موضوع تجريبي للتدرب رقم 07

التمرين الأول (المتتاليات) : * 04 نقاط *

المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_1=e^{-1}$ و من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$: $u_{n+1}=\frac{n+1}{en}u_n$.

① أ ـ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n>0$.

ب ـ قارن بين $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ و 1 ، ثم استنتج إتجاه تغير و تقارب المتتالية (u_n) .

② نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $v_n=\frac{1}{en}u_n$.

أ ـ بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_1 .

ب ـ جد بدلالة n عبارة الحد العام v_n ، ثم استنتج عبارة u_n و احسب : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

③ احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=u_1+\frac{1}{2}u_2+\frac{1}{3}u_3+......+\frac{1}{n}u_n$ ، ثم بين أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\frac{1}{e-1}$.

④ احسب بدلالة n المجموع T_n حيث : $T_n=\frac{u_1}{v_1}+\frac{u_2}{v_2}+\frac{u_3}{v_3}+......+\frac{u_n}{v_n}$.

التمرين الثاني (الإحتمالات) : * 05 نقاط *

✍ زهرة نرد رباعية الوجوه مسجل على كل وجه أحد الأرقام : 4,3,2,1 .

هذه الزهرة مزيفة حيث : إحتمال ظهور الرقم 1 يساوي 0,4 و إحتمال ظهور الرقم 4 يساوي 0,1 .

① إذا قمنا برمي هذه الزهرة مرة واحدة ، فما هو إحتمال ظهور الرقم 2 أو 3 .

② إذا علمت أن إحتمال ظهور الرقم 2 يساوي ثلاث مرات إحتمال ظهور الرقم 3 . ما هو إحتمال ظهور الرقم 3 عندئذ ؟ .

③ نرمي الآن هذه الزهرة ثلاث مرات على التوالي و نهتم بظهور الرقم 1 :

أ ـ احسب إحتمال كل من الحدثين : A " ظهور الرقم 1 في الرمية الأولى " ، B " ظهور الرقم 1 في الرمية الثانية "

ب ـ علما أنه ظهر الرقم 1 في الرمية الأولى ، فما هو إحتمال أن يظهر الرقم 1 في الرمية الثانية ؟ .

جـ ـ ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بالرميات الثلاث عدد المرات التي يظهر فيها الرقم 1 .

☜ عين قيم X الممكنة ، ثم اكتب قانون الإحتمال لـ X و احسب أمله الرياضياتي .

☜ احسب : $P\left(10^{1-X^2}=0,001\right)$.

التمرين الثالث (الحساب – خاص بشعبتي ريا+تر) : * 04 نقاط *

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$: $9x+2y=42$ حيث x و y عددان صحيحان .

① جد الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E) حيث $x_0+y_0=21$ ، ثم حل المعادلة (E) .

② عيّن الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) بحيث يكون العدد x قاسما للعدد y .

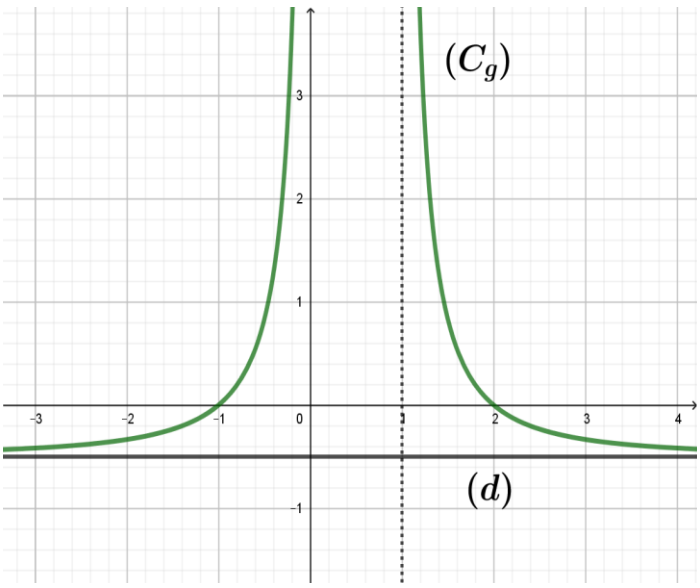
③ N عدد طبيعي يكتب $\overline{30\alpha\beta\lambda}$ في النظام ذي الأساس 5 ، و يكتب $\overline{55\alpha\beta}$ في النظام ذي الأساس 7 .

♦ جد الأعداد الطبيعية α ، β و λ ثم اكتب العدد N في النظام العشري .

④ أ ـ ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7 .

ب ـ عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق : $\begin{cases} n-4-(25)^n\equiv 0[7] \\ n^2\equiv 1[3] \end{cases}$.

التمرين الرابع (الدوال اللوغاريتمية) : * 07 نقاط *



I) الشكل المقابل يمثل (C_g) منحنى الدالة g المعرفة

على $]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$ بـ : $g(x)=\dfrac{ax^2+x+2}{2x(x+b)}$ حيث a و b

عددان حقيقيان ، (d) المستقيم ذا المعادلة : $y=-\dfrac{1}{2}$.

① بقراءة بيانية أجب عن الأسئلة التالية :

أ ـ عين نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها .

ب ـ عين كلا من : $g(-1)$ و $g(2)$.

ج ـ استنتج إشارة $g(x)$ على D_g .

② مستعينا بما سبق ، بين أن : $a=b=-1$.

③ تحقق أنه من أجل كل $x\in D_g$: $g(x)=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}$

④ احسب العدد الحقيقي I حيث : $I=\int_{\frac{3}{2}}^{2}g(x)dx$ و فسره هندسيا .

II) الدالة العددية f معرفة على $]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=-\dfrac{x}{2}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستو

المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

① أ ـ احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها .

ب ـ بين أن المنحنى (C_f) يقبل ثلاث مستقيمات مقاربة ، أحدها المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y=-\dfrac{1}{2}x$.

ج ـ ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

② بين أنه من أجل كل $x\in D_f$ فإن : $f'(x)=g(x)$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .

③ برهن أن النقطة $\Omega\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{4}\right)$ هي مركز التناظر للمنحنى (C_f) ، ثم أنشئ (Δ) و (C_f) .

④ أ ـ بين أنه لا يوجد مماس للمنحنى (C_f) يوازي (Δ) .

ب ـ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x)=-\dfrac{x}{2}+m$.

⑤ F الدالة العددية المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ : $F(x)=x\ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)-\ln(x-1)-\dfrac{x^2}{4}$.

أ ـ تحقق أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على $]1;+\infty[$.

ب ـ احسب A مساحة الحيز المستو المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتهما

$x=2$ ، $x=3$.

حل مقترح للموضوع التجريبي للتدرب رقم 07

حل التمرين الأول (المتتاليات) : * 04 نقاط *

لدينا : $\begin{cases} u_1 = e^{-1} \\ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{en} u_n \end{cases}$.

1) أ ـ نستعمل البرهان بالتراجع لإثبات أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $P(n): u_n > 0$.

ـ نتحقق من صحة $P(n)$ من أجل $n = 1$ ، أي : $u_1 > 0$ كون : $e^{-1} > 0$ (محققة) .

ـ نفرض صحة $P(n)$ من أجل n كيفي أي : $u_n > 0$ و نبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي : $u_{n+1} > 0$.

نعلم أن : $\dfrac{n+1}{en} > 0$ و لدينا فرضا : $u_n > 0$ أي أن : $\dfrac{n+1}{en} u_n > 0$ و بالتالي : $u_{n+1} > 0$.

و أخيرا حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $\boxed{u_n > 0}$.

ب ـ لدينا : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\frac{n+1}{en} u_n}{u_n} = \dfrac{n+1}{en}$.

أي : $\dfrac{n+1}{en} - 1 = \dfrac{n+1-en}{en} = \dfrac{n(1-e)+1}{en}$ ، لدينا من أجل $n \geq 1$ يكون : $n(1-e) \leq 1-e$ لأن : $(1-e<0)$.

و منه : $n(1-e)+1 \leq 2-e$ و كون : $2-e<0$ فإن : $n(1-e)+1<0$ و منه : $\dfrac{n(1-e)+1}{en} < 0$

و بالتالي : $\dfrac{n+1}{en} - 1 < 0$ أي أن : $\dfrac{n+1}{en} < 1$ ، إذن : $\boxed{\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1}$.

ـ بما أن : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ أي : $u_{n+1} < u_n$ و منه : $u_{n+1} - u_n < 0$ ، إذن : المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$.

♦ **المتتالية (u_n) متناقصة تماما و محدودة من الأسفل بـ 0 فهي متقاربة.**

2) لدينا : $v_n = \dfrac{1}{en} u_n$.

أ ـ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $v_{n+1} = \dfrac{1}{e(n+1)} u_{n+1}$ أي : $v_{n+1} = \dfrac{1}{e(n+1)} \times \dfrac{n+1}{en} u_n$ و منه : $v_{n+1} = \dfrac{1}{e} \times \dfrac{1}{en} u_n$ أي : $v_{n+1} = \dfrac{1}{e} . v_n$

إذن : المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\boxed{q = e^{-1}}$ و حدها الأول $\boxed{v_1 = e^{-2}}$.

ب ـ نجد : $v_n = e^{-2} \left(e^{-1}\right)^{n-1}$ و منه : $\boxed{v_n = e^{-n-1}}$.

ـ لدينا : $v_n = \dfrac{1}{en} u_n$ و منه : $u_n = en \times v_n$ أي : $\boxed{u_n = n.e^{-n}}$.

ـ نجد : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n.e^{-n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{e^n} = 0$.

3) أ ـ لدينا : $S_n = u_1 + \dfrac{1}{2} u_2 + \dfrac{1}{3} u_3 + ... + \dfrac{1}{n} u_n$.

نعلم أن : $v_n = \dfrac{1}{en} u_n$ و منه : $\boxed{\dfrac{1}{n} u_n = e.v_n = e^{-n}}$ أي : $S_n = e^{-1} + e^{-2} + e^{-3} + ... + e^{-n}$ (مجموع n حدا متتابعا من

متتالية هندسية أساسها e^{-1} و حدها الأول e^{-1}) و منه : $S_n = e^{-1} \times \dfrac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}} = e^{-1} \left(\dfrac{1-e^{-n}}{\frac{e-1}{e}} \right)$ و منه نجد :

. $\boxed{S_n=\frac{1}{e-1}\left(1-e^{-n}\right)}$

لدينا : $\lim_{n\to+\infty} S_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{e-1}\left(1-e^{-n}\right)=\frac{1}{e-1}$ ، لأن : $\lim_{n\to+\infty}e^{-n}=0$.

4) لدينا : $T_n=\frac{u_1}{v_1}+\frac{u_2}{v_2}+\frac{u_3}{v_3}+......+\frac{u_n}{v_n}$.

نعلم أن : $u_n=en\times v_n$ و منه : $\frac{u_n}{v_n}=en$ ، أي : $T_n=e+2e+3e+......+en$ (مجموع n حدا متتابعا من متتالية حسابية أساسها e و حدها الأول e) و منه : $T_n=\frac{n}{2}(e+en)=\frac{n\left[e(n+1)\right]}{2}=\boxed{\frac{e\left(n^2+n\right)}{2}}$.

حل التمرين الثاني (الإحتمالات) : * 05 نقاط *

1) عند القيام برمي زهر النرد مرة واحدة فإن إحتمال ظهور 2 أو 3 هو : $P=1-(0,4+0,1)$ و منه : $\boxed{P=0,5}$.

2) نفرض أن إحتمال ظهور 3 هو a ، إذن إحتمال ظهور 2 يساوي $3a$ و منه يتحقق : $a+3a=0,5$ أي : $4a=0,5$

و منه : $\boxed{a=0,125}$ هو إحتمال ظهور الرقم 3 ، إذن إحتمال ظهور الرقم 2 هو : $0,125\times3=\boxed{0,375}$.

إذن : يمكن كتابة قانون الاحتمال للتجربة العشوائية :

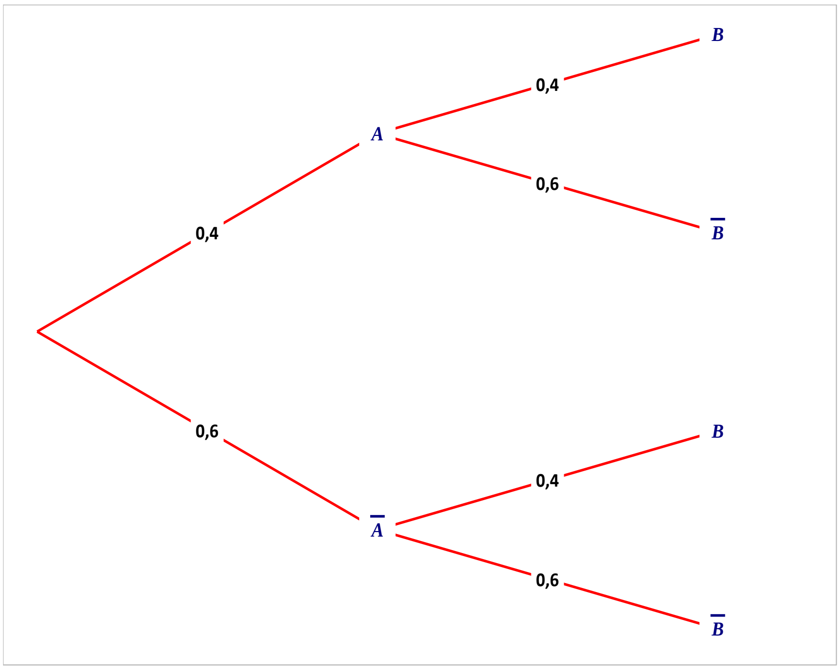
k	1	2	3	4
P_k	0,4	0,375	0,125	0,1

3) نرمي الزهر ثلاث مرات متتابعة :

أ- حساب إحتمال الحدثين A و B .

- لدينا : $\boxed{P(A)=0,4}$ و هو إحتمال ظهور الرقم 1 في الرمية الأولى .

♦ لتسهيل حساب $P(B)$ نستعين بشجرة الإحتمالات للرميتين الأولى و الثانية :



- لدينا : $P(B)=P(A\cap B)+P\left(\overline{A}\cap B\right)$

و منه : $P(B)=(0,4)^2+(0,6\times0,4)$

أي : $P(B)=0,16+0,24$

و منه : $\boxed{P(B)=0,4}$.

ب- لنحسب الإحتمال الشرطي $P_A(B)$:

لدينا : $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0,16}{0,4}$

و منه : $\boxed{P_A(B)=0,4}$.

جـ- قيم المتغير العشوائي X هي : 0 ، 1 ، 2 و 3 .

♦ قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X : (يمكن إتمام شجرة الإحتمالات للرمية الثالثة)

$P(X=0)=(0,6)^3=0,216$ ، $P(X=1)=3\left[0,4\times(0,6)^2\right]=0,432$

$P(X=2)=3\left[(0,4)^2\times0,6\right]=0,288$ ، $P(X=3)=(0,4)^3=0,064$.

♦ الأمل الرياضياتي : $E(X)=(0,432)+(2\times 0,288)+(3\times 0,064)$ و منه : $\boxed{E(X)=1,2}$.

♦ حساب $P\left(10^{1-X^2}=0,001\right)$.

لدينا : $10^{1-X^2}=0,001$ تكافئ $1-X^2=\log\left(10^{-3}\right)$ تكافئ : $1-X^2=-3$ تكافئ : $X^2=4$

و منه : $\boxed{X=2}$ أو $X=-2$ ، إذن : $P\left(10^{1-X^2}=0,001\right)=P(X=2)=0,288$.

حل التمرين الثالث (الحساب – خاص بشعبتي ريا+تر) : * 04 نقاط *

لدينا : $(E):9x+2y=42$.

1) الثنائية $(x_0;y_0)$ حل للمعادلة (E) معناه : $9x_0+2y_0=42$ أي لدينا : $\begin{cases}9x_0+2y_0=42 & ...(1)\\ x_0+y_0=21 & ...(2)\end{cases}$ نضرب (2) في -2

نجد : $\begin{cases}9x_0+2y_0=42 & ...(1)\\ -2x_0-2y_0=-42 & ...(2)\end{cases}$ بالجمع نجد : $7x_0=0$ و منه : $\boxed{x_0=0}$ ، إذن : $\boxed{y_0=21}$.

و منه الثنائية $(0;21)$ هي حل خاص لـ (E) .

ـ لنحل المعادلة (E) :

لدينا : $\begin{cases}9x_0+2y_0=42\\ 9(0)+2(21)=42\end{cases}$ بالطرح نجد : $9x+2(y-21)=0$ أي : $9x=-2(y-21)$ و منه : $9x=2(-y+21)$.

لدينا : $2/9x$ و 2 أولي مع 9 إذن حسب غوص فإن : $2/x$ و منه : $\boxed{x=2k}$ مع $(k\in\mathbb{Z})$.

بالتعويض نجد : $-y+21=9k$ أي : $\boxed{y=-9k+21}$ مع $(k\in\mathbb{Z})$. إذن : $S=\{(2k;-9k+21)\}\ ,k\in\mathbb{Z}$.

2) الثنائية $(x_0;y_0)$ حل للمعادلة (E) و x قاسم لـ y معناه : $\begin{cases}x=2k\\ y=-9k+21\end{cases}$ و x قاسم لـ y أي أن : $2k/(-9k+21)$

بهذا يكون : $2k/2k$ و $2k/(-9k+21)$ و منه : $2k/-18k$ و $2k/(-18k+42)$ و منه : $2k/(-18k+42)-(-18k)$

و بالتالي : $2k/42$ و منه : $\boxed{k/21}$ ، إذن : $k\in\{-1,-3,-7,-21,1,3,7,21\}$.

و منه الثنائيات هي : $(-2,30);(-6,75);(-14,84);(-42,210);(2,12);(6,-6);(14,-42);(42,-168)$.

3) لدينا : $N=\overline{30\alpha\beta\lambda}^{5}=\overline{55\alpha\beta}^{7}$ ، أي : $0\le\alpha<5$ ، $0\le\beta<5$ و $0\le\lambda<5$.

أي : $3\times 5^4+\alpha\times 5^2+\beta\times 5+\lambda=5\times 7^3+5\times 7^2+\alpha\times 7+\beta$ و منه : $1875+25\alpha+5\beta+\lambda=1960+7\alpha+\beta$

أي : $18\alpha+4\beta+\lambda=85$ و لكن نعلم : $0\le\lambda<5$ أي أن : $\lambda\in\{0,1,2,3,4\}$.

♦ من أجل $\lambda=0$ تصبح : $18\alpha+4\beta=85$ ، لا تقبل حلول كون $PGCD(18,4)$ ليس قاسما لـ 85 .

♦ من أجل $\lambda=1$ تصبح : $18\alpha+4\beta=84$ تكافئ $9\alpha+2\beta=42$ هذه المعادلة (E) و منه : $\begin{cases}\alpha=x=2k\\ \beta=y=-9k+21\end{cases}$

لكن : $0\le\alpha<5$ أي : $0\le 2k<5$ و منه : $0\le k<2,5$ إذن : $k\in\{0,1,2\}$ و من جهة أخرى لدينا : $0\le\beta<5$ أي :

$0\le -9k+21<5$ أي : $-21\le -9k<-15$ و منه : $1,66\le k<2,33$ إذن : $\boxed{k=2}$.

و بالتالي من أجل $k=2$ نجد : $\alpha=4$ ، $\beta=3$ و $\lambda=1$.

♦ من أجل $\lambda=2$ تصبح : $18\alpha+4\beta=83$ ، لا تقبل حلول كون $PGCD(18,4)$ ليس قاسما لـ 83 .

♦ من أجل $\lambda=3$ تصبح : $18\alpha+4\beta=82$ تكافئ $9\alpha+2\beta=41$ لكن نعلم $\beta\in\{0,1,2,3,4\}$.

أي : $\beta=0 \leftarrow \alpha=\frac{41}{9}$ (مرفوض) و $\beta=1 \leftarrow \alpha=\frac{39}{9}$ (مرفوض) و $\beta=2 \leftarrow \alpha=\frac{47}{9}$ (مرفوض)

و $\beta=3 \leftarrow \alpha=\frac{35}{9}$ (مرفوض) و $\beta=4 \leftarrow \alpha=\frac{33}{9}$ (مرفوض) .

♦ من أجل $\lambda=4$ تصبح : $18\alpha+4\beta=81$ ، لا تقبل حلول كون $PGCD(18,4)$ ليس قاسما لـ 81 .

و بالتالي نستنتج أنه توجد حالة واحدة تحقق هي : $\alpha=4$ ، $\beta=3$ و $\lambda=1$.

☜ لدينا : $N=\overline{30\alpha\beta\lambda}^{5}=3\times5^4+4\times5^2+3\times5+1$ و منه : $\boxed{N=1991}$ و هي كتابة N في النظام العشري .

4) أ ـ بواقي قسمة العدد 5^n على 7 .

نجد : $5^0\equiv1[7]$ ، $5^1\equiv5[7]$ ، $5^2\equiv4[7]$ ، $5^3\equiv6[7]$ ، $5^4\equiv2[7]$ ، $5^5\equiv3[7]$ و $5^6\equiv1[7]$

و نلخصها في الجدول التالي :

قيم العدد الطبيعي n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
بواقي قسمة العدد 5^n على 7	**1**	**5**	**4**	**6**	**2**	**3**

ب ـ لدينا : $\begin{cases} n-4-(25)^n\equiv0[7] \\ n^2\equiv1[3] \end{cases}$

♦ لدينا : $n^2\equiv1[3]$ إذا كان : $n=3k+1$ أو $n=3k+2$.

♦ لدينا : $n-4-25^n\equiv0[7]$ و منه : $n-4-5^{2n}\equiv0[7]$.

☜ في حالة $n=3k+1$ يكون : $n-4-5^{6k+2}\equiv0[7]$ أي : $n-4-4\equiv0[7]$ و منه : $n\equiv8[7]$ أي : $n\equiv1[7]$

إذن : $\boxed{n=7\alpha+1}$ مع $(\alpha\in\mathbb{N})$.

☜ في حالة $n=3k+2$ يكون : $n-4-5^{6k+4}\equiv0[7]$ أي : $n-4-2\equiv0[7]$ و منه : $n\equiv6[7]$

إذن : $\boxed{n=7\alpha+6}$ مع $(\alpha\in\mathbb{N})$.

حل التمرين الرابع (الدوال اللوغاريتمية) : * 07 نقاط *

I) لدينا : $g(x)=\dfrac{ax^2+x+2}{2x(x+b)}$.

1) بقراءة بيانية :

أ ـ تعيين النهايات للدالة g :

نجد : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$ ، المستقيم ذا المعادلة $y=-\dfrac{1}{2}$ مقارب لـ (C_g) .

نجد : $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} g(x)=+\infty$ ، المستقيم ذا المعادلة $x=0$ مقارب لـ (C_g) .

نجد : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1} g(x)=+\infty$ ، المستقيم ذا المعادلة $x=1$ مقارب لـ (C_g) .

ب ـ لدينا : $g(-1)=0$ و $g(2)=0$ ، (فاصلتي نقطتي تقاطع (C_g) مع حامل محور الفواصل) .

جـ ـ إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	-1		0		1		2	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$	‖	//////	‖	$+$	0	$-$

2) لدينا : $\lim\limits_{|x|\to+\infty} g(x)=-\dfrac{1}{2}$ أي : $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{ax^2}{2x^2}=\dfrac{a}{2}$ ، $\lim\limits_{|x|\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{ax^2+x+2}{2x(x+b)}=$ أي : $\dfrac{a}{2}=-\dfrac{1}{2}$ و منه : $\boxed{a=-1}$.

و من جهة أخرى لدينا : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1} g(x)=+\infty$ أي : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}\left(\dfrac{-x^2+x+2}{2x(x+b)}\right)=+\infty$ ، أي : $2(1+b)=0$ و منه : $\boxed{b=-1}$.

إذن : $g(x)=\dfrac{-x^2+x+2}{2x(x-1)}$.

3) لدينا من أجل كل $x\in D_g$: $\dfrac{-x^2+x+2}{2x(x-1)}=\dfrac{-x^2+x-2x+2+2x}{2x(x-1)}=\dfrac{-x(x-1)-2(x-1)+2x}{2x(x-1)}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}$

ومنه : $\boxed{-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}=g(x)}$.

4) لدينا : $I=\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{2}g(x)dx=\int_{\frac{3}{2}}^{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}\right)dx=\left[-\frac{1}{2}x-\ln x+\ln(x-1)\right]_{\frac{3}{2}}^{2}$ أي نجد :

$I=-1-\ln 2+\dfrac{3}{4}+\ln\dfrac{3}{2}-\ln\dfrac{1}{2}$ أي : $I=-\dfrac{1}{4}+\ln 3-\ln 2$ ومنه : $\boxed{I=-\dfrac{1}{4}+\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)}$.

♦ التفسير الهندسي : I هو مساحة الحيز المستو المحدد بـ (C_g) ، حامل محور الفواصل و المستقيمين : $x=\dfrac{3}{2}$ ، $x=2$.

II) لدينا : $f(x)=-\dfrac{x}{2}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$.

1) أ- حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{x}{2}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{x}{2}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=0$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}f(x)=+\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}f(x)=-\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=-\infty$.

ب- لدينا : $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}f(x)=+\infty$ ومنه : $x=0$ مقارب لـ (C_f) .

لدينا : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}f(x)=-\infty$ ومنه : $x=1$ مقارب لـ (C_f) .

لدينا : $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=0$ ومنه : المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-\dfrac{1}{2}x$ مقارب لـ (C_f) .

جـ- الوضع النسبي :

أي ندرس إشارة $\ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$ ، ومنه يكون : $\ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)>0$ إذا كان : $\dfrac{x-1}{x}>1$ أي : $-\dfrac{1}{x}>0$ أي : $x<0$.

إذن الوضعية تكون كما يلي :

في المجال $]-\infty;0[$ ، المنحنى (C_f) يقع فوق (Δ) وفي المجال $]1;+\infty[$ المنحنى (C_f) يقع تحت (Δ) .

2) من أجل كل $x\in D_g$: $f'(x)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x-1}{x}}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{x(x-1)}=\dfrac{-x(x-1)+2}{2x(x-1)}=\dfrac{-x^2+x+2}{2x(x-1)}$

ومنه : $\boxed{f'(x)=g(x)}$.

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	-1		0		1		2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	‖	//////	‖	$+$	0	$-$

إذن : الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-1,0[$ و $]1,2[$ ومتناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;-1[$ و $]2;+\infty[$.

جدول التغيرات :

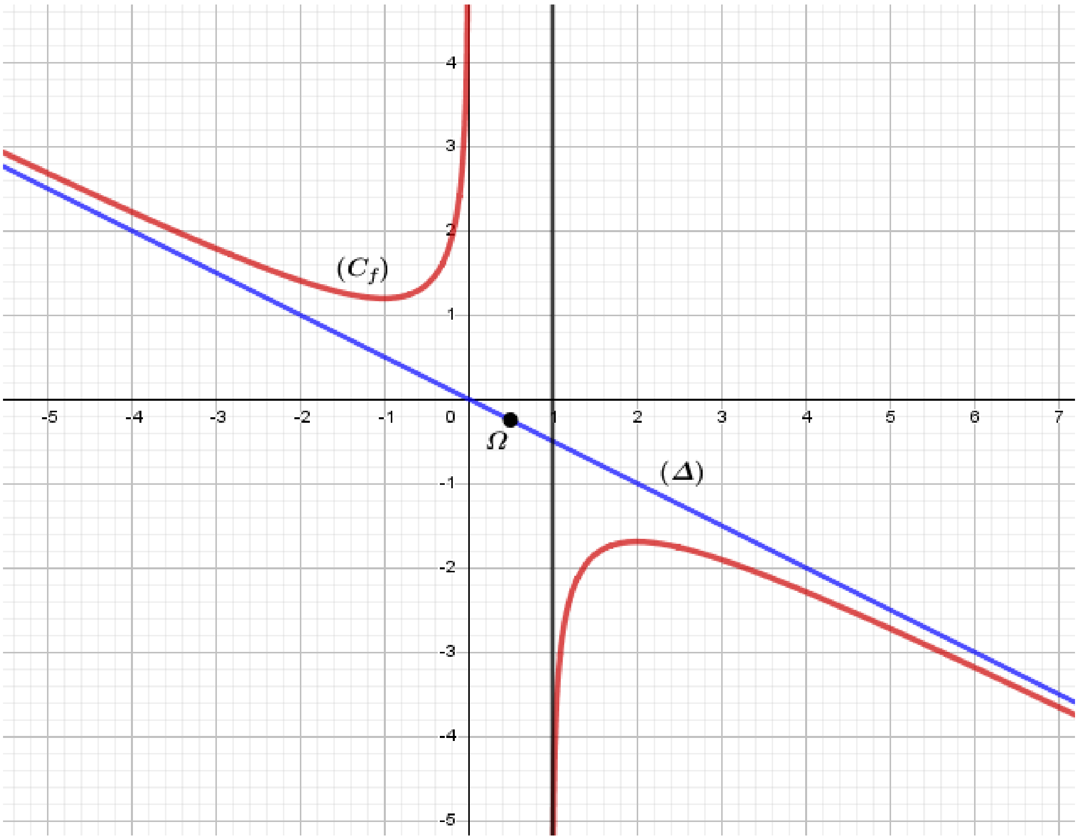
x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖		‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(-1)$	↗	$+\infty$ ‖		‖ $-\infty$	↗	$f(2)$	↘	$-\infty$

3) لدينا من أجل $x\in D_g$ فإن : $(1-x)\in D_g$ و من جهة أخرى يجب أن يتحقق : $f(1-x)+f(x)=-\frac{1}{2}$

أي : $f(1-x)+f(x)=\frac{x-1}{2}+\ln\left(\frac{-x}{1-x}\right)-\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)=-\frac{1}{2}+\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$

و منه نجد : $\boxed{f(1-x)+f(x)=-\frac{1}{2}}$ ، إذن : النقطة $\Omega\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ هي مركز التناظر للمنحنى (C_f)

♦ التمثيل :



4) أ- أي نحل المعادلة $f'(x)=-\frac{1}{2}$ أي : $g(x)=-\frac{1}{2}$ أي : $-\frac{1}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}=-\frac{1}{2}$ و منه : $-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}=0$

أي : $\frac{2-x+x}{x(x-1)}=0$ أي : $\frac{2}{x(x-1)}=0$ ، لكن : $\begin{cases}2\neq 0\\ x(x-1)\neq 0\end{cases}$ إذن : لا يوجد مماس لـ (C_f) يوازي (Δ) .

ب- لدينا : $f(x)=-\frac{x}{2}+m$ ، نحن أمام مناقشة مائلة و موازية لـ (Δ) و منه المناقشة تكون كما يلي :

- لما $m\in\mathbb{R}^*$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا .
- لما $m=0$ المعادلة لا تقبل حلول .

5) لدينا : $F(x)=x\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)-\ln(x-1)-\frac{x^2}{4}$.

أ ـ من أجل كل $x>1$: $F'(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)+\frac{1}{x(x-1)}\times x-\frac{1}{x-1}-\frac{x}{2}=\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-1}-\frac{x}{2}$

ومنه : $F'(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)-\frac{x}{2}$ أي : $F'(x)=f(x)$ ، إذن : الدالة F أصلية للدالة f على $]1;+\infty[$.

ب ـ أي : $A=\int_2^3 -f(x)dx$ أي : $A=-\left[F(x)\right]_2^3=-\left[3\ln\frac{2}{3}-\ln 2-\frac{9}{4}-\left(2\ln\frac{1}{2}-1\right)\right]=-\left(\ln\frac{8}{54}-\frac{9}{4}-\ln\frac{1}{4}+1\right)$

أي : $A=-\left(\ln\frac{16}{27}-\frac{5}{4}\right)$ و منه نجد : $\boxed{A=-\ln\left(\frac{16}{27}\right)+\frac{5}{4}\,u.a}$.

يوم 21 رمضان 1445 ..... 31 مارس 2024

ب.ع