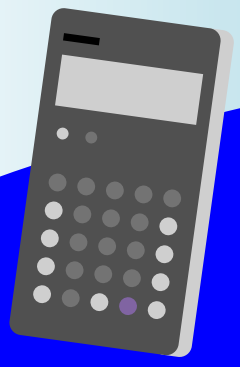
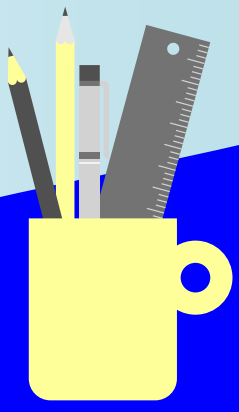
السنة الثالثة للشعب العلمية

مجلة الشهاب في الإحتمالات

الأستاذ : لبوخ فؤاد

- تمارين محلولة في مبادئ العد
- تمارين محلولة في الإحتمالات
- تمارين محلولة في الإحتمالات الشرطية
- بكالوريا تجريبية- أشبال الأمة





المحتويات

ملخص 01

مبادئ العد 03

تمارين 03

الحلول 06

الإحتمالات 09

تمارين 09

الحلول 12

الإحتمالات الشرطية 16

تمارين 16

الحلول 21

بكالوريا تجريبية – أشبال الأمة 26

تمارين 26

الحلول 33

ملخص

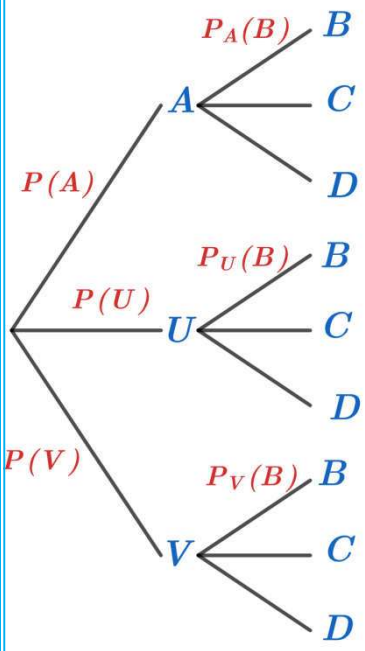
في ما يلي نرمز للمجموعة الشاملة بـ Ω بحيث $\Omega=\{e_1;e_2;...;e_n\}$.

قانون الإحتمال و خواصه

- إحتمال الحدث A : $P(A)=\dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}$.
- $P_i=P(e_i)$ مع $\sum_{i=1}^{n}P_i=1$.
- إحتمال الحدث الأكيد يساوي 1 أي : $P(\Omega)=1$.
- إحتمال الحدث المستحيل يساوي 0 أي : $P(\varnothing)=0$.
- $P(\overline{A})=1-P(A)$ بحيث $\overline{A}$ هي الحدث العكسي لـ A .
- $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.
- A و B غير متلائمتين معناه $A\cap B=\varnothing$ ، أي أن : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

الإحتمال الشرطي

- إحتمال A علما أن B محققة هو : $P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$.
- اعتمادا على شجرة الإحتمالات المقابلة نكتب : $P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)$ و $P(B)=P(A)\times P_A(B)+P(U)\times P_U(B)+P(V)\times P_V(B)$.
- A و B حدثين مستقلين معناه $P_A(B)=P(B)$ أي أن : $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$.



مبادئ العد

	الترتيب	التكرار	كرات	لجان	معامل الترتيب
القائمة	مهم	مسموح	السحب على التوالي بالإرجاع		إذا كان $A_{n_1}^{p_1}\times A_{n_2}^{p_2}\times A_{n_3}^{p_3}$ فإن معامل الترتيب هو : $\dfrac{(p_1+p_2+p_3)!}{p_1!\times p_2!\times p_3!}$
الترتيبة	مهم	غير مسموح	السحب على التوالي بدون إرجاع	تشكيل لجنة بمهام مختلفة	
التوفيقة	غير مهم	غير مسموح	السحب في آن واحد	تشكيل لجنة بدون مهام أو بنفس المهام	

القائمة	n^p
الترتيبة	$A_n^p=\dfrac{n!}{(n-p)!}$
التوفيقة	$C_n^p=\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$
التبديلة	$n!=n(n-1)...\times 2\times 1$

- دستور ثنائي الحد لنيوتن : $(a+b)^n=\sum_{p=0}^{n}C_n^p a^p b^{n-p}$

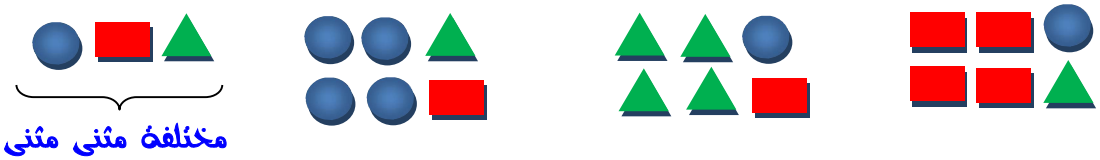
لنعتبر قانون إحتمال المتغير العشوائي X المعرف بـ :

x_i	x_1	...	x_n	المجموع
$P(X=x_i)$	P_1	...	P_n	1

- الأمل الرياضياتي $E(X)$: $E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_iP_i$.
- التباين $V(X)$: $V(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2P_i-(E(X))^2$.
- الإنحراف المعياري $\sigma(X)$: $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$.
- $E(aX+b)=aE(X)+b$ ، $V(aX+b)=a^2V(X)$ و $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$.

ملحوظة حول "مختلفة مثنى مثنى "

مختلفة



مختلفة مثنى مثنى

مبادئ العد

التمرين 01

لتكن $E = \{1,2,3,4\}$ ، ماهو عدد :

1. الأعداد المكونة من رقمين مأخوذين من E ؟

2. الأعداد المكونة من رقمين مختلفين مأخوذين من E ؟

3. المجموعات الجزئية المكونة من عنصرين مأخوذين منE؟

4. الأعداد المكونة من 4 أرقام مختلفة مأخوذة من E ؟

التمرين 02

حل في $\mathbb{N}$ المعادلات الآتيـة :

1. $C_n^3 + C_{2n}^2 = 8n$

2. $2C_n^2 + 6C_n^3 = 9n$

3. $9C_n^2 - 2C_{2n}^2 = 0$

4. حلّ في $\mathbb{N}^2$ الجملة : $\begin{cases} C_{x+1}^y = C_x^{y-1} \\ C_{x+y}^2 = 10 \end{cases}$

التمرين 03

يضم صندوق 10 كرات متماثلة منها 4 سوداء و الباقي بيضاء ، نسحب من الصندوق 3 كرات في آن واحد.

1. ماهو عدد الحالات الممكنة للحصول على :

أ- كرة بيضاء واحدة فقط ؟

ب- كرة بيضاء على الأقل ؟

2. نضيف إلى الصندوق n كرة سوداء و n كرة بيضاء.نسحب كرتين في آن واحد ، نعتبر X_n عدد الحالات الممكنة لسحب كرتين من نفس اللون.

أ- أثبت أن : $X_n = n^2 + 9n + 21$

ب- كم نضيف من كرة حتى يكون $X_n = 10713$

التمرين 04

كل بطاقة بنكية لها رقم سري (code) مكون من 4 أرقام غير معدومة .

1. ماهو عدد الأرقام السرية الممكنة ؟

2. ماهو عدد الأرقام السرية الممكنة حيث :

أ- الرقم السري زوجي ؟

ب- الرقم السري مكون فقط من الأرقام الزوجية ؟

جـ- الرقم السري مكون من 4 أرقام مختلفة مثنى مثنى ؟

د- الرقم السري يحوي الرقم 1 مـرة واحدة فقط ؟

التمرين 05

بإستعمال الأرقام $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ نريد تشكيل أرقامًا هاتفية من 6 أرقام من الشكل :

0	6	6	2	X	X	X	X	X	X

1. ماهو عدد الأرقام الهاتفية الممكن تشكيلها ؟
2. ماهو عدد الأرقام الهاتفية الممكن تشكيلها بحيث :

أ- تحوي الرقم 1 مرتين و الرقم 2 مرة واحدة و الرقم9 ثلاث مرات ؟

ب- مكونة من رقمين مختلفين ؟

جـ- مكونة من ثلاث مرات الرقم 2 ؟

د- مكونة من الرقم 7 مرة واحدة و الرقم 5 ثلاث مرات ؟

التمرين 06

عميد كلية يريد تشكيل لجنة تضم 5 أعضاء يتم إختيارهم من 5 رجال و 6 نساء .

1. ماهو عدد اللجان الممكن تشكيلها ؟
2. ماهو عدد اللجان الممكن تشكيلها علمًا أنّ :

أ- رجلا واحدًا فقط بين الأعضاء ؟

ب- إمرأتين على الأكثر بين الأعضاء ؟

جـ- رجلين و امرأتين على الأقل في اللجنة ؟

3. ماهو عدد اللجان إذا كانت اللجنة تضم : رئيس، نائب و كاتب فقط ؟
4. ماهو عدد اللجان إذا كانت اللجنة تضم 3 كتاب فقط

التمرين 07

يتكون قسم مختلط من 18 تلميذا و 12 تلميذة، يراد تشكيل لجنة للقسم تضم رئيسا و نائبا و أمينا .

1. ماهو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها ؟
2. ماهو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها بحيث :

أ- يكون الأمين تلميذة ؟

ب- يكون التلميذ X موجودا في اللجنة ؟

جـ- يكون الرئيس تلميذا و الأمين تلميذة ؟

د- يكون الرئيس و نائبه من جنسين مختلفين ؟

3. نفرض أن الرئيس تلميذا و الأمين تلميذة و أن التلميذ X لا يريد الإنضمام إلى لجنة تضم التلميذة Y.

- ماهو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها في هذه الظروف؟

التمرين 08

في أحد رفوف المكتبة نريد تنظيم 4 كتب إسلامية و 3 كتب ثقافية و 5 كتب رياضياتية ، ماهو عدد الحالات الممكنة لترتيبها :

1. بشكل كيفي ؟
2. بحيث تكون الكتب التي لها نفس الموضوع متجاورة ؟
3. بحيث تكون كتب الرياضيات فقط متجاورة ؟

التمرين 09

في كل حالة ماهو عدد الكلمات (لا يهم إن كان لها معنى أو لا) ذات n حرف المشكلة من حروف الكلمات :

1. علم $(n=3)$ 2. معسكر $(n=5)$

3. مهيمن $(n=5)$ 4. تلمسان $(n=6)$

5. سلسبيل $(n=6)$ 6. البلابل $(n=7)$

التمرين 10

إذا كانت لديك الكلمة eleven ، ماهو عدد الكلمات التي يمكن تشكيلها :

1. بشكل كيفي ؟

2. بحيث تكون الثلاث حروف e متجاورة ؟

3. بحيث يكون الحرف e في بداية و نهاية الكلمة ؟

4. بحيث تبدأ بالحرف e و تنتهي بالحرف l ؟

التمرين 11

1. أنشر بإستعمال قانون نيوتن :

$(x+1)^5$ و $(x-2)^6$

2. ماهو الحد الذي درجته 4 في نشر $(2x^2+1)^6$ ؟

3. ماهو معامل x^{10} في نشر $\left(x^3-\frac{2}{x^2}\right)^{15}$ ؟

التمرين 12

أحسب المجاميع :

1. $S_1 = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n$

2. $S_2 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot \left(\frac{1}{2^k}\right)$

3. $S_3 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot \left(\frac{3^{n-k}}{4^k}\right)$

4. $S_4 = C_{n+1}^2 . 3^2 + C_{n+1}^3 . 3^3 + \ldots + C_{n+1}^{n+1} . 3^{n+1}$

الحلول

التمرين 01

1. $4^2=16$

2. $A_4^2=12$

3. $C_4^2=6$

4. $A_4^4=4!=24$

التمرين 02

حل في $\mathbb{N}$ المعادلات الآتية :

1. $C_n^3+C_{2n}^2=8n$ تكافئ $\frac{n!}{3!(n-3)!}+\frac{(2n)!}{2!(2n-2)!}=8n$ أي $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}+\frac{2n(2n-1)}{2}=8n$ ومن كون $n\neq 0$ فإن

$\frac{(n-1)(n-2)}{6}+\frac{6(2n-1)}{6}=8$ وعليه $n^2+9n-52=0$ ومنه $n=-13$ أو $n=4$ وعليه من كون $n\geq 3$ فإن $n=4$.

2. $2C_n^2+6C_n^3=9n$ تكافئ $2\frac{n!}{2!(n-2)!}+6\frac{n!}{3!(n-3)!}=9n$ أي $n(n-1)+n(n-1)(n-2)=9n$ ومن كون $n\neq 0$ فإن

$n-1+(n-1)(n-2)=9$ وعليه $n^2-2n-8=0$ ومنه $n=-2$ أو $n=4$ وعليه من كون $n\geq 3$ فإن $n=4$.

3. $9C_n^2-2C_{2n}^2=0$ تكافئ $9\frac{n!}{2!(n-2)!}-2\frac{(2n)!}{2!(2n-2)!}=0$ أي $\frac{9(n-1)}{2}-2(2n-1)=0$ ومن كون $n\neq 0$ فإن

وعليه $\frac{n-5}{2}=0$ ومنه $n=5$.

4. $\begin{cases}C_{x+1}^{y}=C_x^{y-1}\\ C_{x+y}^2=10\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}\frac{(x+1)!}{y!(x+1-y)!}=\frac{x!}{(y-1)!(x-y+1)!}\\ \frac{(x+y)!}{2!(x+y-2)!}=10\end{cases}$ أي $\begin{cases}\frac{x+1}{y}\frac{x!}{(y-1)!}=\frac{x!}{(y-1)!}\\ \frac{(x+y)(x+y-1)}{2}=10\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}x+1=y\\ (x+y)(x+y-1)=20\end{cases}$

وعليه $2x(2x+1)=20$ إذن $4x^2+2x-20=0$ وبالتالي $x=\frac{-5}{2}$ أو $x=2$ إذن $(x;y)=(2;3)$.

التمرين 03

1. أ- $C_6^1\times C_4^2=36$

ب- $C_6^1\times C_4^2+C_6^2\times C_4^1+C_6^3=116$

2. أ-

$$X_n=C_{n+6}^2+C_{n+4}^2=\frac{(n+6)!}{2!(n+4)!}+\frac{(n+4)!}{2!(n+2)!}=\frac{(n+6)(n+5)}{2}+\frac{(n+4)(n+3)}{2}=\frac{2n^2+18n+42}{2}$$

$$=n^2+9n+21$$

ب- $n^2+9n+21=10713$ تكافئ $n^2+9n-10692=0$ ومنه $n=99$ أو $n=-108$ (مرفوض) ، إذن عدد الكريات المضافة هو 198

التمرين 04

1. $9^4 = 6561$

2. أ. $4^1 \times 9^3 = 2916$

ب. $4^4 = 256$

جـ. $A_9^4 = 3024$

د. $1^1 \times 8^3 \times C_4^1 = 1^1 \times 8^3 \times 4 = 2048$

التمرين 05

1. $10^6 = 1000000$

2. أ. $1^1 \times 1^2 \times 1^3 \times \frac{6!}{2! \times 3!} = 60$

ب. $\left(2^6 - 2\right) \times C_{10}^2 = 2790$

جـ. $1^3 \times 9^3 \times C_6^3 = 14580$

د. $1^1 \times 1^3 \times 8^2 \times \frac{6!}{3! \times 2!} = 3840$

التمرين 06

1. $C_{11}^5 = 462$

2. أ. $C_5^1 \times C_6^4 = 75$

ب. $C_5^5 + C_6^1 \times C_5^4 + C_6^2 \times C_5^3 = 181$

جـ. $C_5^3 \times C_6^2 + C_5^2 \times C_6^3 = 350$

3. $A_{11}^3 = 990$

4. $C_{11}^3 = 462$

التمرين 07

1. $A_{30}^3 = 24360$

2. أ. $A_{12}^1 \times A_{29}^2 = 9744$

ب. $A_1^1 \times A_{29}^2 \times C_3^1 = 2436$

جـ. $A_{18}^1 \times A_{12}^1 \times A_{28}^1 = 6048$

د. $A_{18}^1 \times A_{12}^1 \times A_{28}^1 \times 2 = 12096$

3. $6048 - \left(A_1^1 \times A_1^1 \times A_{28}^1 + A_1^1 \times A_{11}^1 \times A_1^1 + A_{17}^1 \times A_1^1 \times A_1^1\right) = 5992$

التمرين 08

1. $A_{12}^{12} = 12! = 479001600$

2. $5! \times 4! \times 3! \times 3! = 103680$

3. $5! \times 8! = 4838400$

التمرين 09

1. $3!=6$
2. $5!=120$
3. $\frac{5!}{2!}=60$
4. $6!=720$
5. $\frac{6!}{2!\times 2!}=180$
6. $\frac{7!}{2!\times 2!\times 3!}=210$

التمرين 10

1. $\frac{6!}{3!}=120$
2. $4!=24$
3. $4!=24$
4. $\frac{4!}{2!}=12$

التمرين 11

1. $(x+1)^5=\sum_{p=0}^{5}C_5^p\times x^{5-p}\times 1^p=x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1$ ،

$(x-2)^6=\sum_{p=0}^{6}C_6^p\times x^{6-p}\times 2^p=x^6+12x^5+60x^4+160x^3+240x^2+192x+64$

2. لدينا $(2x^2+1)^6=\sum_{p=0}^{6}C_6^p\times\left(2x^2\right)^p\times 1^{6-p}=\sum_{p=0}^{6}C_6^p\times 2^p x^{2p}$ وعليه $2p=4$ إذن $p=2$ وعليه المعامل هو: $C_5^2\times 2^2=40$

3. لدينا $\left(x^3-\frac{2}{x^2}\right)=\sum_{p=0}^{15}C_{15}^p\times\left(x^3\right)^{15-p}\times\left(-\frac{2}{x^2}\right)^p=\sum_{p=0}^{15}C_{15}^p\times(-2)^p\,x^{45-5p}$ ومنه $45-5p=10$ أي $p=7$

وعليه المعامل هو $C_{15}^7\times(-2)^7=-823680$.

التمرين 12

1. $S_1=\sum_{p=0}^{n}C_n^p\times 1^p\times 1^{n-p}=(1+1)^n=2^n$
2. $S_2=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^k\times 1^{n-k}=\left(1+\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{3}{2}\right)^n$
3. $S_3=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{1}{4}\right)^k\times 3^{n-k}=\left(3+\frac{1}{4}\right)^n=\left(\frac{13}{4}\right)^n$
4. $S_4=\sum_{p=0}^{n+1}\left(C_{n+1}^p 3^p\times 1^{n+1-p}\right)-C_{n+1}^0.3^0-C_{n+1}^1.3^1=(3+1)^{n+1}-1-3(n+1)=4^{n+1}-3n-4$

الإحتمالات

التمرين 01

علما أن الجدول المقابل يعرف قانون إحتمال المتغير X ، جد a و b بحيث : $E(X)=\frac{21}{10}$

$X=x_i$	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{b}{10}$

التمرين 02

يحتوي كيس على 4 كريات بيضاء ، 3 حمراء و كريتين خضراوتين . نسحب عشوائيا و دفعة واحدة ثلاث كريات من الكيس ، أحسب إحتمال كل من الحوادث التالية :

1. A : "سحب 3 كريات بيضاء"
2. B : "سحب 3 كريات من نفس اللون"
3. C : "سحب 3 كريات مختلفة اللون"
4. D : "سحب كريتين بيضاوتين على الأقل"
5. E : "سحب كرية بيضاء على الأكثر"
6. F : "سحب 3 كريات مختلفة اللون مثنى مثنى"

التمرين 03

يحتوي كيس على 4 كريات خضراء ، 5 حمراء و كرية سوداء . نسحب عشوائيا ثلاث كرات على التوالي بدون إرجاع الكرية المسحوبة إلى الكيس ، أحسب إحتمال كل من الحوادث التالية :

1. A : "الحصول على كريتين حمراوتين و كرية خضراء"
2. B : " الحصول على 3 كريات حمراء"
3. C : " الحصول على 3 كريات مختلفة اللون مثنى مثنى"
4. D : " عدم الحصول على أية كرية حمراء"
5. E : "الحصول على كرية حمراء واحدة على الأقل "
6. F : " الحصول على كرية سوداء ثم كريتين مختلفتين في اللون "
7. G : " الحصول على 3 كريات من نفس اللون"
8. H : " الحصول على كرة سوداء ثم كريتين من نفس اللون"

التمرين 04

تحتوي علبة على 7 بطاقات مرقمة من 1 إلى 7 لا نميز بينها باللمس. نسحب من هذه العلبة بطاقتين على التوالي مع إعادة البطاقة في كل سحب ،أحسب إحتمال كل من الحوادث التالية :

1. A : "سحب بطاقتين تحملان رقما فرديا "
2. B : "سحب بطاقة رقمها زوجي و الأخرى مربع تام "
3. C : "سحب بطاقة على الأقل رقمها أولي "
4. D : "سحب بطاقتين مجموع رقميهما زوجي "

التمرين 05

يحتوي صندوق على 3 كرات خضراء تحمل الرقم 0 و كرتان حمراوتان تحملان الرقم 5 و كرة سوداء تحمل الرقم y .كل الكرات متماثلة لا نميز بينها باللمس ،نسحب 3 كرات في آن واحد من الصندوق .

1. ماهو إحتمال الحصول على :

أ- A :"3 كرات من نفس اللون"؟

ب- B :"3 كرات مختلفة اللون مثنى مثنى"؟

جـ- C :" كرتين فقط من نفس اللون"؟

2. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع الأرقام التي تحملها الكرات الثلاث (تأكد أن هناك 6 قيم لـ X) .

- عين قانون الإحتمال ثم الأمل الرياضياتي بدلالة y .

- ماهي قيمة y حتى يكون $E(X)=20$،احسب $\sigma(X)$.

التمرين 06

بصندوق 10 كريات متماثلة منها 5 كريات مرقمة بـ1 ، 3 كريات مرقمة بـ2 و كريتين مرقمتين بـ3 . نسحب عشوائيا من هذا الصندوق 3 كريات في آن واحد

1. أحسب إحتمال كل من الحوادث التالية :

أ- A:"سحب 3 كريات جداء أرقامها يساوي 6"

ب- B:"سحب 3 كريات جداء أرقامها مربع تام"

جـ- C:"سحب 3 كريات جداء أرقامها عدد أولي"

2. نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب جداء أرقام الكريات.

أ- عين قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X .

ب- أحسب الأمل الرياضياتي لـ X ثم الإنحراف المعياري.

التمرين 07

يحتوي كيس على 7 كريات حمراء تحمل الأرقام : 6،5،4،3،2،1،0 ؛ و 3 كريات خضراء تحمل الأرقام : 3-، 2-، 4 لا نفرق بينها اللمس .

نسحب 3 كريات دفعة واحدة من هذا الكيس .

1. أحسب إحتمال الأحداث التالية :

أ- **A** :"الحصول على 3 كريات من نفس اللون"

ب- **B** :"الحصول على كرتين حمراوين على الأقل "

جـ- **C** :" الحصول على كرية خضراء تحمل رقما سالبا على الأكثر"

د- **D** :"الحصول على 3 كريات جداء أرقامها عدد سالب تماما"

2. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في الكيس .

أ- عين قيم المتغير العشوائي X .

ب- أوجد قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضياتي و الإنحراف المعياري

التمرين 09

n عدد طبيعي غير معدوم، كيس يحتوي على n كرية بيضاء و كرية واحدة سوداء (الكريات كلها متماثلة) .
نسحب عشوائيا كرتين على التوالي مع إعادة الكرية الأولى إلى الكيس .

1. أحسب إحتمال الأحداث : ـ **A**: " سحب كريتين بيضاوين " ـ **B**: " سحب كريتين مختلفتين في اللون " ـ **C**: " سحب كريتين من نفس اللون"

2. نضع $n=3$ ، ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات السوداء المسحوبة .

أـ عين قيم المتغير العشوائي X .

بـ أوجد قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضياتي و الإنحراف المعياري .

التمرين 10

مطعم يعملون فيه 5 رجال من بينهم "أمين" و "عبد الإله"، 4 نساء من بينهم "فاطمة" ، أرادو أن يعينو بينهم طاهيا ، نادلا و رئيسا للمطعم .

1. أحسب إحتمال الحادثة A : " المعينين رجال و أحدهم عبد الإله "

2. أحسب إحتمال الحادثة B : " أمين رئيسا للمطعم و فاطمة الطاهية "

3. أحسب إحتمال الحادثة C : " من بين المعينين رجلين فقط "

4. نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل تعيين عدد الرجال به .

أـ عين قيم المتغير العشوائي X ثم قانون إحتماله .

بـ أحسب $P\left(\left\{e^{3x}-e^{x}-18\leq 0\right\}\right)$.

جـ أحسب الإنحراف المعياري .

التمرين 11

يحتوي صندوق على 12 كريات لا نفرق بينها باللمس ، 6 كريات حمراء تحمل الأرقام 1 , 1, 1 , 0 , 0 , 0 و أربع كريات خضراء تحمل 2 , 2 , 2 , 0 و كريتين بيضاوتين تحمل 0 , 2 . نسحب عشوائيا من الصندوق ثلاث كريات دفعة واحدة .

1. أحسب إحتمال الأحداث التالية : ـ **A**: " الحصول على 3 كريات من نفس اللون " ـ **B**: " الحصول على 3 كريات تحمل نفس الرقم"

ـ **C**: " الحصول على 3 كريات مختلفة الأرقام مثنى مثنى " ـ **D**: " الحصول على 3 كريات مختلفة اللون "

2. أحسب $P\left(A\cap B\right)$ ، ثم إستنتج إحتمال الحادثة ـ **E**: " الحصول على 3 كريات من نفس اللون أو تحمل نفس الرقم "

3. نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء التي تحمل الرقم 0 .

أـ عين قيم المتغير العشوائي X ثم قانون إحتماله .

بـ أحسب أمله الرياضياتي و تباينه .

جـ أحسب إحتمال الحادثة $\left\{|X-1|=1\right\}$.

التمرين 12

يحتوي وعاء على n كرة بيضاء (n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2) ، 5 كرات حمراء و 3 كرات خضراء ، نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من الوعاء .

1. نسمي $P(n)$ إحتمال سحب كرتين من نفس اللون . بين أن : $P(n)=\dfrac{n^2-n+26}{(n+8)(n+7)}$.

2. في مايلي نعتبر $n=4$. يأتي لاعب يقوم بنفس التجربة الأولى : في البداية يدفع $30DA$ ، إذا وجد الكرتين من نفس اللون يكسب $40DA$ و إذا وجدهما من لونين مختلفين يكسب $5DA$. ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب الربح الصافي للاعب .

أـ ماهي قيم المتغير العشوائي X ؟

بـ أكتب قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضياتي .

جـ هل اللعبة في صالح اللاعب ؟

الحلول

التمرين 01

$X=x_i$	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{b}{10}$

لدينا $\frac{1}{5}+\frac{2a}{2}+\frac{3b}{10}=\frac{21}{10}$ و $\frac{1}{5}+\frac{a}{2}+\frac{b}{10}=1$ إذن بعد حل هذه الجملة نجد : $a=1$ و $b=3$.

التمرين 02

$$P(A)=\frac{C_4^3}{C_9^3}=\frac{4}{84}=\frac{1}{21} \quad .1$$

$$P(B)=\frac{C_4^3+C_3^3}{C_9^3}=\frac{5}{84} \quad .2$$

$$P(C)=1-P(B)=1-\frac{5}{84}=\frac{79}{84} \quad .3$$

$$P(D)=\frac{C_4^2\times C_5^1+C_4^3}{C_9^3}=\frac{17}{42} \quad .4$$

$$P(E)=\frac{C_5^3+C_4^1\times C_5^2}{C_9^3}=\frac{25}{42} \quad .5$$

$$P(E)=\frac{C_2^1\times C_3^1\times C_4^1}{C_9^3}=\frac{2}{7} \quad .6$$

التمرين 03

$$P(A)=\frac{A_5^2\times A_4^1\times C_3^1}{A_{10}^3}=\frac{1}{3} \quad .1$$

$$P(B)=\frac{A_5^3}{A_{10}^3}=\frac{1}{12} \quad .2$$

$$P(C)=\frac{A_5^1\times A_4^1\times A_1^1\times 3!}{A_{10}^3}=\frac{1}{6} \quad .3$$

$$P(D)=\frac{A_5^3}{A_{10}^3}=\frac{1}{12} \quad .4$$

$$P(E)=1-P(D)=\frac{11}{12} \quad .5$$

$$P(F)=\frac{A_1^1\times A_5^1\times A_4^1\times 2}{A_{10}^3}=\frac{1}{18} \quad .6$$

$$P(G)=\frac{A_5^3+A_4^3}{A_{10}^3}=\frac{7}{60} \quad .7$$

$$P(H)=\frac{A_1^1\times A_4^2+A_1^1\times A_5^2}{A_{10}^3}=\frac{3}{45} \quad .8$$

التمرين 04

1. $P(A)=\frac{4^2}{7^2}=\frac{16}{49}$

2. $P(B)=\frac{2^1\times 3^1\times 2-1}{7^2}=\frac{11}{49}$

3. $P(C)=\frac{4^1\times 3^1\times 2+4^2}{7^2}=\frac{40}{49}$

4. $P(D)=\frac{3^2+4^2}{7^2}=\frac{25}{49}$

التمرين 05

1. أ- $P(A)=\frac{C_3^3}{C_6^3}=\frac{1}{20}$

ب- $P(B)=\frac{C_3^1\times C_2^1\times C_1^1}{C_6^3}=\frac{3}{10}$

جـ- $P(C)=\frac{C_3^2\times C_3^1+C_2^2\times C_4^1}{C_6^3}=\frac{13}{20}$

2- قيم X هي 0 ، 5 ، 10 ، y ، y+5 ، y+10 . ولدينا $P(X=0)=\frac{C_3^3}{C_6^3}=\frac{1}{20}$ ، $P(X=5)=\frac{C_3^2\times C_3^1}{C_6^3}=\frac{6}{20}$ ، $P(X=10)=\frac{C_3^1\times C_2^2}{C_6^3}=\frac{3}{20}$ ،

$P(X=y)=\frac{C_3^2\times C_1^1}{C_6^3}=\frac{3}{20}$ ، $P(X=y+5)=\frac{C_3^1\times C_2^1\times C_1^1}{C_6^3}=\frac{6}{20}$ و $P(X=y+10)=\frac{C_2^2\times C_1^1}{C_6^3}=\frac{1}{20}$.

$X=x_i$	0	5	10	y	y+5	y+10
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{1}{20}$

الأمل الرياضياتي :

$E(X)=\frac{0+30+30+3y+6y+30+y+10}{20}=\frac{y+10}{2}$

ـ $E(X)=20$ تكافئ $\frac{y+10}{2}=20$ أي $y+10=40$ إذن $y=30$.

الإنحراف المعياري : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{0+150+300+2700+7350+1600}{20}-20^2}=\sqrt{205}\simeq 14.32$

التمرين 06

1. أ- $P(A)=\frac{C_5^1\times C_3^1\times C_2^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{4}$

ب- $P(B)=\frac{C_5^3+C_5^1\times C_3^2+C_5^1\times C_2^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{4}$

جـ- $P(C)=\frac{C_5^2\times C_3^1+C_5^2\times C_2^1}{C_{10}^3}=\frac{5}{12}$

2. أ- قيم X هي 1، 2، 3، 4، 6، 8، 9، 12، 18. قانون إحتماله :

$X=x_i$	1	2	3	4	6	8	9	12	18
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$

ب- $E(X)=\frac{1}{12}+\frac{2}{4}+\frac{3}{6}+\frac{4}{8}+\frac{6}{4}+\frac{8}{120}+\frac{9}{24}+\frac{12}{20}+\frac{18}{40}=\frac{183}{40}=4.575$.

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{1}{12}+\frac{4}{4}+\frac{9}{6}+\frac{16}{8}+\frac{36}{4}+\frac{64}{120}+\frac{81}{24}+\frac{144}{20}+\frac{324}{40}-4.575^2}\simeq 3.444$

التمرين 07

1. أ- $P(A)=\dfrac{C_7^3+C_3^3}{C_{10}^3}=\dfrac{3}{10}$

ب- $P(B)=\dfrac{C_7^2\times C_3^1+C_7^3}{C_{10}^3}=\dfrac{49}{60}$

ج- $P(C)=\dfrac{C_2^1\times C_8^2+C_8^3}{C_{10}^3}=\dfrac{14}{15}$

د- $P(C)=\dfrac{C_2^1\times C_7^2}{C_{10}^3}=\dfrac{7}{20}$

2. أ- $X\in\{4;5;6;7\}$

ب- لدينا $P(X=4)=\dfrac{C_7^3}{C_{10}^3}=\dfrac{35}{120}$ ، $P(X=5)=\dfrac{C_7^2\times C_3^1}{C_{10}^3}=\dfrac{63}{120}$ ،

$P(X=6)=\dfrac{C_7^1\times C_3^2}{C_{10}^3}=\dfrac{21}{120}$ و $P(X=7)=\dfrac{C_3^3}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{120}$.

$X=x_i$	4	5	6	7
$P(X=x_i)$	$\frac{35}{120}$	$\frac{63}{120}$	$\frac{21}{120}$	$\frac{1}{120}$

الأمل الرياضياتي: $E(X)=\dfrac{140+315+126+7}{120}=\dfrac{49}{10}=4.9$

الإنحراف المعياري: $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\dfrac{560+1575+756+49}{120}-4.9^2}=\dfrac{7}{10}=0.7$

التمرين 09

1. $P(A)=\dfrac{n^2}{(n+1)^2}=\dfrac{n^2}{n^2+2n+1}$ ، $P(B)=\dfrac{n^1\times 1^1\times 2}{(n+1)^2}=\dfrac{2n}{n^2+2n+1}$ و $P(C)=\dfrac{n^2+1^2}{(n+1)^2}=\dfrac{n^2+1}{n^2+2n+1}$.

2. أ- $X\in\{0;1;2\}$.

ب- لدينا $P(X=0)=\dfrac{3^2}{4^2}=\dfrac{9}{16}$ ، $P(X=1)=\dfrac{3^1\times 1^1\times 2}{4^2}=\dfrac{6}{16}$ ،

و $P(X=2)=\dfrac{1^2}{4^2}=\dfrac{1}{16}$.

$X=x_i$	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{9}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{1}{16}$

الأمل الرياضياتي: $E(X)=\dfrac{0+6+2}{16}=\dfrac{1}{2}=0.5$

الإنحراف المعياري: $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\dfrac{9+6+4}{16}-0.5^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}\simeq 0.968$

التمرين 10

1. $P(A)=\dfrac{A_1^1\times A_4^2\times C_3^1}{A_9^3}=\dfrac{1}{14}$

2. $P(B)=\dfrac{A_1^1\times A_1^1\times A_7^1}{A_9^3}=\dfrac{1}{72}$

3. $P(C)=\dfrac{A_5^2\times A_4^1\times C_3^1}{A_9^3}=\dfrac{10}{21}$

4. أ- $X \in \{0;1;2;3\}$ لدينا. $P(X=0)=\frac{A_4^3}{A_9^3}=\frac{1}{21}$ ، $P(X=1)=\frac{A_5^1 \times A_4^2 \times C_3^1}{A_9^3}=\frac{5}{14}$

$P(X=2)=\frac{A_5^2 \times A_4^1 \times C_3^1}{A_9^3}=\frac{10}{21}$ ، $P(X=3)=\frac{A_5^3}{A_9^3}=\frac{5}{42}$ و

$X=x_i$	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{42}$

ب- $P\left(\left\{e^{3x}-e^{x}-18\le 0\right\}\right)=P(X=0)+P(X=1)=\frac{1}{21}+\frac{5}{14}=\frac{17}{42}$.

ج- $E(X)=0+\frac{5}{14}+\frac{20}{21}+\frac{15}{42}=\frac{5}{3}$ ، $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{0+\frac{1}{5}+\frac{40}{21}+\frac{45}{42}-\left(\frac{5}{3}\right)^2}\simeq 0.631$.

التمرين 11

1. $P(A)=\frac{C_6^3+C_4^3}{C_{12}^3}=\frac{6}{55}$ ، $P(B)=\frac{C_3^3+C_5^3+C_4^3}{C_{12}^3}=\frac{3}{44}$ ، $P(C)=\frac{C_3^1 \times C_5^1 \times C_4^1}{C_{12}^3}=\frac{3}{11}$ و $P(D)=1-P(A)=1-\frac{6}{55}=\frac{49}{55}$.

2. $P(A \cap B)=\frac{C_3^3+C_3^3+C_3^3}{C_{12}^3}=\frac{3}{220}$ ومنه : $P(E)=P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)=\frac{6}{55}+\frac{3}{44}-\frac{3}{220}=\frac{9}{55}$.

3. أ- $X \in \{0;1;2;3\}$ لدينا. $P(X=0)=\frac{C_9^3}{C_{12}^3}=\frac{21}{55}$ ، $P(X=1)=\frac{C_3^1 \times C_9^2}{C_{12}^3}=\frac{27}{55}$

$P(X=2)=\frac{C_3^2 \times C_9^1}{C_{12}^3}=\frac{27}{220}$ ، $P(X=3)=\frac{C_3^3}{C_{12}^3}=\frac{1}{220}$ و

$X=x_i$	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{21}{55}$	$\frac{27}{55}$	$\frac{27}{220}$	$\frac{1}{220}$

ب- $E(X)=0+\frac{27}{55}+\frac{54}{220}+\frac{3}{220}=\frac{3}{4}=0.75$ ، $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{0+\frac{27}{55}+\frac{108}{220}+\frac{9}{220}-(0.75)^2}\simeq 0.678$.

ج- $P\left(\left\{|X-1|=1\right\}\right)=P(X=0)+P(X=2)=\frac{21}{55}+\frac{27}{220}=\frac{111}{220}$.

التمرين 12

1. $P(n)=\frac{C_n^2+C_5^2+C_3^2}{C_{n+8}^2}=\frac{2\times\frac{n!}{2!(n-2)!}+13}{2\times\frac{(n+8)!}{2!(n+6)!}}=\frac{n(n-1)+26}{(n+8)(n+7)}=\frac{n^2-n+26}{(n+8)(n+7)}$.

2. أ- $X \in \{10;-25\}$

ب- لدينا : $P(X=10)=P(4)=\frac{38}{12\times 11}=\frac{19}{66}$

و $P(X=-25)=1-P(4)=1-\frac{19}{66}=\frac{47}{66}$.

الأمل الرياضياتي : $E(X)=\frac{10\times 19-25\times 47}{66}=\frac{3}{4}=\frac{-985}{66}\simeq -14.924$

ج- بما أن $E(X)<0$ فإن اللعبة ليست في صالح اللاعب .

الإحتمالات الشرطية

التمرين 01

قسم به 30 تلميذا منهم :

M:"10 جيدون في الرياضيات"

A:"13 جيدون في الأدب"

$A \cap M$:"5 جيدون في المادتين معا"

نختار تلميذا عشوائيا من القسم.

1. ما احتمال أن يكون التلميذ جيدا في الرياضيات ؟
2. ما احتمال أن يكون التلميذ جيدا في الأدب ؟
3. ما احتمال أن يكون التلميذ جيدا في المادتين معا ؟
4. ما احتمال أن يكون التلميذ جيدا في الرياضيات علما أنه جيد في الأدب ؟

التمرين 02

ينتج المصنع A 35٪ من القطع الإلكترونية الخاصة بالحاسوب . الباقي ينتجه المصنع B ، 5٪ من هذه القطع المنتجة في المصنع A غير صالحة للإستعمال بينما 2٪ فقط من القطع المنتجة في المصنع B غير صالحة للإستعمال .

نختار عشوائيا واحدة من هذه القطع .

نسمي S:"القطعة المختارة صالحة للإستعمال"

1. مثل شجرة الإحتمالات .
2. ما إحتمال أن تكون القطعة المختارة صالحة للإستعمال ؟
3. ما إحتمال أن تكون القطعة المختارة من المصنع A علما أنها صالحة للإستعمال ؟

التمرين 03

تستقبل ثانوية التلاميذ الجدد المتوجهين إلى السنة أولى ثانوي من ثلاث متوسطات M_1, M_2 و M_3 ، من بينهم 30٪ من M_1، 15٪ من M_2 و الباقي من M_3 . في آخر السنة نحصي عدد التلاميذ المعيدين :

10٪ من تلاميذ M_1 يعيدون السنة .

25٪ من تلاميذ M_2 يعيدون السنة .

5٪ من تلاميذ M_3 يعيدون السنة .

نسمي R:"تلميذ يعيد السنة"

نختار عشوائيا تلميذا من المتوجهين للسنة أولى ثانوي .

1. شكل شجرة الإحتمالات.
2. ما إحتمال أن يكون التلميذ المختار معيدا للسنة ؟
3. ما إحتمال أن يكون التلميذ المختار من المتوسطة M_3 علما أنه معيد للسنة ؟

التمرين 04

U_1 صندوق يحتوي على 3 كرات حمراء و كرتين خضراوين و U_2 صندوق به كرتين حمراوين و 3 كرات خضراء (الكرات لا نميز بينها باللمس). نقوم بسحب كرة عشوائيا من U_1 و نضعها في U_2 ثم نسحب عشوائيا من U_2 كرتين في آن واحد.

نرمز بـ R_1: "سحب كرة حمراء من U_1"

و بـ A: "سحب كرتين حمراوين من U_2"

1. أحسب الإحتمالين $P(R_1)$ و $P(R_1 \cap A)$.

2. تحقق أن $P(A) = \frac{11}{75}$، هل A و R_1 مستقلتان ؟

3. علمًا أن الكرتين المسحوبتين من U_2 حمراوين ، ما إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة من U_1 حمراء ؟

4. n عدد طبيعي غير معدوم ، نضيف n كرة حمراء إلى الصندوق U_1 و نعيد التجربة السابقة . يربح اللاعب 5 دينار عند كل سحب لكرة خضراء من U_2 و يخسر 10 دينار عند كل سحب لكرة حمراء من U_2 .

ـ نسمي X المتغير العشوائي الذي يساوي مجموع أرباح اللاعب .

أـ ماهي قيم X ؟

بـ بين أن $P(X = -5) = \frac{9n+43}{15.(n+5)}$.

جـ أعط بدلالة n قانون إحتمال المتغير العشوائي X .

دـ هل توجد قيمة لـ n تجعل اللعبة رابحة ؟

التمرين 05

صندوق U_1 به 3 كريات خضراء و 2 كريات حمراء و يحتوي U_2 على 3 كريات حمراء و 2 كريات خضراء و نعتبر أن جميع الكريات متماثلة و لا يمكن تمييزها باللمس . نسحب كرية واحدة من U_1 و كريتان في آن واحد من U_2 .

1. احسب احتمال الحصول على 3 كريات خضراء .

2. احسب احتمال الحصول على كرية خضراء على الأقل علمًا أن الكرية المسحوبة من U_1 حمراء .

3. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات الحمراء المحصل عليها .

أـ عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X و احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

بـ احسب التباين و الإنحراف المعياري للمتغير العشوائي X.

التمرين 06

صندوق A يحتوي على 4 كرات حمراء و 6 سوداء و صندوق B يحتوي على 1 حمراء و 9 سوداء (كل الكرات لا نفرق بينها باللمس).

I) نسمي R: "الحصول على كرة حمراء" ، يرمي لاعب زهرة نرد غير مزيفة و مرقمة من 1 إلى 6 مرة واحدة في الهواء.

ـ إذا تحصل على الرقم 1 يسحب كرة واحدة من الصندوق A .

ـ إذا لم يتحصل على الرقم 1 فيسحب من الصندوق B.

1. شكل شجرة الاحتمالات لهذه التجربة.

2. بين أن $P(R) = 0,15$

3. تحصل اللاعب على كرة حمراء ، بين أن احتمال أن تكون من الصندوق B أكبر أو يساوي من احتمال أن تكون من الصندوق A .

II) اللاعب يكرر اللعبة مرتان (اللعبة المنصوص عليها في الجزء الأول في نفس الشروط المتماثلة و المستقلة عن بعضها بمعنى يعيد الصندوقين إلى تعدادهما الأول بعد اللعبة الأولى) . ليكن n عدد طبيعي غير معدوم، بعد اللعبتين يتحصل اللاعب على n نقطة عن كل كرة حمراء و يخسر نقطتان عن كل كرة سوداء. نرمز بـ X إلى الربح الصافي بعد اللعبتين .

1. ماهي قيم X ؟

2. أوجد قانون الإحتمال و احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ للمتغير العشوائي X بدلالة n .

3. ماهي أصغر قيمة لـ n حتى تكون اللعبة مربحة ؟

التمرين 07

صندوقان U_1 و U_2 متماثلان غير شفافين يحتويان على كريات متماثلة لا يمكن التفريق بينها باللمس، حيث:

يحتوي U_1 على خمس كريات حمراء مرقمة بـ: 2 ، 1، 1، 1، 0وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: 1 ، 1،0.

يحتوي U_2 على ثلاث كريات حمراء مرقمة بـ: 2 ، 1، 1وكريتين خضراوين مرقمتين بـ: 1 ، 0.

I/ نختار عشوائيا أحد الصندوقين: فإذا كان U_1 نسحب منه كريتين على التوالي دون إرجاع،

وإذا كان U_2 نسحب منه كريتين على التوالي مع الإرجاع.

1. احسب إحتمال الحدثين: A " الكريتين المسحوبتين من نفس اللون" و B" الكريتين المسحوبتين تحملان نفس الرقم"

2. هل الحدثان Aو Bمستقلان؟ علل.

3. إذا علمت أن الكريتين المسحوبتين مختلفتين في اللون، ما إحتمال أن تكونا من الصندوق U_1 ؟

II/ نضع كريات كل من الصندوقين U_1 و U_2 في صندوق آخر، U_3 ثم نسحب من هذا الأخير عشوائيا كريتين في آن واحد. وليكن Xالمتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع الرقمين المحصل عليهما.

1. عين قيم المتغير العشوائيX .

2. عيّن قانون إحتمال المتغير العشوائي ثم احسب أمله الرياضياتي .

3. أحسب $E(-2024X+1444)$.

التمرين 08

زهر نرد مغشوش أوجهه مرقمة من 1إلى 6 .نسمي P_n حيث $1\le n\le 6$ احتمال الحصول على الرقم n عند رمي زهر النرد .

الأعداد $P_1;P_2;P_3;P_4;P_5$ و P_6 بهذا الترتيب تشكل حدودا متعاقبة من متتالية حسابية أساسها rغير معدوم و $P_1\times P_4=(P_2)^2$.

1. بيّن أن: $P_1=r=\frac{1}{21}$ ، ثم بيّن أن : $P_n=\frac{n}{21}$ بحيث $1\le n\le 6$.

2. نرمي زهر النرد مرة واحدة.

أ- احسب احتمال الحادثتين Aو Bحيث : A:" الرقم المتحصل عليه زوجي" و B : "الرقم المتحصل عليه أكبر من أو يساوي3 "

ب- احسب احتمال أن يكون الرقم المتحصل عليه أكبر من أو يساوي 3علما أنه زوجي.

ج- هل الحادثتان A و B مستقلتين؟

3. U_1 و U_2كيسين غير شفافين حيث : الكيس U_1 يحتوي على كرة بيضاء و ثلاث كرات سوداء و الكيس U_2 يحتوي على كرتين بيضاوين و كرة سوداء .

يرمي لاعب زهر النرد السابق مرة واحدة ، إذا تحصل على رقم زوجي يسحب عشوائيا كرة واحدة من الكيس U_1 أما إذا تحصل على رقم فردي فإنه يسحب عشوائيا كرة واحدة من الكيس U_2 .

يربح اللاعب عندما يتحصل على كرة بيضاء ، نسمي H حادثة الحصول على كرة بيضاء.

أ- احسب احتمال سحب كرة بيضاء من الكيس U_1 ثم استنتج احتمال الحادثة $H\cap A$.

ب- احسب $P(H)$.

ج- علما أن اللاعب قد ربح ، احسب احتمال الحصول على رقم زوجي.

التمرين 09

يحتوي كيس على 5كريات بيضاء و 5كريات سوداء متماثلة لا نفرق بينها باللمس.

نسحب من الكيس n كرية على التوالي مع الإرجاع حيث n عدد طبيعي $(n\ge 2)$

نعتبر الحوادث : ـ A "نتحصل على كريات من اللونين" ـ B " " نتحصل على كرية بيضاء على الأكثر"

ـ C "نتحصل على كريات من نفس اللون" ـ D "نتحصل على كرية بيضاء واحدة فقط"

1.أـ أحسب إحتمال الحادثتين CوD .

بـ بين أن : $P(A)=1-\frac{1}{2^{n-1}}$ ، $P(A\cap B)=\frac{n}{2^n}$ و $P(B)=\frac{n+1}{2^n}$.

2. بين أن $\left[P(A\cap B)=P(A)\times P(B)\right]$ يكافئ $\left[2^{n-1}=n+1\right]$.

3. نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 2}$ المعرفة بـ: $u_n=2^{n-1}-(n+1)$.

أـ أحسب كل من u_2 ، u_3 و u_4 .

بـ بيّن أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 2}$ متزايدة تماما.

4. إستنتج قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها تكون الحادثتان A و B مستقلتان .

التمرين 10

كيس يحتوي على أربع كرات تحمل الرقم "1" واثنان تحملان الرقم " e " وست كرات تحمل الرقم " $\frac{1}{e}$ " (الكرات لانفرق بينها باللمس).

نسحب على التوالي وبالإرجاع كرتين ونسجل x العدد الذي تحمله الكرة الأولى و y العدد الذي تحمله الكرة الثانية.

نرفق بهذه التجربة النقطة Mذات اللاحقة z بحيث : $z=\ln x+i\ln y$

1. في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ أحسب احتمال الحوادث التالية :

A : M تنتمي إلى حامل محور الفواصل

B : M تنتمي إلى حامل محور التراتيب

C :قيس الزاوية $(\vec{u};\overrightarrow{OM})$ يساوي $\frac{-\pi}{4}$.

2.أـ هل الحادثتين AوBمستقلتان؟ برر إجابتك؟

بـ علما أن $|z|=1$ ماهو احتمال أن يكون $\arg(z)=\frac{\pi}{2}$.

4. X متغير عشوائي يرفق بكل سحبة المسافة OM

أـ عين القيم الممكنة لـ X

بـ عين قانون الإحتمال المتغير العشوائي.

التمرين 11

عادة ما ينسى الأستاذ مفاتيح القسم. من أجل كل عدد طبيعي n بحيث $n\geq 1$ ،نسمي E_n الحادثة : " الأستاذ ينسى مفاتيحه فيالقسم في اليوم n "؛ ليكن P_n احتمال E_n ، نسمي الاحتمال $P_1=a$ بأنه ينسى مفاتيحه في اليوم الأول $n=1$.

نفرض أن الشروط التالية محققة :

-إذا نسي مفاتيحه في اليوم n، فإن احتمال أن ينساهم في اليوم الموالي $n+1$ هو: $\frac{1}{10}$

- إذا لم ينس مفاتيحه في اليوم n، فإن احتمال أن ينساهم في اليوم الموالي $n+1$ هو: $\frac{4}{10}$

1.احسب بدلالة P_n الإحتمالين $P(E_{n+1}\cap E_n)$ و $P(E_{n+1}\cap \overline{E_n})$.

2. استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $P_{n+1}=\frac{-3}{10}P_n+\frac{4}{10}$

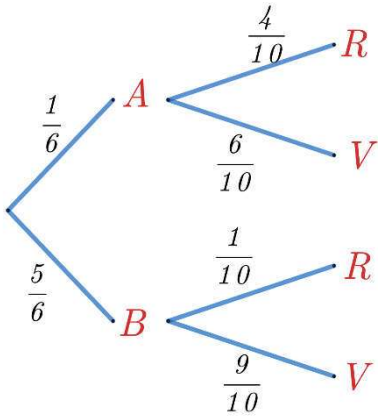
3. نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بـ: $u_n = 13P_n - 4$.

أ- بين أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية، وعين الحد الأول لها بدلالة a .

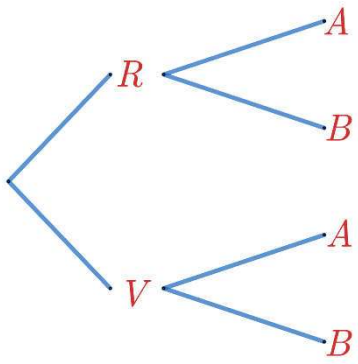
ب- أكتب u_n بدلالة n و a ،ثم استنتج عبارة P_n بدلالة n و a .

التمرين 12

لنعتبر شجرة الإحتمال الآتية :



- استنتج ملء شجرة الإحتمال :



الحلول

التمرين 01

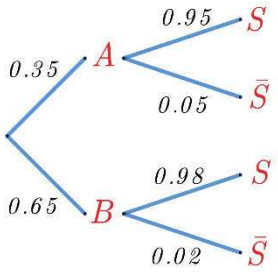
1. $P(M)=\frac{10}{23}$

2. $P(A)=\frac{13}{23}$

3. $P(A\cap M)=\frac{5}{23}$

4. $P_A(M)=\frac{P(A\cap M)}{P(A)}=\frac{5}{13}$

التمرين 02

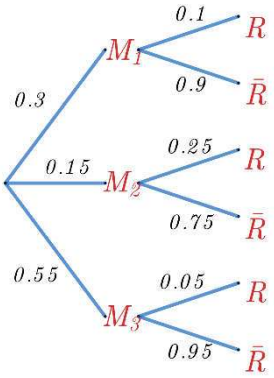


1. شجرة الإحتمالات.

2. $P(S)=0.35\times0.95+0.65\times0.98=0.9695$

3. $P_S(A)=\frac{P(A\cap S)}{P(S)}=\frac{0.35\times0.95}{0.9695}=\frac{95}{277}$

التمرين 03



1. شكل شجرة الإحتمالات.

2. $P(R)=0.3\times0.1+0.15\times0.25+0.55\times0.05=0.095$

3. $P_R(M_3)=\frac{P(M_3\cap R)}{P(R)}=\frac{0.55\times0.05}{0.095}=\frac{11}{38}$

التمرين 04

1. $P(R_1)=\frac{3}{5}$ و $P(R_1\cap A)=P(R_1)\times P_{R_1}(A)=\frac{3}{5}\times\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{3}{25}$.

2. $P(A)=P(R_1)\times P_{R_1}(A)+P(\overline{R_1})\times P_{\overline{R_1}}(A)=\frac{3}{25}+\frac{2}{5}\times\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{11}{75}$.

بما أن $P(R_1\cap A)\neq P(R_1)\times P(A)$ فإن A و R_1 غير مستقلتين.

3. $P_A(R_1)=\frac{P(R_1\cap A)}{P(A)}=\frac{3}{25}\times\frac{75}{11}=\frac{9}{11}$

4. أ- قيم X هي 20-، 5- و 10.

$X=x_i$	-20	-5	10
$P(X=x_i)$	$\frac{9n+43}{15(n+5)}$	$\frac{3n+11}{15(n+5)}$	$\frac{3n+21}{15(n+5)}$

ب- $P(X=-5)=\frac{n+3}{n+5}\times\frac{C_3^1\times C_3^1}{C_6^2}+\frac{2}{n+5}\times\frac{C_4^1\times C_2^1}{C_6^2}=\frac{(n+3)\times9+2\times8}{15(n+5)}=\frac{9n+43}{15(n+5)}$

جـ- لدينا $P(X=-20)=\frac{n+3}{n+5}\times\frac{C_3^2}{C_6^2}+\frac{2}{n+5}\times\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{(n+3)\times3+2\times1}{15(n+5)}=\frac{3n+11}{15(n+5)}$

و $P(X=10)=\frac{n+3}{n+5}\times\frac{C_3^2}{C_6^2}+\frac{2}{n+5}\times\frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{(n+3)\times3+2\times6}{15(n+5)}=\frac{3n+21}{15(n+5)}$

د- لدينا $E(X)=\dfrac{-20(9n+43)-5(3n+11)+10(3n+21)}{15(n+5)}=\dfrac{-11n-47}{n+5}$

و عليه $E(X)>0$ تكافئ $\dfrac{-11n-47}{n+5}>0$ و هذا تناقض من كون n عدد طبيعي و عليه لا توجد قيمة لـ n حتى تكون اللعبة مربحة .

التمرين 05

1. $P(V_1V_2V_2)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{C_2^2}{C_5^2}=\dfrac{3}{50}$

2. $P(R_1V_2R_2)+P(R_1V_2V_2)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{C_2^1\times C_3^1}{C_5^2}+\dfrac{2}{5}\times\dfrac{C_2^2}{C_5^2}=\dfrac{7}{25}$

3. أ- قيم X هي 0 ، 1 ، 2 ، 3 . لدينا $P(X=0)=P(V_1V_2V_2)=\dfrac{3}{50}$

$P(X=1)=P(R_1V_2V_2)+P(V_1R_2V_2)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{C_2^2}{C_5^2}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{C_2^1\times C_3^1}{C_5^2}=\dfrac{2}{5}$

$P(X=2)=P(R_1R_2V_2)+P(V_1R_2R_2)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{C_2^1\times C_3^1}{C_5^2}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{C_3^2}{C_5^2}=\dfrac{21}{50}$

$P(X=3)=P(R_1R_2R_2)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{C_3^2}{C_5^2}=\dfrac{3}{25}$

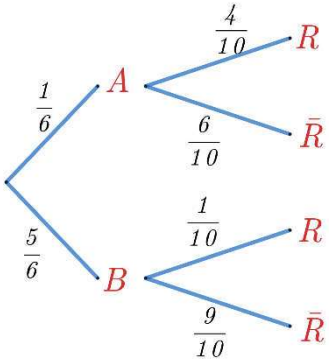
$X=x_i$	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{50}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{21}{50}$	$\frac{3}{25}$

الأمل الرياضياتي : $E(X)=0\times\dfrac{3}{50}+1\times\dfrac{2}{5}+2\times\dfrac{21}{50}+3\times\dfrac{3}{25}=\dfrac{8}{5}$

بـ- التباين : $V(X)=0\times\dfrac{3}{50}+1\times\dfrac{2}{5}+4\times\dfrac{21}{50}+9\times\dfrac{3}{25}-\left(\dfrac{8}{5}\right)^2=\dfrac{3}{5}$

الإنحراف المعياري : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\dfrac{3}{5}}\simeq 0.7746$

التمرين 06



I) 1. شجرة الاحتمالات.

2. $P(R)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{4}{10}+\dfrac{5}{6}\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{3}{20}=0.15$

3. لدينا $P_R(A)=\dfrac{P(A\cap R)}{P(R)}=\dfrac{\frac{1}{6}\times\frac{4}{10}}{0.15}=\dfrac{4}{9}$ و $P_R(B)=\dfrac{P(B\cap R)}{P(R)}=\dfrac{\frac{5}{6}\times\frac{1}{10}}{0.15}=\dfrac{5}{9}$ و عليه $P_R(B)>P_R(A)$.

II) 1. X يأخذ القيم 2n ، n-2 ، -4 .

$X=x_i$	2n	-4	n-2
$P(X=x_i)$	$\frac{9}{400}$	$\frac{289}{400}$	$\frac{102}{400}$

2. لدينا $P(X=2n)=\left(P(R)\right)^2=\dfrac{9}{400}$

$P(X=-4)=\left(P(\bar{R})\right)^2=(1-0.15)^2=\dfrac{289}{400}$ ،

و $P(X=n-2)=P(\bar{R})\times P(R)\times 2=(1-0.15)\times 0.15\times 2=\dfrac{102}{400}$

الأمل الرياضياتي : $E(X)=\dfrac{18n-1156+102n-204}{400}=\dfrac{120n-1360}{400}=\dfrac{3n-34}{10}$

3. لدينا $E(X)>0$ تكافئ $\dfrac{3n-34}{10}>0$ أي $3n-34>0$ و عليه $n>\dfrac{34}{3}$ و منه أصغر قيمة هي 12 .

التمرين 07

I/ 1. $P(A)=\frac{1}{2}\times\frac{A_5^2+A_3^2}{A_8^2}+\frac{1}{2}\times\frac{3^2+2^2}{5^2}=\frac{689}{1400}$ و $P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{A_2^2+A_5^2}{A_8^2}+\frac{1}{2}\times\frac{3^2+1^2+1^2}{5^2}=\frac{583}{1400}$

2. بما أن أن $P(A\cap B)=\frac{1}{2}\times\frac{A_3^2+A_2^2}{A_8^2}+\frac{1}{2}\times\frac{2^2+1^2+1^2+1^2}{5^2}=\frac{37}{175}\neq P(A)\times P(B)$ فإن الحدثان A وB غير مستقلان .

3. $P_{\overline{A}}(U_1)=\frac{P(\overline{A}\cap U_1)}{P(\overline{A})}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{A_5^1\times A_3^1\times 2}{A_8^2}}{1-\frac{689}{1400}}=\frac{125}{237}$

II/ 1. قيم X هي 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 .

2. لدينا $P(X=0)=\frac{C_3^2}{C_{13}^2}=\frac{1}{26}$ ، $P(X=1)=\frac{C_3^1\times C_8^1}{C_{13}^2}=\frac{4}{13}$

$P(X=2)=\frac{C_3^1\times C_2^1+C_8^2}{C_{13}^2}=\frac{17}{39}$ ، $P(X=3)=\frac{C_8^1\times C_2^1}{C_{13}^2}=\frac{8}{39}$

و $P(X=4)=\frac{C_2^2}{C_{13}^2}=\frac{1}{78}$.

$X=x_i$	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{26}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{17}{39}$	$\frac{8}{39}$	$\frac{1}{78}$

الأمل الرياضياتي : $E(X)=\frac{4}{13}+\frac{34}{39}+\frac{24}{39}+\frac{4}{78}=\frac{24}{13}$

3. $E(-2024X+1444)=-2024E(X)+1444=\frac{-29804}{13}$

التمرين 08

1. لدينا $P_1+P_2+P_3+P_4+P_5+P_6=1$ تكافئ $6\times\frac{(P_1+P_6)}{2}=1$ أي $3P_1+3P_6=1$ إذن $6P_1+15r=1...(1)$ و لدينا $P_1\times P_4=(P_2)^2$

تكافئ $P_1\times(P_1+3r)=(P_1+r)^2$ أي $rP_1-r^2=0$ إذن $r(P_1-r)=0$ ومنه $r=P_1$ بالتعويض في (1) نجد $P_1=\frac{1}{21}$ ،

و عليه $r=\frac{1}{21}$ إذن $P_n=P_1+(n-1)r=\frac{1}{21}+\frac{n-1}{21}=\frac{n}{21}$.

2. أ- $P(A)=P_2+P_4+P_6=\frac{12}{21}$ و $P(B)=P_3+P_4+P_5+P_6=\frac{18}{21}$

ب- $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P_4+P_6}{\frac{12}{21}}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$

ج- بما أن $P_A(B)\neq P(B)$ فإن الحادثتان A و B غير مستقلتين

3. U_1 و U_2 كيسين غير شفافين حيث : الكيس U_1 يحتوي على كرة بيضاء و ثلاث كرات سوداء و الكيس U_2 يحتوي على كرتين بيضاوين و كرة سوداء .

يرمي لاعب زهر النرد السابق مرة واحدة ، إذا تحصل على رقم زوجي يسحب عشوائيا كرة واحدة من الكيس U_1 أما إذا تحصل على رقم فردي فإنه يسحب عشوائيا كرة واحدة من الكيس U_2 .

يربح اللاعب عندما يتحصل على كرة بيضاء ، نسمي H حادثة الحصول على كرة بيضاء.

أ- $P_A(H)=\frac{1}{4}$ الإستنتاج : $P(H\cap A)=P(A)P_A(H)=\frac{12}{21}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{7}$.

ب- $P(H)=P(H\cap A)+P\left(H\cap\overline{A}\right)=\frac{1}{7}+\left(1-\frac{12}{21}\right)\times\frac{2}{3}=\frac{3}{7}$.

ج- $P_H(A)=\frac{P(A\cap H)}{P(H)}=\frac{1}{7}\times\frac{7}{3}=\frac{1}{3}$

التمرين 09

1.أ- $P(C)=\frac{5^n+5^n}{10^n}=\frac{2\times5^n}{2^n\times5^n}=\frac{1}{2^{n-1}}$ و $P(D)=\frac{5^1\times5^{n-1}\times C_n^1}{10^n}=\frac{5^n\times n}{2^n\times5^n}=\frac{n}{2^n}$.

ب- $P(A)=1-P(C)=1-\frac{1}{2^{n-1}}$ ، $P(A\cap B)=P(D)=\frac{n}{2^n}$ و $P(B)=P(D)+\frac{5^n}{10^n}=\frac{n}{2^n}+\frac{1}{2^n}=\frac{n+1}{2^n}$.

2. لدينا $\left[P(A\cap B)=P(A)\times P(B)\right]$ يكافئ $\left[\frac{n}{2^n}=\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\times\frac{n+1}{2^n}\right]$ يكافئ $\left[n=\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\times(n+1)\right]$

يكافئ $\left[n=n+1-\frac{n+1}{2^{n-1}}\right]$ يكافئ $\left[1=\frac{n+1}{2^{n-1}}\right]$ يكافئ $\left[2^{n-1}=n+1\right]$.

3. نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq2}$ المعرفة بـ: $u_n=2^{n-1}-(n+1)$.

أ- $u_2=-1$ ، $u_3=0$ و $u_4=3$.

ب- لدينا $u_{n+1}-u_n=2^n-(n+2)-2^{n-1}+n+1=2\times2^{n-1}-2^{n-1}-1=2^{n-1}-1>0$ من أجل $n\geq2$.

و عليه المتتالية $(u_n)_{n\geq2}$ متزايدة تماما.

4. حسب السؤال 2 يجب $u_n=0$ و لدينا $u_3=0$ و منه $n=3$ و من كون المتتالية $(u_n)_{n\geq2}$ متزايدة تماما فإن $n=3$ هي القيمة الوحيدة.

التمرين 10

1. $P(A)=\frac{4^1\times12^1}{12^2}=\frac{1}{3}$ $(y=1)$ ، $P(B)=\frac{4^1\times12^1}{12^2}=\frac{1}{3}$ $(x=1)$ و $P(C)=\frac{2^1\times6^1}{12^2}=\frac{1}{12}$ $\left(x=e;y=\frac{1}{e}\right)$.

2.أ- لدينا $P(A\cap B)=\frac{4^2}{12^2}=\frac{1}{9}=P(A)\times P(B)$ $(x=1;y=1)$ و عليه الحادثتين A و B مستقلتان.

ب- لدينا $P\left(\{|z|=1\}\right)=\frac{4^1\times8^1\times2}{12^2}=\frac{4}{9}$ ومنه $P_{\{|z|=1\}}\left(\left\{\arg(z)=\frac{\pi}{2}\right\}\right)=\frac{P\left(\{z=i=\ln(1)+i\ln(e)\}\right)}{P\left(\{|z|=1\}\right)}=\frac{4^1\times2^1}{12^2}\times\frac{9}{4}=\frac{1}{8}$.

3. أ- القيم الممكنة لـ X هي 0 ، 1 ، $\sqrt{2}$.

$X=x_i$	0	1	$\sqrt{2}$
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$

ب- لدينا $P(X=0)=P(A\cap B)=\frac{1}{9}$ ، $P\left(\{|z|=1\}\right)=\frac{4}{9}$

و $P\left(X=\sqrt{2}\right)=\frac{8^2}{12^2}=\frac{4}{9}$.

التمرين 11

1. $P\left(E_{n+1}\cap E_n\right)=P(E_n)\times P_{E_n}(E_{n+1})=\frac{1}{10}P_n$ و $P\left(E_{n+1}\cap\overline{E_n}\right)=P\left(\overline{E_n}\right)\times P_{\overline{E_n}}(E_{n+1})=\frac{4}{10}(1-P_n)=-\frac{4}{10}P_n+\frac{4}{10}$.

2. $P_{n+1}=P\left(E_{n+1}\cap E_n\right)+P\left(E_{n+1}\cap\overline{E_n}\right)=\frac{1}{10}P_n-\frac{4}{10}P_n+\frac{4}{10}=\frac{-3}{10}P_n+\frac{4}{10}$

3. نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة بـ: $u_n=13P_n-4$.

أ- لدينا $u_n=\frac{-3}{10}u_n$ $u_{n+1}=13P_{n+1}-4=13\left(\frac{-3}{10}P_n+\frac{4}{10}\right)-4=\frac{-3}{10}\times 13P+\frac{6}{5}=\frac{-3}{10}\left(13P_n-4\right)=\frac{-3}{10}u_n$ ومنه $\left(u_n\right)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية أساسها

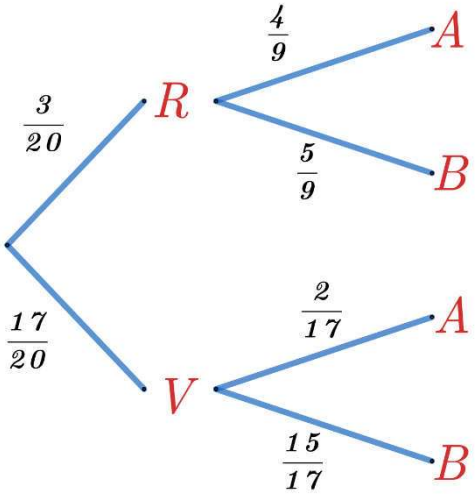
$q=\frac{-3}{10}$ و حدها الأول $u_1=13P_1-4=13a-4$.

ب- $u_n=u_1\times q^{n-1}=\left(13a-4\right)\times\left(\frac{-3}{10}\right)^{n-1}$ ، لدينا $u_n=13P_n-4$ وعليه $P_n=\frac{u_n+4}{13}$ ومنه $P_n=\frac{\left(13a-4\right)\times\left(\frac{-3}{10}\right)^{n-1}+4}{13}$.

التمرين 12

- لدينا : $P(R)=\frac{1}{6}\times\frac{4}{10}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{10}=\frac{3}{20}=0.15$ ، $P_R(A)=\frac{P(A\cap R)}{P(R)}=\frac{\frac{1}{6}\times\frac{4}{10}}{0.15}=\frac{4}{9}$ و $P_v(A)=\frac{P(A\cap V)}{P(V)}=\frac{\frac{1}{6}\times\frac{6}{10}}{\frac{17}{20}}=\frac{2}{17}$

ومنه :



شعبة ع.ت 2018 م1

تتكون مجموعة أشخاص من ثمانية رجال وأربع نساء من بينهم رجل واحد إسمه علي وإمرأة واحدة إسمها فاطمة نريد تكوين لجنة مكونة من ثلاث أعضاء لهم نفس المهام

1) أحسب إحتمال كل من الأحداث التالية

A " تكوين لجنة تضم 3 رجال"

B " تكوين لجنة تضم رجلا وإمرآتين"

C " تكوين لجنة تضم علي"

D " تكوين لجنة تضم إما علي وإما فاطمة"

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل إختيار بعدد الرجال في اللجنة المكونة

أ) عين القيم الممكنة التي يأخذها المتغير العشوائي X ثم عرف قانون إحتماله

ب) أحسب الإنحراف المعياري للمتغير العشوائي X

شعبة ع.ت 2018 م2

لعبة تعتمد على رمي كرة داخل دلو من بين مجموعة اللاعبين لدينا

$\frac{5}{6}$ لاعبين باليد اليمنى و $\frac{1}{6}$ لاعبين باليد اليسرى

إحتمال وضع الكرة داخل الدلو بالنسبة للاعبين باليد اليمنى هو $\frac{1}{4}$ و بالنسبة للاعب لليد اليسرى هو $\frac{1}{2}$

1) نختار لاعبا ونسمي الحادثين

G " لاعب باليد اليسرى "

S " اللاعب يضع الكرة داخل الدلو"

أ - أحسب إحتمال الحادث $G \cap S$

ب- أحسب إحتمال الحادث S

ج- أحسب إحتمال الحادث أن يكون اللاعب باليد اليمنى علما أنه وضع الكرة داخل الدلو

2) في هذا السؤال نسمي عمر اللاعب باليد اليمنى أنه يرمي كرتين واحدة بعد الأخرى (بفرض الرميتين مستقلتين)

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رميتين بعدد الكرات داخل الدلو المكونة

أ) عين القيم الممكنة التي يأخذها المتغير العشوائي X ثم عرف قانون إحتماله.

ب) أحسب الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X

شعبة رياضيات 2018 م1

عمر و حمزة راميا قوس، كل منهما يسدد سهما نحو هدف مقسم الى ثلاث مناطق $(A-B-C)$

نفرض أن كل رامي يصيب في كل رمية منطقة واحدة و واحدة فقط.

إذا علمت أن : - إحتمالات إصابة الرامي عمر المناطق $(A-B-C)$ على الترتيب هو $\left(\frac{7}{12},\frac{1}{3},\frac{1}{12}\right)$

- إحتمالات إصابة الرامي حمزة المناطق $(A-B-C)$ متساوية.

1) الرامي عمر يسدد سهمه ثلاث مرات متتابعة :

أ - ما احتمال أن يصيب في كل رمية المنطقة (C) ؟

ب - ما احتمال أن يصيب المناطق $(A-B-C)$ بهذا الترتيب ؟

جـ - ما احتمال أن يصيب المناطق $(A-B-C)$ ؟

2) نختار أحد الراميين مع العلم أن احتمال اختيار الرامي عمر ضعف إحتمال اختيار الرامي حمزة.

أ - في حالة تسديد رمية واحدة. ما احتمال أن تصيب هذه الرمية المنطقة (C) ؟

ب - علما أن رمية واحدة قد سُدِّدت و أصابت المنطقة (C)، ما احتمال أن تكون هذه الرمية للرامي عمر ؟

شعبة ع.ت 2019 م1

يحتوي وعاء على n كرة بيضاء، 5 كرات حمراء و 3خضراء،نسحب عشوائيا كرتين في ان واحد.

1) ما هو احتمال الحصول على كرتين بيضاوين ؟

2) نرمز بـ $P(n)$ إلى احتمال الحصول على كرتين من نفس اللّون .

أ) أثبت أنّ : $P(n)=\dfrac{n^2-n+26}{(n+7)(n+8)}$

ب) أحسب $\lim\limits_{n\to\infty}P(n)$ ثمّ فسّر النتيجة .

3) نضع $n=4$ يقوم لاعب بسحب كرتين من الوعاء في آن واحد ثمّ يرجعهما و يسحب كرتين أخريين.لإجراء هذين السحبين يدفع اللّاعب مبلغا قدره30 دينارا و بعد كلّ سحب يتحصّل على 40 دينار إذا كانت الكرتان من نفس اللّون، وإلاّ يتحصّل على 5 دنانير فقط.

ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكلّ سحبين ربح هذا اللّاعب .

أ) عيّن قيم المتغيّر العشوائي X .

ب) عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X.

ج) أحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ للمتغيّر العشوائي X .

شعبة ع.ت 2019 م2

يحتوي كيس على 12 كرة منها 3 بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 3 و أربعة حمراء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 2 ، 2

و خمس خضراء تحمل الأرقام: 1 ، 2 ، 2 ، 2 ، 3 .

نسحب في آن واحد كرتين من هذا الكيس .

1) نعتبر الحادثتين : A : " سحب كرتين من نفس اللون " و B : " سحب كرة خضراء على الأقل " .

أ) أحسب احتمال الحوادث التالية : A ، B و $A\cap B$.

ب) هل الحادثتين: A و B مستقلتان ؟ .

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب كرتين مجموع الرقمين المسجلين عليهما .

عرِّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X و أحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$.

شعبة رياضيات2019 م2

يحتوي كيس على أربع كرات بيضاء تحمل الأرقام 0،1،1، 2 وأربع كرات حمراء تحمل الأرقام 1،1،2، 2 .

نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات من هذا الكيس.

1) أحسب احتمال الحصول على :

أ) ثلاث كرات من نفس اللون .

ب) ثلاث كرات تحمل نفس الرقم .

ج) ثلاث كرات أرقامها مختلفة مثنى مثنى .

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكرات المسحوبة التي تحمل الرقم 1 .

أ) عين قانون احتمال المتغير العشوائي X .

ب) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ والانحراف المعياري $\sigma(X)$.

شعبة ع.ت 2020 م1

يحتوي الصندوق U_1 على أربع كرات سوداء و كرتين بيضاوين و ثلاث كرات حمراء ، الكرات لا نميز بينها عند اللمس .

نسحب عشوائيا ثلاث كرات على التوالي دون إرجاع الكرة المسحوبة إلى الصندوق .

1) أحسب احتمال االحوادث التالية :

A: "سحب ثلاث كرات من نفس اللون" ، B: "سحب كرة سوداء واحدة على الأقل"

C: "سحب كرتين حمراوين و كرة بيضاء"

2) نعتبر X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الألوان المحصل عليها .

أ) حدد القيم الممكنة التي يأخذها المتغير العشوائي X .

ب) عين قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X .

3) نعتبر صندوق آخر U_2 يحتوي على كرتين سوداوين و كرة حمراء واحدة . نضع الكرات المسحوبة من الصندوق U_1 في الصندوق U_2 ، ثم نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من U_2 .

- أحسب إحتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان من U_2 سوداوين علما أن الكرات الثلاثة من U_1 لها نفس اللون .

شعبة ع.ت 2020 م2

نعتبر زهرتي نرد كل منهما مرقم من 1 إلى 6 ، زهري النرد متطابقان في المظهر لكن أحدهما مزيف والأخر غير مزيف احتمال ظهور الرقم 6 بالنسبة للمزيف يساوي $\frac{1}{3}$.

1) نرمي زهرة النرد الغير مزيف ثلاث مرات على التوالي ونرمز بـ X للمتغير العشوائي الذي يهتم بعدد المرات التي نحصل فيها على الرقم 6.

أ/ عين قيم المتغير العشوائي X ب/ تحقق أن $P(X=2)=\frac{5}{72}$

ج) عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X وأحسب أمله ألرياضياتي.

2) نختار عشوائيا أحد زهري النرد ، ثم نرمي زهرة النرد المختارة ثلاث مرات على التوالي

نعتبر الحادثتين التاليتين : A الحصول على الرقم 6 مرتين بالضبط..

B زهر النرد المختار هو زهر النرد الغير مزيف.

مستعينا بشجرة الاحتمالات أحسب $P(B \cap A)$ و $P(\overline{B} \cap A)$ ثم أستنتج أن $P(A)=\frac{7}{48}$

3) تحصلنا على الرقم 6 مرتين بالضبط ما هو احتمال أن يكون زهر النرد المختار مزيف.

شعبة رياضيات2020 م1

يحتوي صندوق على7 كرات بيضاء و3 كرات سوداء لا نفرق بينها عند اللمس. نسحب عشوائيا كرة واحدة من هذا الصندوق ونسجل لونها ، ثم نعيدها إلى الصندوق ونسحب منه كرة ونسجل لونها وننهي التجربة .

1) أحسب احتمالات الحوادث التالية :

A : "الحصول على كرتين بيضاوين" .

B : "الحصول على كرتين من نفس اللون".

2) نعرف لعبة حظ كما يلي: تمنح لكل كرة بيضاء العلامة α حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ ، ولكل كرة سوداء العلامة $(-\alpha)$.

ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب كرتين مجموع النقاط المحصل عليها .

أ) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضي $E(X)$.

ب) عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون اللعبة مربحة.

3) نضيف $(n-3)$ كرة سوداء إلى الصندوق ونعيد عملية السحب المعرفة أعلاه.

ما هو عدد الكرات السوداء التي تم إضافتها إلى الصندوق علما أن احتمال الحادثة A يساوي $\frac{1}{4}$.

شعبة رياضيات 2020 م2

يحتوي كيس على 6 كريات بيضاء تحمل الأرقام :2،1،1،0،0،0 وكرتين سوداويين تحمل الأرقام : 0،1 (لانميز بينها باللمس) نسحب عشوائيا في آن واحد كرتين من الكيس.

1) احسب احتمال كل من الأحداث التالية :

A : " للكرتين المسحوبتين نفس اللون" .

B : " للكرتين المسحوبتين نفس الرقم" .

C : " للكرتين المسحوبتين لونين مختلفين ورقمين مختلفين ".

D : "جداء الرقمين المسجلين على الكرتين معدوم" .

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يربط كل عملية سحب للكرتين مجموع الرقمين المسجلين عليهما .

أ) أوجد قانون الاحتمال للمتغير X .

ب) أحسب الأمل الرياضياتي والتباين والانحراف المعياري للمتغير X .

شعبة ع.ت 2021 م1

يحتوي كيس غير شفاف على 5 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء ، كل الكرات متماثلة و لا يمكن التمييز بينها عند اللمس .

1) نسحب من الكيس ثلاث كرات في آن واحد :

أحسب إحتمال كل حادثة من الأحداث التالية :

A : "الكرات المسحوبة كلها حمراء" ، B : "توجد كرة واحدة حمراء في السحب"

C : "توجد على الأقل كرة واحدة بيضاء في السحب" ، D : "الكرات المسحوبة من ألوان مختلفة مثنى مثنى" .

2) ننزع من الكيس الكرات البيضاء و نضع مكانها n كرة خضراء حيث : $(n \geq 2)$ ، ثم نسحب كرتين منه على التوالي و بدون إرجاع .

– نفرض أن سحب كرة حمراء يساوي (-10) نقطة و سحب كرة خضراء يساوي $(+5)$ نقطة .

– ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب كرتين مجموع النقط المحصل عليها :

أ – أكتب قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

ب – عين قيمة n حتى تكون اللعبة عادلة .

ج – كيف نختار عدد الكرات الخضراء حتى تكون اللعبة مربحة ؟ .

شعبة ع.ت 2021 م2

يحتوي صندوق U_1 على أربع كرات بيضاء وثلاث كرات سوداء وكرتين حمراوين (لا نفرق بينها عند اللمس).

نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات من الصندوق.

1) احسب احتمالات الأحداث التالية :

A : " سحب كرتين سوداوين وكرة حمراء ".

B : " سحب ثلاث كرات من نفس اللون ".

C : " سحب كرة بيضاء واحدة على الأقل " .

2) أ– ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الألوان المحصل عليها.

- عين قيم المتغير العشوائي X .
- بين أن: $P(X=3)=\frac{24}{84}$ ثم استنتج $P(X=2)$ وعين قانون احتمال X .

ب -نقترح اللعبة التالية: يدفع اللاعب مبلغ $50DA$ قبل اجراء السحب. ويكسب $25DA$ لكل لون من الألوان المحصل عليها .

- هل اللعبة مربحة له ؟ .

شعبة رياضيات 2021 م2

يحتوي كيس على أربع كريات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 5 و ست كريات حمراء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 3 ، 4 ، 4 . لا نفرق بينها عند اللمس .

نسحب من الكيس كريتان على التوالي دون إرجاع .

1) ما هو عدد الحالات الممكنة للسحب.

2) أحسب احتمال سحب كريتان من نفس اللون .

3) أحسب احتمال سحب كريتان تحملان رقمان زوجيان .

4) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل حالة سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة .

أ) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

ب) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$.

شعبة ع.ت 2022 م1

يحتوي الصندوق U_1 على ثلاث كريات تحمل الأرقام : 2 ، 2 و 3 و يحتوي الصندوق U_2 على تسع كريات منها أربعة خضراء تحمل كل منها الرقم 3 و خمس كريات حمراء تحمل الأرقام : 1 ، 2 ، 2 ، 3 و 4 . (الكريات لا يمكن التمييز بينها باللمس)

نسحب عشوائيا كرية من الصندوق U_1 و نسجل رقمها و ليكن n .

- إذا كان $n=2$ نسحب عشوائيا من الصندوق U_2 كريتين على التوالي من دون إرجاع .
- إذا كان $n=3$ نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كريات من الصندوق U_2.

نعتبر الحدثين التاليين : A : "الكريات المسحوبة من الصندوق لها نفس اللون"

B : "الكريات المسحوبة من الصندوق تحمل نفس الرقم"

1) أ- بيّن أن : $P(A)=\frac{19}{54}$ ، ثم احسب $P(B)$ احتمال الحدث B .

ب- بيّن أن : $P(A\cap B)=\frac{55}{378}$ ، ثم استنتج $P_A(B)$.

2) هل الحدثان A و B مستقلان ؟ علل جوابك .

3) ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكريات الحمراء المسحوبة من الصندوق U_2.

عيّن قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

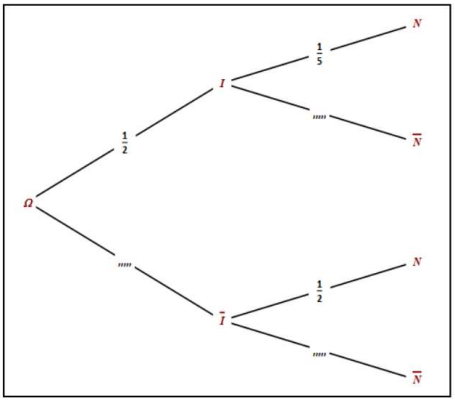
شعبة ع.ت 2022 م2

يحتوي صندوق على أربع كريات سوداء و كرية واحدة بيضاء (كل الكريات متماثلة و لا فرق بينها عند اللمس)

نعتبر اللعبة التالية : يقوم اللاعب برمي زهر نرد متزن مرقم من 1 إلى 6 ، إذا كان الرقم الظاهر فرديا نضيف كرية بيضاء في الصندوق و إذا كان الرقم الظاهر زوجيا نضيف كرية سوداء في الصندوق ، بعد ذلك يسحب اللاعب في آن واحد ثلاث من الصندوق.

نعتبر الأحداث التالية : I : "الرقم الظاهر فردي كريات المسحوبة من الصندوق لها نفس اللون"

N : "الكريات الثلاث المسحوبة سوداء"



1) أحسب الإحتمالات : $P(I)$ ، $P_I(N)$ ، $P_{\bar{I}}(N)$ و $P(I\cap N)$.

2) أ- أنقل شجرة الإحتمالات المقابلة التي تنمذج هذه التجربة ثم أكملها .

ب- بيّن أن : $P(N)=\frac{7}{20}$.

3) علما أن الكريات المسحوبة كلها سوداء ، ما احتمال أن يكون الرقم الظاهر زوجيا ؟

4) ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يساوي عدد الكريات البيضاء المسحوبة .

أ- بيّن أن : $P(X=1)=\frac{11}{20}$.

ب- عرف قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي X .

جـ- أعط تقديرا للقيمة المتوسطة لعدد الكريات البيضاء المسحوبة ، ثم استنتج التباين $V(X)$.

شعبة رياضيات 2022 م1

في لعبة حظوظ الربح هي نفس حظوظ الخسارة في شوطها الأول ، ونقبل أنه إذا ربح اللاعب شوطا من هذه اللعبة فإن احتمال ربح الشوط الموالي له هو $0,4$ و إذا خسر شوطا فإن احتمال خسارة الشوط الموالي له هو $0,8$.

n عدد طبيعي غير معدوم ، G_n الحادث: " يربح الشوط رقم n " و P_n الحادث: " يخسر الشوط رقم n " .

I . 1) أحسب $P(G_1)$ ، $P_{G_1}(G_2)$ و $P_{P_1}(G_2)$ ثم استنتج $P(G_2)$.

2) احسب $P(P_2)$.

II . من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع : $x_n = P(G_n)$ و $y_n = P(P_n)$.

1) عين من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $P_{P_n}(P_{n+1})$ و $P_{G_n}(G_{n+1})$.

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون : $\begin{cases} x_{n+1} = 0,4x_n + 0,2y_n \\ y_{n+1} = 0,6x_n + 0,8y_n \end{cases}$.

3) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع : $v_n = x_n + y_n$ و $w_n = 6x_n - 2y_n$.

بين أن متتالية (v_n) ثابتة و (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين حدها العام .

4) استنتج عبارة x_n بدلالة n ثم عين نهاية (x_n) . ما ذا تستنتج ؟ .

شعبة ع.ت 2023 م1

نعتبر صندوقين متماثلين U_1 و U_2 بحيث : يحتوي الصندوق U_1 على خمس كريات حمراء مرقمة بـ: 0 ، 1 ، 1 ، 1 ، 2 وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: 0 ، 1 ، 1 .كما يحتوي الصندوق U_2 على ثلاث كريات حمراء مرقمة بـ: 1 ، 1 ، 2 وكريتين خضراوين مرقمتين بـ: 0 ، 1 كل الكريات متماثلة ولا نفرق بينها عند اللمس .

1) نختار عشوائيا أحد الصندوقين ، فإذا كان الصندوق U_1 نسحب منه كريتين على التوالي دون إرجاع و إذا كان الصندوق U_2 نسحب منه كريتين في آن واحد .

أ ـ أحسب احتمال الحدثين التاليين :

A : "سحب كريتين من نفس اللون" و B : "سحب كريتين مجموع رقميهما عدد زوجي" .

بـ ـ هل الحدثان A و B مستقلان ؟ برر اجابتك .

2) إذا علمت أن الكريتين المسحوبتين مجموع رقميهما زوجي ، فما احتمال أن تكونا من الصندوق U_1 ؟

3) نأخذ الكريات الموجودة في الصندوقين U_1 و U_2 و نضعها جميعا في صندوق واحد U_3 ، ثم نسحب منه عشوائيا ثلاث كريات في آن واحد . و ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب مجموع الأرقام الظاهرة على الكريات المسحوبة .

أ ـ عرف قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي X .

بـ ـ أحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$.

شعبة ع.ت 2023 م2

تعرض شركة لصنع السيارات تخفيضات تشمل ثلاث أصناف من السيارات A ، B و C ، حيث تنتج 25% من الصنف A ، و 45% من الصنف B والباقي من الصنف C ،حيث تخضع للتخفيض 35% من الصنف A ، و 70% من الصنف B و 10% من الصنف C .

يختار زبون سيارة عشوائيا .

لتكن الأحداث التالية :

A : " السيارة من الصنف A " . B : " السيارة من الصنف B " . C : " السيارة من الصنف C " .

S : " السيارة خاضعة للتخفيض" .

1) نمذج هذه الوضعية بمخطط .

2) أحسب $P(A)$ إحتمال أن تكون السيارة من الصنف A .

3) أحسب $P(\overline{B})$ أن تكون السيارة ليست من الصنف B .

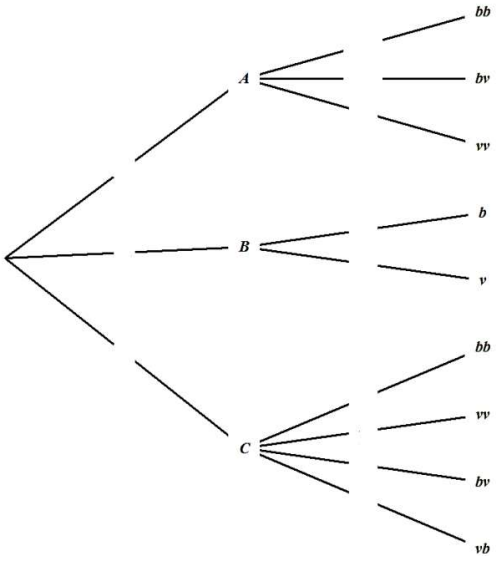
4) أحسب $P(S)$ احتمال أن تكون السيارة خاضعه للتخفيض .

5) علما ان السياره غير خاضعة للتخفيض ما هو احتمال أن تكون من الصنف A .

كيس يحتوي على 10 كرات لا نميّز بينها عند اللمس ، 4 منها خضراء و 6 بيضاء .
نرمي زهرتي نرد غير مغشوشتين ، إذا تحصلنا على وجهين يحملان رقما زوجيا نسحب من الكيس كرتين في آن واحد ، و إذا تحصلنا على وجهين يحملان رقما فرديا نسحب كرة واحدة ، أما في بقية الحالات نسحب كرتين على التوالي دون إرجاع .
نعتبر الأحداث التالية :

A : " الحصول على وجهين يحملان رقما زوجيا " .
B : " الحصول على وجهين يحملان رقما فرديا " .
C : " الحصول على وجهين يحملان رقم فردي و الآخر زوجي " .

1) أحسب $P(A)$ و $P(C)$.
2) علما أن C قد وقع ، ما هو احتمال الحصول على مختلفتين في اللون .
3) أنقل ثم أتمم شجرة الإحتمالات (مرفقة بطريقة الحساب) .
4) ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكرات الخضراء المسحوبة .
أ ـ عيّن قيم المتغيّر العشوائي X .
بـ ـ عرّف قانون إحتمال X ، ثم أحسب أمله الرياضياتي .



الحلول

شعبة ع.ت 2018 م1

1- $P(A)=\frac{C_8^3}{C_{12}^3}=\frac{56}{220}=\frac{14}{55}$ ؛ $P(B)=\frac{C_8^1\times C_4^2}{C_{12}^3}=\frac{48}{220}=\frac{12}{55}$

$P(C)=\frac{C_4^1\times C_{11}^2}{C_{12}^3}=\frac{55}{220}=\frac{1}{4}$ ؛ $P(D)=\frac{C_1^1+C_{10}^2+C_1^1\times C_{10}^2}{C_{12}^3}=\frac{9}{22}$

2- أ- قيم X هي : 0 ؛ 1 ؛ 2 و 3 .

- قانون إحتمال X :

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{55}$	$\frac{12}{55}$	$\frac{28}{55}$	$\frac{14}{55}$

$P(X=0)=\frac{C_4^3}{220}=\frac{1}{55}$ | $P(X=2)=\frac{C_8^2\times C_4^1}{220}=\frac{28}{55}$

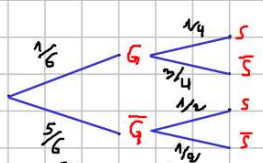
$P(X=1)=P(B)=\frac{12}{55}$ | $P(X=3)=\frac{C_8^3}{220}=\frac{14}{55}$

ب- حساب الأمل الرياضياتي :

$E(X)=\frac{0+12+56+42}{55}=\frac{2}{55}$ إذن :

و منه : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{0+12+112+126}{55}-\left(\frac{2}{55}\right)^2}\approx 2,13$

شعبة ع.ت 2018 م2



1- $P(G\cap S)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{24}$

ب- $P(S)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{11}{24}$

ج- $P_S(\bar{G})=\frac{P(\bar{G}\cap S)}{P(S)}=\frac{\frac{5}{6}\times\frac{1}{2}}{\frac{11}{24}}=\frac{10}{11}$

2- أ- قيم X هي : 0 ؛ 1 و 2 .

- قانون إحتمال :

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$P(X=0)=\left[P(\bar{S})\right]^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ ؛ $P(X=2)=\left[P(S)\right]^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

$P(X=1)=P(S)\times P(\bar{S})\times 2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 2=\frac{1}{2}$

ب- حساب $E(X)$: $E(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}=1$

شعبة رياضيات 2018 م1

O: عمر
H: حمزة

1- أ- $\left[p_{\bar{C}}(C)\right]^3 = \left(\frac{7}{12}\right)^3 = \frac{343}{1728}$

ب- $p(A) \times p_A(B) \times p_{\bar{A}}(C) = \frac{1}{12} \times \frac{1}{3} \times \frac{7}{12} = \frac{7}{432}$

ج- $p(A) \times p_A(B) \times p_{\bar{A}}(C) \times 3! = \frac{1}{12} \times \frac{1}{3} \times \frac{7}{12} \times 6 = \frac{7}{72}$

2- لدينا: $P(O) = 2P(H)$ و $P(O)+P(H)=1$ وعليه $3P(H)=1$

إذن: $P(H) = \frac{1}{3}$ و $P(O) = \frac{2}{3}$

أ- $P(C) = P(O) \times p_O(C) + P(H) \times p_H(C) = \frac{2}{3} \times \frac{7}{12} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

ب- $p_C(B) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{7}{12}}{1/2} = \frac{7}{9}$

شعبة ع.ت 2019 م1

1- $\frac{C_n^2}{C_{n+8}^2} = \frac{\frac{n \times (n-1)}{2}}{\frac{(n+8)(n+7)}{2}} = \frac{n^2-n}{(n+8)(n+7)}$

2- أ- $P(n) = \frac{C_n^2 + C_5^2 + C_3^2}{C_{n+8}^2} = \frac{\frac{n(n-1)}{2} + 10 + 3}{\frac{(n+8)(n+7)}{2}} = \frac{\frac{n^2-n+26}{2}}{\frac{(n+8)(n+7)}{2}}$

$= \frac{n^2-n+26}{(n+7)(n+8)}$

ب- $\lim_{n \to +\infty} P(n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$ التفسير: كلما كان عدد الكريات البيضاء كبيرا بالقدر الكافي فإن احتمال سحب كريتين من نفس اللون "من أن تكون حادثة أكيدة".

3- أ- قيم X هي: 50 ؛ 20- و 15

ب-

x_i	15	-20	50
$P(X=x_i)$	$\frac{893}{2178}$	$\frac{2209}{4356}$	$\frac{361}{4356}$

$P(X=15) = P(A) \times (1-P(A)) \times 2 = \frac{19}{66} \times \frac{47}{66} \times 2 = \frac{893}{2178}$

$P(X=-20) = (1-P(A))^2 = \left(\frac{47}{66}\right)^2 = \frac{2209}{4356}$ ؛ $P(X=50) = (P(A))^2 = \left(\frac{19}{66}\right)^2 = \frac{361}{4356}$

ج- $E(X) = 15 \times \frac{893}{2178} - 20 \times \frac{2209}{4356} + 50 \times \frac{361}{4356} = \frac{5}{33}$

شعبة ع.ت 2019 م2

1- أ- $P(A) = \frac{C_3^2 + C_4^2 + C_5^2}{C_{12}^2} = \frac{19}{66}$ ؛ $P(B) = \frac{C_5^1 \times C_3^1 + C_5^2}{C_{12}^2} = \frac{15}{22}$

و $P(A \cap B) = \frac{C_5^2}{C_{12}^2} = \frac{5}{33}$

ب- بما أن $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ فإن A و B غير مستقلتين.

2- قيم X هي: 2 ؛ 3 ؛ 4 ؛ 5 و 6.

x_i	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{10}{66}$	$\frac{25}{66}$	$\frac{20}{66}$	$\frac{10}{66}$	$\frac{1}{66}$

$P(X=2) = \frac{C_5^2}{66} = \frac{10}{66}$ ؛ $P(X=3) = \frac{C_5^1 \times C_5^1}{66} = \frac{25}{66}$

$P(X=4) = \frac{C_5^2 + C_5^1 \times C_1^1}{66} = \frac{20}{66}$ ؛ $P(X=5) = \frac{C_{12}^1 \times C_5^1}{66} = \frac{10}{66}$

$P(X=6) = \frac{C_2^2}{66} = \frac{1}{66}$

الأمل الرياضياتي: $E(X) = \frac{20+75+80+50+6}{66} = \frac{7}{2}$

شعبة رياضيات 2019 م2

1- أ- $\frac{C_4^3 + C_4^3}{C_8^3} = \frac{8}{56} = \frac{1}{7}$

ب- $\frac{C_3^3 + C_4^3}{C_8^3} = \frac{5}{56}$

ج- $\frac{C_1^1 \times C_3^1 \times C_4^1}{C_8^3} = \frac{12}{56} = \frac{3}{14}$

2- أ- قيم X هي: $0 ; 1 ; 2 ; 3$.

- قانون إحتمال:

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{56}$	$\frac{24}{56}$	$\frac{24}{56}$	$\frac{4}{56}$

$P(X=0) = \frac{C_4^3}{56} = \frac{4}{56}$

$P(X=3) = \frac{C_4^3}{56} = \frac{4}{56}$

$P(X=2) = \frac{C_4^2 \times C_4^1}{56} = \frac{24}{56}$; $P(X=1) = \frac{C_4^1 \times C_4^2}{56} = \frac{24}{56}$

ب- $E(X) = \frac{0+24+48+12}{56} = \frac{3}{2} = 1,5$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{0+24+96+36}{56} - (1,5)^2} \simeq 0,732$

شعبة رياضيات 2022 م1

I- 1- $P_{\bar{P}_1}(G_2) = 1 - P_{\bar{P}_1}(P_2) = 1 - 0,8 = 0,2$; $P_{G_1}(G_2) = 0,4$; $P(G_1) = \frac{1}{2}$

وعليه: $P(G_2) = P(G_1) \times P_{G_1}(G_2) + P(P_1) \times P_{P_1}(G_2)$

$= \frac{1}{2} \times 0,4 + \frac{1}{2} \times 0,2 = 0,3$

2- $P(P_2) = 1 - P(G_2) = 0,7$

II- 1- $P_{P_n}(P_{n+1}) = 0,8$; $P_{G_n}(G_{n+1}) = 0,4$

2- $x_{n+1} = P(G_n) \times P_{G_n}(G_{n+1}) + P(P_n) \times (1 - P_{P_n}(P_{n+1}))$

$= 0,4 x_n + (1 - 0,8) y_n = 0,4 x_n + 0,2 y_n$

$y_{n+1} = P(P_n) \times P_{P_n}(P_{n+1}) + P(G_n) \times (1 - P_{G_n}(G_{n+1}))$

$= 0,8 y_n + (1 - 0,4) x_n = 0,6 x_n + 0,8 y_n$

3- إثبات أن (V_n) ثابتة:

لدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$:

$V_{n+1} = x_{n+1} + y_{n+1}$

$= 0,4 x_n + 0,2 y_n + 0,6 x_n + 0,8 y_n$

$= x_n + y_n = V_n$

ومنه (V_n) ثابتة.

ومنه (V_n) ثابتة.

- لنثبت أن (W_n) هندسية:

لدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $W_{n+1} = 6x_{n+1} - 2y_{n+1}$

$= 6(0,4x_n + 0,2y_n) - 2(0,6x_n + 0,8y_n)$

$= 1,2x_n - 0,4y_n = \frac{1}{5}(6x_n - 2y_n) = \frac{1}{5}W_n$

وعليه (W_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{5}$ وحدها الأول: $W_1 = 6(\frac{1}{2}) - 2(\frac{1}{2})$
$= 2$

- عبارة W_n: $W_n = W_1 \times q^{n-1} = 2 \times (\frac{1}{5})^{n-1} = 10 \times (\frac{1}{5})^n$

4- عبارة x_n: لدينا $\begin{cases} x_n + y_n = x_1 + y_1 = 1 \\ 6x_n - 2y_n = 10 \times (\frac{1}{5})^n \end{cases}$

بضرب طرفي الأولى في العدد 2 ثم الجمع نجد: $8x_n = 10 \times (\frac{1}{5})^n + 2$

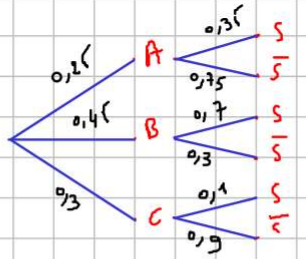
ومنه $x_n = \frac{5}{4}(\frac{1}{5})^n + \frac{1}{4}$

- النهاية: $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{5}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ (لأن $-1 < \frac{1}{5} < 1$)

- الاستنتاج: كلما كان عدد الأشواط كبيرا بالقدر الكافي كلما اقترب احتمال الربح نحو العدد $\frac{1}{4}$.

شعبة ع.ت 2023 م2

1-



2- $P(A) = 0,25$

3- $P(\overline{B}) = 1 - 0,45 = 0,55$

4- $P(S) = 0,25 \times 0,35 + 0,45 \times 0,7 + 0,3 \times 0,1 = 0,4325$

5- $P_{\overline{S}}(A) = \frac{P(A \cap \overline{S})}{P(\overline{S})} = \frac{0,25 \times 0,75}{1 - 0,4325} = \frac{75}{227}$