الاحصاء

❶ مفردات الإحصاء

نشاط :

في كل من الحالات المقترحة أدناه ، عين المجموعة والظاهرة أو الخاصية المدروسة عليها .

أ) عدد إخوة وأخوات تلاميذ قسم نهائي محصور بين 1 و 6 .

ب) تبين في قسم للسنة الأولى جدع مشترك أن الوزن المتوسط للتلاميذ هو $51kg$.

ج) توزع الانتماء في النادي الثقافي لتلاميذ مؤسسة تربوية إلى كرة القدم ، كرة السلة ، الموسيقى والمسرح .

د) سجل $100km/h$ معدل سرعة 50 سيارة ، مرت بطريق وطني .

ه) كان الطلب على السيارات بيجو أكثر من رونو وفيات في مؤسسة بيع السيارات .

حل النشاط :

أ) عدد إخوة وأخوات المجموعة هي تلاميذ قسم نهائي والظاهرة المدروسة عليها عدد إخوة وأخوات.

ب) المجموعة هي قسم للسنة الأولى جدع مشترك والظاهرة المدروسة عليها هي الوزن .

ج) المجموعة هي مجموعة تلاميذ مؤسسة تربوية والظاهرة المدروسة هي أنواع النشاطات الموجودة في النادي الثقافي .

د) المجموعة المدروسة هي مجموعة الخمسين سيارة التي مرت بطريق وطني والظاهرة التي تقام عليه الدراسة هي السرعة.

ه) المجموعة هي مجوعة السيارات الموجودة في مؤسسة البيع والخاصية المدروسة هي أنواع السيارات .

المجتمع الإحصائي :

المجموعة التي تقوم عليها الدراسة الإحصائية تسمى مجتمع إحصائي وكل عنصر منها يدعى فرد .

الميزة الإحصائية :

الظاهرة أو الخاصية التي تدرس على مجتمع إحصائي تسمى ميزة إحصائية أو طبع إحصائي .

تنقسم الميزة إلى قسمان : الميزة الكمية والميزة النوعية .

أ) الميزة الكمية :

هي الميزة التي يمكن قياسها وتسمى كذلك متغير إحصائي .

مثلا :

العمر يقاس بالسنوات ، الوزن بالكيلوغرام ، الطول بالمتر ، السرعة بالكيلومتر في الساعة . . .

ب) الميزة النوعية :

هي الميزة التي لا يمكن قياسها .

مثلا :

النادي الثقافي ، أنواع السيارات . . .

نشاط 2 :

إليك علامات قسم 1 ج م ع ت في مادة الرياضيات : 3 ، 3 ، 7 ، 7 ، 19 ، 19 ، 10 ، 10 ، 10 ، 10 ، 16 ، 16 ، 16 ، 16 ، 3 ، 3 ، 5 ، 5 ، 5 ، 13 ، 5 ، 5 ، 5 ، 7 ، 13 ، 13 ، 13 ، 13 ، 16 ، 16 ، 16 ، 10 ، 10 ، 10 ، 10 .

أ) أحسب عدد العلامات المسجلة .

ب) أحسب عدد كل علامة.

ج) أحسب عدد العلامات الموجودة في كل من المجالات التالية : $[0 ; 8[$ ؛ $[8 ; 10[$ ؛ $[10 ; 14[$ ؛ $[14 ; 20[$.

حل النشاط :

أ) عدد العلامات هو : 35 .

ب)

- ✓ عدد العلامة 3 هو : 4
- ✓ عدد العلامة 5 هو : 6
- ✓ عدد العلامة 7 هو : 3
- ✓ عدد العلامة 10 هو : 8
- ✓ عدد العلامة 13 هو : 5
- ✓ عدد العلامة 16 هو : 7
- ✓ عدد العلامة 19 هو : 2 .

يمكن تلخيص النتائج في الجدول رقم 1

المجموع	19	16	13	10	7	5	3	العلامات
35	2	7	5	8	3	6	4	عدد العلامات

ج) عدد العلامات الموجودة في المجال $[0 ; 8[$ هو : 13

عدد العلامات الموجودة في المجال $[8 ; 10[$ هو : 0

عدد العلامات الموجودة في المجال $[10 ; 14[$ هو : 13

عدد العلامات الموجودة في المجال $[14 ; 20[$ هو : 9

يمكن تلخيص هذه النتائج في الجدول رقم 2 .

$[14 ; 20[$	$[10 ; 14[$	$[8 ; 10[$	$[0 ; 8[$	المجالات
9	13	0	13	عدد العلامات

في هذا النشاط الميز المدروسة على مجتمع التلاميذ هي العلامات وهي ميزة كمية ، نلاحظ في الجدول رقم 1 أن كل علامة تقاس بقيمة معزولة ، بينما في الجدول رقم 2 قيم الميزة غير محددة وإنما هي محصورة في مجالات .

الميزة الكمية بدورها تنقسم إلى قسمان : الميزة المتقطعة والتي تأخذ قيمها معزولة والميزة المستمرة التي تأخذ قيمها في

مجالات من الشكل $[a ; b[$ كل منها تسمى فئة.

العدد a يسمى الحد الأدنى للفئة، العدد b حدها الأعلى ، العدد $\frac{a+b}{2}$ يسمى مركز الفئة والعدد $b-a$ يسمى طول الفئة .

التوزيعات التكرارية :

عدد أفراد (عناصر) المجتمع يسمى تكرار المجتمع . وعدد أفراد الموافق لقيمة ميزة يسمى تكرار هذه القيمة في النشاط الثاني تكرار المجتمع هو 35 ، وتكرار العلامة 7 هو العدد 3 .

التواتر لقيمة ميزة

هو حاصل قسمة التكرار المناسب لها على تكرار المجتمع (التكرار الكلي) . يسمى التواتر كذلك بالتكرار النسبي.

التواتر للعلامة 7 هو $0,086 \simeq \frac{3}{35}$.

نفرض أن القيم مرتبة تصاعديا

التكرار المجمع الصاعد لقيمة (أو لفئة)

هو مجموع التكرارات هذه القيمة (أو الفئة) وتكرارات القيم (أو الفئات) السابقة لها .

التكرار المجمع النازل لقيمة (أو لفئة)

هو مجموع التكرارات هذه القيمة (أو الفئة) وتكرارات القيم (أو الفئات) الموالية لها .

مثال:

نعتبر الجدول رقم 1 السابق :

قيم الميزة	3	5	7	10	13	16	19	المجموع
التكرار	4	6	3	8	5	7	2	35
التكرار المجمع الصاعد	4	10	13	21	26	33	35	
التكرار المجمع النازل	35	31	25	22	14	9	2	

مثال :

نعتبر الجدول رقم 2 السابق :

المجالات	[0 ; 8[	[8 ; 10[	[10 ; 14[	[14 ; 20[
التكرار	13	0	13	9
التكرار المجمع الصاعد	13	13	26	35
التكرار المجمع النازل	35	22	22	9

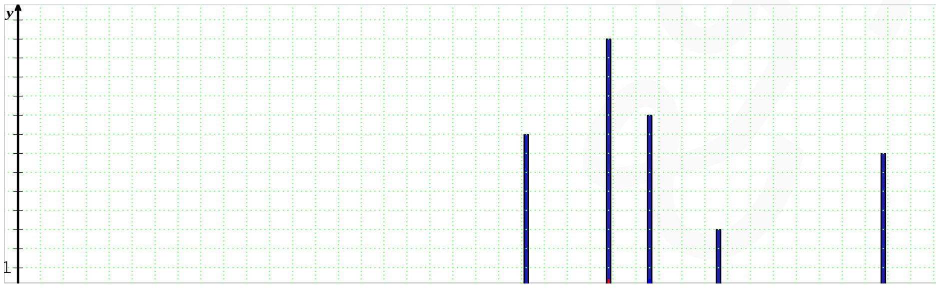
2 التمثيلات البيانية

الأعمدة البيانية :

في دراسة أوزان بالكلوغرام لتلاميذ قسم سجلت النتائج على الجدول الآتي :

الوزن (kg)	37	43	46	51	63	
التكرار	8	13	9	3	7	40
التوتر	0,20	0,33	0,23	0,08	0,18	

أرسم المخطط بالأعمدة لهذه السلسلة :



ملاحظات :

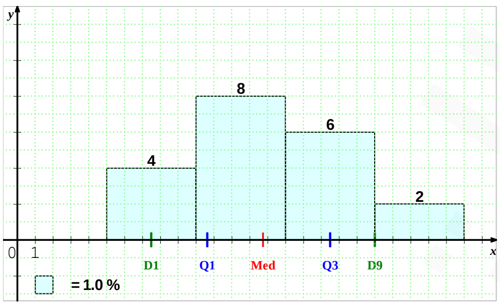
نواصل بين رؤوس الأعمدة نحصل على مضلع تكراري

وبنفس الطريقة نرسم الأعمدة البيانية للتواتر حيث نأخذ التواترات على محور التراتيب .

المدرج التكراري:

أجريت دراسة في مزرعة على كمية الحليب المقدرة باللتر ، المنتجة من طرف 20 بقرة وسجلت النتائج في الجدول التالي :

الفئة (باللتر)	[5 ;10[	[10 ;15[	[15 ; 20[	[20 ; 25[
التكرار (عدد الأبقار)	4	8	6	2



ملاحظات :

المدرج التكرارى هو خاص بميزة مستمرة

ويكون على شكل مستطيلات بعداه طول الفئة وتكرارها في حالة الفئات متساوية الأطوال.

مساحة المستطيلات تكون متناسبة مع التكرارات .

في حالة الفئات مختلفة الأطوال ، نحدد الفئة التي لها أصغر a طول وليكن n تكرارها نرسم المستطيل ذي

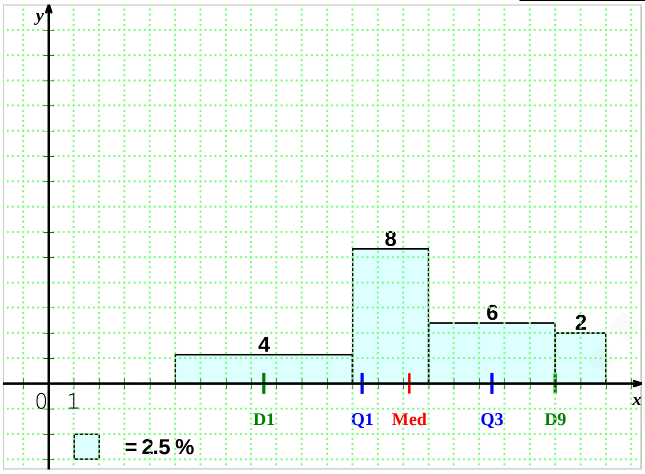
البعدين a و n وبالنسبة لأي فئة أخرى ذات الطول a' و التكرار n' نعين العدد $k=\frac{a'}{a}$ و ونرسم المستطيل

الذي بعداه a' و $\frac{n'}{k}$.

مثال

نحتفظ بنفس الدراسة في المثال السابق ونفترض أن الفئات تكون مختلفة الأطوال :

الفئة (باللتر)	$[5\,;12[$	$[12\,;15[$	$[15\,;20[$	$[20\,;22[$
التكرار (عدد الأبقار)	4	8	6	2
$\frac{n}{k}$	1,14	5,33	2,5	2



الفئة التي لها أصغر طول هي $[20\,;22[$ وطولها $a=2$

طول الفئة الأولى هو $a_1=7$ ومنه : $k_1=\frac{7}{2}=3,5$

إذن نمثلها بالمستطيل ذي البعدين 7 و 1,14 .

طول الفئة الثانية هو $a_2=3$ ومنه : $k_2=\frac{3}{2}=1,5$

إذن نمثلها بالمستطيل ذي البعدين 3 و 5,33

طول الفئة الثالثة هو $a_3=5$ ومنه : $k_3=\frac{5}{2}=2,5$

إذن نمثلها بالمستطيل ذي البعدين 5 و 2,5 .

1) المخطط الدائري :

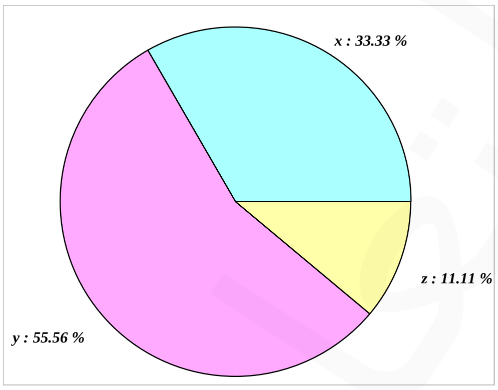
عدد السيارات التي بيعت في مؤسسة خلال أسبوع .

أنواع السيارات	رونو	بيجو	فيات
التكرار	3	5	1

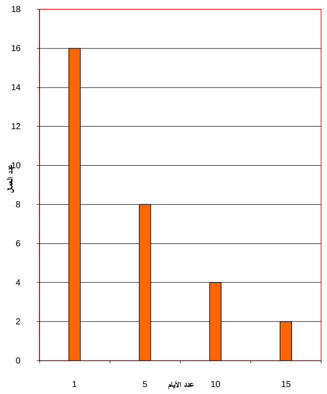
$360°\to 9$

$z°\to 1$ ، $y°\to 5$ ، $x°\to 3$

ومنه : $x=360\times\frac{3}{9}=120°$ $y=360\times\frac{5}{9}=200°$ $z=360\times\frac{1}{9}=40°$



التمرين الاول



المخطط بالأعمدة الآتي يمثل عدد أيام العطل المرضية لعمال مؤسسة .

أ) عين الجدول الإحصائي للسلسلة ثم أتممه بالتواتر والتكرار مجمع الصاعد والنازل.

ب) ما هو عدد عمال المؤسسة .

ج) ما هو منوال السلسلة .

حل التمرين :

أ) الجدول الإحصائي للسلسلة .

قيم الميزة (عدد الأيام)	1	5	10	15
التكرار (عدد العمال)	16	8	4	2
التواتر	0,53	0,27	0,13	0,07
المجمع الصاعد	16	24	28	30
المجمع النازل	30	14	6	2

ب) عدد عمال المؤسسة . 30

ج) منوال : يعرف المنوال بقيمة الميزة التي لها أكبر تكرار أو التي لها أطول عمود وهي القيمة 1 .

التمرين الثاني

نعتبر سلسلة تتعلق بأوزان طرود بريدية .

الأوزان بـ kg	1	2	3	5	7
عدد الطرود	8	5	4	2	1

1) هل ميزة هذه السلسلة كمية أم نوعية ؟

2) هل ميزة هذه السلسلة مستمرة أم منفصلة ؟

3) ما هو عدد الطرود ؟

4) ما هو عدد الطرود التي وزن كل منها $3kg$ على الأقل ؟

5) ما هو عدد الطرود التي وزن كل منها $3kg$ على الأكثر ؟

6) ما هو الوزن المتوسط لهذه الطرود ؟

7) أحسب مدى هذه السلسلة .

8) أرسم المخطط بالأعمدة لهذه السلسلة .

حل التمرين :

الميزة تقاس بالكيلوغرام إذن هي كمية .

الميزة تأخذ قيم معزولة (ISOLEES) إذن هي متقطعة (منفصلة) .

عدد الطرود أي تكرار السلسلة هو 20 .

جدول خاص بالتكرار المجمع

الأوزان بـ kg	1	2	3	5	7	
عدد الطرود	8	5	4	2	1	20
المجمع النازل	20	12	7	3	1	
المجمع الصاعد	8	13	17	19	20	

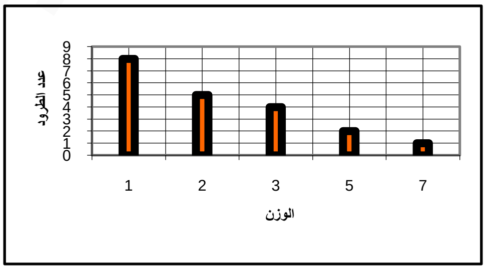
عدد الطرود التي وزن كل منها $3kg$ على الأقل هو 7

عدد الطرود التي وزن كل منها $3kg$ على الأكثر 17

الوزن المتوسط يعرف بمعدل الوزن للسلسلة و يحسب بالطريقة التالية :

$$\bar{x} = \frac{1\times 8 + 5\times 2 + 4\times 3 + 2\times 5 + 1\times 7}{20} = 3.8$$

يعرف المدى بفرق أكبر قيمة و أصغر قيمة للميزة وهو 6 .



3 مؤشرات سلسلة إحصائية :

المدى :

التعريف :

المدى لسلسة إحصائية ذات متغير إحصائي متقطع هو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة للميزة .

مثال :

3	2	2	5	6	2	6
Max-Min	4			المدى		

ملاحظة :

المدى يسمى مؤشر التشتت . وفي حالة ميزة مستمرة المدى هو الفرق بين أكبر مركز وأصغر مركز للفئات .

المنوال والفئة المنوالية

تعريف :

- ✓ نسمي منوالا لسلسلة إحصائية ذات متغير إحصائي متقطع كل قيمة للميزة التي لها أكبر تكرار .
- ✓ نسمى فئة منوالية لسلسلة ذات متغير إحصائي مستمر كل فئة التي لها أكبر تكرار .

ملاحظة :

يمكن لسلسلة إحصائية أن يكون لها عدة مناول أو فئات منوالية .

مثال :

3	2	2	5	6	2	6
Mod =	2			المنوال		

الوسيط :

التعريف :

الوسيط لسلسلة إحصائية ذات متغير إحصائي متقطع هو القيمة التي تتوسط مجموعة القيم بعد ترتيبها تصاعديا أو تنازليا.ونرمز له بالرمز Med

مثال :

نعتبر القيم : 2 ، 2 ، 3 ، 3 ، 3 ، 5 ، 6 ، 6 ، 6 ، 6 ، 7 ، 7 .

$$Med = \frac{5+6}{2} = 5.5$$

مبرهنة:

N تكرار الكلي لسلسلة إحصائية ذات متغير إحصائي متقطع قيمه مرتبة تصاعديا أو تنازليا .

- ✓ إذا كان N فرديا فإن الوسيط هو قيمة الميزة التي رتبتها $\frac{N+1}{2}$ (أي Med يقع في الرتبة $\frac{N+1}{2}$)
- ✓ إذا كان N زوجيا فإن الوسيط هو نصف مجموع القيمتين للميزة التين رتبتيهما $\frac{N}{2}$ و $\frac{N}{2}+1$.

مثال:

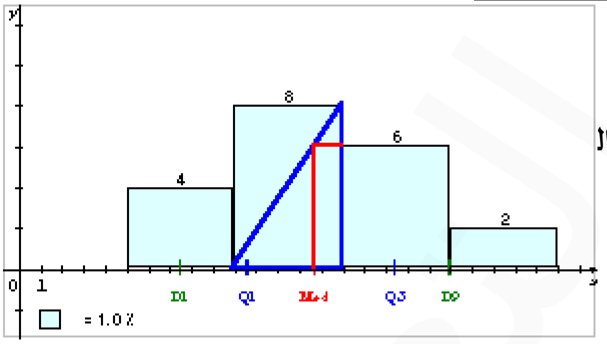
نفرض 31 هو تكرار مجتمع فإن رتبة الوسيط هي $\frac{31+1}{2}=16$.

نفرض أن 30 هو تكرار مجتمع فإن $Med=\frac{x_{15}+x_{16}}{2}$ حيث x_{15} هي قيمة الميزة ذات الرتبة 15 و x_{16} هي قيمة الميزة ذات الرتبة 16 .

طريقة إيجاد الوسيط في حالة طبع إحصائي مستمر.

دراسة كمية الحليب المنتجة في حالة الفئات متساوية الطول :

الفئة (باللتر)	$[5\,;10[$	$[10\,;15[$	$[15\,;20[$	$[20\,;25[$
التكرار (عدد الأبقار)	4	8	6	2
التكرار المجمع الصاعد	4	12	18	20



توجد 20 بقرة مرتبة حسب إنتاجها من $5l$ إلى $22l$.

البقرة التي تتوسط المجتمع تكون في المرتبة 10

وبالتالي يكون إنتاجها في الفئة $[10\,;15[$ والتي تسمى الفئة الا

عدد الأبقار حيث يكون إنتاجها من الفئة الوسيطية وأقل من

Med هو : $10-4=6$. إذن حسب مبرهنة طاليس لدينا :

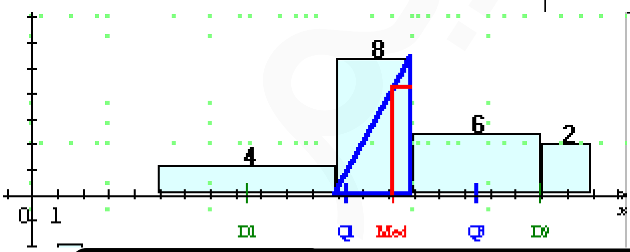
$$\frac{Med-10}{5}=\frac{6}{8}$$

ومنه: $Med=10+3,75=13,75$.

دراسة كمية الحليب المنتجة في حالة الفئات مختلفة الطول:

الفئة (باللتر)	$[5\,;12[$	$[12\,;15[$	$[15\,;20[$	$[20\,;22[$
التكرار (عدد الأبقار)	4	8	6	2
التكرار المجمع الصاعد	4	12	18	20

في هذه الحالة الفئة الوسيطية هي $[12\,;15[$



عدد الأبقار حيث يكون إنتاجها من الفئة الوسيطية وأقل من Med هو : $10-4=6$. إذن حسب مبرهنة طاليس لدينا :

$$\frac{Med-12}{3}=\frac{6}{8}$$

ومنه: $Med=12+2.25=14.25l$

خلاصة:

لإيجاد الوسيط في حالة طبع إحصائي مستمر ، نحدد أولا الفئة الوسيطية $[a\ ;\ b[$ وتكرارها n_m ثم نحسب الوسيط بالعلاقة

$$Med=a+\frac{(b-a)\left(\frac{n}{2}-N_c\right)}{n_m}$$

حيث N_c هو التكرار المجمع الصاعد للفئة التي تسبق الفئة الوسيطية .

التمرين الثالث:

في مؤسسة أشغال الغابات ، الدراسة الإحصائية لأقطار 50 شجرة أعطت النتائج التالية .

[illegible] x_i	[7 ¡ 7,5[	[7,5 ¡ 8[	[8 ¡ 8,5[	[8,5 ¡ 9[	[9 ¡ 9,5[	[9,5 ¡ 10[	[10 ¡ 10,5[	[illegible]
n_i [illegible]	5	7	12	10	6	4	6	50

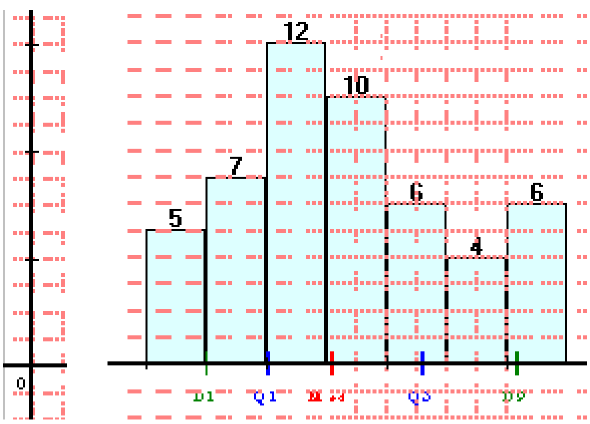
1. أكمل الجدول بالتكرار المجمع الصاعد ثم أحسب وسيط هذه السلسلة
2. أنشئ المدرج التكراري لهذه السلسلة .

الحل :

[illegible] x_i	[7 ¡ 7,5[	[7,5 ¡ 8[	[8 ¡ 8,5[	[8,5 ¡ 9[	[9 ¡ 9,5[	[9,5 ¡ 10[	[10 ¡ 10,5[	[illegible]
n_i [illegible]	5	7	12	10	6	4	6	50
[illegible]	5	12	24	34	40	44	50	

رتبة الوسيط هي 25 ويكون في الفئة الوسيطية $[8,5\ ;\ 9[$ ومنه : $Med=8,5+0,5\times\frac{25-24}{10}=8,55cm$

حساب الوسيط باستعمال البرمجيات :



الوسط الحسابي:

الوسط الحسابي للقيم x_1 ، x_2 ، x_3 ، . . . . ، x_k ، المرفقة بالتكرارات n_1 ، n_2 ، n_3 ، . . . . ، n_k على الترتيب هو العدد $\overline{x}$ المعرف بـ : $\overline{x} = \dfrac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + ... + n_kx_k}{n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_k}$

التمرين الرابع:

أحسب الوسط الحسابي لكل من السلسلات التالية :

x_i العلامات	8	10	12
n_i التكرارات	1	1	1

x_i العلامات	7	10	13
n_i التكرارات	3	1	2

x_i العلامات	1	2	18	19
n_i التكرارات	1	1	10	10

x_i العلامات	4	7	8	10	13	17	18
n_i التكرارات	1	2	1	3	1	2	1

ملاحظة 1 :

كل من الوسيط والمنوال والوسط الحسابي ، يسمى مؤشر الموقع .

ملاحظة 2 :

الوسط الحسابي لسلسلة ذات طبع إحصائي مستمر يعرف بنفس العلاقة السابقة حيث نعوض القيم

x_1 ، x_2 ، x_3 ، . . . . ، x_k بمراكز الفئات c_1 ، c_2 ، c_3 ، . . . . ، c_k

التمرين الخامس:

أحسب الوسط الحسابي لكل من السلسلات الآتية :

x_i الفئات	[8 ، 12[	[12 ، 16[	[16 ، 20[	[20 ، 24[	المجموع
n_i التكرارات	5	7	6	2	20
c_i مراكز الفئات					
$n_i \times c_i$					

الفئات	[7 ، 7,5[	[7,5 ، 8[	[8 ، 8,5[	[8,5 ، 9[	[9 ، 9,5[	[9,5 ، 10[	[10 ، 10,5[	المجموع
n_i التكرارات	5	7	12	10	6	4	6	50
c_i مراكز الفئات								
$n_i \times c_i$								

ملاحظة 3 :

مجموع : $n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_k$ يكتب على الشكل $\sum_{i=1}^{i=k} n_i$ ويقرأ مجموع الأعداد n_i من $i=1$ إلى $i=k$

التمرين السادس

1. أكتب المجاميع التالية باستعمال الرمز $\sum$:

$2^3+3^3+4^3+5^3$ $\qquad$ $3^2+3^3+3^4+3^5+3^6+3^7$ $\qquad$ $5+9+13+17$

2. أحسب المجموعين : $\sum_{k=0}^{k=4}(3k-2)$ ؛ $\sum_{k=1}^{k=3}\frac{2}{3k(k+1)}$

الحل :

1. $2^3+3^3+4^3+5^3=\sum_{i=2}^{i=5}i^3$

$3^2+3^3+3^4+3^5+3^6+3^7=\sum_{i=2}^{i=7}3^i$

$5+9+13+17=\sum_{i=1}^{i=4}(4i+1)$.

2. $\sum_{k=0}^{k=4}(3k-2)=(3\times0-2)+(3\times1-2)+(3\times2-2)+(3\times3-2)+(3\times4-2)=-2+1+4+7+10=20$

$$\sum_{k=1}^{k=3}\frac{2}{3k(k+1)}=\frac{2}{3(1+1)}+\frac{2}{3\times2(2+1)}+\frac{2}{3\times3(3+1)}=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=\frac{6+2+1}{18}=\frac{1}{9}$$

خواص الوسط الحسابي :

الخاصية 1:

x_1 ، x_2 ، x_3 ، . . . . ، x_k قيم سلسلة إحصائية، مرفقة بالتواترات f_1 ، f_2 ، f_3 ، . . . . ، f_k على الترتيب

الوسط الحسابي لهذه السلسلة هو العدد $\bar{x}$ حيث : $\bar{x}=f_1x_1+f_2x_2+f_3x_3+...+f_kx_k=\sum_{i=1}^{i=k}f_ix_i$

البرهان :

بما أن $f_i=\frac{n_i}{\sum_{i=1}^{i=k}n_i}$ فإن : $\bar{x}=\frac{n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3+...+n_kx_k}{\sum_{i=1}^{i=k}n_i}=f_1x_1+f_2x_2+f_3x_3+...+f_kx_k$.

الخاصية 2 :

x_1 ، x_2 ، x_3 ، . . . . ، x_k قيم سلسلة إحصائية، مرفقة بالتكرارات n_1 ، n_2 ، n_3 ، . . . . ، n_k على الترتيب

و $\bar{x}$ الوسط الحسابي لهذه السلسلة.

$\overline{x+a}$ هو الوسط الحسابي للسلسلة x_1+a ، x_2+a ، x_3+a ، . . . . ، x_k+a مرفقة بالتكرارات n_1 ، n_2 ، n_3 ، . . . ، n_k على الترتيب. و $\overline{x\times a}$ هو الوسط الحسابي للسلسلة $x_1\times a$ ، $x_2\times a$ ، $x_3\times a$ ، . . . . ، $x_k\times a$ مرفقة بالتكرارات n_1 ، n_2 ، n_3 ، . . . . ، n_k على الترتيب. ولدينا : $\overline{x+a}=\bar{x}+a$ و $\overline{x\times a}=\bar{x}\times a$.

الخاصية 3 :

x_1 ، x_2 ، x_3 ، . . . . ، x_k ، y_1 ، y_2 ، y_3 ، . . . . ، y_k قيم سلسلة إحصائية ، مرفقة بالتكرارات n_1 ، n_2 ، n_3 ، . . . . ، n_k ، n'_1 ، n'_2 ، n'_3 ، . . . . ، n'_k على الترتيب و نحسب $\overline{X}$ الوسط الحسابي لهذه السلسلة بالعلاقة :

$$\overline{X} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} n_i\right)\overline{x} + \left(\sum_{i=1}^{k} n'_i\right)\overline{y}}{n}$$ حيث:

$\overline{x}$ الوسط الحسابي للسلسلة x_1 ، x_2 ، x_3 ، . . . . ، x_k المرفقة بالتكرارات n_1 ، n_2 ، n_3 ، . . . . ، n_k على الترتيب.

$\overline{y}$ الوسط الحسابي للسلسلة y_1 ، y_2 ، y_3 ، . . . . ، y_k المرفقة بالتكرارات n'_1 ، n'_2 ، n'_3 ، . . . . ، n'_k على الترتيب.

$n = \sum_{i=1}^{k} n_i + \sum_{i=1}^{k} n'_i$ التكرار الكلي للسلسلة .

الربعيات:

نعتبر سلسلة إحصائية ذات طبع إحصائي كمي قيمه مرتبة تصاعديا وتكرارها n .

- **الربعي الأول Q_1**

هو أصغر قيمة للطبع حيث 25% على الأقل من الحدود السلسلة لها قيم أصغر من أو تساوي Q_1 .

- **الربعي الثالث Q_3**

هو أصغر قيمة للطبع حيث 75% على الأقل من الحدود السلسلة لها قيم أصغر من أو تساوي Q_3 .

في حالة طبع إحصائي متقطع

☜ إذا كان $\frac{n}{4}$ عددا طبيعيا فإن رتبة Q_1 هي $\frac{n}{4}$ ورتبة Q_3 هي $\frac{3n}{4}$ ؛

☜ إذا كان $\frac{n}{4}$ ليس عددا طبيعيا فإن العدد الطبيعي الأصغر n' الذي يحقق $n' > \frac{n}{4}$ هو رتبة Q_1 والعدد الطبيعي الأصغر n'' الذي يحقق $n'' > \frac{3n}{4}$ هو رتبة Q_3 .

مثال

نعتبر السلسلة الإحصائية التالية

4 , 4 ,4 , 4 , 4 , 4 , 7 , 7 , 7 , 7 , 7 , 10 , 10 , 10 , 10 , 10 , 10 , 10 , 13 , 13 , 13 , 13 , 16

حيث أن قيم الطبع الإحصائي مرتبة ترتيبا تصاعديا و كل قيمة مكتوبة عددا من المرات مساو لتكرارها

نلاحظ أن التكرار الكلي N يساوي 23

➢ أول قيمة في القائمة و التي رتبتها أكبر من أو يساوي $\frac{N}{4}$ هي القيمة السادسة لأن $\frac{N}{4} = 5{,}75$

تسمى هذه القيمة الرُبعي الأول و نرمز له بالرمز Q_1 (هنا $Q_1 = 4$)

➢ أول قيمة في القائمة و التي رتبتها أكبر أو يساوي $\frac{3N}{4}$ هي القيمة الثامنة عشر لأن $\frac{3N}{4} = 17{,}25$

تسمى هذه القيمة الرُّبعي الثالث و نرمز له بالرمز Q_3 (هنا $Q_3 = 10$)

ملاحظة : Q_1 و Q_3 قيمتان من السلسلة بخلاف الوسيط Med الذي يمكن أن لا يكون قيمة من السلسلة

في حالة طبع إحصائي مستمر

☜ ننشئ مضلع التواتر المجمع الصاعد ويكون Q_1 ، Me و Q_3 فواصل نقط المضلع التي تراتيبها 0,25 ، 0,50 و 0,75 على الترتيب .

- نعين الفئة $[a;b[$ التي تشمل الربعي وتكرارها n_Q ، ولدينا $Q_1 = a + \dfrac{(b-a)\left(\dfrac{n}{4} - N\right)}{n_Q}$ و $Q_3 = a + \dfrac{(b-a)\left(\dfrac{3n}{4} - N\right)}{n_Q}$ (N هو التكرار المجمع الصاعد للفئة التي تسبق $[a;b[$).
- Q_1 و Q_3 هما قيمتان من السلسلة بخلاف Me يمكن أن لا يكون قيمة من السلسلة .

كيف نحدِّد Q_1 و Q_3 :

➢ بعد ترتيب القائمة ترتيبا تصاعديا (مع كتابة كل قيمة بعدد مساو لتكرارها) ➢ Q_1 القيمة التي رتبتها n حيث n هو أصغر عدد طبيعي يحقق $n \geq \frac{N}{4}$ ➢ Q_3 القيمة التي رتبتها n حيث n هو أصغر عدد طبيعي يحقق $n \geq \frac{3N}{4}$	**في حالة طبع كمي متقطع** نطبق التعريف باستخدام التكرار المجمع الصاعد أو التواتر المجمع الصاعد .	**في حالة طبع كمي مستمر** Q_1 هي فاصلة النقطة من منحنى التواتر المجمع الصاعد التي ترتيبها $\frac{1}{4}$ Q_3 هي فاصلة النقطة من منحنى التواتر المجمع الصاعد التي ترتيبها $\frac{3}{4}$

التمرين السابع

نعتبر السلسلة الإحصائية التالية

x_i	3	4	5	7	8	10	11
n_i	5	7	3	8	8	6	3

1ـ شكل جدول التكرار المجمع الصاعد و التواتر المجمع الصاعد

2ـ عين الوسيط Med و الربعيين Q_1 و Q_3 لهذه السلسلة

حل التمرين

x_i	3	4	5	7	8	10	11
n_i	5	7	3	8	8	6	3
ت م ص	5	12	15	23	31	37	40
تو م ص	0,125	0,3	0,375	0,575	0,775	0,925	1

2ـ

التكرار الكلي : $N = 2\times 20$

و منه الوسيط Med هو نصف مجموع

الحدين اللذين رتبتاهما 20 و 21

أي $Med = 7$

بقراءة جدول التواتر المجمع الصاعد نلاحظ أن أصغر قيمة Q_1 حيث 25 ٪ على الأقل من الحدود لها قيمة أصغر أو تساوي Q_1 هي 4 و بتطبيق التعريف كذلك نلاحظ أن $Q_3 = 8$

الانحراف الربعي

تعريف :

الإنحراف الربعي هو الفرق بين الربعيين الثالث و الأول . أي هو العدد I حيث $I = Q_3 - Q_1$

ملاحظة

الإنحراف الربعي هو مؤشر من مؤشرات التشتت

التمرين الثامن دراسة سلسلة ذات طبع كمي مستمر

يهتم منظمو دورة في كرة المضرب بدراسة متوسط الزمن المستغرق للمباريات .

جُمعت النتائج في الجدول التالي :

مجال الزمن (min)	[30 ، 50[	[50 ، 80[	[80 ، 120[	[120،300[
عدد المباريات	14	18	20	8

1 – أنشئ منحنى التواترالمجمّع الصاعد و استنتج قيمة الوسيط

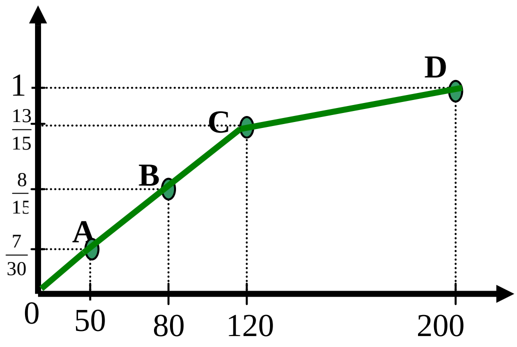
2ـ عيّن الربعيين الأول و الثالث للسلسلة . ما هو الانحراف الربعي ؟

حـــل التمرين

مجال الزمن (min)	[30 ، 50[	[50 ، 80[	[80 ، 120[	[120،300[
عدد المباريات	14	18	20	8
التواتر	$\frac{7}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{15}$
التواتر المجمع الصاعد	$\frac{7}{30}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{13}{15}$	1

1) الوسيط Med هو فاصلة النقطة من المنحنى و التي ترتيبها $\frac{1}{2}$ ، هذه النقطة تقع على القطعة

المستقيمة [AB] حيث $A(50\,,\frac{7}{30})$ و $B(80\,,\frac{8}{15})$



معادلة (AB) هي $y=\frac{\frac{8}{15}-\frac{7}{30}}{80-50}(x-50)+\frac{7}{30}$

و منه $x=\frac{230}{3}$ $(50\le x\le 80)$ $Med\approx 76{,}67$

2) بنفس الطريقة نبحث عن فاصلتي النقطتين اللتين ترتيباهما $\frac{1}{4}$ ، $\frac{3}{4}$ وهما Q_1 و Q_3 على الترتيب

نجد $Q_1\approx 51{,}66$ و $Q_3=106$ و منه الإنحراف الربعي $I\approx 54{,}33$

العشريان D_1 و D_9 :

تعريف:

- **العشري الأول D_1**

هو أصغر قيمة طبع حيث يكون 10% على الأقل من الحدود لها قيمة طبع أصغر أو تساوي D_1.

- **العشري التاسع D_9**

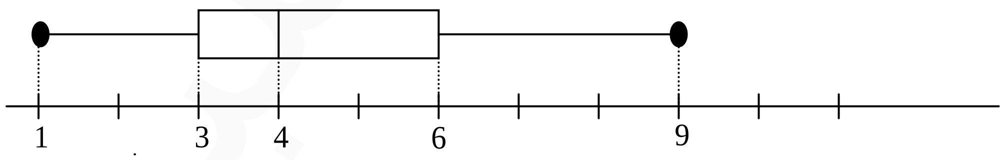
هو أصغر قيمة طبع حيث يكون 90% على الأقل من الحدود لها قيمة طبع أصغر أو تساوي D_9.

المخطط بالعلبة:

نكوّن مخططا بالعلب بالطريقة التالية :

- ✓ نضع قيم الطبع على محور (أفقي أو شاقولي)
- ✓ نعيّن على هذا المحور القيم min ، max ، Q_1 ، Med و Q_3 .
(القيمة الصغرى ، القيمة الكبرى ، الربعيين الأول و الثالث و الوسيط)
- ✓ نكون عندئذ مستطيلا (العلبة) بالتوازي مع المحور . (طول المستطيل هو الانحراف الربعي و عرضه كيفي)

مثال : $min=1$ ، $max=9$ ، $Q_1=3$ ، $Med=4$ و $Q_3=6$.



ملاحظة:

هذا المخطط يمكننا من مشاهدة تشتت توزيع إحصائي و المقارنة بين عدة سلاسل إحصائية .

التباين والانحراف المعياري:

التباين(V) :

هو الوسط الحسابي لمربعات انحرافات القيم x_i عن وسطها الحسابي $\bar{x}$ أي الوسط الحسابي للقيم $\left(x_i-\bar{x}\right)^2$.

$$V=\frac{1}{n}\left[n_1\left(x_1-\bar{x}\right)^2+n_2\left(x_2-\bar{x}\right)^2+\ldots+n_p\left(x_p-\bar{x}\right)^2\right]$$

الانحراف المعياري(s) :

هو الجذر التربيعي للتباين أي $s=\sqrt{V}$

خاصية:

$$V=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}n_i\left(x_i-\bar{x}\right)^2=\sum_{i=1}^{p}f_i\left(x_i-\bar{x}\right)^2=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}n_ix_i^2\right)-\bar{x}^2=\left(\sum_{i=1}^{p}f_ix_i^2\right)-\bar{x}^2$$

البرهان:

لدينا: $\left(x_i-\bar{x}\right)^2=x_i^2-2x_i\bar{x}+\bar{x}^2$ و منه $n_i\left(x_i-\bar{x}\right)^2=n_ix_i^2-2n_ix_i\bar{x}+n_i\bar{x}^2$

ومنه: $V=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=p}n_i\left(x_i-\bar{x}\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=p}n_ix_i^2-\frac{2}{n}\bar{x}\sum_{i=1}^{i=p}n_ix_i+\frac{1}{n}\bar{x}^2\sum_{i=1}^{i=p}n_i$

لدينا: $\sum_{i=1}^{i=p}n_i=n$ و $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=p}n_ix_i=\bar{x}$

إذن: $V=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=p}n_ix_i^2-2\bar{x}^2+\bar{x}^2$ أي $V=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=p}n_ix_i^2-\bar{x}^2$

ملاحظة :

إذا كانت السلسلة مجمعة بالفئات (توزيع منتظم) نأخذ x_i كمركز للفئة

التمرين التاسع

نعتبر السلسلة الإحصائية التالية

1- أحسب التباين و الانحراف المعياري للسلسلة

x_i	3	5	7	9	11	13
f_i	0,08	0,15	0,28	0,35	0,1	0,04

حــل:

نستعمل التعريف (2)

طريقة

نضيف سطرا للجدول لحساب القيم $f_i.x_i$ ثم نحسب مجموع $f_i.x_i$

نضيف سطرا آخرا للجدول لحساب $f_i.x_i^2$ ثم نحسب مجموع $f_i.x_i^2$

x_i	3	5	7	9	11	13	المجموع
f_i	0,08	0,15	0,28	0,35	0,1	0,04	
$f_i.x_i$	0,24	0,75	1,96	3,15	1,1	0,52	7,72
$f_i.x_i^2$	0,72	3,75	13,72	28,35	12,1	6,76	65,4

$V=65,4-(7.72)^2=5,8016$ $\quad$ $s=\sqrt{5.8016}\simeq 2,4086$

تمارين محلولة

التمرين الأول

إليك الجدول التالي الذي يمثل علامات أحد الاقسم :

العلامة	3	5	7	10	13	16	19
التكرار	5	4	6	5	5	3	2
التكرار م ص							
التواتر م ص							

1-أكمل الجدول ثم احسب كل من: المدى، المنوال، الوسط الحسابي، الوسيط

2- احسب كل من: ربعي الاول ، الربعي الثالث ، العشري الاول ، العشري التاسع

حل التمرين

إكمال الجدول:

العلامة	3	5	7	10	13	16	19
التكرار	5	4	6	5	5	3	2
التكرار م ص	5	9	15	20	25	28	30
التواتر م ص	$\frac{5}{30}$	$\frac{9}{30}$	$\frac{15}{30}$	$\frac{20}{30}$	$\frac{25}{30}$	$\frac{28}{30}$	1

المدى: 19-3=16

المنوال: Mod=7

الوسط الحسابي : $\bar{x} = \frac{3\times5+5\times4+7\times6+10\times5+13\times5+16\times3+19\times2}{30} = 9.26$ ،

الوسيط: التكرار الكلي: $N=30$ وبالتالي $Med = \frac{x_{15}+x_{16}}{2} = \frac{7+10}{2} = 8.5$

الربعيات

أول قيمة في القائمة و التي رتبتها أكبر من أو يساوي $\frac{N}{4}$ هي القيمة الثامنة لأن $\frac{30}{4} = 7{,}5$

x_8 تسمى هذه القيمة الرُبعي الأول و نرمز له بالرمز Q_1 (هنا $Q_1 = 5$)

أول قيمة في القائمة و التي رتبتها أكبر أو يساوي $\frac{3N}{4}$ هي القيمة الثالثة و العشرون لأن $\frac{3\times30}{4} = 22{,}5$

x_{23} تسمى هذه القيمة الرُبعي الثالث و نرمز له بالرمز Q_3 (هنا $Q_3 = 13$)

العشريات

لدينا $\frac{N}{10}$ $\frac{30}{10} = 3$

x_3 تسمى هذه القيمة العشري الأول و نرمز له بالرمز D_1 (هنا $D_1 = 3$)

لدينا $\frac{9N}{10}$ $\frac{9\times30}{10} = 27$

x_{27} تسمى هذه القيمة العشري التاسع و نرمز له بالرمز D_9 (هنا $D_9=16$)

التمرين الثاني

إليك الجدول التالي الذي يمثل علامات أحد الاقسم :

18	15	12	9	6	4	2	العلامة
2	3	5	11	6	4	5	التكرار
							التكرار م ن
							التواتر م ن

1-أكمل الجدول ثم احسب كل من: المدى، المنوال، الوسط الحسابي، الوسيط

2- احسب كل من: ربعي الاول ، الربعي الثالث ، العشري الاول ، العشري التاسع

حل التمرين

إكمال الجدول:

18	15	12	9	6	4	2	العلامة
2	3	5	11	6	4	5	التكرار
2	5	10	21	27	31	36	التكرار م ن
$\frac{2}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{27}{36}$	$\frac{31}{36}$	1	التواتر م ن

المدى: 18-2=16

المنوال: Mod=9

الوسط الحسابي : $\bar{x}=\frac{2\times5+4\times4+6\times6+9\times11+12\times5+15\times3+18\times2}{36}=8.38$ ،

الوسيط: التكرار الكلي: $N=36$ وبالتالي $Med=\frac{x_{18}+x_{19}}{2}=\frac{9+9}{2}=9$

الربعيات

لدينا $\frac{N}{4}$ $\frac{36}{4}=9$

x_9 تسمى هذه القيمة الرُبعي الأول و نرمز له بالرمز Q_1 (هنا $Q_1=4$)

لدينا $\frac{3N}{4}$ $\frac{3\times36}{4}=27$

x_{27} تسمى هذه القيمة الرُبعي الثالث و نرمز له بالرمز Q_3 (هنا $Q_3=12$)

العشريات

لدينا $\frac{N}{10}$ $\frac{36}{10}=3,6$

x_4 تسمى هذه القيمة العشري الأول و نرمز له بالرمز D_1 (هنا $D_1=2$)

لدينا $\frac{9N}{10}$ $\frac{9\times36}{10}=32,4$

x_{33} تسمى هذه القيمة العشري التاسع و نرمز له بالرمز D_9 (هنا $D_9=15$)