المادة: رياضيات — **المدة : 03 ساعات و نصف**

الموضوع الأول

التمرين الأول:(04 نقاط)

في كل مما يلي عين الإجابة الصحيحة مع التبرير:

1. يتكون فريق عمل من 4 نساء و 3رجال ، يراد تشكيل لجنة تتكون من 3 أعضاء .
احتمال ان تكون اللجنة من الجنسين هو:

أ. $\frac{6}{7}$ **ب.** $\frac{12}{35}$ **ج.** $\frac{18}{35}$

2. β عدد حقيقي ، تكون الأعداد e^{β} ، $e^{\beta}-1$ و $2e^{\beta}$ بهذا الترتيب حدود متتابعة لمتتالية هندسية من أجل:

أ. $\beta=1$ **ب.** $\beta=\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$ **ج.** $\beta=\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$

3. f الحل الخاص للمعادلة التفاضلية: $y'+2y=4$ والذي يحقق الشرط $f(0)=2021$ هو:

أ. $f(x)=2019e^{-2x}+2$ **ب.** $f(x)=2019e^{2x}+2$ **ج.** $f(x)=2021e^{-2x}-2$

4. المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n=\int_n^{n+1}e^{3-x}dx$ هي متتالية :

أ. حسابية **ب.** هندسية **ج.** لا حسابية ولا هندسية

التمرين الثاني:(04 نقاط)

يحتوي كيس على خمس كريات بيضاء مرقمة بـ: 0 ، 0 ، 1، 1، -1 و ثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: -1 ، 1، 0 وثلاث كريات حمراء مرقمة بـ: 1 ، 1، -1 . كل الكريات متماثلة ولا نفرق بينها عند اللمس.
نسحب عشوائيا ثلاث كريات من هذا الكيس في آن واحد ، نعتبر الأحداث التالية :
A:"الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون" و B:" الحصول على ثلاث كريات مختلفة الأرقام مثنى مثنى"
C:"الحصول على ثلاث كريات مجموع أرقامها معدوم " .

1) أ) احسب $P(A)$، $P(B)$ و $P(C)$ ، ثم بين ان $P(A\cap B)=\frac{1}{33}$.

ب) استنتج $P_B(A)$ و $P\left(\overline{A\cup B}\right)$ ، هل الحدثان A و B مستقلان؟ برر إجابتك.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكريات البيضاء المتبقية في الكيس .

أ) عين قيم المتغير العشوائي X .

ب) عرف قانون إحتمال المتغير العشوائي X ، ثم احسب $E(2024X+1444)$.

ج) احسب $P\left(\left(e^{2X}-e^{10}\right)\left(e^{2X}-e^{8}\right)=0\right)$.

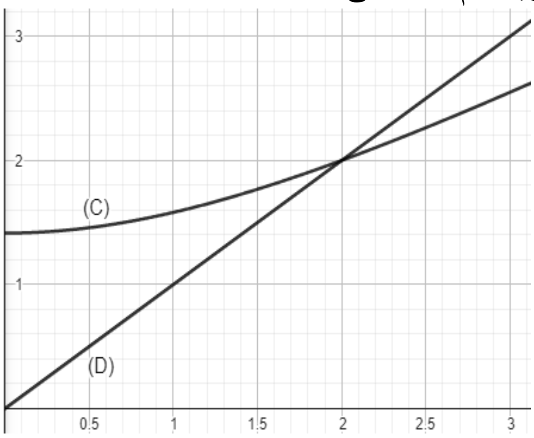
3) نعيد التجربة، نسحب الآن من هذا الكيس ثلاث كريات على التوالي دون إرجاع الكرية المسحوبة الى الكيس.
احسب احتمال الحدث D:"الحصول على الكرية الأولى حمراء" .

<u>التمرين الثالث:</u>(05 نقاط)

لتكن f الدّالة العددية المعرّفة على $[0;+\infty[$ بــ: $f(x)=\sqrt{2+\frac{1}{2}x^2}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (D) المستقيم ذو المعادلة $y=x$ كما هو مبين في الشكل المقابل

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$.

ب) **أ)** انقل الشكل المقابل على ورقة ميليمتريه، ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الانشاء.



ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

2) أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n،
$0<u_n<2$.

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n). هل هي متقاربة؟ برّر إجابتك.

3) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=\ln(4-u_n^2)$.

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأوّل .

ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n. احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4) أ) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=v_{2024}+v_{2025}+\dots+v_n$.

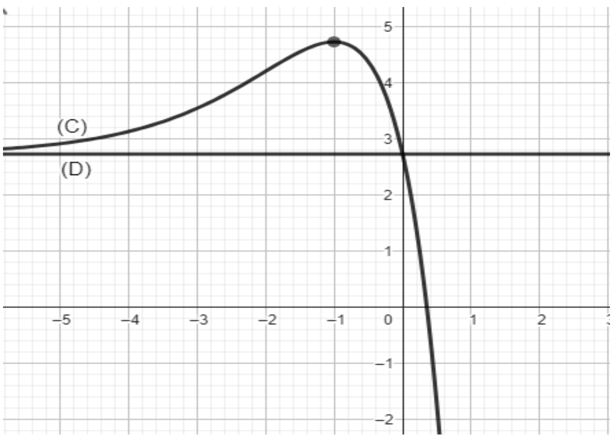
ب) استنتج بدلالة n الجداء p_n حيث : $p_n=(4-u_{2024}^2)\times(4-u_{2025}^2)\times\dots\times(4-u_n^2)$.

<u>التمرين الرابع:</u> (07 نقاط)

الجزء الأول: (C) التمثيل البياني للدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بــ: $g(x)=(ax+b)e^{x+1}+c$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية و المستقيم (D) ذو المعادلة $y=e$ مقارب أفقي للمنحنى (C) عند $-\infty$.

المنحنى (C) يقبل عند النقطة ذات الاحداثيات $(-1;2+e)$ مماسا أفقيا .

(لاحظ الشكل المقابل)



1) اعتمادا على الشكل المقابل:

أ) بين أن $a=-2$ ، $b=0$ و $c=e$.

ب) برر أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث:
$0,3<\alpha<0,4$.

2) حدد حسب قيم x إشارة كلا من $g(x)$ و $g(-x)$ على $\mathbb{R}$.

الجزء الثاني: f الدّالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بــ:
$f(x)=-ex+e-3+(2x+2)e^{-x+1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) بيّن أنّ من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=-g(-x)$.

ب) استنتج إتجاه تغيّر الدّالة f ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها .

3)أ) بيّن أنّ $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)+ex-e\right]=-3$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-ex+e-3$.

4) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ)، يطلب تعيين معادلة له.

5) عين دون حساب $\lim_{h\to0}\frac{f(-\alpha+h)-f(-\alpha)}{h}$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.

6) انشئ (Δ) ، (T) و (C_f). (نأخذ $f(-\alpha)\simeq5{,}7$ ، $f(1{,}2)\simeq0$ و $f(-1{,}1)\simeq0$)

7) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $2x+2=(3-e+m)e^{x-1}$.

8) λ عدد حقيقي حيث $\lambda\prec-2$.

أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة احسب التكامل التالي: $\int_{\lambda}^{-2}(2x+2)e^{-x+1}dx$.

ب) احسب العدد $A(\lambda)$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) والمستقيمين الذين معادلتيهما $x=\lambda$ و $x=-2$ ، ثم احسب $\lim_{\lambda\to-\infty}A(\lambda)$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (4نقاط)

يتشكل نادي للفروسية من ثلاث بنات W_1 ، W_2 و W_3 ، وأربع أولاد M_1 ، M_2 ، M_3 و M_4 .

نختار عشوائيا فريقا من ثلاث فرسان بطريقة عشوائية لتمثيل النادي في منافسة لسباق الفروسية .

1. نعتبر الأحداث التالية: A " الفريق من نفس الجنس"

B " يوجد في الفريق ولدان على الأقل " ، C " البنت W_3 من الفريق "

أ - أحسب احتمال كل حدث من الأحداث السابقة .

ب - إذا كان الفريق المختار من نفس الجنس ، ما احتمال أن يكون مشكل من بنات ؟ .

2. أحسب الاحتمال $P(C)$ إذا أردنا أن الولد M_1 والبنت W_1 لا يجب أن يكونا معا في نفس الفريق .

3. نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بعدد البنات خارج الفريق المختار.

أ - عين قيم المتغير العشوائي X ،ثم عرف قانون احتماله .

ب - احسب $E\left(X\right)$.

التمرين الثاني:(4.5 نقطة)

I) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0=\frac{5}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\frac{8u_n-8}{u_n+2}$

1. أ. أحسب u_1 ، u_2 و u_3 .

ب. برر أن المتتالية $\left(u_n\right)$ ليست حسابية وليست هندسية .

2. أ.برهن بالتراجع أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $\frac{5}{2}\le u_n\le 4$

ب. أدرس اتجاه تغير المتتالية $\left(u_n\right)$.استنتج تقاربها ، ثم حدد نهايتها .

3. أ. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4-u_{n+1}\le\frac{8}{9}(4-u_n)$

ب. استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le 4-u_n\le\frac{3}{2}\left(\frac{8}{9}\right)^n$ ، ثم استنتج نهاية المتتالية $\left(u_n\right)$.

4. نعتبر المتتالية $\left(v_n\right)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقــة : $v_n=\frac{u_n-4}{u_n-2}$.

أ. أثبت أن المتتالية $\left(v_n\right)$ هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب. أكتب عبارة v_n بدلالـة n ، ثم استنتـج عبارة u_n بدلالـة n.

ج. أحسب بدلالـة n المجموع S_n حيث : $S_n=v_0u_0+v_1u_1+v_2u_2+...+v_nu_n-\left(u_0+u_1+u_2+...+u_n\right)$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1. أ. حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة ذات المجهول Z : $Z^2-4Z+8=0$.

نرمز لحلي هذه المعادلة بـــ Z_0 و Z_1 حيث Z_0 هو الحل الذي جزؤه التخيلي سالب .

ب - أكتب Z_0 و Z_1 على الشكل الأسي.

ج. عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{Z_1}{2\sqrt{2}}\right)^n$ حقيقيا .

2. A , B و C ثلاث نقط من المستوي لواحقها على الترتيب : $Z_A = 2+2i$, $Z_B = \overline{Z_A}$, $Z_C = \sqrt{2} - i\sqrt{6}$

و $Z_D = \dfrac{Z_A}{Z_C}$

- أعط تفسيرا هندسيا لطويلة وعمدة العدد المركب $\dfrac{z_A}{z_B}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث $0AB$.

3 . أ. عين الطويلة و عمدة لـلعدد المركب Z_D ، ثم أكتب Z_D على الشكل الجبري .

ب. استنتج $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

4. لتكن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق : $z = z_A + ke^{\frac{3\pi}{4}i}$.

حدد طبيعة المجموعة (E) عندما K يمسح $\mathbb{R}_+^*$.

<u>التمرين الرابع:</u>(7.5 نقطة)

I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـــ : $g(x) = x^2 - 2x - \ln(x-1)$

1. أ. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ ثم $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} g(x)$.

ب.أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

2. أ. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما 2 والآخر α حيث $1,45 \prec \alpha \prec 1,46$.

ب . استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]1;+\infty[$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{2+\ln(x-1)}{x-1} + x - 2$ ، و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 . أ. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب. أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)$ ، فسر النتيجة بيانيا.

ج .بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x-1)^2}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f مشكلا جدول تغيراتها .

2. أ. بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x-2$ مقارب مائل لـلمنحنى (C_f).

ب. أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

3. بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) ، يطلب كتابة معادلة له .

4. أ. بين أن $f(\alpha) = 2\alpha - 3 + \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

ب. عين $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.

5 . أنشئ كلا من (Δ) و (T) و المنحنى (C_f). (نأخذ $f(\alpha) = 2,12$)

6. نعتبر الدالة h المعرفة على IR^* كما يلي : $h(x) = f(|x|+1)$ ، و ليكن (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ. أثبت أن الدالة h زوجية .

ب. اعتمادا على (C_f) ، مثل مع الشرح (C_h) في المعلم السابق .

7 . أحسب مساحة حيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 2$ و $x = 5$.

انتهى الموضوع الثاني

التصحيح النموذجي للموضوع الاول –3 ع ت.

التصحيح	التنقيط

التمرين الأول:04ن

1) يتكون فريق عمل من 4 نساء و 3رجال ، يراد تشكيل لجنة تتكون من 3 أعضاء .
احتمال ان تكون اللجنة من الجنسين هو:

$P=\frac{C_3^1C_4^2+C_3^2C_4^1}{C_7^3}=\frac{6}{7}$ **الإجابة الصحيحة " أ "** 01ن

2) β عدد حقيقي ، تكون الأعداد e^{β} ، $e^{\beta}-1$ و $2e^{\beta}$ بهذا الترتيب حدود متتابعة لمتتالية هندسية من أجل:

$2e^{\beta}\times e^{\beta}=\left(e^{\beta}-1\right)^2$ معناه

$e^{\beta}=-1+\sqrt{2}$ معناه $\beta=\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$

الإجابة الصحيحة "ب" 01ن

3) الحل الخاص للمعادلة التفاضلية: $y'+2y=4$
والذي يحقق الشرط $f(0)=2021$ هو:
حلول المعادلة التفاضلية هي الدوال من الشكل :
$x\mapsto Ce^{-2x}+2$ ولدينا $f(0)=2021$
ومنه $f(x)=2019e^{-2x}+2$
وبالتالي **الإجابة الصحيحة " أ "** 01ن

4) المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n=\int_n^{n+1}e^{3-x}dx$

لدينا $u_n=\int_n^{n+1}e^{3-x}dx=\left(e^3-e^2\right)\left(e^{-1}\right)^n$ 01ن

ومنه المتتالية (u_n) هندسية اساسها e^{-1}
الإجابة الصحيحة "ب"

التمرين الثاني:04ن

أ) حساب $P(A)$ ، $P(B)$ و $P(C)$:

$$P(A)=\frac{C_5^3+C_3^3+C_3^3}{C_{11}^3}=\frac{4}{55}$$

$$P(B)=\frac{C_3^1\times C_5^1\times C_3^1}{C_{11}^3}=\frac{3}{11}$$ 01ن

$$P(C)=\frac{C_3^3+C_3^1\times C_3^1\times C_5^1}{C_{11}^3}=\frac{46}{165}$$

اثبات ان $P(A\cap B)=\frac{1}{33}$:

$$P(A\cap B)=\frac{C_2^1C_2^1C_1^1+C_1^1C_1^1C_1^1}{C_{11}^3}=\frac{5}{165}=\frac{1}{33}$$

ب) استنتاج $P_B(A)$ و $P\left(\overline{A\cup B}\right)$:

$$P_B(A)=\frac{p(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{9}$$

$$P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P(A\cup B)=\frac{113}{165}$$ 01ن

$$P(A)\times P(B)=\frac{12}{605}\neq P(A\cap B)$$

ومنه الحدثان A و B غير مستقلان

2) أ) مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي $\{5;4;3;2\}$

ب) قانون احتمال المتغير العشوائي X

$$P(X=5)=\frac{C_6^3}{C_{11}^3}=\frac{4}{33}$$

$$P(X=4)=\frac{C_5^1\times C_6^2}{C_{11}^3}=\frac{5}{11}$$ 01ن

$$P(X=3)=\frac{C_5^2\times C_6^1}{C_{11}^3}=\frac{4}{11}$$

$$P(X=2)=\frac{C_5^3}{C_{11}^3}=\frac{2}{33}$$

حساب $E(2024X+1444)$

$$E(2024X+1444)=2024E(X)+1444=8804$$

ج) حساب $P\left(\left(e^{2X}-e^{10}\right)\left(e^{2X}-e^{8}\right)=0\right)$

$$P\left(\left(e^{2X}-e^{10}\right)\left(e^{2X}-e^{8}\right)=0\right)=P(X=5)+P(X=4)=\frac{19}{33}$$ 01ن

3) نسحب الآن من هذا الكيس ثلاث كريات على التوالي دون ارجاع الكرية المسحوبة الى الكيس.
حساب احتمال الحدث D :"الحصول علىالكرية الأولى حمراء"

التمرين الثالث 05ن:

1) أ) تمثيل على حامل محور الفواصل دون حساب الحدود u_0 ،u_1 ، u_2 و u_3.

ب) نخمن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما و متقاربة

2) أ) البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، 01ن
$0<u_n<2$.

ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n).

لدينا $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-(u_n)^2+4}{2\sqrt{2+\frac{1}{2}(u_n)^2+2u_n}}$

ولدينا $-(u_n)^2+4=0$ 01ن

معناه $u_n=2$ او $u_n=-2$

معناه $-(u_n)^2+4=-(u_n+2)(u_n-2)$

معناه $-(u_n)^2+4\geq 0$ و

$2\sqrt{2+\frac{1}{2}(u_n)^2+2u_n}\succ 0$

ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما

- استنتاج انها متقاربة:

بما أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى فهي متقاربة

3) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرّفة من أجل كل عددطبيعي n بـ: $v_n=\ln\left(4-u_n^2\right)$.

أ) اثبات أنّ المتتالية (v_n) حسابية

لدينا $v_{n+1}-v_n=\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ ومنه المتتالية (v_n) حسابية 01ن

أساسها $r=\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

حدها الاول: $v_0=\ln\left(4-u_0^2\right)=\ln 3$

ب) كتابة v_n بدلالة n:

$$v_n=v_0+nr=\ln 3+n\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

- استنتاج u_n بدلالة n: لدينا $u_n=\sqrt{4-e^{v_n}}$

وبالتالي $u_n=\sqrt{4-e^{\ln 3+n\ln\frac{1}{2}}}$ 01ن

$$P(D)=\frac{A_3^1\times A_{10}^2}{A_{11}^3}=\frac{3}{11}$$

- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{4-e^{\ln 3+n\ln\frac{1}{2}}}=2$$

4) أ) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث :
$S_n=v_{2024}+v_{2025}+\dots+v_n$.

$$S_n=\frac{n-2023}{2}\left(2\ln 3+(2024+n)\ln\frac{1}{2}\right)$$

ب) استنتاج بدلالة n الجداء p_n حيث : 01ن

$$p_n=\left(4-u_{2024}^2\right)\times\left(4-u_{2025}^2\right)\times\dots\times\left(4-u_n^2\right)$$

$$p_n=e^{v_{2024}}\times e^{v_{2025}}\times\dots\times e^{v_n}$$

$$p_n=e^{v_{2024}+v_{2025}+\dots+v_n}$$

ومنه $p_n=e^{S_n}$

التمرين الرابع 07ن:

الجزء الأول:

1) بقراءة بيانية:

أ) اثبات أن $a=-2$، $b=0$ و $c=e$.

ب) اثبات ان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,3<\alpha<0,4$.

- لدينا الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[0,3;0,4]$
- ولدينا $g(0,3)\times g(0,4)\prec 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: 01ن
$0,3<\alpha<0,4$.

2) استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

استنتاج حسب قيم x إشارة $g(-x)$ على $\mathbb{R}$. 01ن

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$g(-x)$	-	0	+

الجزء الثاني:

1) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ 01ن

2) أ) اثبات أنّ من أجل كل x من $\mathbb{R}$،
$f'(x)=-g(-x)$.

(استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f

x	$-\infty$ $\qquad$ $-\alpha$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $-$

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-\alpha]$

ومتناقصة تماما على المجال $[-\alpha;+\infty[$

x	$-\infty$ $\qquad$ $-\alpha$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $-$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $f(-\alpha)$ $\searrow$ $-\infty$

ن01

أ)تبيان أنّ $\lim_{x\to+\infty}[f(x)+ex-e]=-3$

- التفسير النتيجة بيانيا

المستقيم ذا المعادلة $y=-ex+e-3$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

ب) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلىالمستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-ex+e-3$

- **ندرس إشارة الفرق**

$$f(x)-(-ex+e-3)=(2x+2)e^{-x+1}$$

لدينا $(2x+2)e^{-x+1}=0$

معناه $2x+2=0$ يكافئ $x=-1$

لما $x\in]-\infty;-1[$ (C_f) تحت (Δ)

لما $x\in]-1;+\infty[$ (C_f) فوق (Δ)

لما $x=-1$ فان (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الاحداثيات $(-1;2e-3)$

4)اثبات أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ)

نضع $f'(x)=-e$ معناه $x=0$

ومنه $(T): y=-ex+3e-3$ ن01

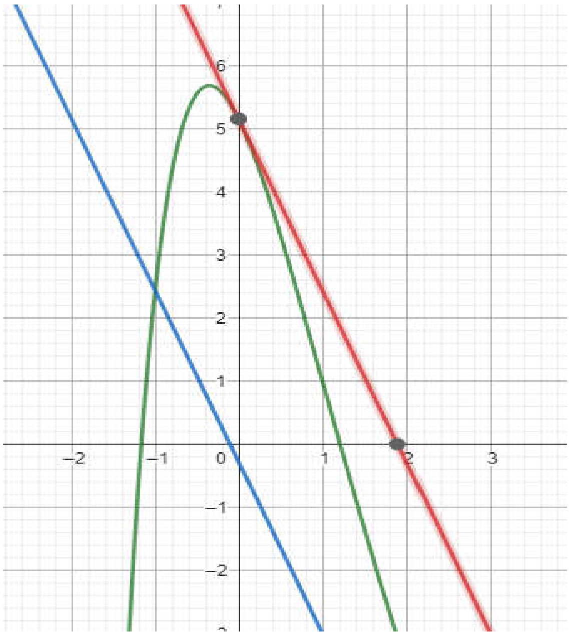
5)تعين دون حساب $\lim_{h\to0}\frac{f(-\alpha+h)-f(-\alpha)}{h}$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(-\alpha+h)-f(-\alpha)}{h}=-g(\alpha)=0$$

- تفسير النتيجة بيانيا

المنحنى (C_f) يقبل مماسا افقيا عند النقطة ذات الفاصلة $-\alpha$

6)انشاء (Δ)، (T) و (C_f).

ن01 

7)المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة:

$$2x+2=(3-e+m)e^{x-1}$$

لدينا $2x+2=(3-e+m)e^{x-1}$

تكافئ $f(x)=-ex+m$

ن01 لما $m\in]-\infty;e-3]$ للمعادلة حل وحيد سالب

لما $m\in]e-3;3e-3[$ للمعادلة حلين احدهما موجب و الاخر سالب

لما $m=3e-3$ للمعادلة حل وحيد معدوم

لما $m\in]3e-3;+\infty[$ المعادلة لا تقبل حلول

8) λ عدد حقيقي حيث $\lambda \prec -2$.

أ)باستعمال المكاملة بالتجزئة حساب التكامل التالي: $\int_{\lambda}^{-2}(2x+2)e^{-x+1}dx$

$$\int_{\lambda}^{-2}(2x+2)e^{-x+1}dx=(2\lambda+4)e^{-\lambda+1}$$

ب) حساب العدد $A(\lambda)$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=\lambda$ و $x=-2$

$$A(\lambda)=\int_{\lambda}^{-2}\left(\left(-ex+e-3\right)-f\left(x\right)\right)dx$$

$$A(\lambda)=\int_{\lambda}^{-2}-\left(2x+2\right)e^{-x+1}dx$$

$$A(\lambda)=\left(-2\lambda-4\right)e^{-\lambda+1}\times UA$$

- حساب $\lim_{\lambda\to-\infty}A(\lambda)$

$$\lim_{\lambda\to-\infty}A(\lambda)=\lim_{\lambda\to-\infty}\left(-2\lambda-4\right)e^{-\lambda+1}=+\infty$$

التصحيح النموذجي –الموضوع الثاني 3 ع ت

التنقيط	الإجابة النموذجية

التمرين الأول: (4نقاط)

1. أ. $P(A)=\dfrac{C_3^3+C_4^3}{C_7^3}=\dfrac{1}{7}$ — **0,5**

$P(B)=\dfrac{C_4^2\times C_3^1+C_4^3}{C_7^3}=\dfrac{22}{35}$ — **0,5**

$P(C)=\dfrac{C_1^1\times C_6^2}{C_7^3}=\dfrac{3}{7}$ — **0,5**

ب. $P_A(W)=\dfrac{C_3^3}{C_3^3+C_4^3}=\dfrac{1}{5}$ — **0,5**

2. أحسب الاحتمال — **0.5**

$P(C)=1-P(\overline{C})=1-\dfrac{C_1^1\times C_1^1\times C_5^1}{C_7^3}=1-\dfrac{1}{7}=\dfrac{6}{7}$

3. أ. $X=\{0;1;2;3\}$. — **0,5**

$P(X=0)=\dfrac{C_3^3}{35}=\dfrac{1}{35}$

$P(X=1)=\dfrac{C_3^2\times C_4^1}{35}=\dfrac{12}{35}$

$P(X=2)=\dfrac{C_3^1\times C_4^2}{35}=\dfrac{18}{35}$

$P(X=3)=\dfrac{C_4^3}{35}=\dfrac{4}{35}$.

$X=x_i$	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\dfrac{1}{35}$	$\dfrac{12}{35}$	$\dfrac{18}{35}$	$\dfrac{4}{35}$

— **1**

ب. $E(X)=\sum_{i=1}^{4}p_ix_i=\dfrac{12}{7}$ — **0,5**

التمرين الثاني: (4.5 نقطة)

I) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$u_0=\dfrac{5}{2}$ و $u_{n+1}=\dfrac{8u_n-8}{u_n+2}$

1. أ. أحسب $u_1=\dfrac{8}{3}$, $u_2=\dfrac{20}{7}$, $u_3=\dfrac{52}{17}$. — **0,75**

ب. لدينا $u_0+u_2\neq 2u_1$ وكذلك $u_0\times u_2\neq u_1^2$ ومنه المتتالية (u_n) ليست حسابية وليست هندسية . — 0,5

2. أ. نسمي $P(n)$ الخاصية من أجل كل n من $\mathbb{N}$: — **0,5**

$\dfrac{5}{2}\leq u_n\leq 4$

$n=0$: $\dfrac{5}{2}\leq u_0=\dfrac{5}{2}\leq 4$ محققة .

نفرض صحة $P(n)$ من أجل n كيفي ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $\dfrac{5}{2}\leq u_{n+1}\leq 4$

من فرضية التراجع لدينا $\dfrac{5}{2}\leq u_n\leq 4$ إذن $\dfrac{5}{2}\leq 8-\dfrac{24}{u_n+2}\leq 4$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة ومنه صحة $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n .

ب. لدينا $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-\overbrace{(u_n-4)}^{(-)}\overbrace{(u_n-2)}^{(+)}}{u_n+2}\geq 0$ ومنه (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$. — **0,75**

المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

نضع : $l=\dfrac{8l-8}{l+2}$ بحل المعادلة نجد $l=4$ أو $l=2$ مرفوض لأن $\left(u_n\geq\dfrac{5}{2}\right)$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=4$

3. أ. لدينا $4-u_{n+1}=\dfrac{-4u_n+16}{u_n+2}=\dfrac{4}{u_n+2}(4-u_n)$ — **0,25**

ولدينا $\frac{5}{2} \le u_n \le 4$ إذن $\frac{4}{u_n+2} \le \frac{8}{9}$

ولدينا $0 \le 4-u_n$

ومنه $\frac{4}{u_n+2}(4-u_n) \le \frac{8}{9}(4-u_n)$

ومنه $4-u_{n+1} \le \frac{8}{9}(4-u_n)$

ب. **0,25**

$n=0 \qquad 0 \le 4-u_1 \le \frac{8}{9}(4-u_0)$

$n=0 \qquad 0 \le 4-u_2 \le \frac{8}{9}(4-u_1)$

.

.

.

$n-1 \qquad 0 \le 4-u_n \le \frac{8}{9}(4-u_{n-1})$

بالضرب طرف لطرف والاختزال نجد :

$$0 \le 4-u_n \le \frac{3}{2}\left(\frac{8}{9}\right)^n$$

ج.لدينا $0 \le 4-u_n \le \frac{3}{2}\left(\frac{8}{9}\right)^n$ ومنه **0,25**

$$0 \le \lim_{n\to+\infty}(4-u_n) \le \lim_{n\to+\infty}\frac{3}{2}\left(\frac{8}{9}\right)^n \to 0$$

ومنه : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 4$

4. أ. $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$. **0,5**

(v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ أساسها

وحدها الأول $v_0=-3$.

ب. $v_n = -3\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ، **0,25**

$u_n = \frac{2}{1-v_n} + 2 = \frac{2}{1+3\left(\frac{2}{3}\right)^n} + 2$ **0,25**

ج. أحسب بدلالة n المجموع S'_n حيث : **0,25**

$$S_n = 2(v_0+v_1+\ldots+v_n) - 4 - 4 - \ldots - 4$$

$$= -12\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right] - 4(n+1)$$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1. أ. $Z_0 = 2-2i$ و $Z_1 = 2+2i$. **0,5**

ب- $Z_0 = 2\sqrt{2}e^{\frac{-\pi}{4}i}$ و $Z_1 = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ **0,5**

ج. $\left(\frac{Z_1}{2\sqrt{2}}\right)^n$ حقيقي يعني $n\frac{\pi}{4} = k\pi$ ومنه **0,5**

$n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$

2. $\frac{z_A}{z_B} = \frac{2+2i}{2-2i}$ ،لدينا $\left|\frac{z_A}{z_B}\right| = 1$ **0,75**

و $Arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

لدينا– $0A = 0B$ و $(\overrightarrow{0B};\overrightarrow{0A}) = \frac{\pi}{2}$ ومنه المثلث

$0AB$ قائم في ومتقايس الضلعين .

3 . أ. $|Z_D| = \left|\frac{Z_A}{Z_C}\right| = 1$ و $Arg(Z_D) = Arg\left(\frac{Z_A}{Z_C}\right) = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ **0,75**

$$Z_D = \frac{Z_A}{Z_C} = \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i$$

ب. $\begin{cases} \cos\frac{7\pi}{12} = \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{cases}$. **0,5**

4. . $z = z_A + ke^{\frac{3\pi}{4}i}$ يعني $z - z_A = ke^{\frac{3\pi}{4}i}$ يعني **0.5**

$(\vec{u};\overrightarrow{MA}) = \frac{3\pi}{4}$, $k \in \mathbb{R}_+^*$

ومنه المجموعة (E) هي نصف مستقيم مبدؤه النقطة A

ماعدا النقطة A ميله $\tan\frac{3\pi}{4}$.

التمرين الرابع:(7.5 نقطة)

I) $g(x)=x^2-2x-\ln(x-1)$

1.أ. $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ ، $\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} g(x)=+\infty$ — 0,5

ب.أدرس اتجاه تغير الدالة — 0,5

$g'(x)=\frac{2x^2-2x+1}{x-1}$ ،

x	1	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$

الدالة g متزايدة تماما على المجال $\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$ ومتناقصة تماما على المجال $\left]1;\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right]$.

x	1	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$-0,15$	↗ $+\infty$

2.أ. لدينا $g(2)=0$ إذن 2 حلا للمعادلة $g(x)=0$ — 0.5

-ولدينا الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[1,45;1,46]$ و $g(1,45)\simeq 0,001$, $g(1,46)\simeq -0,01$ إذن $g(1,45)\times g(1,46)\prec 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]1,45;1,46[$.

ب . — 0,5

x	1	α	2	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0 $-$	0	$+$

II) $f(x)=\frac{2+\ln(x-1)}{x-1}+x-2$

1. أ. $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. — 0,25

ب. $\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=-\infty$. — 0,25

المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مقارب عمودي لـ(C_f) .

ج . من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{(x-1)^2}$ ، — 0,75

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ومنه الدالة متزايدة تماما على المجالين $]1;\alpha]$ و $[2;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha;2]$

x	1	α	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0 $-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f(\alpha)$ ↘	2 ↗	$+\infty$

2.أ. $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)]=0$ ومنه المستقيم (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$ — 0,25

ب. $f(x)-(x-2)=\frac{2+\ln(x-1)}{x-1}$ — 0,25

$2+\ln(x-1)=0$ يعني $x=e^{-2}+1$

x	1	$e^{-2}+1$	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)	تقاطع	(C_f) فوق (Δ)

3.نحل المعادلة $f'(x)=1$ نجد $x=e^{-1}+1$ ، ومنه يوجد مماس موازي لـ (Δ) معادلة له $y=x+e-2$. — 0,5

4. أ. لدينا $g(\alpha)=0$ يعني $\ln(\alpha-1)=\alpha^2-2\alpha$

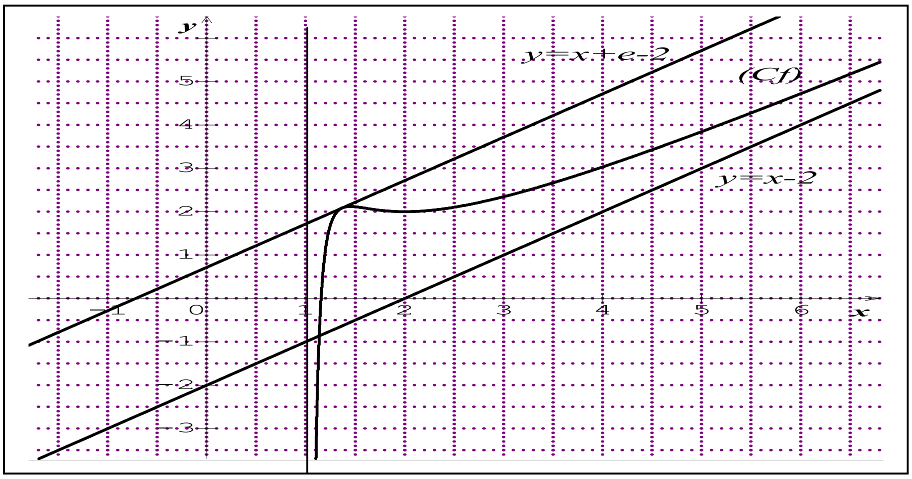
بالتعويض في عبارة $f(\alpha)$ نجد $f(\alpha)=2\alpha-3+\frac{1}{\alpha-1}$ — 0,25

ب. f قابلة للاشتقاق عند 2 ومنه : — 0,5

$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)=g(2)=0$ المنحنى يقبل مماسا أفقيا عند النقطة ذات الفاصلة 2.

5 .

0,75



0,5

6. أ. $h(x)=f(|x|+1)$

لدينا مجموعة التعريف متناظرة للـ 0.

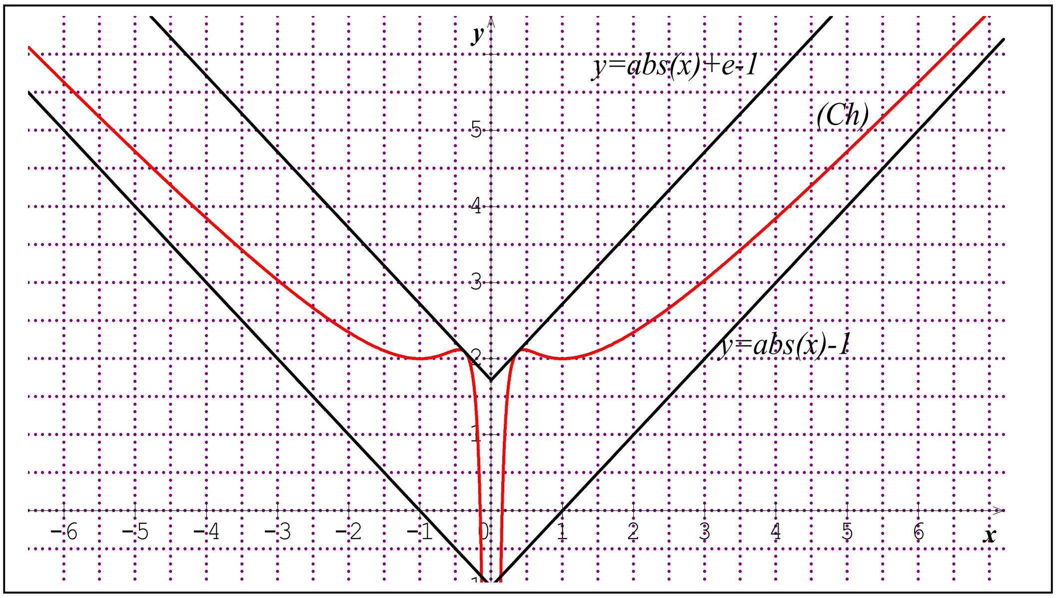
و $h(-x)=f(|-x|+1)$
$=f(|-x|+1)=h(x)$

ومنه دالة زوجية

0,5

ب. إذا كان $x\succ 0$ ، فإن المنحنى (C_h) هو صورة المنحنى (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}(-1;0)$

إذا كان $x\prec 0$ ، فإن المنحنى (C_h) متناظر بالنسبة لحامل محور التراتيب.



7 .

0,5

$$A=\int_{2}^{5}\frac{2+\ln(x-1)}{x-1}dx$$
$$=\left[2\ln(x-1)+\frac{1}{2}\left(\ln(x-1)\right)^{2}\right]_{2}^{5}$$
$$=2\ln(4)+\frac{1}{2}\left(\ln(4)\right)^{2}\ u.a$$