الموضوع التجريبي رقم (1)

من إعداد : خالد بخاخشة

التمرين الأول:

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة مما يلي :

1) a عدد حقيقي موجب تماما . لدينا : $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=0$.

2) المستقيم ذو المعادلة $x=1$ محور تناظر لمنحنى الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=\frac{x^2-2x}{2x^2-4x+4}$.

3) المعادلة $e^x-10e^{-x}-3=0$ لا تقبل حلول في $\mathbb{R}$.

4) إذا كان A و B حدثان مستقلان و كان $P(A)=\frac{1}{7}$ و $P(B)=\frac{3}{5}$ ، فإن : $P(\overline{A}\cup B)=\frac{33}{35}$.

التمرين الثاني:

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0=\alpha$ (α عدد حقيقي) و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{45}{46}u_n+44$.

I) جد قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

II) نفرض أن : $\alpha=2023$.

نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=u_n-2024$.

1) بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

2) أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .

3) أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

4) أحسب $\lim_{x\to+\infty}u_n$.

5) نضع : من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n=\frac{u_0}{v_0}+\frac{u_1}{v_1}+...+\frac{u_n}{v_n}$.

أحسب S_n بدلالة n .

التمرين الثالث:

يحتوي كيس على خمس كريات ، منها ثلاث كريات حمراء تحمل الأرقام 2 ،1 ،2 و كريتان بيضاوان تحمل كل منهما الأرقام 1 ، 2 .

(كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس)

نسحب عشوائيا و في آن واحد كريتين من الكيس.

1) أ ـ أحسب إحتمال كل من الأحداث التالية :

A : "سحب كريتين من لونين مختلفين" ،

B : "سحب كريتين تحملان نفس الرقم"

C : "من بين الكريات المسحوبة توجد على الأقل كرية تحمل الرقم 1"

بـ ـ علما أن الكريتين المسحوبتين من لونين مختلفين ، ما إحتمال أن تحملا نفس الرقم ؟

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب العدد $2^{(a+b)}$ حيث a و b هما رقما الكريتين المسحوبتين.

عرّف قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي X و أحسب أمله الرياضياتي .

التمرين الرابع:

I) g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=x-\ln x$.

1) أحسب $\lim_{x\to+\infty}g(x)$ و $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}g(x)$.

2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة ، ثم شكّل جدول تغيّراتها .

3) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $g(x)\geq 1$.

II) f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x+\frac{2}{x}+2\frac{\ln x}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x)$. فسّر النتيجة الثانية بيانيا .

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]$. ماذا تستنتج ؟

جـ- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$.

2) أ- بيّن أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{g(x^2)}{x^2}$.

ب- استنتج إتجاه تغيّر الدالة f و شكّل جدول تغيّراتها .

جـ- بين أن للمنحنى (C_f) نقطة إنعطاف يُطلب تعيين إحداثييها .

3) أ- بيّن أنه يوجد مماس وحيد (T) للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم (Δ) ، ثم أكتب معادلة لـ (T) .

ب- أثبت أنه يوجد مماس وحيد (T') للمنحنى (C_f) يمر من مبدأ المعلم ، معادلته $y=(1+e)x$.

4) أ- بيّن أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 بحيث : $0.3<x_0<0.4$.

ب- أنشئ كلا من (Δ) ، (T) و (C_f) .

جـ- عيّن قيم الوسيط الحقيقي m التي تقبل من أجلها المعادلة $f(x)=x+m$ حلين مختلفين .

III) 1) جد دالة أصلية للدالة $x\mapsto\frac{\ln x}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$.

2) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $v_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\left[f(x)-x\right]dx$.

أ- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n>0$.

ب- أعط تفسيرا هندسيا للعدد v_0 ، ثم أحسب v_n بدلالة n .

جـ- أحسب بدلالة n المجموع : $S_n=v_0+v_1+....+v_n$.

أستاذ الرياضيات - خالد بخاخشة -

“ The only way to learn mathematics is to do mathematics ”

حل الموضوع التجريبي رقم (1)

حل مقترح للتمرين الأول:

الإجابة بصحيح أو خطأ مع التبرير :

1) خطأ .

التبرير:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}{(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}{2x}=\sqrt{a}$$

2) صحيح .

التبرير:

من أجل كل عدد حقيقي x ، $h(2-x)=\frac{(2-x)^2-2(2-x)}{2(2-x)^2-4(2-x)+4}=\frac{x^2-4x+4-4+2x}{2(x^2-4x+4)-8+4x+4}=\frac{x^2-2x}{2x^2-4x+4}=h(x)$

3) خطأ .

التبرير:

$e^x-10e^{-x}-3=0$ تكافئ $e^{2x}-3e^x-10=0$ تكافئ $(e^x-5)(e^x+2)=0$ تكافئ $x=\ln 5$.

4) صحيح .

التبرير:

نذكر أنه إذا كان A و B حدثان مستقلان فإن $\overline{A}$ و B مستقلان .

$$P(\overline{A}\cup B)=P(\overline{A})+P(B)-P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})+P(B)-P(\overline{A})\times P(B)$$

$$=P(\overline{A})+P(B)\left[1-P(\overline{A})\right]=P(\overline{A})+P(B)\times P(A)=\frac{33}{35}$$

حل مقترح للتمرين الثاني:

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0=\alpha$ (α عدد حقيقي) و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{45}{46}u_n+44$.

I) المتتالية (u_n) ثابتة معناه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=u_n=u_0=\alpha$.

أي تكون (u_n) ثابتة إذا كان : $\alpha=\frac{45}{46}\alpha+44$ أي $\alpha-\frac{45}{46}\alpha=44$ أي $\alpha=44\times 46=2024$.

II) نفرض أن : $\alpha=2023$.

نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=u_n-2024$.

1) تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1}=u_{n+1}-2024=\frac{45}{46}u_n+44-2024=\frac{45}{46}u_n-1980=\frac{45}{46}(u_n-2024)=\frac{45}{46}v_n$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{45}{46}$ و حدها الأول $v_0=u_0-2024=-1$.

2) كتابة عبارة v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=-\left(\frac{45}{46}\right)^n$

استنتاج u_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=v_n+2024=-\left(\frac{45}{46}\right)^n+2024$

3) دراسة إتجاه تغير المتتالية (u_n) :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1}-u_n=-\left(\frac{45}{46}\right)^{n+1}+2024+\left(\frac{45}{46}\right)^n-2024=-\left(\frac{45}{46}\right)^{n+1}+\left(\frac{45}{46}\right)^n=\left(\frac{45}{46}\right)^n\left(-\frac{45}{46}+1\right)=\frac{1}{46}\left(\frac{45}{46}\right)^n$$

و منه $u_{n+1}-u_n>0$ و بالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\left(\frac{45}{46}\right)^n+2024\right)=2024$ لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{45}{46}\right)^n=0$. (لاحظ أن $\frac{45}{46}<1$)

5) نضع : من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n=\frac{u_0}{v_0}+\frac{u_1}{v_1}+...+\frac{u_n}{v_n}$.

حساب S_n بدلالة n :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n، $\frac{u_n}{v_n}=1+\frac{2024}{v_n}$

و منه $S_n=(n+1)-2024\left(\frac{\left(\frac{46}{45}\right)^{n+1}-1}{\frac{46}{45}-1}\right)=(n+1)-2024\times 45\left(\left(\frac{46}{45}\right)^{n+1}-1\right)$

حل مقترح للتمرين الثالث:

عدد السحبات الممكنة : $C_5^2=10$.

1) أ ـ حساب إحتمالات الأحداث :

$P(A)=\frac{C_2^1\times C_3^1}{10}=\frac{6}{10}$ ، $P(B)=\frac{C_2^2+C_3^2}{10}=\frac{4}{10}$ و $P(C)=\frac{C_2^2+C_2^1\times C_3^1}{10}=\frac{7}{10}$.

ب ـ $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{C_1^1\times C_1^1+C_2^1\times C_1^1}{10}}{\frac{6}{10}}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{6}{10}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

2) قيم المتغيّر X هي : 16 ، 8 ، 4 .

قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي X :

$P(X=4)=\frac{C_2^2}{10}=\frac{1}{10}$ ، $P(X=8)=\frac{C_2^1\times C_3^1}{10}=\frac{6}{10}$ ، $P(X=16)=\frac{C_3^2}{10}=\frac{3}{10}$.

X_i	4	8	16
$P(X=X_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

حساب الأمل الرياضياتي : $E(X)=4\times\frac{1}{10}+8\times\frac{6}{10}+16\times\frac{3}{10}=\frac{100}{10}=10$.

حل مقترح للتمرين الرابع:

I) الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=x-\ln x$.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)\right]=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)=+\infty$. (نتذكر أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\ln x=-\infty$)

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و $g'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$.

جدول تغيّرات الدالة g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

3) لدينا : $g(1)=1$ قيمة حدية صغرى للدالة g و بالتالي : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $g(x)\geq 1$.

II) f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x+\dfrac{2}{x}+2\dfrac{\ln x}{x}$.

1) أ- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=-\infty$.

تفسير النتيجة الثانية بيانيا :

المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

ب- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2}{x}+2\dfrac{\ln x}{x}\right]=0$.

نستنتج أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

جـ- دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$.

لدينا : $f(x)-x=2\left(\dfrac{1+\ln x}{x}\right)$ و منه إشارة الفرق من إشارة $1+\ln x$.

- من أجل $x\in\left]0;e^{-1}\right]$ ، المنحنى (C_f) يقع أسفل المستقيم (Δ) .
- من أجل $x\in\left[e^{-1};+\infty\right[$ ، المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) .
- المنحنى (C_f) يقطع المستقيم (Δ) في النقطة $A\left(e^{-1};e^{-1}\right)$.

2) أ- تبيان أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x^2)}{x^2}$.

أ- الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و $f'(x)=1-\dfrac{2}{x^2}+2\left(\dfrac{1-\ln x}{x^2}\right)=\dfrac{x^2-2\ln x}{x^2}=\dfrac{x^2-\ln(x^2)}{x^2}=\dfrac{g(x^2)}{x^2}$.

بـ- لدينا : من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $g(x)\geq 1$ و منه من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $g(x^2)>0$ أي $f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	0 $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

جـ- تبيان أن للمنحنى (C_f) نقطة إنعطاف .

الدالة f' قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و $f''(x)=\dfrac{2x^3-2x-2x(x^2-2\ln x)}{x^4}=\dfrac{-2+4\ln x}{x^3}$.

إشارة $f''(x)$:

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

إذن النقطة $w(\sqrt{e};f(\sqrt{e}))$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f) .

3) أ- تبيان أنه يوجد مماس وحيد (T) للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم (Δ) :

لنحل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة : $f'(x)=1$ و هذا يكافئ $\dfrac{g(x^2)}{x^2}=1$ أي $-2\ln x=0$ و منه $x=1$.

إذن يوجد مماس وحيد (T) للمنحنى (C_f) في النقطة $D(1;3)$ و يوازي المستقيم (Δ) .

و معادلة لـ (T) من الشكل : $(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$ أي $(T): y=x+2$.

بـ- إثبات أنه يوجد مماس وحيد (T') للمنحنى (C_f) يمر من مبدأ المعلم ، معادلته $y=(1+e)x$.

ليكن $(T'): y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ مماس للمنحنى (C_f) .

(T') يشمل مبدأ المعلم معناه $f(x_0)=x_0f'(x_0)$ أي $\frac{x_0^2-2\ln x_0}{x_0}=x_0+\frac{2}{x_0}+\frac{2\ln x_0}{x_0}$ يكافئ $2+4\ln x_0=0$

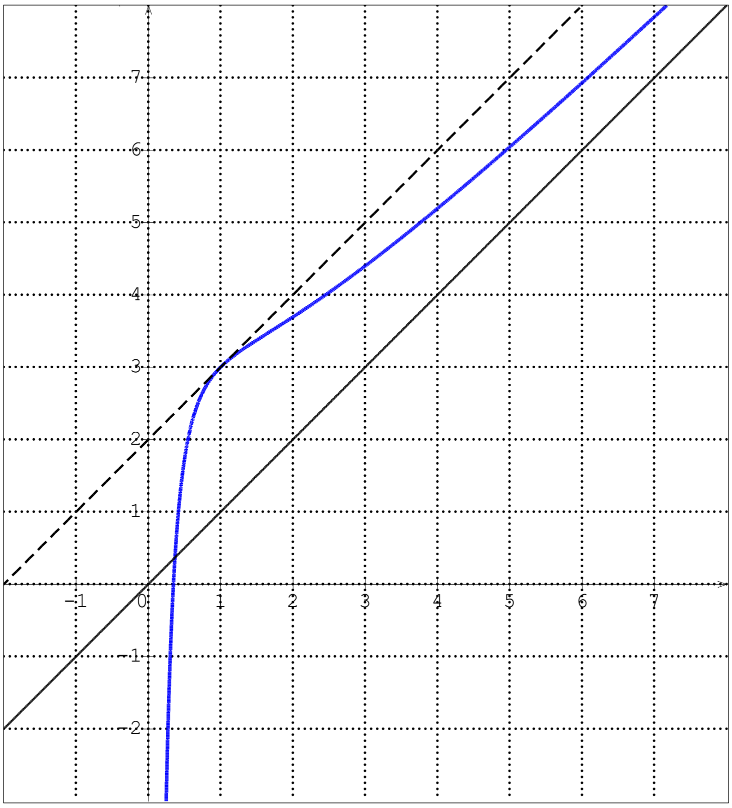
يكافئ $x_0=e^{-\frac{1}{2}}$ و بالتالي يوجد مماس وحيد للمنحنى (C_f) يشمل مبدأ المعلم.

معادلة لـ (T') : $(T'): y=f'\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)\left(x-e^{-\frac{1}{2}}\right)+f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)$ أي $(T'): y=(1+e)x$.

4) أـ تبيان أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 بحيث: $0.3<x_0<0.4$.

الدالة f مستمرة و متزايدة على المجال $]0;+\infty[$ و $\begin{cases} f(0.3)\approx -1.05 \\ f(0.4)\approx 0.81 \end{cases}$ أي $f(0.4)\times f(0.3)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]0;+\infty[$ حلا وحيدا x_0 بحيث $0.3<x_0<0.4$.

بـ ـ الرسم:



جـ ـ قيم الوسيط الحقيقي m التي تقبل من أجلها المعادلة $f(x)=x+m$ حلين مختلفين هي: $m\in]0;2[$.

III) 1) دالة أصلية للدالة $x\mapsto\frac{\ln x}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$ هي: $x\mapsto\frac{1}{2}(\ln x)^2$.

2) من أجل كل عدد طبيعي n، نضع: $v_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}[f(x)-x]dx$.

أـ تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n>0$.

لدينا: $v_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}[f(x)-x]dx=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\left[2\left(\frac{1+\ln x}{x}\right)\right]dx$ و من أجل كل $x\geq 1$، $\frac{1+\ln x}{x}>0$ و منه من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n>0$.

بـ ـ إعطاء تفسيرا هندسي للعدد v_0 :

لدينا: $v_0=\int_1^e[f(x)-x]dx=\int_1^e\left[2\left(\frac{1+\ln x}{x}\right)\right]dx$ و منه v_0 هو مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين الذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$.

حساب v_n بدلالة n :

$$v_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\left[f(x)-x\right]dx=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\left[2\left(\frac{1+\ln x}{x}\right)\right]dx=\left[2\ln x+(\ln x)^2\right]_{e^n}^{e^{n+1}}=2(n+1)+(n+1)^2-2n-n^2=2n+3$$

جـ- حساب، بدلالة n ، المجموع : $S_n=v_0+v_1+....+v_n=(n+1)\left(\frac{3+2n+3}{2}\right)=(n+1)(n+3)$.