2}$$

$$-\frac{\lambda}{2} = \ln(3e+1)$$

$$\lambda = -2\ln(3e+1)$$

ج) $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} S(\lambda) = 3e^2$ — 01

7) المناقشة البيانية — 0.25

$m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0$: المعادلة تقبل وحيد

$0 < m^2 < e$: المعادلة تقبل حلين مختلفين

$m^2 = e \Leftrightarrow m = e$ أأ $m = -e$: المعادلة تقبل حل مضاعف — 01

$m^2 > e^2$ أي $m > e$ أأو $m < -e$: المعادل لا تقبل حل