الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

التحضير لـ : BAC 2025 — الأستاذ: قنطار لحسن

الشعبة : علوم تجريبية — مراجعة رقم 01 — المدة : 03 سا و 30 د

التمرين الأول : (04 نقاط)

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} U_0 = a \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n - 6}{U_n - 4} \end{cases}$ حيث a عدد حقيقي

1. عين قيم a حتى تكون المتتالية (U_n) ثابتة .
2. نضع $a = 5$
   - أحسب الحدود : U_1 ، U_2 ، U_3 .
   - برهن بالتراجع أن $U_n < 2$ من أجل كل $n \geqslant 1$.
   - أدرس إتجاه تغير المتتالية (U_n)
3. لتكن المتتالية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $V_n = \dfrac{U_n - 2}{U_n - 3}$
   - أثبت أن المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين حدها الأول و أساسها .
   - إستنتج عبارة V_n بدلالة n ثم U_n بدلالة n .
   - هل المتتالية (U_n) متقاربة .

التمرين الثاني : (04 نقاط)

يحتوي صندوق على7 كرات بيضاء و3 كرات سوداء لا نفرق بينها عند اللمس. نسحب عشوائيا كرة واحدة من هذا الصندوق ونسجل لونها ، ثم نعيدها إلى الصندوق ونسحب منه كرة ونسجل لونها وننهي التجربة .

1) أحسب احتمالات الحوادث التالية :

A : "الحصول على كرتين بيضاوين" .

B : "الحصول على كرتين من نفس اللون".

2) نعرف لعبة حظ كما يلي: تمنح لكل كرة بيضاء العلامة α حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ ، ولكل كرة سوداء العلامة $(-\alpha)$.

ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب كرتين مجموع النقاط المحصل عليها .

أ) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضي $E(X)$.

ب) عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون اللعبة مربحة.

3) نضيف $(n-3)$ كرة سوداء إلى الصندوق ونعيد عملية السحب المعرفة أعلاه.

ما هو عدد الكرات السوداء التي تم إضافتها إلى الصندوق علما أن احتمال الحادثة A يساوي $\dfrac{1}{4}$.

التمرين الثالث : (04 نقاط)

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ كثير الحدود $P(z)$ حيث : $P(z)=z^4-6z^3+24z^2-18z+63$

1. أحسب $P(i\sqrt{3})$ و $P(-i\sqrt{3})$

2. بين أنه يوجد كثير حدود $Q(z)$ حيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z)=(z^2+3)Q(z)$

3. حل المعادلة $P(z)=0$

4. أنشئ النقط A, B, C, D التي لواحقها $z_A=i\sqrt{3}$ ، $z_B=-i\sqrt{3}$ ، $z_C=3+2i\sqrt{3}$ ، $z_D=\overline{z_C}$

أ) عين لاحقة النقطة G منتصف $[DC]$

ب) بين أن النقط A, B, C, D تنتمي إلى دائرة مركزها G يطلب تعيينها.

ج) لتكن النقطة E نظيرة النقطة D بالنسبة إلى O . بين أن : $\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$

ما طبيعة المثلث BEC ؟

التمرين الرابع : (08 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة بـ : $f(x)=\frac{(2x-1)e^x-2x+2}{e^x-1}$

وليكن (C) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$.

1 . بين أنه توجد خمسة أعداد حقيقية a ، b ، α ، β ، γ بحيث يكون :

من أجل كل x من D_f : $f(x)=\alpha x+\beta+\frac{\gamma}{e^x-1}$ و $f(x)=2x+a+\frac{be^x}{e^x-1}$

2 . نضع : $h(x)=2(e^x-2)(e^x-\frac{1}{2})$.

. أدرس إشارة $h(x)$ حسب قيم x .

. بين أنه من أجل كل x من D_f : $f'(x)=\frac{h(x)}{(e^x-1)^2}$

3 . أدرس تغيرات الدالة f .

4 . أثبت أن المنحني (C) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين يطلب تعيينهما .

5 . بين أنه من أجل كل x من D_f : $f(-x)+f(x)=-3$. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C) ؟

6 . أدرس وضعية المنحني (C) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x-1$.

7 . أرسم المنحني (C) . (الوحدة 2 سم) .

8 . ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة الحلول في $\mathbb{R}$ للمعادلة ذات المجهول x التالية :

$(2x-2-m)e^x-2x+m+3=0$

9 .أ . أوجد دالة أصلية للدالة f على المجال $]0\ ;\ +\infty[$.

. ب . λ عدد حقيقي حيث $\lambda \geqslant 2$. أحسب المساحة $s(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) وَ المستقيمات التي المعادلات : $y=2x-1$ ، $x=\ln 2$ ، $x=\ln \lambda$.

تصحيح المراجعة 1

تصحيح التمرين الأول:

$$\begin{cases} U_0 = a \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n - 6}{U_n - 4} \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}.$$

1) تعيين قيم a حتى تكون المتتالية (U_n) ثابتة

(U_n) متتالية ثابتة معناه: $U_{n+1} = U_n = U_0 = a$

معناه:

$$U_{n+1} = \frac{U_n - 6}{U_n - 4}$$

ومنه

$$a = \frac{a-6}{a-4}$$

$$\frac{a}{1} \times \frac{a-6}{a-4}$$

$$a(a-4) = 1(a-6)$$

$$a^2 - 4a = a - 6$$

$$a^2 - 4a - a + 6 = 0$$

$$a^2 - 5a + 6 = 0$$

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = 2 \end{cases}$$

كما $a=2$; $a=3$ فإن المتتالية (U_n) ثابتة.

2) نضع $a=5$

حساب الحدود U_1, U_2, U_3

$$U_1 = \frac{U_0 - 6}{U_0 - 4} = \frac{5-6}{5-4} = \frac{-1}{1}$$

$$U_1 = -1$$

$$U_2 = \frac{U_1 - 6}{U_1 - 4} = \frac{-1-6}{-1-4} = \frac{-7}{-5}$$

$$U_2 = \frac{7}{5}$$

$$U_3 = \frac{U_2 - 6}{U_2 - 4} = \frac{\frac{7}{5} - 6}{\frac{7}{5} - 4}$$

$$U_3 = \frac{23}{13}$$

إثبات بالتراجع $n \geq 1$ أن: $U_n < 2$

المرحلة 1: نتأكد من أجل $n=1$

$$U_1 < 2$$

$-1 < 2$ محققة

المرحلة 2: نفرض أن الخاصية صحيحة ونثبت أن: $U_{n+1} < 2$

تصحيح المراجعة 1 ه

تصحيح التمرين الاول:

البرهان:

	U_n-6	U_n-4
+	$-U_n+4$	1
	$0\quad -2$	

ومنه $U_{n+1}=1-\frac{2}{U_n-4}$

لدينا: الفرضية $U_n<2$

$U_n-4<2-4$

$U_n-4<-2$

$\frac{1}{U_n-4}>\frac{1}{-2}$

$-\frac{2}{U_n-4}<\frac{-2}{-2}$

$\frac{-2}{U_n-4}<1$

$1-\frac{2}{U_n-4}<1+1$

$U_{n+1}<2$

وهو المطلوب

اذن: نستنتج حسب البرهان بالتراجع أن الخاصية صحيحة.

دراسة اتجاه تغير المتتالية (U_n).

ندرس اشارة الفرق $U_{n+1}-U_n$

$U_{n+1}-U_n=\frac{U_n-6}{U_n-4}-U_n$

$U_{n+1}-U_n=\frac{U_n-6-U_n^2+4U_n}{U_n-4}$

$U_{n+1}-U_n=\frac{-U_n^2+5U_n-6}{\underbrace{U_n-4}_{(-)}}$

نلاحظ ان: $U_n<2$

$U_n-4<2-4$

$\underbrace{U_n-4}_{(-)}<-2$

اذن اشارة الفرق هي عكس اشارة البسط.

نضع $x=U_n$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$-x^2+5x-6$		0	$+$	ε	$+$	0	$-$

لكن $U_n<2$ ومنه $U_{n+1}-U_n>0$

عكس.

ومنه المتتالية (U_n) متزايدة تماما.

تصحيح المراجعة 01

تصحيح التمرين الأول:

3) $V_n = \dfrac{U_n - 2}{U_n - 3}$

إثبات أن (V_n) متتالية هندسية

$V_{n+1} = q V_n$

نحسب V_{n+1}

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - 2}{U_{n+1} - 3}$$

$$V_{n+1} = \frac{\frac{U_n - 6}{U_n - 4} - 2}{\frac{U_n - 6}{U_n - 4} - 3}$$

$$V_{n+1} = \frac{\dfrac{U_n - 6 - 2U_n + 8}{U_n - 4}}{\dfrac{U_n - 6 - 3U_n + 12}{U_n - 4}}$$

$$V_{n+1} = \frac{-U_n + 2}{-2U_n + 6}$$

$$V_{n+1} = \frac{-1(U_n - 2)}{-2(U_n - 3)}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{2} V_n$$

ومنه (V_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول

$$V_0 = \frac{U_0 - 2}{U_0 - 3} = \frac{5-2}{5-3} = \frac{3}{2}.$$

استنتاج عبارة V_n بدلالة n

بما أن (V_n) متتالية هندسية

$V_n = V_0 \times q^n$

$V_n = \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

كتابة U_n بدلالة n:

$V_n = \dfrac{U_n - 2}{U_n - 3}$

$\dfrac{V_n}{1} \neq \dfrac{U_n - 2}{U_n - 3}$

$V_n(U_n - 3) = 1(U_n - 2)$

$V_n U_n - 3V_n = U_n - 2$

$V_n U_n - U_n = 3V_n - 2$

$U_n(V_n - 1) = 3V_n - 2$.

$U_n = \dfrac{3V_n - 2}{V_n - 1}$

$$U_n = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2}{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}$$

هل المتتالية (U_n) متقاربة.

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2}{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1} = \dfrac{-2}{-1} = 2$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ لأن $-1 < \frac{1}{2} < 1$ لأن:

ومنه المتتالية (U_n) متقاربة نحو العدد 2.

تصحيح المراجعة 01

تصحيح التمرين الثاني:

7 بيضاء	α
3 سوداء	$-\alpha$

$\alpha \in \mathbb{R}$

عدد الحالات الممكنة:

$Card(\Omega) = 10^2 = 100$.

1) حساب إحتمالات الحوادث:

A: "الحصول على كريتين بيضاوين"

$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{7^2}{100} = \frac{49}{100}$.

B: "الحصول على كريتين من نفس اللون"

$P(B) = \frac{7^2 + 3^2}{100} = \frac{58}{100} = \frac{29}{50}$.

2) أ) تعيين قانون الاحتمال لـ X

أولا: لتعيين القيم الممكنة لـ X.

$X = 2\alpha$ لما نتحصل على كريتين بيضاوين

$X = -2\alpha$ لما نتحصل على كريتين سوداوين

$X = 0$ لما نتحصل على كريتين مختلفتين في اللون

القيم الممكنة هي:

$\{0; -2\alpha; 2\alpha\}$

ثانيا: لحساب الاحتمال.

$P(X=0) = \frac{2(7 \times 3)}{100} = \frac{21}{50}$

$P(X=-2\alpha) = \frac{3^2}{100} = \frac{9}{100}$

$P(X=2\alpha) = \frac{7^2}{100} = \frac{49}{100}$

ثالثا:

X	0	-2α	2α
P(x)	$\frac{21}{50}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{49}{100}$

حساب الأمل الرياضياتي E(x)

$E(x) = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i$

$E(x) = (0)\left(\frac{21}{50}\right) + (-2\alpha)\left(\frac{9}{100}\right) + (2\alpha)\left(\frac{49}{100}\right)$

$E(x) = \frac{-18\alpha + 98\alpha}{100} = \frac{4}{5}\alpha$

ب) تعيين قيم α حتى تكون اللعبة مربحة.

$E(x) > 0$

$\frac{4\alpha}{5} > 0$

$4\alpha > 0$ (5)

$\alpha > \frac{0}{4}$

$\alpha > 0$

قيم α هي: $\alpha \in]0; +\infty[$

3) تصنيف (n-3) كرة سوداء.

7 بيضاء	
n سوداء	

$Card(\Omega) = (n+7)^2$

تعيين عدد الكرات السوداء التي تم اضافتها

$P(A) = \frac{1}{4}$

$\frac{7^2}{(n+7)^2} = \frac{1}{4}$

$\frac{49}{n^2+14n+49} = \frac{1}{4}$

$(49)(4) = (1)(n^2+14n+49)$

$196 = n^2+14n+49$

$n^2+14n+49-196=0$

$n^2+14n-147=0$

$n_1 = 7$ مقبول

$n_2 = -21$ مرفوض

عدد الكرات السوداء التي تم اضافتها هي:

$7-3=4$

تصحيح المراجعة رقم 1

تصحيح التمرين الثالث

$P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$

1) حساب $P(i\sqrt{3})$

$P(i\sqrt{3}) = (i\sqrt{3})^4 - 6(i\sqrt{3})^3 + 24(i\sqrt{3})^2 - 18(i\sqrt{3}) + 63$

$(i\sqrt{3})^4 = (i\sqrt{3})^2 \cdot (i\sqrt{3})^2 = (-3)(-3) = 9$

$(i\sqrt{3})^3 = (i\sqrt{3})^2 \cdot (i\sqrt{3})^1 = (-3)(i\sqrt{3}) = -3i\sqrt{3}$

$(i\sqrt{3})^2 = -3$

$P(i\sqrt{3}) = 9 - 6(-3i\sqrt{3}) + 24(-3) - 18i\sqrt{3} + 63$

$P(i\sqrt{3}) = 9 + 18i\sqrt{3} - 72 - 18i\sqrt{3} + 63$

$P(i\sqrt{3}) = 0$.

حساب $P(-i\sqrt{3})$

$P(-i\sqrt{3}) = (-i\sqrt{3})^4 - 6(-i\sqrt{3})^3 + 24(-i\sqrt{3})^2 - 18(-i\sqrt{3}) + 63$

$(-i\sqrt{3})^4 = (-i\sqrt{3})^2 \cdot (-i\sqrt{3})^2 = (-3)(-3) = 9$

$(-i\sqrt{3})^3 = (-i\sqrt{3})^2 (-i\sqrt{3}) = (-3)(-i\sqrt{3}) = 3i\sqrt{3}$

$(-i\sqrt{3})^2 = (-3)$

$P(-i\sqrt{3}) = 9 - 6(3i\sqrt{3}) + 24(-3) + 18i\sqrt{3} + 63$

$P(-i\sqrt{3}) = 9 - 18i\sqrt{3} - 72 + 18i\sqrt{3} + 63$

$P(-i\sqrt{3}) = 0$

2) إثبات وجود $Q(z)$ بحيث

$P(z) = (z^2+3)Q(z)$

$z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$	$z^2 + 3$
$-z^4 \quad -3z^2$	$z^2 - 6z + 21$
$0 \quad -6z^3 + 21z^2 - 18z + 63$	
$+6z^3 \quad +18z$	
$0 \quad 21z^2 + 63$	
$-21z^2 - 63$	
$0 \quad 0$	

$P(z) = (z^2+3)(z^2 - 6z + 21)$

$Q(z)$

معناه: $Q(z) = z^2 - 6z + 21$

3) حل المعادلة $P(z) = 0$

$P(z) = 0$

$(z^2+3)(z^2 - 6z + 21) = 0$

معناه

$z^2 + 3 = 0$

$z^2 = -3$

$z^2 = 3i^2$

$\begin{cases} z_1 = \sqrt{3}\,i \\ z_2 = -\sqrt{3}\,i \end{cases}$

$z^2 - 6z + 21 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(21)$

$\Delta = -48 = 48i^2$

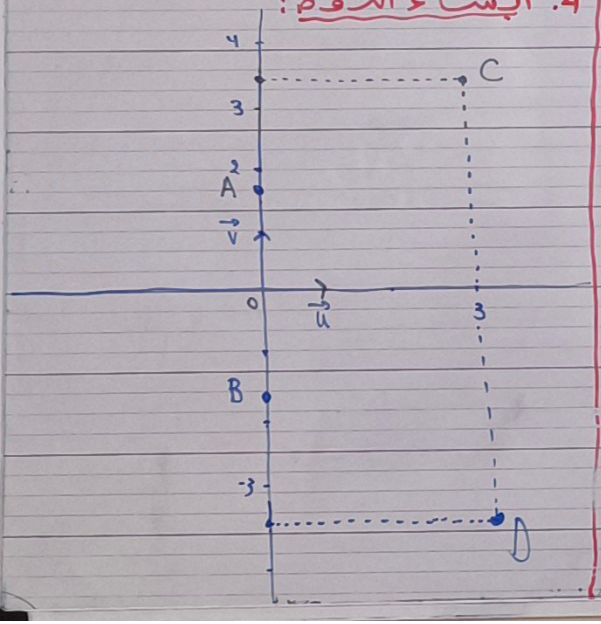
$z_3 = \dfrac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6 - \sqrt{48}\,i}{2} = \dfrac{6 - 4\sqrt{3}\,i}{2}$

$z_3 = 3 - 2\sqrt{3}\,i$

$z_4 = \overline{z_3} = 3 + 2\sqrt{3}\,i$

الحلول هي: $3+2\sqrt{3}i$; $3-2\sqrt{3}i$; $-\sqrt{3}i$; $\sqrt{3}i$

4. إنشاء النقط:



تصحيح المراجعة رقم 1

تصحيح التمرين الثالث

4) P) تعيين لاحقة G منتصف [DC]

$$z_G = \frac{z_D + z_C}{2} = \frac{3-2i\sqrt{3}+3+2i\sqrt{3}}{2}$$

$$z_G = \frac{6}{2} = 3$$

ب) اثبات أن النقط A, B, C, D تنتمي الى دائرة مركزها G يطلب تعيينها.

$$GA = |z_A - z_G| = |i\sqrt{3} - 3| = \sqrt{(-3)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

$$GB = |z_B - z_G| = |-i\sqrt{3} - 3| = \sqrt{(-3)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

$$GC = |z_C - z_G| = |3 + 2i\sqrt{3} - 3| = |2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

$$GD = |z_D - z_G| = |3 - 2i\sqrt{3} - 3| = |-2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

معناه وجدنا

$$GA = GB = GC = GD = 2\sqrt{3}$$

اذن النقط A, B, C و D تنتمي الى دائرة مركزها G و نصف قطرها $2\sqrt{3}$.

ج) E نظيرة D بالنسبة لـ O

معناه: $z_E = -z_D$

$$z_E = -\overline{z_C} = -(3 - 2i\sqrt{3})$$

$$z_E = -3 + 2i\sqrt{3}.$$

اثبات أن: $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{i(-\frac{\pi}{3})}$

$$\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \frac{(3+2i\sqrt{3}) - (-i\sqrt{3})}{(-3+2i\sqrt{3}) - (-i\sqrt{3})}$$

$$= \frac{3+3i\sqrt{3}}{-3+3i\sqrt{3}} \times \frac{-3-3i\sqrt{3}}{-3-3i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{18 - 18\sqrt{3}i}{36}$$

$$\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$$\arg\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$$

بما أن $\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{3}/2}{1} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

ومنه $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = 1\, e^{i(-\frac{\pi}{3})}$

اذن: $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{i(-\frac{\pi}{3})}$

تعيين طبيعة المثلث BEC

$$\left|\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}\right| = 1$$

$$\frac{BC}{BE} = 1$$

(1) ..... $BC = BE$ معناه:

$$\arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}\right) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

(2) ..... $(\overrightarrow{BE}; \overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

من (1) و (2) نستنتج أن المثلث BEC متقايس الاضلاع.

تصحيح المراجعة رقم 01

تصحيح التمرين الرابع:

$f(x)=\dfrac{(2x-1)e^x-2x+2}{e^x-1}$ $D_f=\mathbb{R}^*$

1) تعيين الأعداد الحقيقية $a, b, \alpha, \beta, \gamma$:

$f(x)=2x+a+\dfrac{be^x}{e^x-1}$

$f(x)=\dfrac{2xe^x-2x+ae^x-a+be^x}{e^x-1}$

$f(x)=\dfrac{(2x+a+b)e^x-2x-a}{e^x-1}$

بالمطابقة نجد: $a+b=-1$

$-a=2 \Rightarrow \boxed{a=-2}$

بالتعويض نجد: $-2+b=-1$

$b=-1+2 \Rightarrow \boxed{b=1}$

$\boxed{f(x)=2x-2+\dfrac{e^x}{e^x-1}}$

$f(x)=\alpha x+\beta+\dfrac{\gamma}{e^x-1}$

$f(x)=\dfrac{\alpha xe^x-\alpha x+\beta e^x-\beta+\gamma}{e^x-1}$

$f(x)=\dfrac{(\alpha x+\beta)e^x-\alpha x-\beta+\gamma}{e^x-1}$

بالمطابقة نجد: $\alpha=2$

$-\beta+\gamma=2$

$-(-1)+\gamma=2$

$1+\gamma=2 \Rightarrow \gamma=2-1$

$\Rightarrow \boxed{\gamma=1}$

$\boxed{\beta=-1}$

$\boxed{f(x)=2x-1+\dfrac{1}{e^x-1}}$

2) دراسة اشارة $h(x)$

$e^x-2=0 \Rightarrow e^x=2 \Rightarrow x=\ln 2$

$e^x-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow e^x=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln 2$

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$\ln 2$		$+\infty$
e^x-2		$-$		$-$	0	$+$	
$e^x-1/2$		$-$	0	$+$		$+$	
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

اثبات أن $f'(x)=\dfrac{h(x)}{(e^x-1)^2}$

الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على D_f.

$f'(x)=\dfrac{((2x-1)e^x-2x+2)'(e^x-1)-(e^x-1)'((2x-1)e^x-2x+2)}{(e^x-1)^2}$

$f'(x)=\dfrac{(e^x+2xe^x-2)(e^x-1)-e^x(2xe^x-e^x-2x+2)}{(e^x-1)^2}$

$f'(x)=\dfrac{e^{2x}-e^x+2xe^x-2xe^x-2e^x+2-2xe^{2x}+e^x+2xe^x-2e^x}{(e^x-1)^2}$

$f'(x)=\dfrac{2e^{2x}-5e^x+2}{(e^x-1)^2}$

ولدينا من جهة أخرى:

$h(x)=2(e^x-2)(e^x-\frac{1}{2})$

$h(x)=2(e^{2x}-\frac{1}{2}e^x-2e^x+1)$

$h(x)=2e^{2x}-e^x-4e^x+2$

$h(x)=2e^{2x}-5e^x+2$

إذن: $f'(x)=\dfrac{h(x)}{(e^x-1)^2}$

تصحيح المراجعة رقم 01

تصحيح التمرين الرابع:

3) دراسة تغيرات الدالة f

* نحسب النهايات عند أطراف D_f

$$f(x)=\frac{(2x-1)e^x-2x+2}{e^x-1}$$

ج.3.ت

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x-1)e^x-2x+2}{e^x-1}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2xe^x-e^x-2x+2}{e^x-1}=-\infty$$

ج.3.ت

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x-1)e^x-2x+2}{e^x-1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2xe^x-e^x-2x+2}{e^x-1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(2x-1-\frac{2x}{e^x}+\frac{2}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1-\frac{2x}{e^x}+\frac{2}{e^x}}{1-\frac{1}{e^x}}=+\infty$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x-1	$-$	0	$+$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=-\infty \quad\begin{cases}\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left((2x-1)e^x-2x+2\right)=1\\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(e^x-1)=0^-\end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty \quad\begin{cases}\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left((2x-1)e^x-2x+2\right)=1\\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(e^x-1)=0^+\end{cases}$$

* اتجاه تغير الدالة f:

لدراسة إشارة $f'(x)$ نضع إشارة $h(x)$

(حذاري لأنه هنا توجد قيمة ممنوعة)

x	$-\infty$	$-\ln 2$	0	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$ $\|$ $\|$	$-$	0 $+$

الدالة f متزايدة تماما على المجالين

$[\ln 2;+\infty[$ و $]-\infty;-\ln 2]$

و متناقصة تماما على كل من المجالين

$]0;\ln 2]$ و $[-\ln 2;0[$

* جدول التغيرات للدالة f

x	$-\infty$	$-\ln 2$	0	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$ $\|$ $\|$	$-$	0 $+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$-2\ln 2-3$ ↘	$+\infty$ $\|$ $+\infty$	↘	$2\ln 2$ ↗ $+\infty$

4) إثبات وجود مستقيم مقارب مائل

$$f(x)=2x-2+\frac{e^x}{e^x-1}$$

بما أن: $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x-1}=\frac{0}{-1}=0$ و $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$

فإن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=2x-2$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$

نعلم أن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\underbrace{e^x}_{+\infty}-1}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$

إذن: (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) معادلته $y=2x-1$ بجوار $+\infty$

5) إثبات أن: $f(x)+f(-x)=-3$

$$f(-x)+f(x)=\frac{(-2x-1)e^{-x}+2x+2}{e^{-x}-1}+\frac{(2x-1)e^x-2x+2}{e^x-1}$$

$$=\frac{\left((-2x-1)e^{-x}+2x+2\right)e^x}{(e^{-x}-1)e^x}+\frac{(2x-1)e^x-2x+2}{e^x-1}$$

$$=\frac{(-2x-1)(1)+2xe^x+2e^x}{1-e^x}+\frac{2xe^x-e^x-2x+2}{e^x-1}$$

$$=\frac{(-2x-1+2xe^x+2e^x)(-1)}{(1-e^x)(-1)}+\frac{2xe^x-e^x-2x+2}{e^x-1}$$

$$=\frac{2x+1-2xe^x-2e^x}{e^x-1}+\frac{2xe^x-e^x-2x+2}{e^x-1}$$

تصحيح المراجعة رقم 01

تصحيح التمرين الرابع:

$$f(-x)+f(x)=\frac{2x+1-2xe^{x}-2e^{x}+2xe^{x}-e^{x}-2x+2}{e^{x}-1}$$

$$f(-x)+f(x)=\frac{-3e^{x}+3}{e^{x}-1}=\frac{-3(e^{x}-1)}{e^{x}-1}$$

$$f(-x)+f(x)=-3$$ وهو المطلوب.

الاستنتاج بالنسبة للمنحنى (C).

$$f(-x)+f(x)=-3$$

$$f(0-x)+f(x)=-3$$

النقطة $W\left(\frac{0}{2};\frac{-3}{2}\right)$ أي $W(0;-3/2)$ مركز تناظر (C)

6) دراسة الوضع النسبي بين (C) و (Δ)

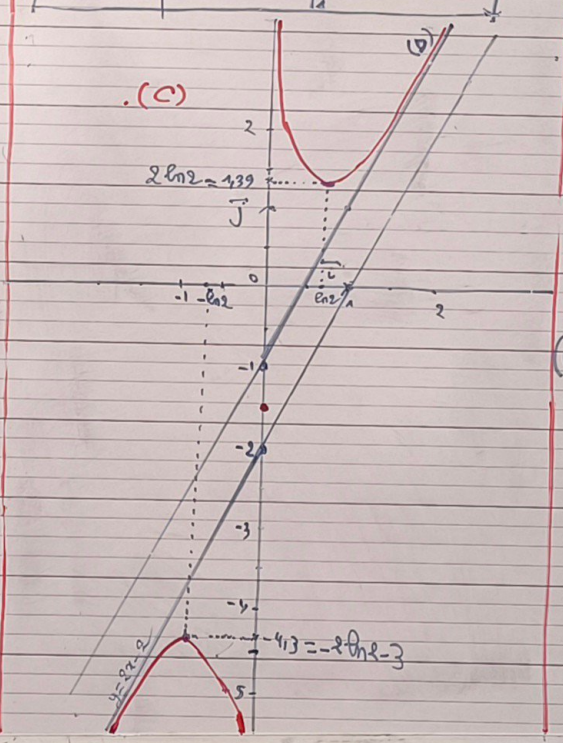
ندرس اشارة الفرق

$$f(x)-y=\left(2x-1+\frac{1}{e^{x}-1}\right)-(2x-1)$$

$$f(x)-y=\frac{1}{e^{x}-1}$$

الاستاذ من اشارة المقام.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y$	−	+	
الوضع النسبي	(C) تحت (Δ)		(C) فوق (Δ)



8) المناقشة (العدد والاشارة)

$$(2x-2-m)e^{x}-2x+m+3=0$$

$$2xe^{x}-2e^{x}-me^{x}-2x+m+3=0$$

$$2xe^{x}-2e^{x}-2x+3=me^{x}-m$$

$$2xe^{x}-2e^{x}-2x+3=m(e^{x}-1)$$

$$\frac{2xe^{x}-2e^{x}-2x+3}{e^{x}-1}=m$$

$$\frac{2xe^{x}-2e^{x}-2x+3}{e^{x}-1}+1=m+1$$

$$\frac{2xe^{x}-2e^{x}-2x+3+e^{x}-1}{e^{x}-1}=m+1$$

$$\frac{2xe^{x}-e^{x}-2x+2}{e^{x}-1}=m+1$$

$$f(x)=m+1$$

$m\in]-\infty;-2\ln2-4[\cup]-2\ln2-3;+\infty[$ يوجد حلين سالبين

$m=-2\ln2-4$ ومنه $m+1=-2\ln2-3$ يوجد حل مضاعف سالب

$m\in]-2\ln2-4;2\ln2-1[\cup]2\ln2-3;+\infty[$ يوجد حلان

$m=2\ln2-1$ ومنه $m+1=2\ln2$ يوجد حل مضاعف موجب

$m\in]2\ln2-1;+\infty[$ يوجد حلين موجبين

9) ايجاد دالة اصلية لـ f.

$$f(x)=2x-2+\underbrace{\frac{e^{x}}{e^{x}-1}}_{\text{من الشكل }\frac{u'}{u}}$$

دالة اصلية

$$F(x)=x^{2}-2x+\ln|e^{x}-1|+C$$

$C\in\mathbb{R}$

تصحيح المراجعة رقم 01

تصحيح التمرين الرابع:

$$S = \int_{\ln 2}^{\ln \lambda} (f(x) - y)\, dx .$$

$$S = \int_{\ln 2}^{\ln \lambda} \left(2x - 2 + \frac{e^x}{e^x - 1} - 2x + 1\right) dx .$$

$$S = \int_{\ln 2}^{\ln \lambda} \left(-1 + \frac{e^x}{e^x - 1}\right) dx .$$

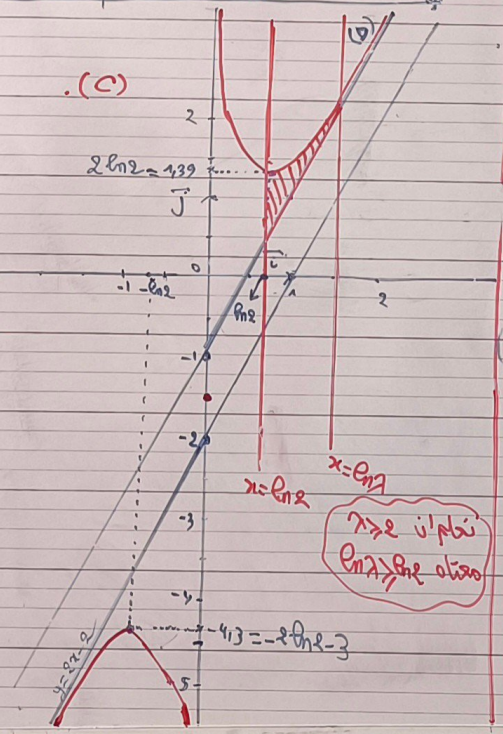
$$S = \left[-x + \ln|e^x - 1|\right]_{\ln 2}^{\ln \lambda}$$

$$S = \left(-\ln \lambda + \ln \underbrace{|\lambda - 1|}_{+}\right) - \left(-\ln 2 + \ln \underbrace{|2 - 1|}_{0}\right)$$

$$S = -\ln \lambda + \ln(\lambda - 1) + \ln 2 - \underbrace{\ln 1}_{0}$$

$$S = \ln(\lambda - 1) - \ln \lambda + \ln 2$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-y$		$-$	$\|$	$+$	
الوضع النسبي	$(\mathcal{C})$ تحت (Δ)		$\|$	$(\mathcal{C})$ فوق (Δ)	



$$S = \ln\left(\frac{\lambda - 1}{\lambda}\right) + \ln 2 .$$

$$S = \ln\left(\frac{2\lambda - 2}{\lambda}\right) \text{ u.a}$$

u.a = 2cm × 2cm نعلم أن

$\text{u.a} = 4\,\text{cm}^2$

$$S = 4\ln\left(\frac{2\lambda - 2}{\lambda}\right) \text{cm}^2 \quad \text{ومنه}$$

ملاحظة

$\lambda \geq 2$

$\underbrace{\lambda - 1}_{+} \geq 1$

$|\lambda - 1| = \lambda - 1$ ومنه