الهندسة المستوية

1As

الملف يتضمن
درس الهندسة المستوية

- ✓ متوازي الاضلاع
- ✓ المثلثات و المستقيمات الخاصة
- ✓ مبرهنة فيثاغورس
- ✓ مبرهنة طاليس
- ✓ الزوايا والدائرة
- ✓ التقايس و التشابه
- ✓ التحويلات النقطية

TOP MATHS

π

جمعها الاستاذ بوشناق يوسف

مارس 2020

بسم الله الرحمن الرحيم

السلام عليكم و رحمة الله و بركاته . . . .

أقدم لكم أبنائي الطلبة أخواني الاساتذة هذا العمل و الذي يتضمن

درس مع تمارين محلولة

»رَبِّ قَدْ آتَيْتَنِي مِنَ الْمُلْكِ وَعَلَّمْتَنِي مِنْ تَأْوِيلِ الأَحَادِيثِ فَاطِرَ السَّمَاوَاتِ وَالأَرْضِ أَنْتَ وَلِيِّي فِي الدُّنْيَا وَالآخِرَةِ تَوَفَّنِي مُسْلِمًا وَأَلْحِقْنِي بِالصَّالِحِينَ«

لا تنسونا بالدعاء محبكم في الله الاستاذ بوشناق يوسف

متوازي الأضلاع:

الكفاءات المستهدفة

متوازي الأضلاع ومتوازيات الأضلاع الخاصة : المستطيل ، المربع ، المعين .

نشاط :

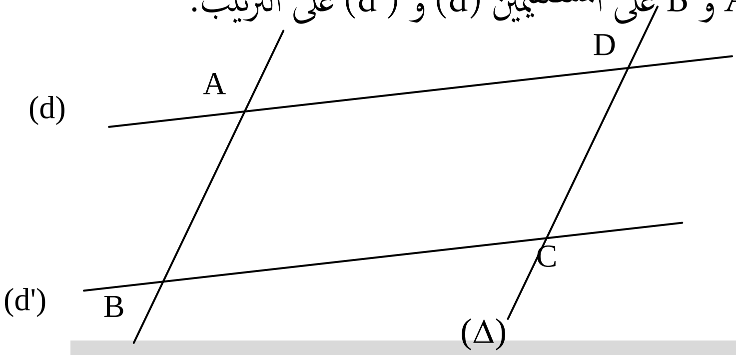
أرسم مستقيمين متوازيين تماما (d) و (d') ، علم النقطتين A و B على المستقيمين (d) و (d') على الترتيب.

أرسم مستقيم (Δ) يوازي تماما المستقيم (AB) .

المستقيم (Δ) يقطع (d) و (d') في النقطتين

D و C على الترتيب.

ما هي طبيعة الرباعي ABCD



حل النشاط:

لدينا : (AD) // (BC) و (AB) // (CD)

إذن : الرباعي ABCD هو متوازي الأضلاع.

التعريف :

متوازي الأضلاع هو رباعي حاملا كلّ ضلعين متقابلين فيه ، متوازيين .

ABCD متوازي الأضلاع معناه [(AB) // (CD) و (AD) // (BC)]

نشاط 2:

أ) علم على ورقة غير مسطرة ثلاث نقط A ، B ، O ليست في استقامية.

ب)أنشئ النقطتين C و D نظيرتي A و B بالنسبة إلى النقطة O على الترتيب.

ج) ما هي طبيعة الرباعي ABCD ؟

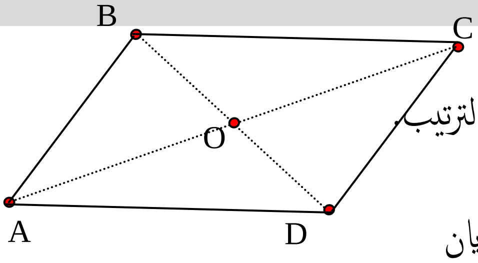
د) تحقق أن :

1. القطعتين [AC] و [BD] متناصفتين .
2. كل ضلعين متقابلين متقايسان .
3. كل زاويتين متقابلتين متقايستيان .

هـ) علم النقط 'A' ، B' ، C' ، D من [AB] و (BC] و (CD] و(DA] على الترتيب حيث النقط 'A
، 'B' ، C' ، D لا تنتمي إلى أضلاع الرباعي ABCD و 'BA' = CB' = DC' = AD

و) ما نوع الرباعي 'A'B'C'D ؟ (إرشاد: يمكن البدء بنوع كلّ من الرباعيين A'CC'A و D'BB'D).

حل النشاط 2:



أ. تعليم النقط : A ، B ، O ليست في استقامية.

ب. إنشاء النقطتين C و D نظيرتي A و B بالنسبة إلى النقطة O على الترتيب.

ج. طبيعة الرباعي ABCD

لدينا المستقيمان (AB) و (DC) متناظران بالنسبة إلى O إذن هما متوازيان

وكذلك المستقيمان (AD) و (BC) متناظران بالنسبة إلى O إذن هما متوازيان

وبالتالي الرباعي ABCD متوازي أضلاع .

د. التحقيق

1) بما أن الرباعي ABCD متوازي أضلاع فإن قطراه [AC] و [BD] متناصفين

2) بما أن الرباعي ABCD متوازي أضلاع فإن AB = CD و BC = AD

3) بما أن الرباعي ABCD متوازي أضلاع فإن $\hat{A}=\hat{C}$ و $\hat{B}=\hat{D}$

هـ. تعليم النقط 'A' ، B' ، C' ، D من (AB)

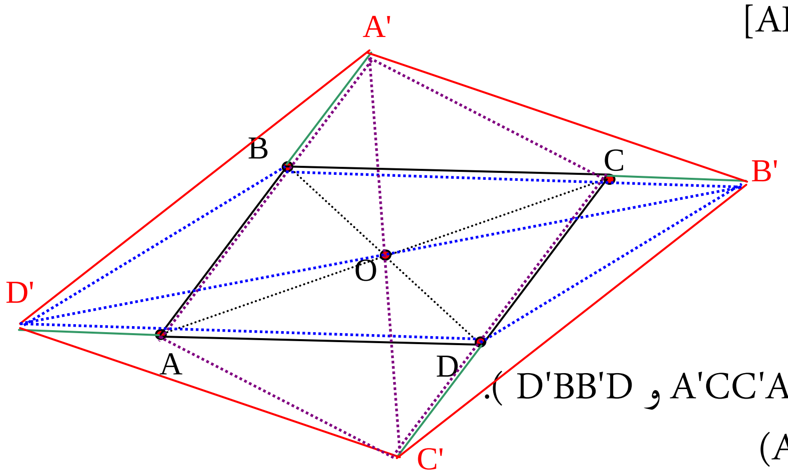
و (BC) و [CD) و[DA) على الترتيب

حيث النقط 'A' ، B' ، C' ، D لا تنتمي

إلى أضلاع الرباعي ABCD

و BA' = CB' = DC' = AD'

و) ما نوع الرباعي A'B'C'D' ؟



(**إرشاد**: يمكن البدء بنوع كلّ من الرباعيين A'CC'A و D'BB'D)

لدينا : (AB) // (CD) ومنه (AA') // (CC')

ولدينا : AB = CD و BA' = DC' إذن AA' = CC' وبالتالي الرباعي A'CC'A متوازي أضلاع

إذن قطراه [A'C'] و [AC] لهما نفس المنتصف O .

لدينا : (BC) // (AD) ومنه (BB') // (D'D)

ولدينا : AD =BC و CB' = AD' إذن BB' = DD' وبالتالي الرباعي D'BB'D متوازي أضلاع

إذن قطراه [D'B'] و [BD] لهما نفس المنتصف O .

ولدينا : القطران [AC] و [BD] للمتوازي الأضلاع ABCD لهما نفس المنتصف O

إذن : القطعتان [A'C'] و [D'B'] لهما نفس المنتصف O وبالتالي الرباعي A'B'C'D' هو متوازي أضلاع.

خواص :

من أجل كل رباعي ABCD :

1) [AC] و [BD] متناصفان معناه ABCD متوازي الأضلاع .

2) [AB =DC و AD = BC] معناه ABCD متوازي الأضلاع .

3) [AB =DC و (AB)//(DC)] معناه ABCD متوازي الأضلاع .

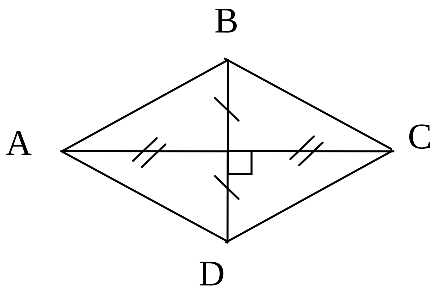
4) [$A\hat{B}C=A\hat{D}C$ و $B\hat{A}D=B\hat{C}D$] معناه ABCD متوازي الأضلاع .

نشاط3:

1) أنشئ باستعمال المدور والمسطرة فقط متوازي أضلاع قطراه متعامدان، تحقق أن أضلاعه متقايسة، ماذا نسمي متوازي الأضلاع في هذه الحالة ؟

2) أنشئ متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة ، بين أن كل زواياه قائمة ، ماذا نسمي متوازي الأضلاع في هذه الحالة ؟ متى يكون مربعا ؟

حل النشاط:



1)إنشاء متوازي أضلاع قطراه متعامدان

ABCD متوازي أضلاع إذن [AC] و [BD] متناصفتان

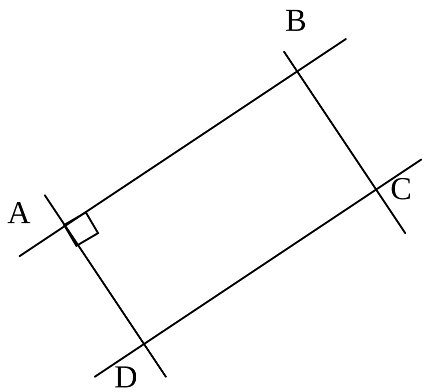
ولدينا قطراه متعامدان إذن (BD) هو محور القطعة [AC]

و(AC) هو محور القطعة [BD]

وبالتالي المثلث ABD متساوي الساقين AB = AD

بما أن ABCD متوازي أضلاع فإن : AB =BC = CD = DA

متوازي أضلاع ABCD يسمى معين .



2)إنشاء متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة

ABCD متوازي أضلاع إذن (DC) // (AB) و(AD) // (BC)

متوازي أضلاع ABCD إحدى زواياه قائمة إذن$(AD) \perp (AB)$

ومن التوازي نستنتج أن $(BC) \perp (AB)$ و$(CD) \perp (BC)$

و$(AD) \perp (CD)$

في هذه الحالة متوازي أضلاع ABCD يسمى مستطيل.

وإذا كان ضلعان متتاليان منه متقايسان فإن ABCD يكون مربعا .

متوازيات الأضلاع الخاصة:

المعين :

هو متوازي أضلاع له ضلعان متتاليان متقايسان .

1. ABCD معين معناه [$(AC) \perp (BD)$ و [AC] ، [BD] متناصفان]
2. ABCD معين معناه [AB = BC = CD = DA]
3. إذا كان ABCD معينا فإن [(AC) ينصف كلا من الزاويتين $B\hat{A}D$ و $B\hat{C}D$ و (BD) ينصف كلا من الزاويتين $A\hat{B}C$ و $A\hat{D}C$]

المستطيل :

هو متوازي أضلاع له زاوية قائمة .

1. ABCD مستطيل معناه $[\ \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ\ ]$
2. ABCD مستطيل معناه [AC = BD و [AC] ، [BD] متناصفان]

المربع :

هو متوازي أضلاع له ضلعان متتاليان متقايسان وزاوية قائمة.

1. ABCD مربع معناه $[\ \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$ و $AB = BC = CD = DA\ ]$
2. ABCD مربع معناه [AC = BD و $(AC) \perp (BD)$ و [AC] ، [BD] متناصفان]

تمرين :

ABCD متوازي أضلاع حيث $AB \neq AD$.

أ) النقطتان A' و C' هما المسقطان العموديان للنقطتين A و C على (BD) على الترتيب.

بين أن AA'CC' متوازي أضلاع.

ب) M نقطة من [BC'] و N نقطة من القطعة [A'D] حيث: BM = DN

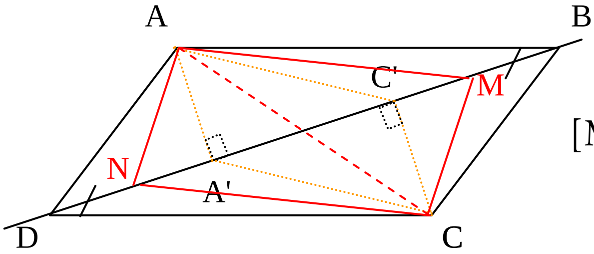
ما هي طبيعة الرباعي AMCN .

حل التمرين :

أ) نقارن بين المثلثين القائمين ADA' و BCC' نجد AA' = CC'

ولدينا (AA') // (CC') لأنّهما عموديين على نفس المستقيم (BD)

وبالتالي : AA'CC' متوازي أضلاع.



ب) نسمي O منتصف كل من [AC] و [BD]

ولدينا : BM = DN إذن O منتصف كل من [AC] و [MN]

إذن الرباعي AMCN متوازي أضلاع .

المثلثات والمستقيمات الخاصة:

الكفاءات المستهدفة

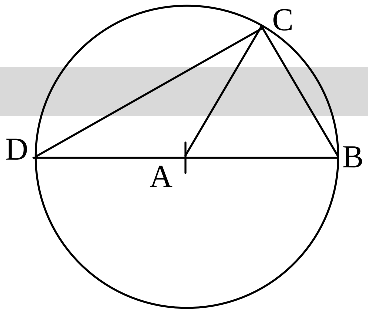
المثلثات الخاصة، والمستقيمات الخاصة في مثلث .

نشاط :

أرسم دائرة مركزها A ، علم على هذه الدائرة النقط B ، C ، D حيث BC = AB و D نظيرة B بالنسبة إلى النقطة A .

ما هي طبيعة كل من المثلثات : ACD ، ABC ، BCD

عين القياسين التاليين : $\widehat{BAC}$ و $\widehat{BCD}$.



حل النشاط :

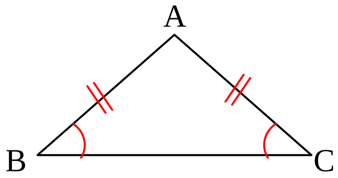
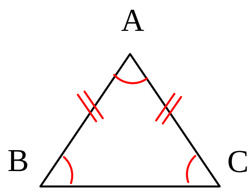
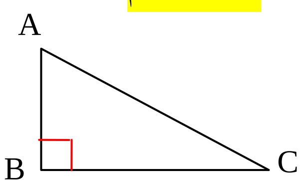
المثلث ACD متساوي الساقين ، AC = AD نصفي قطر الدائرة

المثلث ABC متقايس الأضلاع ، AC = AB = BC .

المثلث BCD قائم في C .

$\widehat{BAC} = 60^\circ$ و $\widehat{BCD} = 90^\circ$

المثلثات الخاصة:

المثلث متساوي الساقين	المثلث متقايس الأضلاع	المثلث القائم
		
فيه ضلعان متقايسان	أضلاعه متقايسة	فيه زاوية قائمة
$A\hat{B}C = A\hat{C}B$	$A\hat{B}C = A\hat{C}B = B\hat{A}C = 60^\circ$	$A\hat{B}C = 90^\circ$

المستقيمات الخاصة في مثلث:

نشاط :

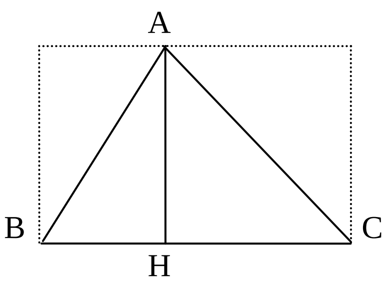
ABC مثلث كيفي و H المسقط العمودي للنقطة A على (BC) .

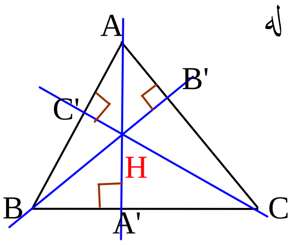
أحسب مساحة لكل من المثلثين ABH و ACH . ما هي مساحة المثلث ABC ؟

حل النشاط :

$s(ABH) = \frac{1}{2} AH.HB$ ، $s(ACH) = \frac{1}{2} AH.HC$

لدينا : BC = CH + BH ومنه : $s(ABC) = \frac{1}{2} AH.BC$





✓ الارتفاع في مثلث هو المستقيم الذي يشمل أحد رؤوس المثلث ويعامد حامل الضلع المقابل له

✓ ارتفاعات مثلث متقاطعة في نقطة واحدة

مساحة مثلث : $s(ABC)=\frac{1}{2}AA'.BC$ ، $s(ABC)=\frac{1}{2}BB'.AC$ ، $s(ABC)=\frac{1}{2}CC'.AB$

نشاط:

أرسم مثلثا كيفيا ABC ، و (Δ_1) ، (Δ_2) محورا الضلعين [BC] و [AB] على الترتيب يتقاطعان في النقطة M .

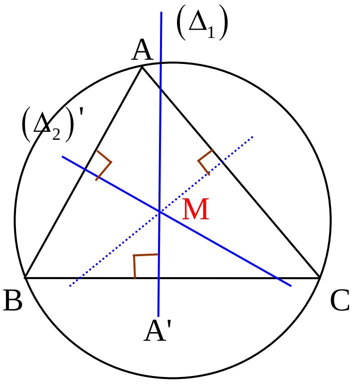
أ) بين أن محور الضلع [AC] يشمل النقطة M .

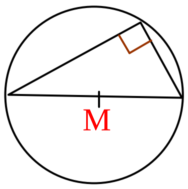
ب) عين مركز الدائرة التي تشمل النقط A ، B ، C ، وارسمها.

ج) عين موقع النقطة M في الحالة التي يكون فيها المثلث ABC قائما في A .

د) أين تقع النقطة M في الحالة التي يكون فيها المثلث ABC منفرج الزاوية .

حل النشاط :





لدينا (Δ_1) محور [BC] إذن : MB = MC

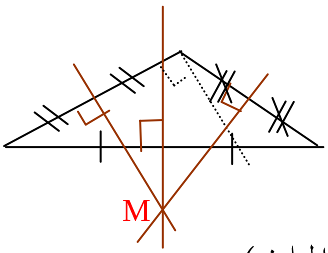
لدينا (Δ_2) محور [AB] إذن : MA = MB

ومنه : MA = MC معناه أن M هي نقطة من محور القطعة [AC] .

لدينا MA = MB = MC وبالتالي مركز الدائرة التي تشمل النقط A ، B ، C هو النقطة M .

موقع النقطة M في الحالة التي يكون فيها المثلث ABC **قائما** في A هو منتصف القطعة [BC]

تقع النقطة M في الحالة التي يكون فيها المثلث ABC منفرج الزاوية ، خارج المثلث .



✓ المحور هو محور أحد أضلاعه.

✓ محاور مثلث متقاطعة في نقطة واحدة .

✓ نقطة تقاطع محاور مثلث هي مركز الدائرة المحيطة به (التي تشمل رؤوس المثلث)

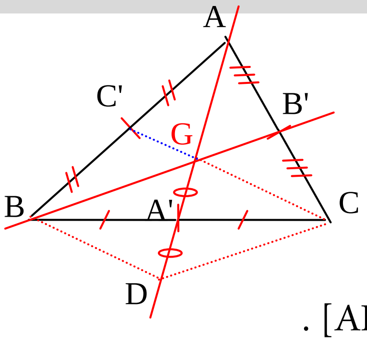
نشاط :

ABC مثلث كيفي ، A' ، B' ، C' منتصفات القطع [BC] ، [AC] ، [AB] على الترتيب.

1. ماذا نسمي المستقيمين (AA') و (BB') في المثلث ABC ؟
2. المستقيمان (AA') و (BB') يتقاطعان في النقطة G ، أرسم النقطة D نظيرة النقطة G بالنسبة إلى A' .
3. ما هي طبيعة الرباعي BDCG ؟
4. استنتج DC = 2 GB' وأن النقطة G هي منتصف القطعة [AD] و (BD) // (GC') .
5. بين أن النقط C ، G ، C' في استقامية .

6. بين أن $AG = 2\,GA'$ و $BG = 2\,GB'$ و $CG = 2\,GC'$.

حل النشاط:



نسمي المستقيمين (AA') و (BB') المتوسطان في المثلث ABC .

القطعتان $[BC]$ و $[GD]$ متناصفتان إذن الرباعي $BDCG$ متوازي أضلاع .

لدينا في المثلث ACD ، $(GB') // (DC)$ ومنه حسب مبرهنة طاليس

$\dfrac{AB'}{AC}=\dfrac{AG}{AD}=\dfrac{GB'}{DC}$ ولدينا B' منتصف القطعة $[AC]$ إذن : $\dfrac{AB'}{AC}=\dfrac{1}{2}$

إذن $DC = 2\,GB'$ و $AD = 2\,AG$ ومنه النقطة G هي منتصف القطعة $[AD]$.

في المثلث ABD ، النقطة G منتصف القطعة $[AD]$ و C' منتصف القطعة $[AB]$ إذن : $(BD) // (GC')$.

الرباعي $BDCG$ متوازي أضلاع إذن $(BD) // (GC)$ ولدينا $(BD) // (GC')$ إذن $(GC) // (GC')$

وهذان المستقيمان لهما نقطة مشتركة G إذن النقط C ، G ، C' في استقامية .

لدينا : $AG = GD$ و $GD = 2\,GA'$ إذن $AG = 2\,GA'$

لدينا : $BG = DC$ و $DC = 2\,GB'$ إذن $BG = 2\,GB'$

في المثلث ABD ، $(BD) // (GC')$ ومنه $\dfrac{AC'}{AB}=\dfrac{AG}{AD}=\dfrac{GC'}{BD}=\dfrac{1}{2}$ ، ومنه : $BD = 2\,GC'$

بما أن $BD = GC$ فإن : $GC = 2\,GC'$

✓ المتوسط في مثلث هو المستقيم الذي يشمل أحد رؤوس المثلث ومنتصف الضلع المقابل له.

✓ متوسطات مثلث متقاطعة في نقطة واحدة هي مركز ثقله .

✓ (AA') و (BB') و (CC') متوسطات المثلث ABC و G مركز ثقله لدينا :

✓ $AG = 2\,GA'$ و $BG = 2\,GB'$ و $CG = 2\,GC'$.

نشاط

ABC مثلث كيفي ، المنصفان الداخليان لزاويتي الرأسين A و B يتقاطعان في النقطة S .

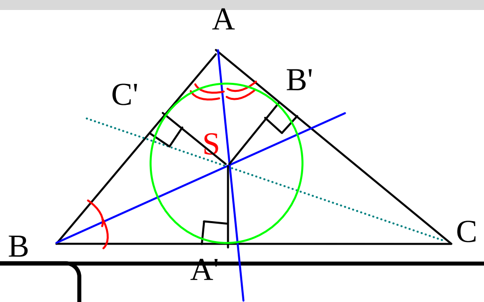
أ) النقط A' ، B' ، C' المساقط العمودية للنقطة S على المستقيمات (BC) ، (AC) ، (AB) على الترتيب .

بين $SA' = SB' = SC'$

ب) بين أن المنصف الداخلي لزاوية الرأس C يشمل النقطة S .

ج) عين مركز الدائرة التي تمس أضلاع المثلث ABC من الداخل وارسمها .

حل النشاط:



أ) نقارن بين المثلثين القائمين ASB' و ASC' لدينا

SA وتر مشترك ، $\widehat{SAB'}=\widehat{SAC'}$ إذن : $SB' = SC'$.

نقارن بين المثلثين القائمين BSA' و BSC' لدينا

SB وتر مشترك ، $\widehat{SBA'}=\widehat{SBC'}$ إذن : SA′ = SC′ .

وبالتالي : SA′ = SB′ = SC′

ب) نقارن بين المثلثين القائمين CSB′ و A′SC لدينا SC وتر مشترك ، SA′ = SB′ إذن $\widehat{SCB'}=\widehat{SCA'}$

وبالتالي (SC) هو المنصف الداخلي للزاوية ذات الرأس C .

ج) لدينا : SA′ = SB′ = SC′ إذن S هي مركز الدائرة التي تشمل النقط A′ ، B′ ، C′ .

بما أن (BC) ⊥ (SA′) و (AC) ⊥ (SB′) و (BA) ⊥ (SC′)

إذن (BC) و(AC) و(BA) هي مماسات لهذه الدائرة .

✔ المنصف في مثلث هو منصف إحدى زواياه .

✔ المنصفات الداخلية في مثلث متقاطعة في نقطة واحدة .

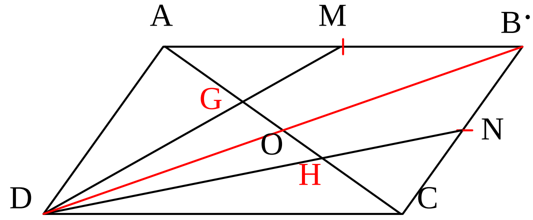
✔ نقطة تقاطع المنصفات هي مركز الدائرة المرسومة داخل هذا المثلث (أي التي تمس أضلاع المثلث من الداخل) .

تمرين :

ABCD متوازي الأضلاع ، النقطتان M و N منتصفا القطعتين [AB] و [BC] على الترتيب.

[DM] و [DN] يقطعان [AC] في النقطتين G و H على الترتيب.

بين أن : AG = GH = HC .



حل التمرين :

القطران [AC] و [BD] متناصفان في النقطة O .

في المثلث ABD لدينا (AO) و (DM) متوسطان يتقاطعان في النقطة G ومنه AG = 2 GO .

في المثلث CBD لدينا (CO) و (DN) متوسطان يتقاطعان في النقطة H ومنه HC = 2HO .

ومنه : OC = 3 HO و OA = 3 OG إذن $OG=OH=\frac{1}{2}GH$ ومنه : AG =GH = HC

تمرين :

(Δ_1) ، (Δ_2) ، (Δ_3) ثلاث مستقيمات متقاطعة في نقطة G .

أ) أنشئ مثلثا ABC بحيث تكون النقطة G مركز ثقله .

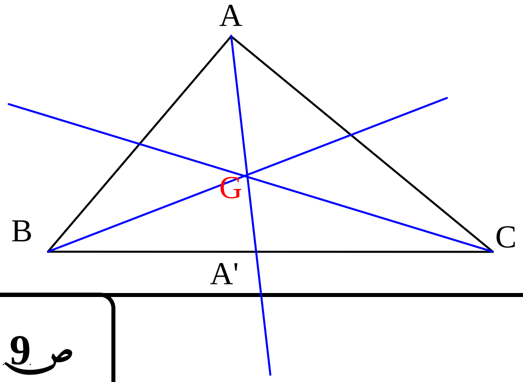
ب) هل يوجد مثلثا واحدا يحقق المطلوب ؟

حل التمرين :

مرحلة التحليل :

نفرض أن للمسألة حل أي يوجد على الأقل مثلثا ABC بحيث تكون النقطة G مركز ثقله . ونرسم شكلا مناسبا له.

لدينا القواعد التالية : A′C = A′B و AG = 2 A′G



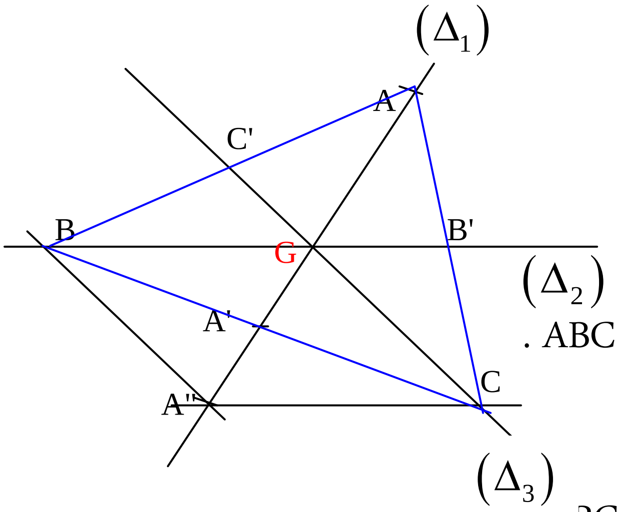
مرحلة التركيب والإنشاء :

انطلاقا من القواعد السابقة ننشئ الشكل ونتأكد أنه يحقق المطلوب.

نرسم ثلاث مستقيمات (Δ_1) ، (Δ_2) ، (Δ_3) متقاطعة في نقطة G .

A نقطة من المستقيم (Δ_1) و A" نظيرتها بالنسبة للنقطة G

A' منتصف القطعة [A"G]



الموازي من A" للمستقيم (Δ_3) يقطع المستقيم (Δ_2) في B

والموازي من A" للمستقيم (Δ_2) يقطع المستقيم (Δ_3) في C

إذن الرابعي BGCA" متوازي أضلاع

ومنه A' هي منتصف [BC] إذن (AA') هو متوسط في المثلث ABC .

(AB) يقطع (Δ_3) في النقطة C' . في المثلث ABA"

لدينا (BA") // (GC") و G منتصف [AA"]

إذن C" منتصف [AB] وبالتالي (CC') هو متوسط في المثلث ABC .

بما أن المتوسطات تتلاقى في نقطة واحدة إذن كذلك (BB') هو متوسط في المثلث ABC .

ومنه النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

توجد ما لا نهاية من الحلول للمسألة وهذا حسب اختيار النقطة A على المستقيم (Δ_1) .

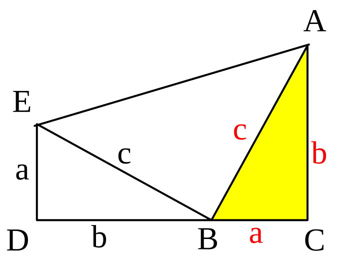
مبرهنة فيثاغورس

الكفاءات المستهدفة

مبرهنة فيثاغورس وعكسها و توظيفها في حل مسائل هندسية . النسب المثلثية .

نشاط

الشكل المقابل يمثل مثلثا ABC قائما في C أطوال أضلاعه a ، b ، c ، و BDE مثلث يقايس المثلث ABC حيث C ، B ، D في استقامية و BD = AC.



أ) بين أن الزاوية ABE قائمة .

ب) ما نوع الرابعي ACDE ؟

ج) أحسب مساحة الرابعي ACDE بطريقتين مختلفتين .

د) استنتج علاقة بين c ² و a² ، b² .

حل النشاط:

أ) لدينا في المثلث ABC ، $\widehat{ABD}=\widehat{BAC}+\widehat{ACB}$ (زاوية خارجية) ولدينا $\widehat{ABD}=\widehat{EBD}+\widehat{ABE}$

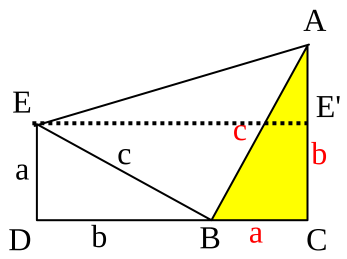
ومنه : $\widehat{BAC}+\widehat{ACB}=\widehat{EBD}+\widehat{ABE}$

بما أن المثلث BDE يقايس المثلث ABC إذن : $\widehat{EBD}=\widehat{BAC}$ وبالتالي : $\widehat{ACB}=\widehat{ABE}=90°$

ب) نوع الرابعي ACDE :

الرباعي ACDE شبه منحرف قائم .

ج) حساب مساحة الرابعي ACDE بطريقتين مختلفتين :



الطريقة الأولى : s(ACDE) = 2 s(ABC) + s(ABE)

ومنه : s(ACDE) = ab + (c ² / 2)

الطريقة الثانية : s(ACDE) = s(CDEE') + s(AEE')

ومنه : $s(ACDE)=a(b+a)+\frac{1}{2}(b+a)(b-a)$

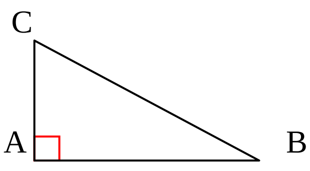
أي : $s(ACDE)=ab+a^2+\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}a^2$ وبالتالي : $s(ACDE)=ab+\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2$

د) استنتج علاقة بين c ² و a² ، b² :

من السؤال السابق نستنتج أن : $\frac{1}{2}c^2=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2$ ومنه : c ² = a ² + b ²

مبرهنة فيثاغورس وعكسها:

✔ مبرهنة 1 : (مبرهنة فيثاغورس)

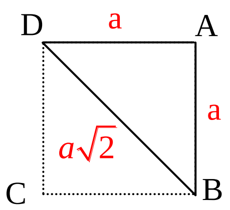


إذا كان ABC مثلثا قائما في A فإن : BC ² = AB ² + AC ² .

✔ مبرهنة 2 : (عكس مبرهنة فيثاغورس)

إذا كان في مثلث ABC ، BC ² = AB ² + AC ² فإن : المثلث ABC قائم في A .

مثال 1:

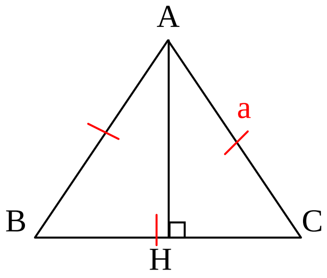


ABCD مربع طول ضلعه يساوي a أحسب طول قطره .

$BD^2 = AB^2 + AD^2$ ومنه : $BD^2 = a^2 + a^2$

ومنه : $BD^2 = 2a^2$ إذن : $BD = a\sqrt{2}$

مثال 2:



ABC مثلث متقايس الأضلاع ، طول ضلعه يساوي a ،

(AH) الارتفاع المتعلق بالضلع [BC] .

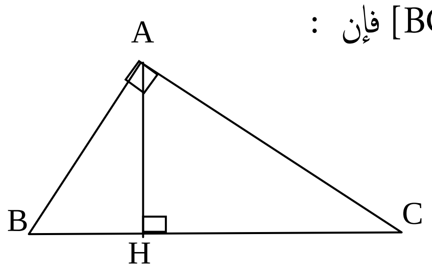
أحسب الطول AH .

حسب مبرهنة فيثاغورس لدينا : $AC^2 = AH^2 + HC^2$

ومنه : $AC^2 - HC^2 = AH^2$ إذن : $AH^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2$

أي : $AH^2 = \frac{3}{4}a^2$ وبالتالي : $AH = a\frac{\sqrt{3}}{2}$

نتائج:



إذا كان ABC مثلثا قائما في A و (AH) الارتفاع المتعلق بالضلع [BC] فإن :

أ) $AB . AC = AH . BC$ (من المساحة)

ب) $AH^2 = HC . HB$ (استعمال مبرهنة فيثاغورس)

$AB^2 = AH^2 + BH^2$ و $AC^2 = AH^2 + HC^2$

ومنه : $AB^2 + AC^2 = 2\ AH^2 + BH^2 + CH^2$

إذن : $BC^2 = 2AH^2 + BH^2 + CH^2$. ومنه : $(BH + HC)^2 = 2AH^2 + BH^2 + CH^2$.

إذن : $BH^2 + HC^2 + 2\ BH \times HC = 2AH^2 + BH^2 + CH^2$. وبالتالي : $AH^2 = BH \times HC$

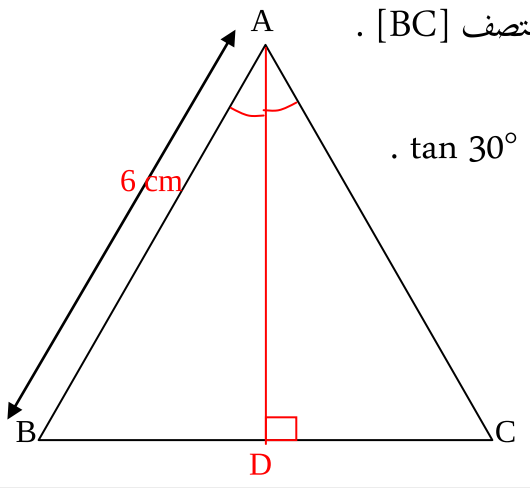
ج) $AB^2 = BH . BC$ (مبرهنة فيثاغورس و النتيجة ب)

$AB^2 = AH^2 + BH^2$ ومنه $AB^2 = BH \times HC + BH^2$ إذن : $AB^2 = BH \times (HC + BH)$

وبالتالي : $AB^2 = BH . BC$

د) $AC^2 = CH . CB$ (بنفس الطريقة للنتيجة السابقة)

نشاط



ABC مثلث متقايس الأضلاع طول ضلعه 6 cm ، النقطة D منتصف [BC] .

بين أن (AD) منصف زاوية الرأس A .

أحسب الطول AD ، واستنتج كلا من $\sin 30°$ ، $\cos 30°$ ، $\tan 30°$.

حل النشاط :

المستقيم (AD) هو متوسط في المثلث المتقايس الأضلاع ABC

إذن هو محور وبالتالي منصف زاوية الرأس A .

من مبرهنة فيثاغورس لدينا : $AD^2 = 36 - 9 = 27$

ومنه : $AD = 3\sqrt{3}$

$\sin 30° = \frac{BD}{AB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ، $\cos 30° = \frac{AD}{AB} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ،

$\tan 30° = \frac{BD}{AD} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

النسب المثلثية في مثلث قائم :

تعريف :

ABC مثلث قائم في C حيث : $\widehat{BAC} = \alpha$

جيب الزاوية α : $\sin\alpha = \frac{BC}{AB}$

جيب تمام الزاوية α : $\cos\alpha = \frac{AC}{AB}$

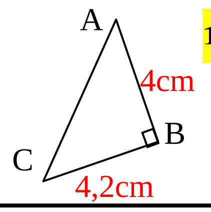
ظل الزاوية α : $\tan\alpha = \frac{BC}{AC}$

نتائج : $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$		$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$

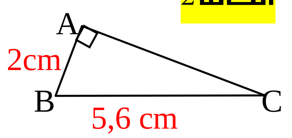
تطبيق

أحسب كلا من AC و $\widehat{ABC}$ في كل من الحالتين الآتيتين : (تعطى النتائج مدورة إلى الوحدة)

الحالة 1



الحالة 2



حل التطبيق:

الحالة 1:

حسب مبرهنة فيثاغورس لدينا : $AC^2 = AB^2 + BC^2$ ومنه : $AC^2 =(4^2 + 4,2^2)\ cm^2$

أي : $AC^2 = 33,64\ cm^2$ ومنه : $AC = 5,8\ cm$. وبالتدوير إلى الوحدة نجد : $AC = 6\ cm$.

$\widehat{ABC} = 90°$

الحالة 2:

حسب مبرهنة فيثاغورس لدينا : $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ومنه : $AC^2 = BC^2 - AB^2$

ومنه : $AC^2 =(5,6^2 - 2^2)\ cm^2$ أي : $AC^2 = 35,36\ cm^2$ ومنه $AC = 5,946427499...$

وبالتدوير إلى الوحدة نجد : $AC = 6\ cm$.

$\cos\widehat{ABC} = \frac{2}{5,6} = 0,347142857...$ ومنه : $\widehat{ABC} = 69,07516758...°$

وبالتدوير إلى الوحدة نجد : $\widehat{ABC} = 69°$

تطبيق

ABC مثلث قائم في A حيث $BC = 10\ cm$ و $\widehat{ABC} = 37°$

أحسب بالتدوير إلى الوحدة مساحة ومحيط هذا المثلث .

حل التطبيق:

$AC = BC \sin 37°$ ومنه : $AC = 6,01815023...$.

$AB = BC \cos 37°$ ومنه : $AB = 7,9863551...$.

نضع p محيط المثلث ABC : $P = AB + AC + BC$ ومنه : $P = 24,00450533...cm$

وبالتدوير إلى الوحدة نجد : $p = 24\ cm$

نضع s مساحة المثلث ABC : $s = (AB \times AC)/2$ ومنه : $s = 24,0315424...cm^2$

وبالتدوير إلى الوحدة نجد : $s = 24\ cm^2$.

تطبيق

أنشئ مثلثا ABC أطوال أضلاعه 5 cm ، 12 cm ، 13 cm ، وحدد طبيعته .

عين مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ونصف قطرها .

حل التطبيق:

نفترض $AB = 5cm$ و $AC = 12\ cm$ و $BC = 13\ cm$

لدينا : $AB^2 + AC^2 = 144 + 25 = 169 = 13^2$

ومنه : $AB^2 + AC^2 = BC^2$

وحسب عكس مبرهنة فيثاغورس أن المثلث ABC قائم في A

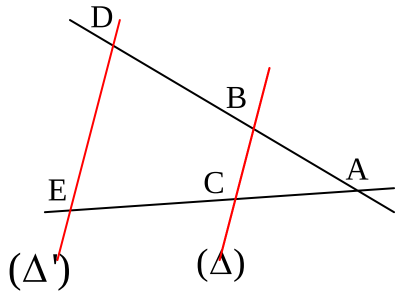
مركز الدائرة المحيطة به هو منتصف القطعة [BC] ونصف قطرها يساوي 6,5 cm .

مبرهنة طاليس

الكفاءات المستهدفة

مبرهنة طاليس وعكسها، و توظيفها في حل مسائل هندسية.

مبرهنة 1 : مبرهنة طاليس



إذا كان لدينا مستقيمان متقاطعان في نقطة A

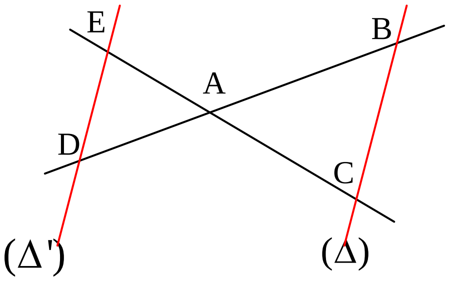
يقطعهما مستقيمان متوازيان (Δ) و (Δ')

في النقط B ، C ، D ، E حسب أحد الشكلين

فإن أطوال أضلاع المثلث ABC تكون متناسبة

مع أطوال أضلاع المثلث ADE .

أي : $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}$



مبرهنة 2 : عكس مبرهنة طاليس

إذا كانت كل من النقط A ، B ، D ، والنقط A ، C ، E

على استقامة واحدة وبنفس الترتيب حسب أحد الشكلين ،

وإذا كان $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$ فإن المستقيمين (BC) و (DE)

يكونا متوازيين

حالة خاصة : مستقيم المنتصفين في مثلث

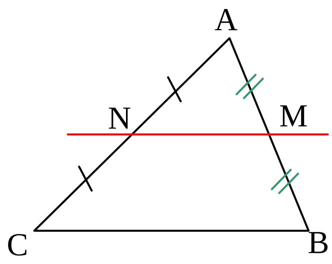
ABC مثلث كيفي.

إذا كانت النقطتان M و N منتصفا القطعتين [AB] و [AC]

على الترتيب فإن (BC) // (MN) و BC = 2 MN

إذا كانت النقطة M منتصف القطعة [AB] وكان (BC) // (MN)

حيث N نقطة من [AC] فإن N هي منتصف القطعة [AC]



تطبيق

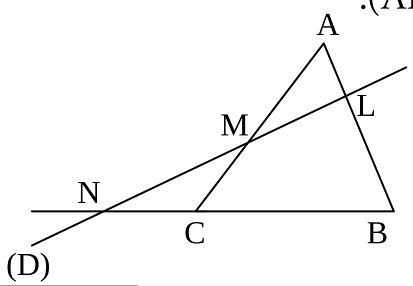
ABC مثلث كيفي ، (D) مستقيم يقطع (AB) ، (AC) ، (BC) في النقط L ، M ، N على الترتيب.

نريد البرهان أن : $\frac{LA}{LB}\times\frac{NB}{NC}\times\frac{MC}{MA}=1$

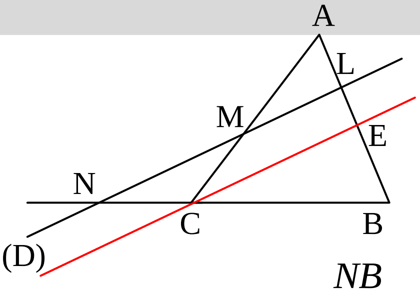
أ) أرسم الموازي للمستقيم (D) الذي يشمل النقطة C ، وسم E تقاطعه مع (AB).

ب) بين أن : $\frac{NB}{NC}=\frac{LB}{LE}$ و $\frac{MC}{MA}=\frac{LE}{LA}$

ج) استنتج العلاقة $\frac{LA}{LB}\times\frac{NB}{NC}\times\frac{MC}{MA}=1$



حل التطبيق:



أ) رسم الموازي للمستقيم (D) الذي يشمل النقطة C ، يقطع (AB) في E.

ب) تبيان أن $\frac{NB}{NC}=\frac{LB}{LE}$

في المثلث BLN لدينا : (NL) // (CE) إذن حسب مبرهنة طاليس

لدينا : $\frac{BE}{BL}=\frac{BC}{BN}$ معناه $\frac{BN}{BL}=\frac{BC}{BE}$ ومنه : $\frac{NB}{LB}=\frac{BC}{BE}=\frac{NB-BC}{LB-BE}=\frac{NC}{LE}$

إذن : $\frac{NB}{LB}=\frac{NC}{LE}$ معناه $\frac{NB}{NC}=\frac{LB}{LE}$

تبيان أن $\frac{MC}{MA}=\frac{LE}{LA}$

في المثلث ACE لدينا : (ML) // (CE) إذن حسب مبرهنة طاليس

$\frac{AM}{AC}=\frac{AL}{AE}$ معناه $\frac{AM}{AL}=\frac{AC}{AE}$ ومنه : $\frac{AM}{AL}=\frac{AC}{AE}=\frac{AC-AM}{AE-AL}=\frac{MC}{LE}$

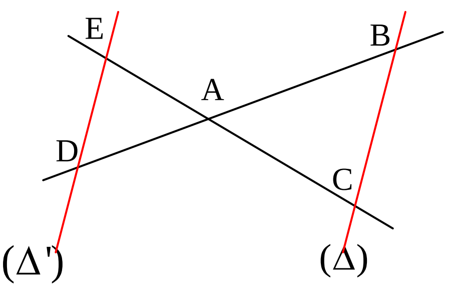
$\frac{MA}{LA}=\frac{MC}{LE}$ معناه $\frac{LE}{LA}=\frac{MC}{MA}$

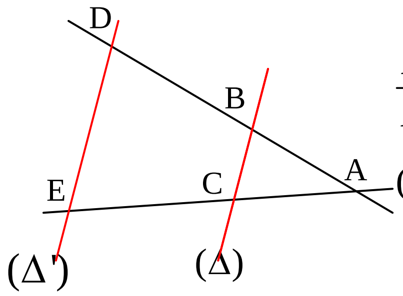
ج) استنتاج العلاقة $\frac{LA}{LB}\times\frac{NB}{NC}\times\frac{MC}{MA}=1$

$\frac{NB}{NC}=\frac{LB}{LE}$ معناه $LE=\frac{LB\times NC}{NB}$ و $\frac{LE}{LA}=\frac{MC}{MA}$ معناه $LE=\frac{MC\times LA}{MA}$

ومنه : $\frac{MC\times LA}{MA}=\frac{LB\times NC}{NB}$ معناه LB×NC×MA = MC×LA×NB معناه $\boxed{\frac{LA}{LB}\times\frac{NB}{NC}\times\frac{MC}{MA}=1}$

نتائج :

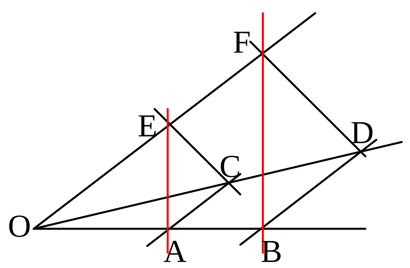




إذا كان $(\Delta)//(\Delta')$ فإن $\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CE}$

إذا كان $\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CE}$ فإن $(\Delta)//(\Delta')$

تطبيق



إذا علمت أن في الشكل المرفق (AC) // (BD)

و(DF) // (CE) فبين أن (AE) // (BF) .

حل

في المثلث ODB لدينا : (BD) // (AC) ومنه حسب مبرهنة طاليس لدينا : $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}$

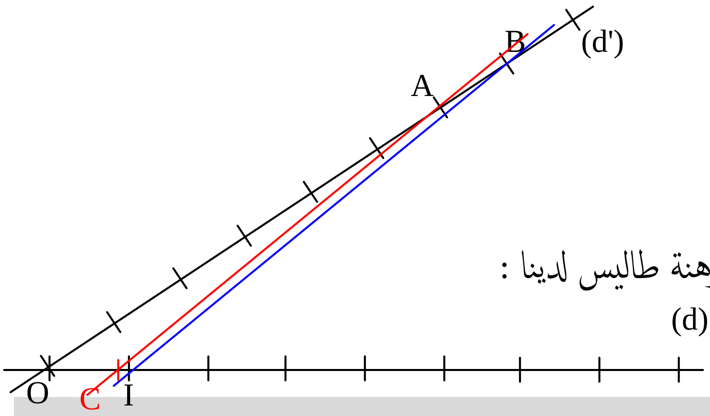
في المثلث ODF لدينا : (DF) // (CE) ومنه حسب مبرهنة طاليس لدينا : $\frac{OC}{OD}=\frac{OE}{OF}$

إذن : $\frac{OA}{OB}=\frac{OE}{OF}$ وحسب عكس مبرهنة طاليس المطبقة في المثلث OBF لدينا : (BF) // (AE) .

تطبيق 3 : 71 صفحة 243

أنشئ العدد $\frac{6}{7}$

حل التطبيق



ليكن (O,I) معلما للمستقيم (d) ،

المستقيم (d') يقطع (d) في النقطة O .

نعين النقطتين A و B على المستقيم (d') حيث

OA = 6 و OB = 7 ،

نرسم من A المستقيم الموازي للمستقيم (BI) حسب مبرهنة طاليس لدينا :

$\frac{6}{7}=\frac{OC}{OI}=\frac{OA}{OB}$ إذن : $OC=\frac{6}{7}$

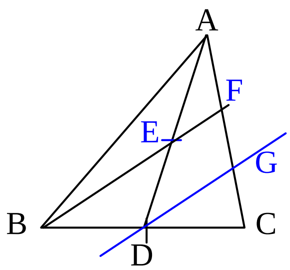
تطبيق

ABC مثلث ، النقطة D منتصف [BC] والنقطة E منتصف [AD] و F نقطة من [AC] حيث $AF=\frac{1}{3}AC$

أ) بين أن النقط B ، E ، F في استقامية.

ب) بين أن BF = 4 EF .

حل التطبيق



أ) تبيان أن النقط B ، E ، F في استقامية.

نرسم من D الموازي للمستقيم (EF) يقطع (AC) في G

في المثلث ADG لدينا (EF)//(DG) و E منتصف [AD]

إذن F هي منتصف [AG] و DG = 2EF ومنه : AF = FG = GC

وبالتالي G منتصف [FC] ، وفي المثلث BCF لدينا كذلك D منتصف [BC]

إذن : (BF) // (DG) و BF = 2DG

ومنه : (BF) // (EF) بما أن للمستقيمين نقطة مشتركة فإن النقط B ، E ، F في استقامية.

ب) تبيان أن BF = 4 EF .

لدينا : BF = 2DG و DG = 2EF إذن : BF = 4 EF .

الزوايا والدائرة

الكفاءات المستهدفة : الزوايا والدائرة .

نشاط :

أرسم دائرة (C) مركزها O ونصف قطرها 5 cm ، و [AB] قطر فيها ،

و M نقطة من الدائرة حيث AM = 4 cm .

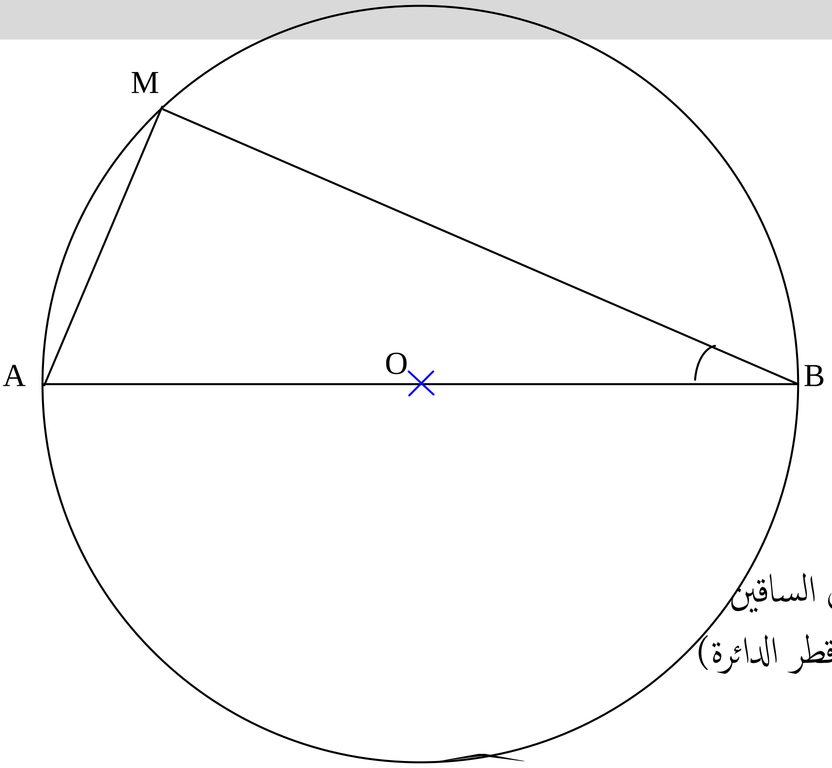
أ) باستعمال ال

ب) آلة الحاسبة والتدوير إلى 0,1 أحسب قيس الزاوية ABM ، استنتج قيس الزاوية MAB .

ج) ما نوع المثلث AOM ؟ واحسب أقياس زواياه.

د) استنتج العلاقة بين الزاويتين ABM و AOM .

حل النشاط :



أ) حساب قيس الزاوية ABM :

المثلث ABM قائم في M

لأن ضلعه [AB] هو قطر للدائرة (C) .

ومنه : $\sin\widehat{ABM}=\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{4}{10}=0,4$

إذن بالحاسبة وبالتدوير إلى 0,1 نجد :

$\widehat{ABM}=23,6°$

استنتاج قيس الزاوية MAB

$\widehat{MAB}=90-23,6=66,4°$

ب) نوع المثلث AOM : هو متساوي الساقين

رأسه O لأن : OM = OA (نصفي قطر الدائرة)

حساب أقياس زوايا المثلث AOM :

$\widehat{MAO}=\widehat{AMO}=66,4°$ و $\widehat{AOM}=180-2\times 66,4=47,2°$

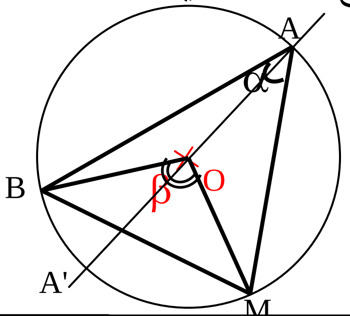
ج) استنتاج العلاقة بين الزاويتين ABM و AOM .

لدينا : 2×23,6 = 47,2 ومنه $\widehat{AOM}=2\widehat{ABM}$

نشاط إضافي :

A ، B ، M ثلاث نقط متمايزة من دائرة (c) مركزها O ، المستقيم (AO) يقطع الدائرة (c) في النقطة 'A.

نضع $\widehat{MAB}=\alpha$ و $\widehat{MOB}=\beta$.



أ) بين أن كل من المثلثين AOM و BOM متساوي الساقين ،

ثم عبر عن قيس الزاوية $\widehat{MAA'}$ بدلالة قيس الزاوية $\widehat{MOA'}$ ،

وعن قيس الزاوية $\widehat{BAA'}$ بدلالة قيس الزاوية $\widehat{BOA'}$.

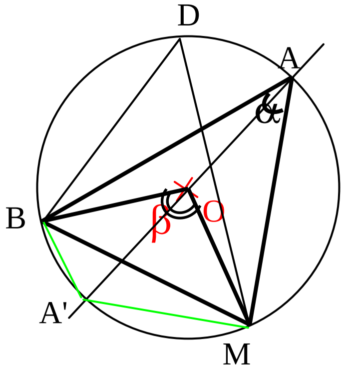
ب) استنتج العلاقة بين α و β.

ج) عبر عن الزاوية $\widehat{BA'M}$ بدلالة β ، ثم بدلالة α،

واستنتج العلاقة بين الزاويتين $\widehat{BA'M}$ و $\widehat{BAM}$.

د) D نقطة من القوس الكبرى $\widehat{BM}$ استنتج مما سبق العلاقة بين الزاويتين $\widehat{BAM}$ و $\widehat{BDM}$.

حل النشاط :



أ) تبيان أن كل من المثلثين AOM و BOM متساوي الساقين ،

لدينا $OA = OM = OB$ (أنصاف أقطار الدائرة)

إذن المثلثان AOM و BOM كل منهما متساوي الساقين .

- قيس الزاوية $\widehat{MAA'}$ بدلالة قيس الزاوية $\widehat{MOA'}$:

لدينا $\widehat{MOA'}$ زاوية خارجية في المثلث AOM

ومنه: $\widehat{MOA'} = \widehat{MAO} + \widehat{OMA}$ وبما أن $\widehat{MAO} = \widehat{OMA} = \widehat{MAA'}$

فإن : $\widehat{MOA'} = 2\widehat{MAA'}$

- قيس الزاوية $\widehat{BAA'}$ بدلالة قيس الزاوية $\widehat{BOA'}$:

لدينا $\widehat{BOA'}$ زاوية خارجية في المثلث BOA ومنه

$\widehat{BOA'} = \widehat{BAO} + \widehat{OBA}$ وبما أن $\widehat{BAO} = \widehat{OBA} = \widehat{BAA'}$ فإن : $\widehat{BOA'} = 2\widehat{BAA'}$.

ب) استنتاج العلاقة بين α و β.

$\widehat{BOM} = \widehat{BOA'} + \widehat{A'OM}$ ومنه : $\widehat{BOM} = 2\widehat{BAA'} + 2\widehat{A'AM}$ إذن : $\widehat{BOM} = 2\widehat{BAM}$

وبالتالي : $\beta = 2\alpha$

ج) عبر عن الزاوية $\widehat{BA'M}$ بدلالة β ، ثم بدلالة α،

باستعمال نفس الطريقة السابقة نجد : $\widehat{BA'M} = 180° - \frac{1}{2}\beta$ و $\widehat{BA'M} = 180° - \alpha$

واستنتج العلاقة بين الزاويتين $\widehat{BA'M}$ و $\widehat{BAM}$.

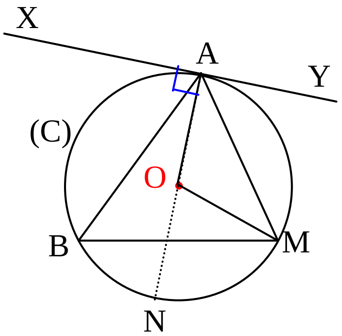
$\widehat{BA'M} + \alpha = 180°$ أي : $\widehat{BA'M} + \widehat{BAM} = 180°$ ومنه : $\widehat{BA'M}$ و $\widehat{BAM}$ زاويتان متكاملتان .

د) D نقطة من القوس الكبرى $\widehat{BM}$ استنتج مما سبق العلاقة بين الزاويتين $\widehat{BAM}$ و $\widehat{BDM}$.

مما سبق نستنتج أن : $\widehat{BDM} = \frac{\beta}{2} = \alpha$ ومنه : $\widehat{BDM} = \widehat{BAM}$

مفردات ومصطلحات:

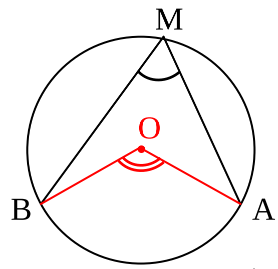
(C) دائرة مركزها O ، و A ، B ، M ، N نقط من الدائرة (C) حيث O تنتمي إلى [AN].



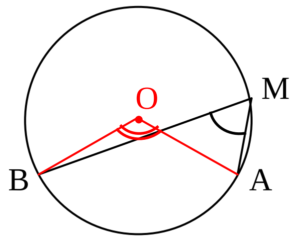
- القطعة [AN] تسمى قطرا ، وكل من القطع [AB]، [AM]، [BM] تسمى وترا في الدائرة (C).
- النقطتان المتمايزتان A و B تعينان على الدائرة (C) قوسين كل منها نرمز لها بالرمز $\overset{\frown}{AB}$.
- (XY) مستقيم يشترك مع الدائرة (C) في نقطة وحيدة A ، يسمى مماسا للدائرة (C) عند النقطة A ويكون عموديا على (AO).
- الزاوية $\widehat{AOM}$ رأسها مركز الدائرة تسمى زاوية مركزية ، نقول إنها تحصر القوس $\overset{\frown}{AM}$.
- الزاوية $\widehat{ABM}$ رأسها نقطة من الدائرة تسمى زاوية محيطية ، نقول إنها تحصر القوس $\overset{\frown}{AM}$.
- الزاوية $\widehat{XAB}$ تسمى زاوية محيطية ، نقول إنها تحصر القوس $\overset{\frown}{AB}$.

مبرهنة : في كل دائرة ، الزاوية المركزية تساوي ضعف الزاوية المحيطية التي تحصر معها نفس القوس.

مثال : A ، B ، M ثلاث نقط متمايزة من دائرة مركزها O.

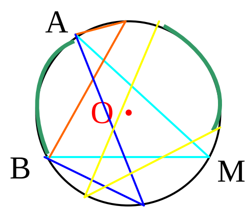


$\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$

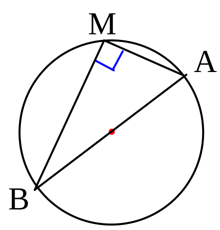


نتائج:

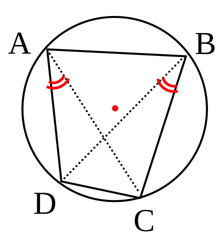
1) الزوايا المحيطية التي تحصر نفس القوس أو أقواسا متقايسة تكون متقايسة. (شكل 1)
2) إذا كانت القطعة [AB] قطرا لدائرة فإنه من أجل كل نقطة M من هذه الدائرة وتختلف عن A و B ، يكون المثلث ABM قائما في M. (شكل 2)
3) تكون رؤوس الرباعي المحدب ABCD من نفس الدائرة إذا كانت : $\widehat{DAC} = \widehat{DBC}$. (شكل 3)
4) يكون الرباعي المحدب ABCD دائريا إذا كانت زاويتان متقابلتان متكاملتين. (شكل 4)



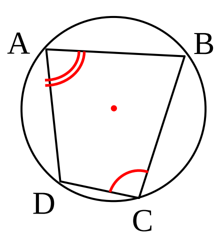
الشكل (1)



الشكل (2)



الشكل (3)



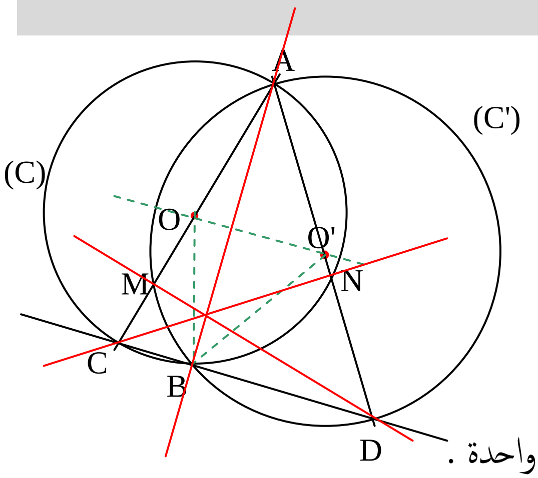
الشكل (4)

تمرين :

(C) و (C') دائرتان مركزهما O و O' متقاطعتان في نقطتين A وB ،
[AC] قطر في (C) و يقطع (C') في النقطة M ، و [AD] قطر في (C') و يقطع (C) في النقطة N .

1. أرسم شكلا مناسبا .
2. بين أن النقط C ، B ، D في استقامية .
3. بين أن المستقيمات (AB) ، (CN) ، (MD) متقاطعة في نقطة واحدة .

الحل:



2) تبيان أن النقط C ، B ، D في استقامية .

$\widehat{ABC}=90°$ تحصر نصف الدائرة (C)

$\widehat{ABD}=90°$ تحصر نصف الدائرة (C')

ومنه : $\widehat{CBD}=180°$

وبالتالي : (CD) // (CB) ومنه : النقط C ، B ، D في استقامية.

3) تبيان أن المستقيمات (AB) ، (CN) ، (MD) متقاطعة في نقطة واحدة .

لدينا المثلث ANC قائم في N لأن الزاوية $\widehat{ANC}$ تحصر نصف الدائرة (C) ومنه : $(CN)\perp(AD)$

ولدينا المثلث ABD قائم في B لأن الزاوية $\widehat{ABD}$ تحصر نصف الدائرة (C') ومنه : $(AB)\perp(CD)$

ولدينا المثلث AMD قائم في M لأن الزاوية $\widehat{AMD}$ تحصر نصف الدائرة (C') ومنه : $(DM)\perp(AC)$

إذن المستقيمات (AB) ، (CN) ، (MD) هي ارتفاعات في المثلث ACD وبالتالي تتقاطع في نقطة واحدة .

المثلثات المتقايسة والمثلثات المتشابهة :

الكفاءات المستهدفة : المثلثات المتقايسة والمثلثات المتشابهة .

[1 تقايس مثلثين :

تعريف :

نقول عن مثلثين أنهما متقايسان إذا كانا قابلين للتطابق.

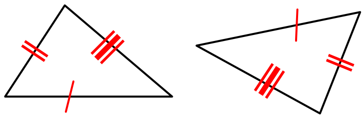
ملاحظة :

إذا كان تطابق مثلثين بالسحب أو التدوير فإن تقايسهما مباشر وإذا كان بقلب أحدها فإنه غير مباشر .

نتيجة :

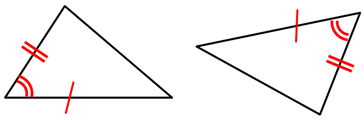
المثلثان المتقايسان أطوال أضلاعهما متساوية مثنى ، مثنى و زواياهما متساوية مثنى ، مثنى.

خواص : [حالات تقايس مثلثين]



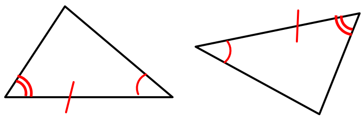
خاصية 1 :

يتقايس مثلثان إذا كانت أطوال أضلاعهما متساوية مثنى ، مثنى.



خاصية 2 :

يتقايس مثلثان إذا تقايست زاوية والضلعان اللذان يحصرانها من أحد المثلثين مع زاوية الضلعين اللذين يحصرانها من المثلث الآخر.

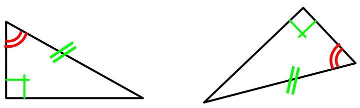


خاصية 3 :

يتقايس مثلثان إذا تقايس ضلع والزاويتان المجاورتان له من أحد المثلثين مع ضلع والزاويتين المجاورتين له من المثلث الآخر.

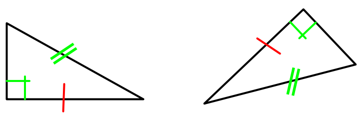
حالات خاصة : [تقايس مثلثين قائمين]

مثلثان قائمان وتراهما BC و B'C' متقايسان



خاصية 1 :

يتقايس المثلثان ABC وA'B'C' إذا تقايست زاوية غير القائمة من الأول مع زاوية غير القائمة من الثاني.



خاصية 2 :

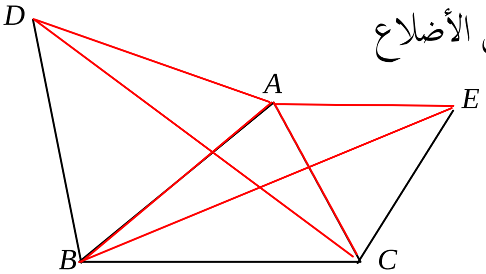
يتقايس المثلثان ABC وA'B'C' إذا تقايس ضلع للزاوية القائمة من الأول مع ضلع للزاوية القائمة من الثاني.

تطبيق 1

ABC مثلث ، أنشئ على ضلعيه [AB] و [AC] مثلثين ABD و ACE على الترتيب ، حيث كل منهما متقايس الأضلاع.

بين أن المثلثين ACD و ABE متقايسان واستنتج أن : BE = CD .

الحل:



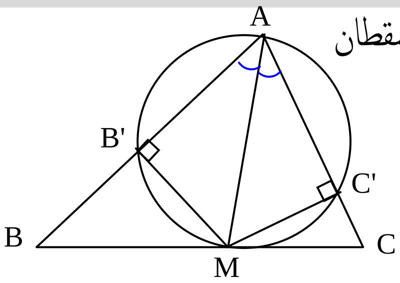
لدينا : $\widehat{CAE}=\widehat{BAD}=60°$ لأن كل من المثلثين ABD و ACE متقايس الأضلاع

ومنه : $\widehat{CAE}+\widehat{CAB}=\widehat{BAD}+\widehat{CAB}$ إذن : $\widehat{BAE}=\widehat{CAD}$

ولدينا كذلك : AB = AD و AE = AC

إذن المثلثان ACD و ABE متقايسان . ومنه نستنتج : BE = CD .

تطبيق



ABC مثلث ، M نقطة تقاطع منصف زاوية الرأس A و [BC] ، 'C ، 'B المسقطان العموديان للنقطة M على [AB] و [AC] على الترتيب.

أ) بين أن المثلثين AB'M ، AC'M متقايسان.

ب)بين أن النقط A ، 'B ، M ، 'C تنتمي إلى دائرة واحدة يطلب تعيين عناصرها.

ج) ما نوع الرباعي AB'MC' عندما يكون المثلث ABC قائما في A .

الحل:

أ) بين أن المثلثين AB'M ، AC'M متقايسان.

لدينا : المثلثان AB'M ، AC'M قائمان ولهما وتر مشترك [AM] و $\widehat{B'AM}=\widehat{C'AM}$ إذن هما متقايسان.

ب) بين أن النقط A ، 'B ، M ، 'C تنتمي إلى دائرة واحدة يطلب تعيين عناصرها.

لدينا $\widehat{AB'M}$ و $\widehat{AC'M}$ متقابلتان ومتكاملتان في الرباعي AB'MC' إذن هو دائري في الدائرة ذات القطر [AM] ومركزها منتصف [AM].

ج) ما نوع الرباعي AB'MC' عندما يكون المثلث ABC قائما في A .

إذا كان المثلث ABC قائما في A فإن للرباعي AB'MC' ثلاث زوايا قائمة وبالتالي هو مستطيل

وبما أن القطر [AM] هو منصف الزاوية ذات الرأس A فإن الرباعي AB'MC' هو مربع.

نشاط:

ADE و'A'B'C مثلثان حيث : AD = A'B' و AE = A'C' و $\widehat{A}=\widehat{A'}$

نعين نقطة B من (AD) و نقطة C من (AE) حيث (BC) // (DE) .

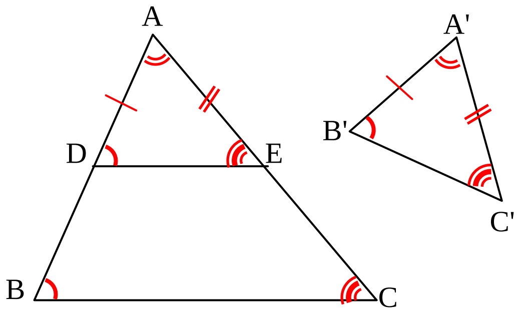
1) تحقق من تقايس المثلثين ADE و'A'B'C .واستنتج الزوايا المتقايسة والضلعين المتقايسين.

2) بين أن زوايا المثلثين 'A'B'C وABC متقايسة مثنى ، مثنى.

3) هل المثلثين ADE وABC متقايسان ؟ ماذا تلاحظ عنهما ؟

4) برهن أن : $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$.

حل النشاط :



1) لدينا : AD = A'B' و AE = A'C' و $\widehat{A}=\widehat{A'}$

إذن المثلثان ADE وA'B'C' هما متقايسان

وبالتالي : $\widehat{D}=\widehat{B'}$ ، $\widehat{E}=\widehat{C'}$ و DE = B'C'

2) لدينا : (DE) // (BC) إذن : $\widehat{D}=\widehat{B}$ ، $\widehat{E}=\widehat{C}$ بالتماثل.

ومنه : $\widehat{B}=\widehat{B'}$ ، $\widehat{C}=\widehat{C'}$ ولدينا $\widehat{A}=\widehat{A'}$ من المعطيات

3) إذا كانت النقطتين B و D مختلفتين فإن المثلثين ADE وABC غير متقايسين.

نلاحظ أن المثلث A'B'C' هو تصغير (أو تكبير) للمثلث ABC . نقول عنهما أنهما متشابهان.

4) تبيان أن $\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{A'C'}{AC}=\dfrac{B'C'}{BC}$

لدينا :(ED) // (BC) وبتطبيق مبرهنة طاليس نجد $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{DE}{BC}$

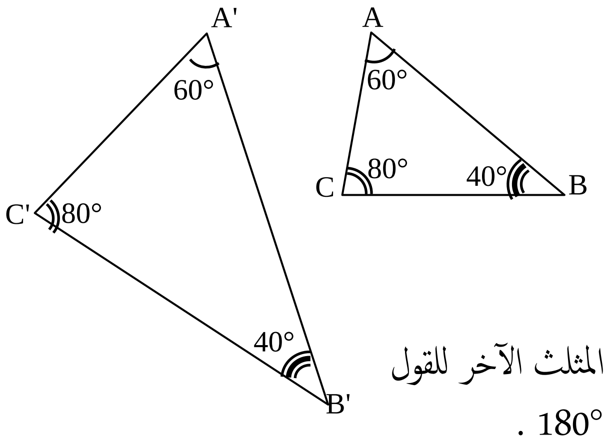
وبما أن : AD = A'B' و AE = A'C' و DE = B'C' فإن $\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{A'C'}{AC}=\dfrac{B'C'}{BC}$.

2] تشابه مثلثين :

تعريف :

نقول عن مثلثين أنهما متشابهان إذا كانت زوايا أحدهما تساوي زوايا الآخر.

مثال :



المثلثان ABC و A'B'C' متشابهان.

الرؤوس المتماثلة : A B C

الأضلاع المتماثلة : A' B' C'

[AB] و [A'B'] ؛ [AC] و [A'C'] ؛ [BC] و [B'C'].

ملاحظات :

1 - يكفي تساوي زاويتين من أحد المثلثين مع زاويتين من المثلث الآخر للقول إن المثلثين متشابهان ، ذلك لأن مجموع زوايا المثلث يساوي 180° .

2 - إذا كان أحد مثلثين تصغير (أو تكبير) للآخر فإن هذين المثلثين متشابهين.

3 - المثلثان المتقايسان هما مثلثان متشابهان والعكس ليس صحيحا.

مبرهنة : المثلثان المتشابهان أضلاعهما المتماثلة متناسبة.

نسبة تشابه مثلثين :

تعريف :

ليكن ABC و A'B'C' مثلثين متشابهين ، نسمي نسبة التشابه هذين المثلثين العدد الحقيقي الموجب غير المعدوم k

حيث : $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=k$

ملاحظات :

لتكن k نسبة تشابه المثلثين ABC و A'B'C' حيث $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=k$

1 - $\frac{1}{k}$ هي أيضا نسبة تشابه المثلثين ABC و A'B'C' .

2 -إذا كان $0 < k < 1$ فإن المثلث A'B'C' هو تصغير للمثلث ABC ونسمي k نسبة (أو معامل) التصغير .

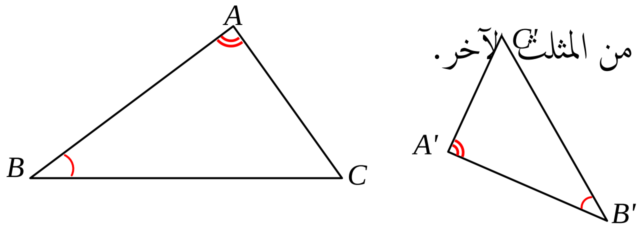
3 -إذا كان $k > 1$ فإن المثلث A'B'C' هو تكبير للمثلث ABC ونسمي k نسبة (أو معامل) التكبير .

4 -إذا كان $k = 1$ فإن المثلث A'B'C' يقايس المثلث ABC .

خواص : [حالات تشابه مثلثين]

خاصية 1:

يتشابه مثلثان إذا تقايست زاويتان من أحد المثلثين مع زاويتين من المثلث الآخر.



مثال : بما أن : $\widehat{A}=\widehat{A'}$ و $\widehat{B}=\widehat{B'}$

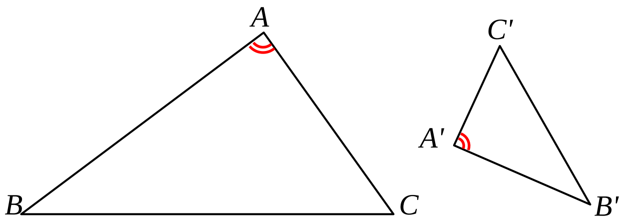
فإن المثلثان ABC و A'B'C' متشابهين .

ملاحظة:

المثلث A'B'C' هو تصغير للمثلث ABC

خاصية 2:

يتشابه مثلثان إذا تقايست زاوية من أحد المثلثين مع زاوية من المثلث الآخر وكان طولا الضلعين الذين يحصران إحدى الزاويتين متناسبين مع طولي الضلعين الذين يحصران الزاوية الأخرى.



مثال : $\widehat{A}=\widehat{A'}$ و A'C' = 1,5 cm و A'B' = 2 cm

و AB = 4 cm و AC = 3 cm

لدينا : $\frac{AB}{A'B'}=\frac{4}{2}=2$ و $\frac{AC}{A'C'}=\frac{3}{1,5}=2$

إذن : $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=2$ ومنه المثلثان ABC و A'B'C' متشابهان .

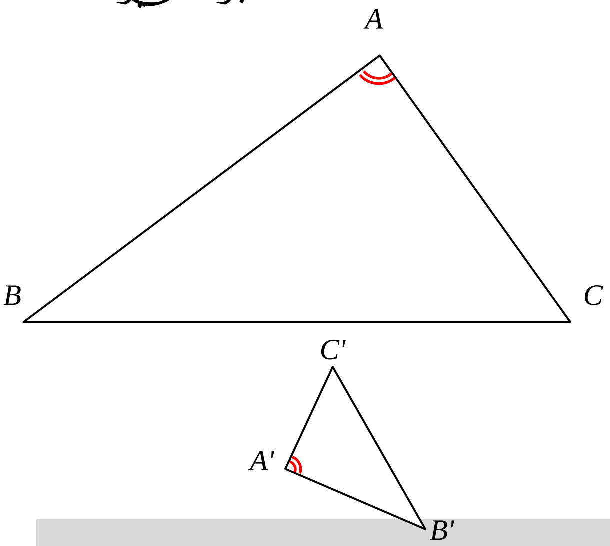
ملاحظة:

المثلث ABC هو تكبير للمثلث A'B'C' ونسبة التكبير هي 2 .

خاصية 3:

يتشابه مثلثان إذا كان أطوال الأضلاع المتماثلة فيهما متناسبة.

مثال :



و A'C' = 1,5 cm و A'B' = 2 cm و B'C' = 2,4 cm

و AC = 4,5 cm و AB = 6 cm و BC = 7,2 cm

لدينا : $\frac{AB}{A'B'}=\frac{6}{2}=3$ و $\frac{AC}{A'C'}=\frac{4,5}{1,5}=3$

و $\frac{BC}{B'C'}=\frac{7,2}{2,4}=3$ ومنه : $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=3$

إذن : المثلثان ABC و A'B'C' متشابهان .

ملاحظة:

المثلث ABC هو تكبير للمثلث A'B'C' ونسبة التكبير هي 3 .

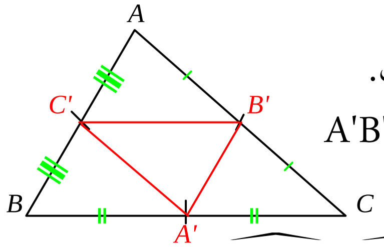
تطبيق:

ABC مثلث ، A' ، B' ، C' منتصفات أضلاعه [BC] ، [AC] ، [AB] على الترتيب.

أ) بين أن المثلثين ABC و A'B'C' متشابهان ، وعين نسبة التشابه.

ب) أحسب النسبة $\frac{S(ABC)}{S(A'B'C')}$.

الحل:



أ) تبيان أن المثلثين ABC و A'B'C' متشابهان ، وتعيين نسبة التشابه.

لدينا : A' ، B' ، C' منتصفات أضلاعه [BC] ، [AC] ، [AB] على الترتيب.

إذن حسب نتيجة مبرهنة طاليس فإن : (A'B') // (AB) و A'B' = AC' = BC'

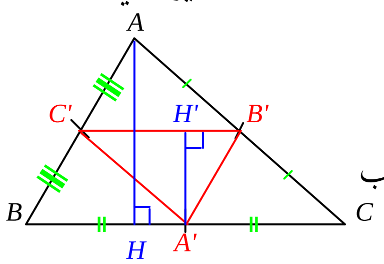
ومنه : الرباعي AB'A'C' و BA'B'C' متوازيا أضلاع

إذن كل زاويتان متقابلتان هما متقايستان أي : $\widehat{C'AB'}=\widehat{C'A'B'}$ و $\widehat{C'BA'}=\widehat{C'B'A'}$

ومنه : $\widehat{CAB}=\widehat{C'A'B'}$ و $\widehat{CBA}=\widehat{C'B'A'}$ إذن المثلثان ABC و A'B'C' متشابهان.

النقط المتماثلة : A ، B ، C

A' ، B' ، C' $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=2$ ومنه نسبة التشابه (التكبير) هي 2 .



ب) حساب النسبة $\frac{S(ABC)}{S(A'B'C')}$.

H و H' هما المسقطان العموديان لـ A و A' على (BC) و(B'C') على الترتيب

المثلثان القائمان AHB و A'H'B' متشابهان لأن لهما زاويتان قائمتان

و $\widehat{CBA}=\widehat{C'B'A'}$ أي : $\widehat{HBA}=\widehat{H'B'A'}$ ومنه $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AH}{A'H'}=\frac{BH}{B'H'}=2$ ومنه: AH = 2 A'H'

مساحة(ABC) = 2 AH × BC = 2 (2A'H')(2B'C') = 4(2A'H'×B'C') = 4×مساحة(A'B'C').

إذن : $\frac{S(ABC)}{S(A'B'C')}=4$.

التحويلات النقطية:

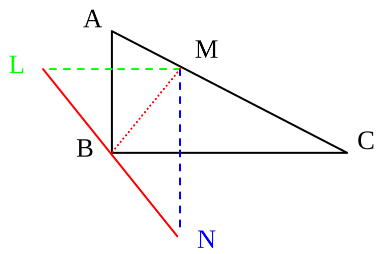
نشاط

ABC مثلث قائم في B ، M نقطة من وتره [AC] . النقطتان L و N نظيرتا النقطة M بالنسبة إلى (AB) و (BC) على الترتيب.

ماذا تمثل النقطة B بالنسبة إلى [LN]. ما القول عن النقطتين L و N بالنسبة إلى B.

نرسم النقطة D بحيث يكون الرباعي ABDC متوازي الأضلاع. قارن بين الشعاعين $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BD}$ ، ماذا تمثل النقطة D بالنسبة إلى النقطة B.

حل النشاط :



L نظيرة M بالنسبة إلى (AB) إذن المستقيم (AB) هو محور القطعة [LM]

ومنه : المثلث BLM متساوي الساقين رأسه B إذن BL = BM

و (AB) يكون منصف الزاوية $L\hat{B}M$ أي : $L\hat{B}M = 2\times A\hat{B}M$

N نظيرة M بالنسبة إلى (BC) إذن المستقيم (BC) هو محور القطعة [MN]

ومنه : المثلث BNM متساوي الساقين رأسه B إذن BN = BM

و (BC) يكون منصف الزاوية $M\hat{B}N$ أي : $M\hat{B}N = 2\times M\hat{B}C$

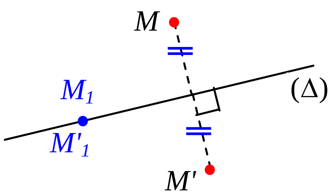
وبالتالي : BN = BL

ولدينا : $L\hat{B}N = L\hat{B}M + M\hat{B}N = 2\times A\hat{B}M + 2\times M\hat{B}C = 2(A\hat{B}M + M\hat{B}C) = 2A\hat{B}C = 180°$

ومنه L ، B ، N على استقامة واحدة. وبالتالي : النقطة B هي منتصف القطعة [LN].

1] تعاريف :

تعريف التناظر المحوري :

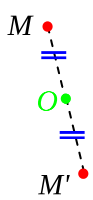


(Δ) مستقيم ثابت ، التناظر المحوري بالنسبة إلى المستقيم (Δ) هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ، النقطة M' من المستوي حيث :

إذا كان M تنتمي إلى (Δ) فإن M' تكون منطبقة على M ،

وإذا كانت M لا تنتمي إلى (Δ) فإن : (Δ) يكون محور القطعة [MM'].

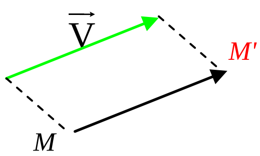
تعريف التناظر المركزي :



O نقطة ثابتة من المستوي ، التناظر المركزي بالنسبة إلى النقطة O هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ، النقطة M' من المستوي حيث :

تكون النقطة O منتصف القطعة [MM'].

تعريف الانسحاب :

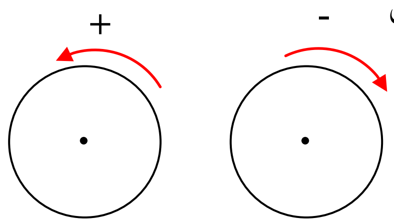


$\vec{V}$ شعاع ثابت من المستوي ، الانسحاب الذي شعاعه $\vec{V}$ هو التحويل النقطي الذي

يرفق بكل نقطة M من المستوي ، النقطة M' من المستوي حيث : $\overrightarrow{MM'} = \vec{V}$

ملاحظة : إذا كان $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$ فإن الرباعي ABMM' هو متوازي أضلاع.

توجيه المستوي :



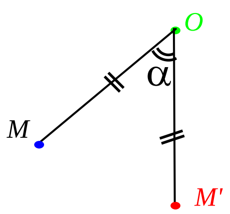
لتكن (C) دائرة من المستوي ، يمكن أن نحدد على هذه الدائرة اتجاهين و اتجاهين فقط ، أحدهما عكس اتجاه حركة عقارب الساعة ويسمى الاتجاه المباشر (أو الاتجاه الموجب) ، والآخر مثل اتجاه حركة عقارب الساعة ويسمى الاتجاه غير المباشر (أو الاتجاه السالب).

تعريف : توجيه المستوي هو اختيار اتجاه واحد على كل دوائر هذا المستوي.

ملاحظة : لتوجيه مستو عادة ما نختار الاتجاه المباشر (عكس اتجاه حركة عقارب الساعة).

تعريف الدوران :

O نقطة ثابتة من مستو موجه ، و α زاوية معلومة ، الدوران الذي مركزه النقطة O وزاويته α في الاتجاه المباشر هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ، النقطة M' من المستوي حيث :



إذا كانت M منطبقة على O فإن النقطة M' تكون منطبقة على O.

وإذا كانت M تختلف عن النقطة O فإن : OM' = OM و $\widehat{MOM'} = \alpha$

والثلاثية (O , M , M') مباشرة.

ملاحظة : في كل حالة النقطة M' تسمى صورة النقطة M بالتحويل النقطي .

2) **خواص :**

النقط الصامدة :

تعريف : نقول عن نقطة أنها صامدة بتحويل نقطي إذا كانت منطبقة على صورتها بواسطة هذا التحويل.

أمثلة :

- ✓ التناظر المحوري الذي محوره المستقيم (Δ): كل نقط المستقيم (Δ) هي نقط صامدة بهذا التحويل.
- ✓ التناظر المركزي الذي مركزه النقطة A : يقبل نقطة صامدة وحيدة وهي المركز A.
- ✓ الانسحاب الذي شعاعه غير معدوم لا يقبل نقط صامدة.
- ✓ الدوران الذي مركزه O وزاويته α حيث : $\alpha \neq k \times 180°$ و k عدد طبيعي ، يقبل نقطة صامدة وحيدة وهي المركز O.

ملاحظة :

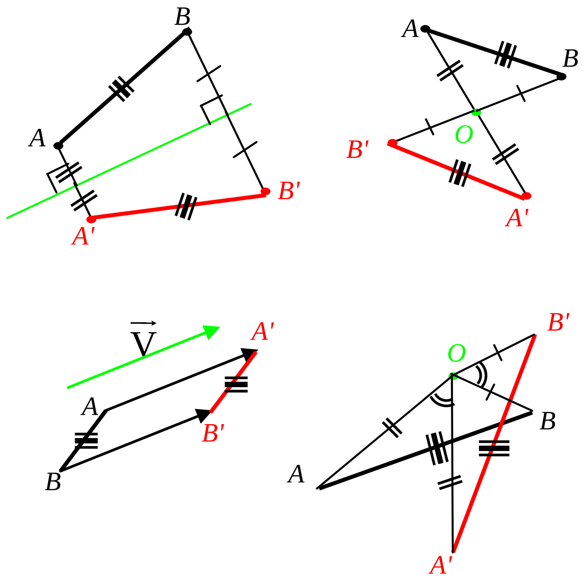
إذا كانت $\alpha = 2k \times 180°$ و k عدد طبيعي ، في هذه الحالة التحويل النقطي يسمى التحويل المطابق في المستوي وكل نقط المستوي هي صامدة بهذا التحويل.

حفظ المسافات (التقايس)

تعريف :

التقايس هو كل تحويل نقطي الذي يرفق بكل ثنائية نقطية (A , B) الثنائية النقطية (A' , B') حيث :

$A'B' = AB$. نقول عنه أنه يحافظ على المسافات.



أمثلة :

✓ A' و B' صورتا A و B على الترتيب بالتناظر المحوري الذي محوره المستقيم (Δ) : لدينا : $A'B' = AB$

✓ A' و B' صورتا A و B على الترتيب بالتناظر المركزي الذي مركزه النقطة O : لدينا $A'B' = AB$

✓ A' و B' صورتا A و B على الترتيب بالانسحاب الذي شعاعه غير معدوم $\vec{V}$: لدينا $A'B' = AB$

✓ A' و B' صورتا A و B على الترتيب الدوران الذي مركزه O وزاويته α : لدينا $A'B' = AB$

مبرهنة :

كل من التناظر المحوري، التناظر المركزي، الانسحاب، الدوران، هو تقايس (يحافظ على المسافات).

نتيجة :

يتقايس مثلثان إذا كان أحدهما صورة للمثلث الآخر بانسحاب ، أو تناظر محوري ، أو تناظر مركزي ، أو دوران.

ملاحظة :

إذا كان مثلثان يتطابق بالسحب أو التدوير فنقول عن تقايسهما أنه مباشر ، وإن كان لا يتطابق إلا بعد قلب أحدهما فنقول عن تقايسهما أنه غير مباشر.

- حفظ أقياس الزوايا :

مبرهنة :

صورة زاوية بتقايس هي زاوية تقايسها.

- حفظ الاستقامية :

مبرهنة :

إذا كانت A ، B ، C في استقامية فإن صورها A' ، B' ، C' ، بتقايس ، تكون في استقامية.

نتائج :

- صورة مستقيم بتقايس (تناظر محوري ، تناظر مركزي ، انسحاب ، دوران) هو مستقيم.
- صورة مستقيم بتناظر مركزي أو انسحاب هي مستقيم موازيا له
- صورة مستقيم (D) بتناظر محوري بالنسبة إلى (Δ) هي المستقيم (D') حيث :

إذا كان (D) و (Δ) متوازيين فإن (D) يوازي (D') وإذا كان (D) و (Δ) متقاطعان فإن (D) يقطع (D') في نفس النقطة.

- صورة مستقيم (D) بدوران هي مستقيم (D') حيث إحدى الزوايا المحصورة بين (D) و (D') تقايس زاوية الدوران.

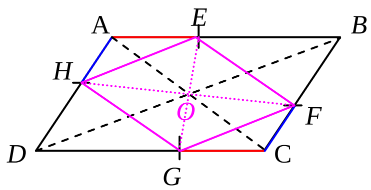
تطبيق :

ABCD متوازي أضلاع. E ، F ، G ، H نقط من [AB] ، [BC] ، [CD] ، [AD] على الترتيب حيث :
AE = CG و AH = CF.

أ) ما هو التحويل النقطي الذي يحول A إلى C ويحول B إلى D ؟

ب) ما هي طبيعة الرباعي EFGH ؟

الحل :



أ) تعيين التحويل النقطي الذي يحول A إلى C ويحول B إلى D :

ABCD متوازي أضلاع إذن قطراه [AC] ، [BD] متناصفان في النقطة O.

إذن C هي صورة A و D هي صورة B بالتناظر المركزي الذي مركزه O.

ب)طبيعة الرباعي EFGH :

الطريقة 1 :

(AE) // (GC) و AE = GC إذن الرباعي AECG متوازي أضلاع ومنه قطراه [AC] ، [EG] متناصفان في النقطة O. وبالتالي : G هي صورة E بالتناظر المركزي الذي مركزه O.

(AH) // (FC) و AH = FC إذن الرباعي AFCH متوازي أضلاع ومنه قطراه [AC] ، [HF] متناصفان في النقطة O. وبالتالي : H هي صورة F بالتناظر المركزي الذي مركزه O.

لدينا G هي صورة E بالتناظر المركزي الذي مركزه O و H هي صورة F بالتناظر المركزي الذي مركزه O
إذن [HG] هي صورة [EF] بالتناظر المركزي الذي مركزه O ومنه : (HG) // (EF)
والتناظر المركزي يحافظ على المسافات أي : HG = EF وبالتالي الرباعي EFGH هو متوازي أضلاع.

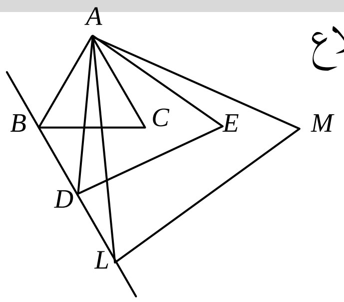
الطريقة 2 :

نقارن بين المثلثين AEH و CFG ثم بين BEF و DGH.

ونحصل على النتيجتين : EH = FG و HG = EF.

تطبيق

يمثل الشكل المقابل ثلاثة مثلثات ABC ، ADE ، ALM كل منها متقايسة الأضلاع حيث النقط B ، D ، L في استقامية. بين أن النقط C ، E ، M في استقامية.



الحل :

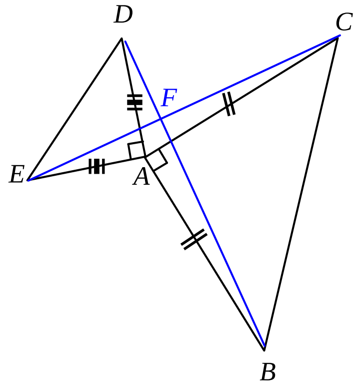
بما أن المثلثات متقايسة الأضلاع فإن : AB = AC ، AD = AE ، AL = AM

و $\widehat{BAC} = \widehat{DAE} = \widehat{LAM} = 60°$

ومنه : C ، E ، M هي صور B ، D ، L بالدوران الذي مركزه A وزاويته 60°.

وبما أن الدوران يحافظ على الاستقامية و النقط B ، D ، L في استقامية فإن النقط C ، E ، M في استقامية كذلك.

تطبيق3:



ABC و ADE مثلثان كل منهما قائم ومتساوي الساقين كما هو مبين في الشكل ،
[CE] و [BD] متقاطعان في النقطة F.

بين باستعمال الدوران أن المستقيمين (BD) و (CE) متعامدان.

الحل:

نوجه المستوي في الاتجاه المباشر ، ونعتبر الدوران الذي مركزه A وزاويته 90°.

إذن صورة B هي C و صورة D هي E بهذا الدوران

ومنه صورة المستقيم (BD) هي المستقيم (CE) بنفس الدوران إذن إحدى زوايا المحصورة بين المستقيمين (BD) و(CE) تقايس زاوية الدوران التي هي 90° ومنه : المستقيمان (BD) و (CE) متعامدان.

تطبيق [تركيب تناظرين بالنسبة إلى نقطتين متمايزتين]

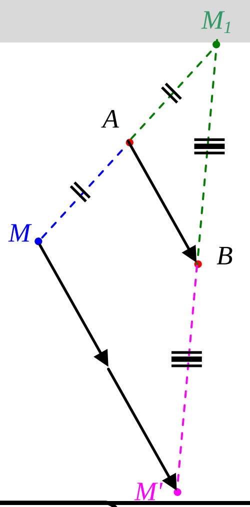
A ، B نقطتان ثابتتان ومتمايزتين ، علم نقطة M ، ثم أنشئ M_1 نظيرتها بالنسبة إلى A ، و M' نظيرة M_1 بالنسبة إلى B.

نقول أن النقطة M' هي صورة M بمركب التناظر بالنسبة إلى A و التناظر بالنسبة إلى B.

أ) عبر عن $\overrightarrow{MM'}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$.

ب)استنتج نوع التحويل الناتج عن مركب تناظرين مركزيين.

الحل:



أ) عبر عن $\overrightarrow{MM'}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$.

لدينا A منتصف $[MM_1]$ و B منتصف $[M_1M']$ إذن حسب نتائج مبرهنة طاليس

نجد : (MM') // (AB) و MM' = 2 AB

بما أن $\overrightarrow{MM'}$ و $\overrightarrow{AB}$ لهما نفس الاتجاه فإن : $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{AB}$

ب)استنتج نوع التحويل الناتج عن مركب تناظرين مركزيين.

لدينا : $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{AB}$ ومنه M' هي صورة M بالانسحاب الذي شعاعه $2\overrightarrow{AB}$

وبالتالي : مركب التناظر المركزي بالنسبة إلى A و التناظر المركزي بالنسبة

إلى B بهذا الترتيب هو انسحاب شعاعه $2\overrightarrow{AB}$.

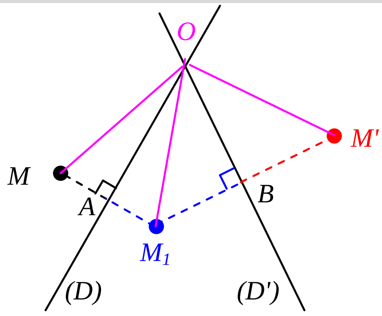
تطبيق [تركيب تناظرين بالنسبة إلى مستقيمين متقاطعين]

(D) و (D') مستقيمان متقاطعان في نقطة O ، علم النقطة M ، ثم أنشئ M_1 نظيرتها بالنسبة إلى (D) ، و M' نظيرة M_1 بالنسبة إلى (D').

أ) بين أن : OM = OM' و ، أن الزاوية $M\hat{O}M'$ ثابتة.

ب) استنتج نوع التحويل الناتج عن مركب تناظرين بالنسبة إلى مستقيمين متقاطعين.

الحل:



أ) بين أن : OM = OM' و ، أن الزاوية $M\hat{O}M'$ ثابتة.

لدينا : (D) محور القطعة $[MM_1]$ ويتقاطعان في A .

إذن : $OM = OM_1$ و $M\hat{O}A = A\hat{O}M_1$

ولدينا : (D') محور القطعة $[M_1M']$ ويتقاطعان في B .

إذن : $OM_1 = OM'$ و $M_1\hat{O}B = B\hat{O}M'$ ومنه : OM = OM'

نوجه المستوي في الاتجاه المباشر ونضع α قياس الزاوية المحصورة بين المستقيمين (D) و (D')

أي $A\hat{O}B = \alpha$.　　$M\hat{O}M' = M\hat{O}M_1 + M_1\hat{O}M' = 2A\hat{O}M_1 + 2M_1\hat{O}B = 2A\hat{O}B = 2\alpha$

ب) استنتج نوع التحويل الناتج عن مركب تناظرين بالنسبة إلى مستقيمين متقاطعين.

لدينا : OM = OM' و $M\hat{O}M' = 2\alpha$ إذن M' هي صورة M بالدوران الذي مركزه O وزاويته 2α

وبالتالي مركب تناظرين بالنسبة إلى مستقيمين متقاطعين هو الدوران الذي مركزه نقطة تقاطع هذين المستقيمين وزاويته ضعف الزاوية المحصورة بينهما.

تجدون هذا الملف في صفحة Top Maths

الاستاذ بوشناق يوسف يتمنى لكم التوفيق