## على المترشح أن يعالج أحد الموضوعين على الخيار

## الموضوع الأول

### التمرين الأول 4 نقاط

I-) نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(E)$ ...... $[z^2-4z+13][z^2-2(2-3\sqrt{2})z+49-30\sqrt{2}\,]=0$

1°) أنشر العبارة : $\left(3\sqrt{2}-3\right)^2$ ، ثم حل المعادلة $(E)$ .

في المستوي المركب $(P)$ النقط: $D\,;C\,;B\,;A\,;\omega$ التي لواحقها على الترتيب: $z_\omega=-1$; $z_A=2-3i$ ; $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=(2-3\sqrt{2})+(3\sqrt{2}-3)i$ ; $z_D=\overline{z_C}$ .

2°) أكتب العددين $z_A-z_\omega$ و $\frac{z_B-z_\omega}{z_A-z_\omega}$ على الشكل الأسي ، ثم استنتج طبيعة المثلث $\omega AB$ .

3°) أكتب العدد المركب $\frac{z_C-z_D}{z_B-z_A}$ على الشكل الجبري ، ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$ .

4°) أ-) أكتب العددين $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ و $\frac{z_C-z_D}{z_B-z_D}$ على الشكل الجبري ثم استنتج عمدة كل منهما .

ب-) أكتب المعادلة الديكارتية لـ $(\Delta)$ مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ التي تحقق: $|z-z_B|=|z-z_C|$ ، ثم جد $z_I$ لاحقة $I$ نقطة تقاطع المستقيم $(\Delta)$ مع حامل محور الفواصل .

ج-) أحسب $|z_I-z_A|$ ، ثم استنتج أن النقط $D\,;C\,;B\,;A$ تنتمي إلى نفس الدائرة التي يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

### التمرين الثاني:4 نقاط

يحتوي الصندوق $A$ على 4 كرات بيضاء ، و 3 كرات خضراء ، و كرتان حمروان . و يحتوي الصندوق $B$ على 3 كرات بيضاء تحمل العدد $\frac{\pi}{4}$ ، و كرتان خضروان تحملان العدد $\frac{\pi}{2}$ ، وكرة حمراء تحمل العدد $\pi$ . كل الكرات متماثلة لا نميز بينها عند اللمس .

نرمي مرتين زهرة نرد متجانسة ذات 4 أوجه مرقمة بـ : 2- ، 1- ، 1 ، 2 ، إذا تحصلنا على مجموع العددين معدوم نسحب من الصندوق $A$ 3 كرات في آن واحد ، و إلا نسحب من الصندوق $B$ كرتين على التوالي و بدون ارجاع .

نسمي $A$ الحدث " السحب من الصندوق $A$ و $B$ الحدث " السحب من الصندوق $B$ و $C$ الحدث " الحصول على نفس اللون " و $D$ الحدث " الحصول على لونين مختلفين ". $E$ الحدث " الحصول على 3 ألوان مختلفة مثنى مثنى " .

1°) أحسب : $P(A)\,;P_A(C)\,;P_A(E)\ ;\ P_B(D)$ .

2°) أ-) شكل شجرة الاحتمالات الشرطية التي تنمذج هذه التجربة .

ب-) باستعمال دستور الاحتمالات الكلية أحسب $P(C)$ ، ثم أحسب : $P_C(A)$ .

3°) عند السحب من الصندوق $B$ نسمي $\alpha$ العدد الذي تحمله الكرة الأولى و $\beta$ العدد الذي تحمله الكرة الثانية و نعتبر المتغير العشوائي $X$ الذي يرفق بكل عملية السحب العدد: $cos(\alpha+\beta)$ إذا كان السحب من الصندوق $B$ ، و عدد الألوان إذا كان السحب من الصندوق $A$ .

أ-) عين مجموعة قيم المتغير العشوائي $X$ .

ب-) عين قانون احتمال المتغير العشوائي $X$ ، ثم أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$ .

4°) نجمع كل الكرات و نضعها في كيس ثم نسحب 4 كرات على التوالي و بالارجاع . أحسب احتمال $F$ الحصول على ألوان العلم الوطني .

## التمرين الثالث:05 نقاط

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E) \dots \dots 14x - 5y = 26$

1°) أ-) أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة $(E)$ فإن $y$ زوجي .

ب-) عين الحل الخاص $(a;a+2)$ للمعادلة $(E)$ ، ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(E)$ .

2°)أ-) إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة $(E)$ ، عين مجموعة القيم الممكنة لـ $PGCD(x;y)$: .

ب-) عين مجموعة الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة $(E)$التي تحقق $PGCD(x;y) = 13$

3°) أ-) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$ بواقي القسمة الإقليدية للعدد $9^n$ على 13 .

ب-) استنتج باقي القسمة على 13 للعدد $A$ علما أن: $A = 1445^{2024} + 2974^{1444} + 2024^{1962}$ .

ج-) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $9n \times 2024^{2n+1} - 1445^{4n+4} \equiv 9^{2n+2}(n-1)[13]$ ، ثم عين مجموعة قيم $n$ التي من أجلها يكون $9n \times 2024^{2n+1} - 1445^{4n+4}$ مضاعف 13 .

4°) $N$ عدد طبيعي يكتب في النظام ذي الأساس 9 على الشكل $\overline{1\delta\gamma 5}$ و في النظام ذي الأساس 8على الشكل $\overline{2\beta\alpha 5}$ .

أ-) عين قيمة الرقمين $\alpha$ و $\beta$ ، ثم استنتج قيمة العدد الطبيعي $N$ في النظام العشري . علما أن $\gamma = \beta + 1$ و $\delta = 2\alpha$

5°) $M$ عدد طبيعي يكتب في النظام ذي الأساس $n-1$ على الشكل $\overline{5m21}$ و في النظام ذي الأساس $n+1$ على الشكل $\overline{2mnn}$ . عين قيمة الرقمين $n$ و $m$ ، ثم استنتج قيمة العدد الطبيعي $M$ في النظام العشري .

## التمرين الرابع :07 نقاط

I-) نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = (x+1)e^{-x} - e^{-2}$ ، نسمي $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ .

1°) أ-) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة الأخيرة بيانيا .

ب-) أدرس اتجاه تغيرات الدالة $f$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .

2°) نقبل أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين $a$ و b حيث $a \in ]-0,95;-0,9[$ و $b \in ]3,5;3,6[$ . استنتج اشارة $f(x)$ .

3°) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $[a;2]$ فإن: $0 \le f(x) \le 1 - e^{-2}$

4°) $F$ دالة عددية معرفة على المجال $[a;+\infty[$ كما يلي : $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ، نسمي (C) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ .

أ-) ما ذا تمثل الدالة $F$ بالنسبة للدالة $f$ ، ثم استنتج اتجاه تغيرات الدالة $F$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .

ب-) باستعمال المكاملة بالتجزئة عين عبارة $F(x)$ بدلالة $x$ .

ج-) أحسب بدلالة $a$ مساحة الحيز من المستوي $\mathcal{A}(a)$ المحدد بالمنحنى $(C_f)$ و محور الفواصل و المستقيمين $x = a$ و $x = 2$ معادلتي لهما ، ثم بين أن : $\mathcal{A}(a) = e^{-2}\left(a - 5 + \frac{1}{a+1}\right)$ و استنتج حصرا لـ $\mathcal{A}(a)$: .

د-) بين أن المعادلة $F(x) = x$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]1;2[$ ، ثم استنتج الوضع النسبي للمحنى (C) و المنصف الأول $(\Delta): y = x$ .

5°) أنشئ المحنى (C) و المنصف الأول $(\Delta)$.

6°) $(u_n)$ متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = a$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1} = F(u_n)$

أ-) باستعمال الشكل الذي رسمته .مثل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية $(u_n)$ ، ثم خمن اتجاه تغيراتها و تقاربها .

ب-) برهن عن طريق التراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $a \le u_n \le \alpha$ .

ج-) برهن صحة التخمين السابق .

د-) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $|u_{n+1} - \alpha| \le (1 - e^{-2})|u_n - \alpha|$ .

هـ-) *استنتج أنه* من أجل كل عدد طبيعي $n$: $|u_n - \alpha| \le (f(0))^n|\alpha - a|$، *ثم أحسب استنتج* $\lim(u_n)$ .

**انتهى الموضوع الأول**

## الموضوع الثاني:

**التمرين الأول(04ن):** اختار الإجابة الصحيحة مع التعليل من بين ثلاث أجوبة مقترحة:

*1 – نريد تشكيل عدد ذو 3 أرقام محصور بين 300 و500 وهذا بسحب ثلاث كريات على التوالي دون إرجاع في كيس يحتوي على 6* كريات مرقمة من 1 إلى 6 لا نفرق فيما بينها باللمس بحيث في السحب الأول نشكل رقم الآحاد وفي السحب الثاني نشكل رقم العشرات وفي السحب الثالث نشكل رقم المئات.

احتمال تشكيل هذا العدد يساوي : أ - $\frac{1}{12}$ ، ب - $\frac{1}{6}$ ، ج - $\frac{1}{3}$ .

2 – نريد اختيار لجنة في مادة الرياضيات تقوم بتحضير مواضيع الاختبارات التجريبية للفصل الثالث تتكون من 4 أساتذة من بين 15 أستاذ (10 نساء و5رجال).

عدد طرق اختيار لجنة بحيث الأستاذة $x$ تريد أن تكون في لجنة لا يوجد فيها السيدان $y$ و $z$ و لا توجد فيها السيدة $t$ هو : أ –165 ، ب –330 ، ج - 220 .

3 – نعتبر في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ العدد $S$ حيث : $S = \frac{2-iz}{1-z}$ مع $z \neq 1$ من أجل $z = 2$ فإن العدد $S^{2024}$ أ – تخيلي صرف ، ب – حقيقي ، ج – معدوم.

4 –أكبر عدد صحيح سالب $x$ للجملة التالية : $\begin{cases} x \equiv 2[3] \\ x \equiv 1[7] \\ x \equiv 4[5] \end{cases}$ هو :

أ – -57 ، ب - -69 ، ج - -76 .

## التمرين الثاني (04ن):

1 - ادرس أوليـــــــة العدد 421 ثم حل في المجموعة $\mathbb{N}^2$ المعادلة : $4m + 3n = m \times n - 409$ حيث $m > n$ .

2 – ABC مثلث قائم في A حيث : $AB = 29$ , $BC = x$ , $AC = y$ مع $x$ و $y$ عددان طبيعيان غير معدومين

أ – عين قواسم مربع العدد 29

ب - عين المثلث ABC.

ج – بين أن : $PGCD(421; 29; 420) = 1$.

3 – α عدد طبيعي. استنتج قيمة العدد α التي من أجلها يكون العددان α+2024 و α+1183 مربعين تامين.

4 – إليك عمليتين حسابيتين الأولى في نظام التعداد ذي الأساس $a$ و الأخرى في نظام التعداد ذي الأساس b .

$$\overline{1141}^a + \overline{41}^a + \overline{1140}^a = \overline{2352}^a \; \ldots\ldots.(1)$$

$$\frac{1}{2}\left(\overline{32}^b \times \overline{516}^b\right) = \overline{8316}^b \; \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

أ/ عين $a$ و b .

ب/ تحقق من صحة العمليتين في النظام العشري مفسرا هندسيا العمليتين بالنسبة للمثلث ABC.

## التمرين الثالث (05ن):

$(U_n)$ متتالية عددية معرفة بحدها الأول $U_0 = \alpha$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{4U_n}{U_n+6}$ حيث α عدد طبيعي .

1 – عين قيمة α حتى تكون $(U_n)$ متتالية ثابتة .

2 – نضع فيما يلي : $\alpha = 6$ .

أ/ - برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $U_n > 0$ .

ب/ - ادرس اتجاه تغير المتتالية $(U_n)$ ثم ماذا تستنتج بالنسبة لتقاربها ؟

ج/ - بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $U_{n+1} \leq \frac{2}{3} U_n$ .

د/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n \leq 6\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} U_n$ .

3 – برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $U_n = \frac{2}{\frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}$ يطلب حساب $\lim_{n\to+\infty} U_n$ من جديد .

4 – نعتبر $(V_n)$ متتالية عددية حيث : $V_n = 1 - \frac{a}{U_n}$ حيث : $a$ عدد حقيقي غير معدوم .

أ – عين قيمة العدد الحقيقي $a$ حتى تكون $(V_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب – أكتب $V_n$ و $U_n$ بدلالة n ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} U_n$ مرة أخرى .

ج – أكتب بدلالة n المجاميع التالية : $S_n = \frac{1}{2U_0} + \frac{1}{2U_1} + \cdots + \frac{1}{2U_n}$ و $S'_n = V_0 + 2V_1 + 2^2V_2 + .. + 2^nV_n$ .

## التمرين الرابع (07ن):

I - نعتبر الدالة $g$ المعرفة على المجال $]0\,;\,+\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 - \ln(x)$ .

1/ ادرس تغيرات الدالة $g$ ثم شكل جدول تغيراتها .

2/ بين أنه من أجل كل $x \in ]0\,;\,+\infty[$ فإن $g(x) > 0$ ثم شكل جدول إشارة الدالة $g$ .

II - نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على المجال $]0\,;\,+\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{1}{x}(x^2 - x + 1 + \ln(x))$ ، $(C)$ تمثيلها البياني

في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$. وحدة الرسم 1cm .

1 – أ/ احسب ما يلي : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ; $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ ثم فسر بيانيا النتيجة الثانية ؟

ب/ بين أن : $\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\ln(x)}{x} = 0$ فسر بيانيا النتيجة ؟

ج/ ادرس وضعية المنحنى $(C)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y = x - 1$ .

2 – أ/ بين أنه من أجل كل $x \in ]0\,;\,+\infty[$ فإن $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ .

ب/ شكل جدول تغيرات الدالة $f$ .

ج/ بين أن المعادلة : $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha \epsilon ]0,4\,;\,0,5[$.

3 – أ/ اكتب معادلة المماس $(T)$ للمنحنى $(C)$ الذي يوازي $(\Delta)$ عند النقطة A يطلب تحديد احداثياتها .

ب/ بين أن المنحنى $(C)$ يقبل نقطة انعطاف H يطلب تعيين احداثياتها .

ج/ أنشئ المنحنى $(C)$ و المستقيم $(\Delta)$ و المماس $(T)$ بعناية .

4 – m وسيط حقيقي ، $(D_m)$ مستقيم معادلته : $y = x + m$ عين قيم m بحيث المنحنى $(C)$و المستقيم $(D_m)$ يتقطعان

في نقطة على الأكثر.

5 –احسب A بـ $cm^2$ مساحة الحيز المحدد بالمنحنى $(C)$ و المستقيمات : $x = 1\,;\,x = e\,;\,y = x - 1$ .

6 - $h$ دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعلاقة التالية : $h(x) + f(|x|) = 2$ ..............(1) ، $(C_h)$ تمثيلها البياني .

أ/ - فسر بيانيا العلاقة (1) التي تربط بين $h$ و $f$ . ( يمكن وضع : $u(x) = f(|x|)$ ) .

ب/ عين العبارة الدستورية للدالة $h$ .

ج/ أنشئ في معلم جديد المنحنى $(C_h)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة $h$ .

**انتهى الموضوع الثاني.**

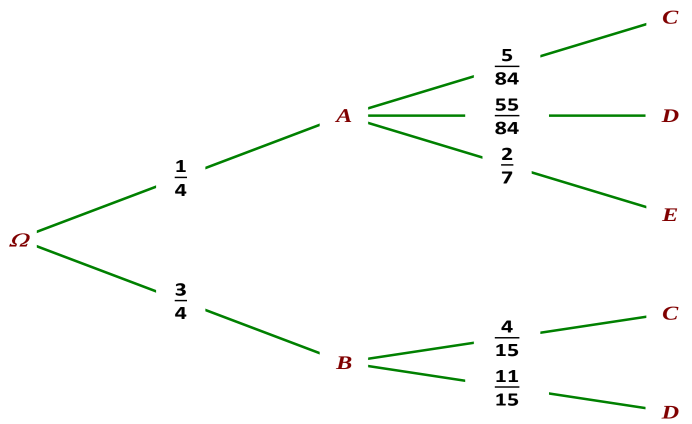
الجمهوريــة الجزائريــة الديمقراطيــة الشعبيــة

وزارة الـدفـاع الوطـــنـــي — السنة الدراسية : 2024/2023

أركان الجيش الوطني الشعبي — اختبار الثلاثي الثالث

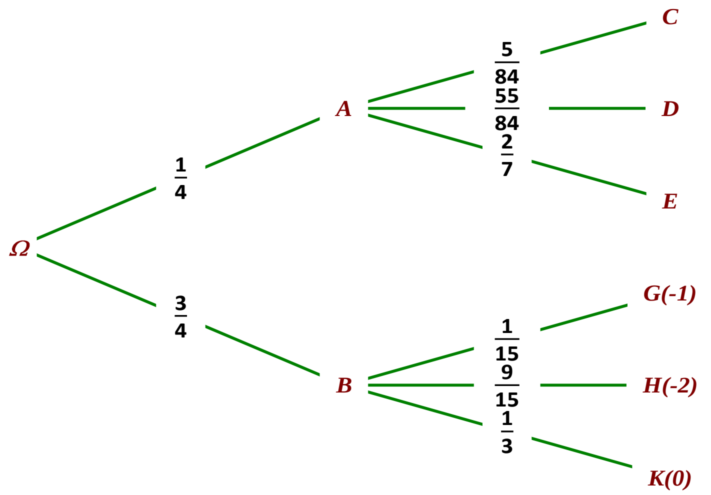
مديرية مدارس أشبال الأمة — المستوى: الثالثة ثانوي الشعبة : الرياضيات

# الاجابة النموذجية لاختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات

| التمرين | السؤال | الاجابة النموذجية | العلامة |
|---|---|---|---|
| التمرين الأول | 1-) | لدينا: $(3\sqrt{2}-3)^2 = 27-18\sqrt{2}$. حلول المعادلة هي: $S=\{2-3i\,;2+3i;(2-3\sqrt{2})+(3\sqrt{2}-3)i;(2-3\sqrt{2})-(3\sqrt{2}-3)i\,\}$ | 0,25<br>0,75 |
| | 2-) | لدينا: $z_A - z_\omega = 3-3i = 3\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$<br>و $\frac{z_B-z_\omega}{z_A-z_\omega} = e^{\frac{\pi}{2}i}$ ، و منه المثلث $\omega AB$ قائم في $\omega$ و متقايس الضلعين . | 0,5<br>0,5 |
| | 3-) | لدينا: $\frac{z_C-z_D}{z_B-z_A} = \frac{(3\sqrt{2}-3)}{3}$ ومنه $(AB)\,/\!/\,(CD)$ مما يعني أن الرباعي $ABCD$ شبه منحرف . | 0,5 |
| | 4-) أ-) | لدينا: $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A} = \frac{3\sqrt{2}+(3\sqrt{2})i}{6}$ و منه $Arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$<br>لدينا: $\frac{z_C-z_D}{z_B-z_D} = \frac{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}-1)i}{\sqrt{2}}$ و منه $Arg\left(\frac{z_C-z_D}{z_B-z_D}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ | 0,25<br>0,25 |
| | ب-) | لدينا : $\lvert z-z_B\rvert = \lvert z-z_C\rvert$ يعني $\sqrt{2}x+(2-\sqrt{2})y+6-5\sqrt{2}=0$ و هي ومعادلة محور القطعة $[BC]$ ، ومنه $z_I = 5-3\sqrt{2}$ . | 0,5 |
| | ج-) | لدينا $\lvert z_I - z_A\rvert = 3\sqrt{4-2\sqrt{2}}$ .<br>و مما سبق نستنتج أن النقط $A\,;B\,;C\,;D$ تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها $I$ و نصف قطرها $3\sqrt{4-2\sqrt{2}}$. | 0,25<br>0 ,25 |
| التمرين الثاني | 1-) | لدينا: $P(A)=\frac{1}{4}$ و $P_A(C) = \frac{C_4^3+C_3^3}{C_9^3} = \frac{5}{84}$ و $P_A(E) = \frac{C_4^1\times C_3^1\times C_2^1}{C_9^3} = \frac{2}{7}$<br>و $\frac{11}{15} = \frac{2(A_3^1\times A_3^1+A_2^1\times A_2^1)}{A_6^2} = P_B(D)$ . | 0,75<br>0,25 |
| | 2-) أ-) | شجرة الاحتمالات :<br><br> | 0,5 |
| | ب-) | لدينا $P(C) = P((A\cap C)\cup(B\cap C)) = (A)\times P_A(C) + P(B)\times P_B(C) = \frac{361}{1680}$<br>و $P_C(A) = \frac{P(A\cap C)}{P(C)} = \frac{25}{361}$ . | 0,25<br>0,25 |
| | 3-) أ-) | لدينا: $P(X=-1) = \frac{3}{4}\times\frac{A_2^2}{A_6^2} = \frac{1}{20}$ و $P\left(X=-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{4}\times\frac{2(A_3^1)^2}{A_6^2} = \frac{9}{20}$<br>و $P(X=0) = \frac{3}{4}\times\frac{A_3^2+2A_2^1\times A_1^1}{A_6^2} = \frac{1}{4}$ ، و $P(X=1) = \frac{1}{4}\times\frac{5}{84} = \frac{5}{336}$<br>و $P(X=2) = \frac{1}{4}\times\frac{55}{84} = \frac{55}{336}$ و $P(X=3) = \frac{1}{4}\times\frac{24}{84} = \frac{24}{336}$ | |
| | ب-) | (الجدول أدناه) | 1,25 |
| | 4-) | | 0,25 |

| $x_i$ و | -1 و | $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ و | 0 و | 1 و | 2 و | 3 و | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{20}$ و | $\frac{9}{20}$ و | $\frac{1}{4}$ و | $\frac{5}{336}$ و | $\frac{55}{336}$ و | $\frac{24}{336}$ و | $\frac{1680}{1680}$ و |

لدينا: $P(F)=\frac{7^2\times5\times3+5^2\times7\times3+3^2\times7\times5}{15^4}\times\frac{4!}{2!}=\frac{28}{75}$ — 0,5




## التمرين الثالث

1°) ا- لدينا $5y=14x-26$ ومنه $5y\equiv 0[2]$ أي $y\equiv 0[2]$ . — 0,25

ب- لدينا $9a=36$ ومنه $a=4$ و بالتالي الثنائية $(4;6)$ حل خاص للمعادلة $(E)$ . — 0,25

لدينا $14(x-4)=5(y-6)$ ومنه $S=\{(5k+4;14k+6)/k\in\mathbb{Z}\}$ . — 0,5

2°) ا- مجموعة القيم الممكنة لـ $PGCD(x;y)$ هي: $D_{26}=\{1;2;13;26\}$ . — 0,25

ب- لدينا: $PGCD(x;y)=13$ يعني $\begin{cases}5k+4\equiv 13[26]\\14k+6\equiv 0[26]\end{cases}$ و منه $k=26m+7$ — 0,5

و بالتالي: $S=\{(130m+39;364m+104)/k\in\mathbb{Z}\}$ . — 0,25

3°) ا- لدينا بواقي قسمة $9^n$ على 13 تشكل متتالية دورية دورها 3 نلخصها في الجدول التالي. — 0,5

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $n\equiv$ و | 0 و | 1 و | 2 و | [3] و |
| $9^n\equiv$ و | 1 و | 9 و | 3 و | [13] و |

ب- لدينا: $1445^{2024}=(1445^2)^{1012}$ و $1445^2\equiv 4[13]$ و منه $1445^{2024}\equiv 9[13]$ . — 0,25

و $2974\equiv 10[13]$ و منه $2974^{1444}\equiv(-3)^{1444}[13]$ و منه $2974^{1444}\equiv 3[13]$

و $2024\equiv 9[13]$ و منه $2024^{1962}\equiv 1[13]$ و عليه $A\equiv 0[13]$ — 0,25

ج- لدينا: $9n\times 2024^{2n+1}-1445^{4n+4}\equiv(9^{2n+2})n-(-9)^{2n+2}[13]$

و عليه: $9n\times 2024^{2n+1}-1445^{4n+4}\equiv 9^{2n+2}(n-1)[13]$

د- إذا كان $n=3k$ فإن $3(3k-1)\equiv 0[13]$ أي $k=13m+9$ ومنه $n=39m+27$ . — 0,25

إذا كان $n=3k+1$ فإن $27k\equiv 0[13]$ أي $k=13m$ ومنه $n=39m+1$ . — 0,25

إذا كان $n=3k+2$ فإن $3k+1\equiv 0[13]$ أي $k=13m+4$ ومنه $n=39m+14$ — 0,25

4°) لدينا: $N=5+9(\beta+1)+81(2\alpha)+729=5+8\alpha+64\beta+1024$ — 0,25

و منه $154\alpha-55\beta=286$ و هذا يعني $14\alpha-5\beta=26$ و عليه $\alpha=4$ و $\beta=6$ .

ومنه $N=1445$ . — 0,25

5°) لدينا: $M=1+2(n-1)+m(n-1)^2+5(n-1)^3$

و $M=n+n(n+1)+m(n+1)^2+2(n+1)^3$

و منه $n(3n^2-22n+9-4m)=8$ و منه $n=8$ و $m=6$ و عليه $M=2024$ . — 0,5

1°) أ- لدينا: $lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ و $lim_{x\to+\infty}f(x)=-e^{-2}$ و منه المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب أفقي $y=-e^{-2}$ معادلة له . — 0,5

ب- لدينا: $f'(x)=-xe^{-x}$ و منه الدالة متزايدة تماما على المجال $]-\infty;0]$ و متناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$ جدول التغيرات : — 0,5

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $1-e(-2)$ | ↘ | $-e(-2)$ |

— 0,25

اشارة العبارة: $f(x)$

2°)

| $x$ | $-\infty$ | | $a$ | | $b$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

— 0,25

## التمرين الرابع

**3°)** لدينا الدالة $f$ تقبل قيمة حدية محلية عظمى عند 0 و هي $1-e^{-2}$ على المجال $[a;2]$

ولدينا $f(a)=0$ و $f(2)=2e^{-2}$ و منه $0\le f(x)\le 1-e^{-2}$ — 0,25

**4°) أ-)** الدالة $F:x\mapsto\int_a^x f(t)\,dt$ هي دالة أصلية للدالة $f$ على المجال $]a;+\infty[$ و التي تنعدم عند $a$ — 0,25

الدالة $F$ متزايدة تماما على المجال $[a; ]$ و متناقصة تماما على المجال $[b;+\infty[$ — 0,25

| $x$ | $a$ | | $b$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $F(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $F(b)$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

0,25

**ب-)** بوضع $u'(t)=e^{-t}$ فإن $u(t)=-e^{-t}$ و $v(t)=(t+1)$ فإن $v'(t)=1$ — 0,25

إذن: $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt=[-(t+1)e^{-t}]_a^x+\int_a^x e^{-t}dt-e^{-2}\int_a^x dt$

و منه: $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt=(a+2)e^{-a}-(x+2)e^{-x}-e^{-2}(x-a)$ . — 0,25

**ج-)** لدينا: $\mathcal{A}(a)=(a+2)e^{-a}+(a-6)e^{-2}ua$. لكن: $f(a)=0$ يعني $e^{-a}=\frac{e^{-2}}{a+1}$

و منه: $\mathcal{A}(a)=e^{-2}\left(a-5+\frac{1}{a+1}\right)\mu a$ و عليه $0,54\le\mathcal{A}(a)\le 1,91$ ؟ — 0,5

**د-)** الدالة $\varphi:x\mapsto F(x)-x$ مستمرة و متناقصة تماما على $[1;2]$ و $\varphi(1)\times\varphi(2)<0$ . — 0,25

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $F(x)=x$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]1;2[$ .

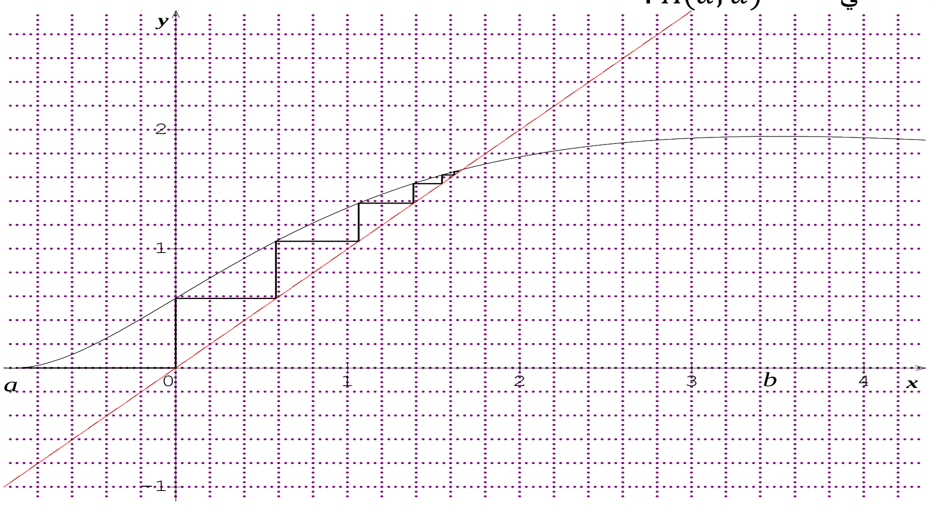
| $x$ | $a$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $F(x)-x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

0,25

و عليه المنحنى (C) يقع فوق المستقيم (Δ) في المجال $]a;\alpha[$ و يقع تحته في المجال $]\alpha;+\infty[$

و يقطعه في النقطة $A(\alpha;\alpha)$ .

**5°)**




0,75

**6°) أ-)** من خلال الشكل نخمن ان المتتالية $(u_n)$ متزايدة و متقاربة نحو $\alpha$ . — 0,25

**ب-)** مرحلة 1 : لدينا من أجل $n=0$ و $u_0=a$ و منه $a\le u_0\le\alpha$ ....(1)

مرحلة 2 : نفرض أن : $a\le u_n\le\alpha$ و نبرهن أن $a\le u_{n+1}\le\alpha$. — 0,5

لدينا $a\le u_n\le\alpha$ و الدالة $F$ متزايدة تماما على $[a; ]$ ومنه $F(a)\le F(u_n)\le F(\alpha)$ .

مما يعني أن: $a\le u_{n+1}\le\alpha$ ........(2)

من (1) و (2) و حسب مبدأ البرهان بالتراجع نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي : $a\le u_n\le\alpha$

**ج-)** لدينا: $u_{n+1}-u_n=F(u_n)-u_n\ge 0$ و منه المتتالية $(u_n)$ متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ — 0,25

بما أن المتتالية $(u_n)$ متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ و محدودة فهي متقاربة . — 0,25

**د-)** لدينا: $|u_{n+1}-\alpha|=\left|\int_\alpha^{u_n}f(x)dx\right|$ و $0\le f(x)\le 1-e^{-2}$ .

و منه $0\le\left|\int_\alpha^{u_n}f(x)dx\right|\le\left|(1-e^{-2})\int_\alpha^{u_n}dx\right|$ . — 0,5

و عليه: $|u_{n+1}-\alpha|\le(1-e^{-2})|u_n-\alpha|$ .

إذا: $|u_n-\alpha|\le(1-e^{-2})^n|\alpha-a|$ أي: $|u_n-\alpha|\le(f(0))^n|\alpha-a|$ . — 0,25

و منه : $\lim\ u_n=\alpha$ . — 0,25

| الإجابـــــــة النموذجيـــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــــة | التنقيط |
| --- | --- |

**التمرين الأول (4 نقاط):**

1 – الإجابة ج ......................................................0,25

التعليل : $P(A)=\frac{A_2^1\times A_5^2}{A_6^3}=\frac{1}{3}$ ..................................................0,5+0,25

2 – الإجابة أ ......................................................0,25

التعليل: $C_1^1\times C_{11}^3=165$ ..........................................0,5+0,25

3 – الإجابة ب ..................................................0,25

التعليل: من أجل Z=2 معناه $S=-2+2i$ أي : $S=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+isin(\frac{3\pi}{4})\right)$ ..................0,25

حسب موافر : $S^{2024}=\left(2\sqrt{2}\right)^{2024}(\cos(1518\pi)+isin(1518\pi))$ لكن :

$$\begin{cases}\cos(1518\pi)=\cos(0)=1\\ \sin(1518\pi)=\sin(0)=1\\ S^{2024}=\left(2\sqrt{2}\right)^{2024}\end{cases}$$ ومنه العدد المطلوب حقيقي.................................0,25*2

4 – الإجابة ج ......................................................0,25

التعليل: أولا نقوم بحل الجملة : نجد : $x=105k+29$ ..............................................0,5

من أجل k=-1 نجد : $x=-76$ ..........................................................0,25

**التمرين الثاني ( 4 نقاط ):**

1 – دراسة أولية العدد 421: لدينا $\sqrt{421}=20,51$ .

لنقسم العدد 421 على a الذي يمثل الاعداد الأولية الأصغر من 20 حيث q يمثل حاصل القسمة و r يمثل باقي القسمة

لنشكل الجدول التالي:

| a | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| q | 210 | 140 | 84 | 60 | 38 | 32 | 24 | 22 |
| r | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 5 | 13 | 3 |

بما أن البواقي كلها غير معدومة إذن العدد 421 أولي ...............................................................0,25

حل في المجموعة $\mathbb{N}^2$ المعادلة المعطاة : $\begin{cases}4m+3n=m\times n-409\\ m>n\end{cases}$ تكافئ : $m\times n-4m-3n=409$

تكافئ : $\begin{cases}(m-3)(n-4)=421\\ m-3>n-4\end{cases}$ بما أن 421 أولي إذن :

نجد: m=424 و n=5 وهي حلول المعادلة ..................................................0,25*2

2 – أ / تعيين قواسم العدد 841: بما أن $841=29^2$ معناه العدد له 3 قواسم هي : $29^0;29^1;29^2$ وبالتالي :

$D_{841}=\{1;29;841\}$ ................................................0,25

ب / تعيين المثلث ABC : يعني تعيين الضلعين $x;y$ .

بما أن المثلث قائم حسب فيثاغورس لدينا : $x^2 = y^2 + 29^2$ معناه $(x+y)(x-y) = 841$ ................. 0,25*2

لكن $x+y > x-y$ هذا يعني : $\begin{cases} x+y = 841 \\ x-y = 1 \end{cases}$ معناه $x = 421$ ; $y = 420$ ........................... 0,25*3

ج / تبيان أن $PGCD(421; 29; 420) = 1$ :

بما أن العددان 420 و421 متتابعان معناه أنهما أوليان فيما بينهما كذلك العدد 29 أولي فهو أولي مع كل الاعداد التي

ليست من مضاعفاته و بالتالي $PGCD(421,29,420) = PGCD(1,29) = 1$ ...................................... 0,25

3 – استنتاج قيمة α : $\alpha = 175217$ ............................................... 0,5

4 – أ/ تعيين a وb: بالنسبة للعملية الأولى نجد: a=7 بالنسبة للعملية الثانية نجد: b=9 ...................................... 0,25*2

ب / تحقق من صحة العمليتين في النظام العشري فهي محققة ........................................................... 0,25

التفسير الهندسي: العملية الأولى تمثل محيط المثلث أما الثانية تمثل مساحة المثلث .................................. 0,25

**التمرين الثالث (5 نقاط):**

1 – تعيين قيمة αالطبيعية : $\alpha = 0$ ......................................................... 0,25

2 – أ / البرهان بالتراجع أن $U_n > 0$ ......................................................... 0,25*2

ب / دراسة اتجاه تغير المتتالية ندرس إشارة الفرق ...................................................................... 0,25

استنتاج أن المتتالية متقاربة مما سبق ...................................................................... 0,25

ج/ تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} \le \frac{2}{3}U_n$ معناه $U_{n+1} - \frac{2}{3}U_n \le 0$

يكافئ $-\frac{2}{3}\frac{(U_n)^2}{(U_n+6)} \le 0$ ....................................................... 0,5

د/ استنتاج أن: $U_n \le 6\left(\frac{2}{3}\right)^n$: من العلاقة السابقة من أجل n=0 نجد $U_1 \le \frac{2}{3}U_0$

من أجل n=1نجد $U_2 \le \frac{2}{3}U_1$

" " "

من أجل n-1 نجد $U_n \le \frac{2}{3}U_{n-1}$

بالضرب طرف لطرف مع الاختزال نجد : $U_n \le 6\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ....................................................... 0,25

حساب النهاية : $\lim U_n = 0$ لأن $-1 < \frac{2}{3} < 1$ أساس متتالية هندسية ........................................ 0,25

3 – برهان بالتراجع أن $U_n = \frac{2}{\frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}$ ...................................................................... 0,25*2

حساب النهاية من جديد : $\lim U_n = 0$ : لأن $\frac{3}{2} > 1$ أساس متتالية هندسية ........................................ 0,25

4 –أ/ تعيين قيمة a حتى تكون المتتالية $(V_n)$ هندسية : نجد a=-2 و الأساس $q = \frac{3}{2}$ و $V_0 = \frac{4}{3}$ ........................... 0,25*3

ب/ $V_n$ ; $U_n$ بدلالة n : $V_n = \frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^n$ و $U_n = \frac{2}{\frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}$ ............................................ 0,25*2

حساب النهاية من جديد: $\lim U_n = 0$ لأن $\lim V_n = +\infty$ .......................................... 0,25

ج/ كتابة المجاميع بدلالة n : $S_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{1}{4}n - \frac{11}{12}$ ......................................................0,25

$S'_n = \frac{2}{3}[3^{n+1} - 1]$ ......................................................0,25

**التمرين الرابع (7 نقاط):**

الجزء الأول:

1 - دراسة تغيرات الدالة $g$:

أولا النهايات: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = +\infty$ ; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ .................................0,25*2

ثانيا اتجاه التغير : $g'(x) = \frac{2x^2-1}{x}$ ..................................................0,25

$g'(x) = 0$ معناه :

| $x$ | $0$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |

من أجل كل $x \in \left]0 , \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ الدالة $g$ متناقصة تماما.

من أجل كل $x \in \left]\frac{\sqrt{2}}{2} ; +\infty\right[$ الدالة $g$ متزايدة تماما ..........................................0,25

ثالثا تشكيل جدول التغيرات: .........................................0,25

حيث : $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0,84$ .

| $x$ | $0$ | | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $g(\frac{\sqrt{2}}{2})$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

2 – تبيان أنه من أجل كل $x > 0$ فإن $g(x) > 0$ :

من جدول التغيرات نلاحظ أن للدالة $g$ قيمة حدية صغرى 0,84 عند $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و بالتالي $g(x) > 0$ .

و عليه جدول الإشارة يكون كما يلي: ...........................................0,25

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g(x)$ | $+$ | |

الجزء الثاني:

1 –أ/ حساب النهايات: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$ ...........................0,25*2

تفسير النهاية الثانية : المنحنى $(C)$ يقبل محور التراتيب مقارب له معادلته $x = 0$ .......................... 0,25

ب/ تبيان أن: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1+\ln(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x} = 0$ حسب التزايد المقارن ........................0,25

تفسير النتيجة بيانيا : لدينا $f(x) = x - 1 + \frac{1+\ln(x)}{x}$ معناه $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1+\ln(x)}{x}$

و بالتالي المنحنى $(C)$ يقبل مقارب مائل معادلته $y = x - 1$ ...................................0,25

ج/ دراسة الوضع النسبي : إشارة الفرق من إشارة البسط $1+\ln(x)$ معناه $x=e^{-1}$ .

جدول الإشارة:

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{e}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $1+ln(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

من أجل كل $x \in ]0\ ;\ e^{-1}[$ المنحنى $(C)$ يقع تحت $(\Delta)$

من أجل كل $x > e^{-1}$ المنحنى $(C)$ يقع فوق $(\Delta)$ . ..........................................................0,25

2 – أ/ $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ ..........................................................0,25

استنتاج اتجاه التغير : الدالة $f$ متزايدة تماما ..........................................................0,25

ب/ تشكيل جدول التغيرات: ..........................................0,25

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

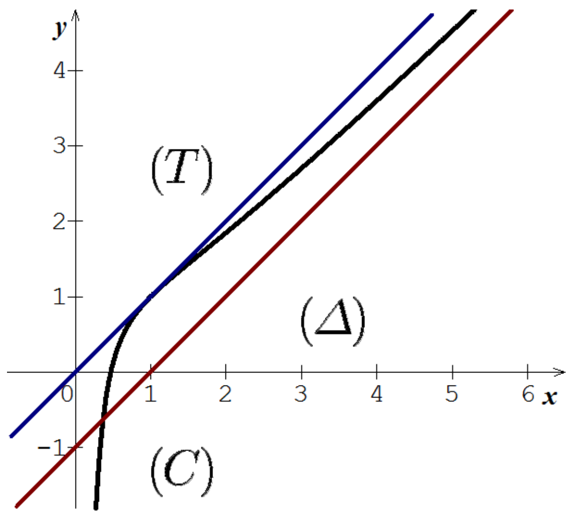
ج/ تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α: حسب مبرهنة القيم المتوسطة ..........................................0,25

3 –أ/ كتابة معادلة المماس $(T)$: $y=x$ عند النقطة $A(1;1)$ .....................................0,25

ب/ تبيان أن المنحنى يقبل H نقطة انعطاف:

نجد: $f''(x)=\frac{2\ln(x)-1}{x^3}$ و $H(\sqrt{2}\ ;1{,}55)$ .....................................0,25

ج/ انشاء المنحنى $(C)$ والمقارب $(\Delta)$ و المماس $(T)$: ..................................0,25*3




4 – قيم m بحيث المنحنى و المستقيم يتقطعان في نقطة على الأكثر هي : $m \in ]-\infty\,;-1] \cup [0\ ;\ +\infty[$ .................0,25

5 – حساب المساحة A : نجد $A=\frac{3}{2}cm^2$ ..........................................................................0,25

6 –أ/ تفسير بياني للعلاقة (1): إذا وضعنا $u(x) = f(|x|)$ معناه $h(x) + u(x) = 2 \times 1$

هذا يعني $(C_u)$ ; $(C_h)$ متناظران بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y = 1$ ...................... 0,25

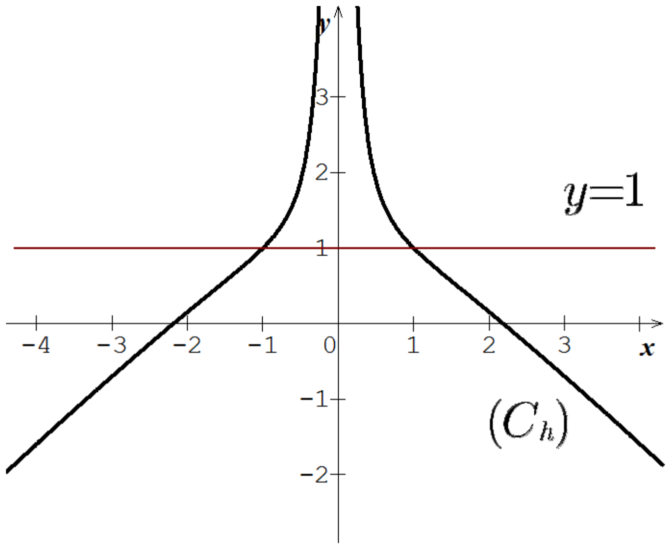
علما أن الدالة $u(x)$ زوجية منحناها البياني يكون كما يلي :

من أجل كل $x > 0$ المنحنيين $(C)$ و $(C_u)$ متطابقان ,

من أجل كل $x < 0$ نكمل رسم $(C_u)$ بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب .

ب/ تعيين العبارة الدستورية للدالة $h$: $h(x) = 2 - \frac{1}{|x|}[x^2 - |x| + 1 + ln|x|]$ .................................. 0,25

ج/ انشاء $(C_h)$ في معلم جديد: .......................... 0,25




تشكيل جدول تغيرات الدالة $u$: ....................................... 0,25

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | $+$ | \|\| | $-$ |
| $h(x)$ | $-\infty \nearrow +\infty$ | \|\| | $+\infty \searrow -\infty$ |

انتهى