| | | |
|---|---|---|
| ثانوية: ...... باتنة | **مذكرة سير حصة رقم 01.** | الأستاذ:بن حولة عثمــــان |
| ميدان التعلم: هندسة | | المــادة: رياضيــات |
| الوحدة التعلمية الجداء السلمي في المستوي | | المــدة: 02 ساعة |
| المحتوى المعرفي حساب الجداء السلمي لشعاعين | | المستوى 2 ع ت . |

| | |
|---|---|
| **الكفاءات القبلية:** -الحساب الشعاعي – مبرهنة فيثاغورث . المتطابقات الشهيرة . | **الكفاءات المستهدفة:-** حساب الجداء السلمي لشعاعين- العبارة التحليلية للجداء السلمي . |

**توجيهات و تعاليق من المنهاج:**

- مفاهيـــــم أولية حول الاشعة والربط بينهما .

| مراحل الحصة | سير الحصـــة | المـدة |
|---|---|---|

**مرحلة الإنطلاق ( الإستعداد )**

**مناقشة النشاط رقم01 ص 280 :**

1. إثبات أن: $BC^2 = HB^2 + HC^2$

لدينا HBC مثلث قائم في H ومنه بتطبيق نظرية فيثاغورس نجد: $BC^2 = HB^2 + HC^2$.

إثبات أن: $AC^2 = HA^2 + HC^2$

لدينا ACH مثلث قائم في H ومنه بتطبيق نظرية فيثاغورس نجد: $AC^2 = HA^2 + HC^2$

استنتاج أن: $W = \frac{1}{2}(A^2 + HA^2 - HB^2)$

بتعويض قيمة $BC^2$ و $AC^2$ في $W$ نجد: $W = \frac{1}{2}(AB^2 + HA^2 + HC^2 - HB^2 - HC^2)$

$$W = \frac{1}{2}(AB^2 + HA^2 - HB^2)\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

20 دقيقة

2. بكتابة $HB = AB - HA$ إثبات أن: $W = AB \times AH$

بتعويض $HB$ في (1) نجد: $W = \frac{1}{2}(AB^2 + HA^2 - (AB - HA)^2)$

$$= \frac{1}{2}(AB^2 + HA^2 - AB^2 - HA^2 + 2AB \times HA)$$

$$W = \frac{1}{2} \times 2AB \times HA$$

$$W = AB \times HA$$

15 دقيقة

إثبات أن: $W = AB \times AC \times \cos B\hat{A}C$

لدينا $\cos B\hat{A}C = \frac{AH}{AC}$ ومنه $AH = AC \cos B\hat{A}C$

$$W = AB.HA$$

$$W = AB.AC \cos B\hat{A}C$$

**مرحلة التكوين ( البناء )**

25 دقيقة

3. لدينا $\vec{U} = \vec{B}$ ومنه $AB = \|\vec{U}\|$ شعاعان متساويان لهما نفس الطويلة $AB^2 = \|\vec{U}\|^2$

$\vec{V} = \vec{AC}$ ومنه $\|\vec{AC}\| = AC = \|\vec{V}\|$ ومنه $AC^2 = \|\vec{V}\|^2$.

لدينا $W = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$ ومنه $W = \frac{1}{2}(\|\vec{U}\|^2 + \|\vec{V}\|^2 - \|\vec{BC}\|^2)$

**مرحلة الإستثمار ( التحصيل)**

ومنه لدينا علاقة شال $\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC}$

$$= \vec{AC} - \vec{AB}$$

$$\|\vec{BC}\| = \|\vec{AC} - \vec{AB}\|$$

شعاعان متعاكسان لهما نفس الطويلة $= \|-(\vec{AB} - \vec{AC})\|$

$$= \|-\vec{AC} + \vec{AB}\|$$

$$= \|\vec{AB} - \vec{AC}\|$$

$$BC^2 = \|\vec{AB} - \vec{AC}\|^2$$

$$BC^2 = \|\vec{U} - \vec{V}\|^2$$

إذن $W = \frac{1}{2}(\|\vec{U}\|^2 + \|\vec{V}\|^2 - \|\vec{U} - \vec{V}\|^2)$

**4. إثبات أن: $W = xx' + yy'$**

لدينا $\|\vec{U}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ومنه $\|\vec{U}\|^2 = x^2 + y^2$

$\|\vec{V}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ومنه $\|\vec{V}\|^2 = x'^2 + y'^2$

ضرب شعاع بسلمية $-\vec{V}\binom{-x'}{-y'}$ ، جمع شعاعين $\vec{U} - \vec{V}\binom{x - x'}{y - y'}$

$$\|\vec{U} - \vec{V}\| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$

$$\|\vec{U} - \vec{V}\|^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$$

$$W = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 - (x - x')^2 - (y - y')^2)$$

نتا $= \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 - x^2 - x'^2 + 2xx' - y^2 - y'^2 + 2yy')$

$$= \frac{1}{2}(2xx' + 2yy')$$

$$W = xx' + yy'$$

يسمى العدد $W$ الجداء السلمي للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

## الجداء السلمي

### 1. الجداء السلمي لشعاعين:

**تعريف:**

- ليكن $\vec{U}$ و $\vec{V}$ شعاعين غير معدومين من المستوي $(\pi)$.

الجداء السلمي للشعاعين $\vec{U}$ و $\vec{V}$ هو العدد الحقيقي الذي نرمز له $\vec{U}.\vec{V}$ والمعرف بـ:

$\vec{U}.\vec{V} = \|\vec{U}\|.\|\vec{V}\| \cos(\vec{U}.\vec{V})$ يقرأ " $\vec{U}.\vec{V}$ " $\vec{U}$ سلمي $\vec{V}$.

**ملاحظة :** إذا كان $\vec{U} = \vec{0}$ أو $\vec{V} = \vec{0}$ فإن $\vec{U}.\vec{V} = 0$.

**حالات خاصة:**

1. إذا كان $\vec{U}$ و $\vec{V}$ مرتبطين خطيا وكان لهما نفس الاتجاه فإن: $\vec{U}.\vec{V} = \|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|$
2. إذا كان $\vec{U}$ و $\vec{V}$ مرتبطين خطيا وكانا متعاكسين في الاتجاه فإن: $\vec{U}.\vec{V} = -\|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|$
3. نرمز إلى الجداء السلمي $\vec{U}.\vec{U}$ بـ $\vec{U}^2$ و نسميه المربع السلمي للشعاع $\vec{U}$ حيث: $\vec{U}^2 = \|\vec{U}\|^2$

و بصفة خاصة إذا كانت $A$ و $B$ نقطتين فإن: $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = AB^2$

**تمرين :**

$ABC$ مثلث متقايس الأضلاع طول ضلعه هو $2$ سم

- أحسب الجدائين السلميين : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}$

أحسب الجدائين السلميين $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ و $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HB}$ حيث $H$ المسقط العمودي لـ: $C$ على $\overrightarrow{AB}$ : الحل

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2\times 2\cos 60° = 2$ ، $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = 2\times 2\cos 0° = 4$
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = 2\times 1\cos 0° = 2$ ، $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = 2\times 1\cos 180° = -2$.

**حالات خاصة :**

- إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا و كان لهما نفس الاتجاه فإن $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ لأن $\cos(\vec{u},\vec{v}) = 1$
- إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا و كانا اتجاهاهما متعاكسين فإن $\vec{u}\cdot\vec{v} = -\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$

لأن $\cos(\vec{u},\vec{v}) = -1$

- نرمز إلى الجداء السلمي $\vec{u}\cdot\vec{u}$ بـِ $\vec{u}^2$ و نسميه المربع السلمي للشعاع $\vec{u}$

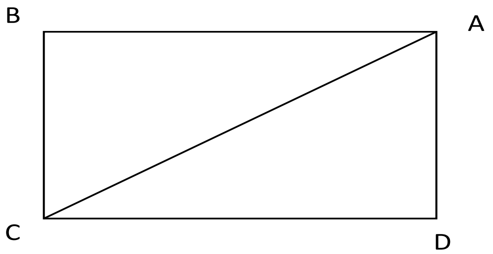
و هكذا $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ و بصفة خاصة إذا كانت $A$ و $B$ نقطتين فإن $\overrightarrow{AB}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$.

**مبرهنة (1):**

الجداء السلمي للشعاعين الغير معدومين $\vec{U}$ و $\vec{V}$ هو العدد الحقيقي $\vec{U}.\vec{V}$حيث

$$\vec{U}.\vec{V}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{U}\|^2+\|\vec{V}\|^2-\|\vec{U}-\vec{V}\|^2\right)$$

**مثال:** ABCD مستطيل أبعاده AB=4، AD=3



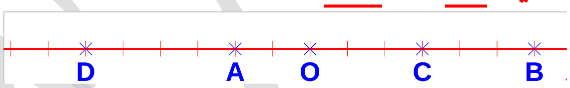

لنحسب $\overrightarrow{AB}\ .\ \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}=AB.AC\cos\,(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})$$
$$=AB.AC.\frac{AB}{AC}$$
$$=AB^2$$
$$=4^2=16$$
$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}=16.$$

**ملاحظة :**

عند حساب جداء سلمي يمكن كتابة أحد الأشعة على شكل مجموع شعاعين أو ثلاثة أشعة نحصل على إرتباط خطي أو تعامد $\overrightarrow{AB}^2=\|\overrightarrow{AB}\|^2=AB^2$

**تمرين 28 ص 299 :**




$(O;I)$ محور للمستقيم $(d)$ حيث $OI=1$

احسب الجداءات السلمية التالية

$\overline{AB}.\overline{AC}$ ، $\overline{AD}.\overline{CB}$ ، $\overline{AB}.\overline{CD}$

$\overline{DC}.\overline{AD}$ ، $\overline{OD}.\overline{OI}$ ، $\overline{IA}.\overline{DB}$

## 2. العبارة التحليلية للجداء السلمي :

**مبرهنة (2):** المستوي منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

إذا كان $\vec{U}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ و $\vec{V}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ فان $\vec{U}.\vec{V}=xx'+yy'$

**مثال:** $(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم متعامد ومتجانس حيث $\|\vec{I}\|=\|\vec{J}\|=1$

إذا كان $\vec{U}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ و $\vec{V}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ و فإن : $\vec{U}.\vec{V}=(-3)\times1+2\times5=7$ .

**لأشعة المتعامدة:**

**تعريف:** القول أن الشعاعين غير المعدومين $\vec{U}$ و $\vec{V}$ متعامدان يعني انه إذا كان $\vec{U}=\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}=\vec{V}$ يكون المستقيمان(AB) و(AC) متعامدين.

**ملاحظة:** نصطلح على أن الشعاع المعدوم عمودي على كل شعاع .

**مبرهنة(3):**

$\vec{U}$ و $\vec{V}$ شعاعان غير معدومين من المستوي. يكون $\vec{U}$ و $\vec{V}$ متعامدان إذا وفقط إذا كان $\vec{V}.\vec{U}=0$

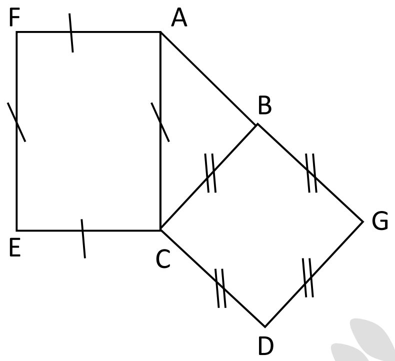
**الإثبات:** نعلم أن: $\vec{U}.\vec{V}=\|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|\cos(\vec{U}.\vec{V})$ و بما أن $\|\vec{U}\|\neq 0$ و $\|\vec{V}\|\neq 0$ فإن

$\cos(\vec{U}.\vec{V})=0$

ومنه $(\vec{U}.\vec{V})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ومنه $\vec{U}$ و $\vec{V}$ متعامدان.

**مثال:** لدينا $\vec{U}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ و $\vec{V}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.

$\vec{U}.\vec{V}=0$ ومنه $\vec{U}$ و $\vec{V}$ متعامدان.




**حل تمرين 57 ص 301:**

1. إثبات أن $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CE}$

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=CA.CB\cos A\hat{C}B$$
$$=CA.CB\cos B\hat{C}A$$
$$=CE.CD\cos(2\pi-(E\hat{C}D+A\hat{C}E+D\hat{C}B))$$
$$=CE.CD\cos\left(2\pi-\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+E\hat{C}D\right)\right)$$
$$=CE.CD\cos(\pi+E\hat{C}D)$$
$$=-CD.CE\ \cos E\hat{C}D$$
$$=-CD.CE\cos D\hat{C}E=-\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CE}$$

2. حساب $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{AD}$

**لدينا:** $\overrightarrow{AF}\perp\overrightarrow{AC}$ ومنه $\vec{A}.\overrightarrow{AC}=0$

$\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{CD}$ ومنه $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD}=0$

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CE}$ ومنه $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CE}=0$

$$\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD}$$
$$=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}+0+\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CE}+0$$
$$=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CE}=0$$

**ومنه** $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{AD}=0$ إذن: $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BE}$ متعامدين

3. **المقارنة بين:** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{CB}$

$$\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{CB}=CE.CB\cos E\hat{C}B$$
$$=CA.CD\cos\left(\frac{\pi}{2}+A\hat{C}B\right)$$
$$=CA.CD\cos A\hat{C}D$$
$$=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}$$

**إثبات أن** $BE=DA$

**لدينا** $\vec{C}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}$

$$\frac{1}{2}\left(\mathrm{CE}^2+\mathrm{CB}^2-\|\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CB}\|^2\right)=\frac{1}{2}(\mathrm{CA}^2+\mathrm{CD}^2-\|\overrightarrow{\mathrm{CA}}-\overrightarrow{\mathrm{CD}}\|^2)$$
$$\|\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CB}\|=\|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CD}\|$$
$$\|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}\|=\|\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}\|$$
$$.\ BE=DA.$$

**المراجع:** الكتاب المدرسي ،المنهاج ،لتوزيع السنوي ، التدرج ، الوثيقة المرفقة.

ثانوية: ...باتنة .

ميدان التعلم: هندسة

الوحدة التعلمية **الجداء السلمي في المستوي**

المحتوى المعرفي خواص الجداء السلمي:

**مذكرة سير حصة رقم 02.**

الأستاذ:بن حولة عثمـــــان

المـــادة: رياضيـات

المـدة: 02 ساعة

المستوى 2 ع ت .

| الكفاءات القبلية | الكفاءات المستهدفة |
|---|---|
| المتطابقات الشهيرة – العبارة التحليلية – الاشعة . | استعمال خواص الجداء السلمي . |

**توجيهات و تعاليق من المنهاج:**

- برهان بعض خواص الجداء السلمي .

| مراحل الحصة | سير الحصـــة | المـدة |
|---|---|---|

**مرحلة الإنطلاق ( الإستعداد )**

**نشاط مقترح :**

$(C)$ نعتبر في معلم متعامد و متجانس الأشعة $\vec{U}(x;y)$، $\vec{V}(x';y')$ و $\vec{W}(x'',y'')$، $\lambda$ عدد حقيقي غير معدوم.

احسب:

1. $\vec{U}.\vec{V}$ ، $\vec{V}.\vec{U}$
2. $\vec{U}.(\vec{V}+\vec{W})$ و $\vec{U}.\vec{V}+\vec{U}.\vec{W}$
3. $(\lambda\vec{U}).\vec{V}$ ، $\lambda(\vec{U}.\vec{V})$

ماذا تستنتج؟

20 دقيقة

**مرحلة التكوين ( البناء )**

**مناقشة النشاط :**

لدينا: $\vec{U}(x;y)$، $\vec{V}(x';y')$ و $\vec{W}(x'',y'')$:

1. $\vec{U}.\vec{V} = xx'+yy'$

$\vec{V}.\vec{U} = x'x+y'y = xx'+yy'$

ومنه: $\vec{U}.\vec{V} = \vec{V}.\vec{U}$

15 دقيقة

2. لدينا: $(\vec{V}+\vec{W}) = (x'+x'';y'+y'')$ ومنه:

- $\vec{U}.(\vec{V}+\vec{W}) = x(x'+x'')+y(y'+y'')$
$= xx'+xx''+yy'+yy''$
- $\vec{U}.\vec{V}+\vec{U}.\vec{W} = xx'+xx''+yy'+yy''$

ومنه: $\vec{U}.(\vec{V}+\vec{W}) = \vec{U}.\vec{V}+\vec{U}.\vec{W}$

25 دقيقة

**مرحلة الإستثمار ( التحصيل)**

3. لدينا: $\lambda\vec{U} = (\lambda x;\lambda y)$ ومنه:

$(\lambda\vec{U}).\vec{V} = \lambda xx'+\lambda yy'$ و $\lambda(\vec{U}.\vec{V}) = \lambda xx'+\lambda yy'$

ومنه: $(\lambda\vec{U}).\vec{V} = \lambda(\vec{U}.\vec{V})$.

خواص:

من أجل كل أشعة غير معدومة من المستوي $\vec{U}$ ، $\vec{V}$ و $\vec{W}$، و من أجل كل عدد حقيقي $\lambda$ لدينا :

1- $\vec{V}.\vec{U} = \vec{U}.\vec{V}$.

2- $\vec{U}.\vec{V} + \vec{U}.\vec{W} = \vec{U}.(\vec{V} + \vec{W})$.

3- $\lambda(\vec{U}.\vec{V}) = (\lambda\vec{U}).\vec{V}$.

مثال :

$$2\vec{U}.\left(-3\vec{V} + \frac{1}{2}\vec{W}\right) = 2\vec{U}.\left(-3\vec{V}\right) + 2\vec{U}\left(\frac{1}{2}\vec{W}\right) = -6\vec{U}.\vec{V} + \vec{U}.\vec{W}$$

الجداء السلمي والمتطابقات الشهيرة :

تمرين :

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين من المستوي ، أحسب كلا من الجداءات السلمية التالية :

$(\vec{u}+\vec{v})^2$ , $(\vec{u}-\vec{v})^2$ , $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})$

الحل :

لدينا : $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 = \left(\vec{u}+\vec{v}\right)\left(\vec{u}+\vec{v}\right) = \vec{u}^2 + \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$

لدينا : $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2 = \left(\vec{u}-\vec{v}\right)\left(\vec{u}-\vec{v}\right) = \vec{u}^2 - \vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$

لدينا : $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\left(\vec{u}-\vec{v}\right) = \vec{u}^2 - \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u} - \vec{v}^2 = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

المتطابقات الشهيرة :

$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$ أو $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \left\|\vec{v}\right\|^2$

$\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$ أو $\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \left\|\vec{v}\right\|^2$

$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\left(\vec{u}-\vec{v}\right) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$ أو $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\left(\vec{u}-\vec{v}\right) = \left\|\vec{u}\right\|^2 - \left\|\vec{v}\right\|^2$

تطبيق 1:

$ABCD$ مربع طول ضلعه $a$، $I$ و $J$ هما النقطتان المعرفتان بـ : $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$

1. احسب الجداءات السلمية التالية : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{CJ}$ ، $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CJ}$

2. بكتابة $\vec{A} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}$ ، $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ}$

اثبت أن $\vec{A}.\overrightarrow{BJ} = 0$ ، ماذا تستنتج؟

تطبيق 2 : $\vec{U}$ و $\vec{V}$ شعاعان من المستوي :

بين أن :

1. $\left\|\vec{U} + \vec{V}\right\|^2 - \left\|\vec{U} - \vec{V}\right\|^2 = 4\vec{U}.\vec{V}$ .

2. $\|\vec{U}+\vec{V}\|^2+\|\vec{U}-\vec{V}\|^2=2\left(\|\vec{U}\|^2+\|\vec{V}\|^2\right)$ .

$$(\vec{U}+\vec{V})(\vec{U}-\vec{V})=\|\vec{U}\|^2-\|\vec{V}\|^2$$

## حل التطبيق 01:

**1.** حساب الجداءات السلمية:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=AB.BC.\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})=a.a\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{CJ}=BI.CJ.\cos(\overrightarrow{BI},\overrightarrow{CJ})=a.a\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BC}=BI.BC.\cos(\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BC})=a^2.\cos(0)=a^2$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CJ}=AB.CJ.\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CJ})=a^2.\cos(\pi)=-a^2$$

**2.** اثبات أن $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BJ}=0$:

لدينا: $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BJ}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}).(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CJ})=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{CJ}$

$$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BJ}=0-a^2+0+a^2=0$$

نستنتج أن الشعاعين: $\overrightarrow{AI}$ و $\vec{B}$ متعامدان.

**تمرين :**

$ABC$ مثلث متقايس الأضلاع حيث : $AB=AC=BC=3$

ولتكن النقط : $A',B',C'$ منتصفات القطع المستقيمة : $[BC],[AC],[AB]$ على الترتيب

أحسب الجداءات السلمية التالية : $\overrightarrow{CC'}.\overrightarrow{AB}$ , $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{AB}$ , $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}$ , $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

ثانوية: ........باتنة .

ميدان التعلم: هندسة

الوحدة التعلمية الجداء السلمي في المستوي

المحتوى المعرفي الجداء السلمي و الإسقاط العمودي

مذكرة سير حصة رقم 03.

الأستاذ:بن حولة عثمـــان

المـــادة: رياضيـات

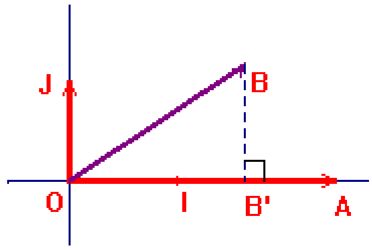
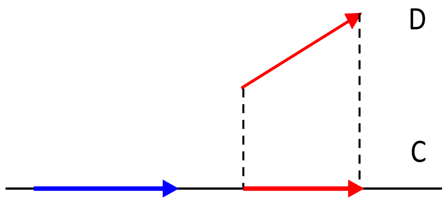
المـدة: 02 ساعة

المستوى 2 ع ت .

الكفاءات القبلية: خواص الجداء السلمي – الجداء السلمي لشعاعين .

الكفاءات المستهدفة:- استعمال خواص الجداء السلمي لاثبات علاقة تتعلق بالتعامد . الجداء السلمي و المسقط العمودي لشعاع.

توجيهات و تعاليق من المنهاج: استعمال خواص الجداء السلمي لاثبات علاقة تتعلق بالتعامد .

| مراحل الحصة | سير الحصـــة | المـدة |
|---|---|---|
| مرحلة الإنطلاق ( الإستعداد ) | **نشاط مقترح :**<br>نزود المستوي بمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ بحيث يكون الشعاعان $\vec{i}$ و $\vec{u}$ مرتبطين خطيا و لهما نفس الإتجاه . نضع $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ ، و لتكن $B'$ المسقط العمودي لـ $B$ على $(OA)$<br>كما في الشكل :<br><br><br>أ) أحسب $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ ثم $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB'}$. ماذا تستنتج ؟ | 20 دقيقة |
| | **مناقشة النشاط :**<br>لدينا: $O(0;0)$ ، $A(x_A;0)$ ، $B(x_B;y_B)$ و $B'(x_B;0)$ .<br>و منه $\overrightarrow{OA}(x_A;0)$ ، $\overrightarrow{OB}(x_B;y_B)$ و $\overrightarrow{OB'}(x_B;0)$ .<br>لدينا: $\begin{cases}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_Ax_B+0\times y_B=x_Ax_B\\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB'}=x_Ax_B+0\times 0=x_Ax_B\end{cases}$ و منه $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB'}$<br>أي: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{v'}$ | 15 دقيقة |
| مرحلة التكوين ( البناء ) | **الجداء السلمي و الإسقاط العمودي :**<br>**المسقط العمودي لشعاع على محور أو شعاع :**<br><br><br>**تعريف:** $\vec{v}$ شعاع حيث $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$. $C'$ و $D'$ المسقطان العموديان على الترتيب للنقطتين $C$ و $D$ على محور $(O;\vec{u})$. يسمى الشعاع $\vec{v'}$ ، المعرف بـ $\vec{v'}=\overrightarrow{C'D'}$ ، المسقط العمودي للشعاع $\vec{v}$ على المحور $(O;\vec{u})$ ( أو على الشعاع $\vec{u}$ ). | 25 دقيقة |
| مرحلة الإستثمار ( التحصيل ) | **الجداء السلمي والمسقط العمودي لشعاع :**<br>**مبرهنة:**<br>إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين حيث $\vec{u}\neq\vec{0}$ و كان $\vec{v'}$ المسقط العمودي للشعاع $\vec{v}$ على $\vec{u}$ فإن:<br>$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{v'}$<br>**حالات خاصة:**<br>• إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطيا و من نفس الاتجاه يكون: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=AB\times CD$<br>• إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطيا و كانا اتجاهاهما متعاكسين يكون:<br>$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=-AB\times CD$ | |

## الأشعة المتعامدة:

**تعريف:** القول أن الشعاعين غير المعدومين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان يعني أنه إذا كان:
$\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$ يكون المستقيمان $(AB)$ و $(AC)$ متعامدين.

**ملاحظة:** نصطلح على أن الشعاع المعدوم عمودي على كل الأشعة.

**مبرهنة:**
القول أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان يعني أن $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

**التقويم : مناقشة التمرين 54 ص 301:**

1) حساب الجداءات السلمية :

أولا لنحسب $IJ$:

المثلث $IJA$ قائم في $J$ وحسب نظرية فيثاغورس $AI^2=AJ^2+IJ^2$ ومنه $IJ=2\sqrt{3}$

$$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IJ}^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2=12$$

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AK}=AD\times AK=AD\times JI=4\times 2\sqrt{3}=8\sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AK}\times\left(-\overrightarrow{AD}\right)=-8\sqrt{3}$$

2) أ - حساب الجداءات السلمية :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AJ}=AB\times AJ=8$$

$$\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DK}=DK\times DA=4\left(4-2\sqrt{3}\right)=16-8\sqrt{3}$$

ب - حساب $DI$ :

المثلث $DKI$ قائم في $K$ وحسب نظرية فيثاغورس

$DI^2=DK^2+KI^2$ ومنه : $DI^2=\left(4-2\sqrt{3}\right)^2+2^2=32-16\sqrt{3}=16\left(2-\sqrt{3}\right)$ ومنه :

$DI=4\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

الإستنتاج :

$$\cos 15^0=\frac{KI}{DI}=\frac{2}{4\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

و

$$\cos 75^0=\frac{DK}{DI}=\frac{4-2\sqrt{3}}{4\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

**تطبيق 1:** $ABC$ مثلث قائم في $A$ ،$A'$ نقطة من $[AB]$ ، المستقيم المار من $A'$ و الموازي للمستقيم $(AC)$ يقطع $(BC)$ في النقطة $B'$

قارن بين العددين $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB'}$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{A'C}$

**تطبيق 2:** $ABC$ مثلث متساوي الساقين حيث $AB=AC=4$ و $BC=5$ ولتكن $H$ منتصف القطعة $[BC]$.

1. احسب الجداءات السلمية التالية : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ ، $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ حيث $H$ هي المسقط العمودي للنقطة $A$ على $(B)$ .
2. لتكن $K$ المسقط العمودي للنقطة $B$ على $(AC)$ ، احسب المسافة $CK$.

**تمرين منزلي :** التمرين 57 ص 301.

**المراجع:** الكتاب المدرسي ،المنهاج ،لتوزيع السنوي ، التدرج ، الوثيقة المرفقة.

| | | |
|---|---|---|
| ثانوية: ........باتنة | مذكرة سير حصة رقم 04. | الأستاذ:بن حولة عثمـــــان |
| ميدان التعلم: هندسة | | المـــادة: رياضيـــات |
| الوحدة التعلمية الجداء السلمي في المستوي | | المـــدة: 02 ساعة |
| 1- المحتوى المعرفي _ تطبيقات الجداء السلمي(معادلة المستقيم) | | المستوى 2 ع ت . |

| | |
|---|---|
| **الكفاءات القبلية:** المعادلة الديكارتية لمستقيم، شعاع توجيه مستقيم، العبارة التحليلية للجداء السلمي | **الكفاءات المستهدفة:-** كتابة معادلة مستقيم علم شعاع ناظمي له و نقطة منه بإستعمال الجداء السلمي. |

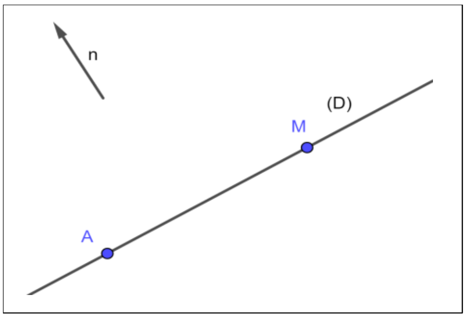
**توجيهات و تعاليق من المنهاج:**

- الربط بين معادلة مستقيم علم شعاع ناظمي له و نقطة منه بإستعمال الجداء السلمي.

| مراحل الحصة | سير الحصــــة | المـــدة |
|---|---|---|
| مرحلة الإنطلاق ( الإستعداد ) | **التهيئة النفسية:**<br>نشــاط<br>في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ نعتبر المستقيم $(\Delta)$ الذي يشمل النقطتين $A(3;1)$ و $B(2;4)$.<br>1) ماذا يمثل الشعاع $\overrightarrow{AB}$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$ ؟<br>2) ليكن الشعاع $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ من المستوي. أحسب الجداء السلمي $\vec{n}.\overrightarrow{AB}$ ، ماذا تستنتج ؟<br>3) لتكن **النقطة** $A(x_0;y_0)$ و الشعاع $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ من المستوي ولتكن $M(x;y)$ نقطة كيفية من المستقيم $(D)$ الذي يشمل النقطة **A** و $\vec{n}$ عمودي على شعاع توجيه لـ$(D)$.<br>أ- لماذا الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{n}$ متعامدان؟<br>بـ- عين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$ . | 20 دقيقة<br>15 دقيقة |
| مرحلة التكوين ( البنـاء )<br>مرحلة الإستثمار ( التحصيل) | **مناقشة النشاط:**<br>1) الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو شعاع توجيه للمستقيم $(\Delta)$ .<br>2) حساب الجداء السلمي $\vec{n}.\overrightarrow{AB}$ .<br>لدينا $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ و منه : $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=3(-1)+1\times3=0$<br>نستنتج أن الشعاعين $\vec{n}$ و $\overrightarrow{AB}$ متعامدان . | 25 دقيقة |

**شعاع ناظمي لمستقيم:**

$\vec{n}$ شعاع غير معدوم من المستوي .




**تعريف** :

القول أن $\vec{n}$ شعاع ناظمي للمستقيم $(\Delta)$ يعني أن $\vec{n}$ عمودي على شعاع توجيه المستقيم $(\Delta)$

**متابعة مناقشة النشاط :**

3) أ -الشعاعين $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{n}$ متعامدان لأن :

A و M نقطتان من $(D)$ إذن $\overrightarrow{AM}$ شعاع توجيه لـ $(D)$ ومنه: $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{n}$ متعامدان.

بـ -تعيين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$ لدينا نقطة $M(x,y)$ من المستوي.

$M$ تنتمي الي $(D)$ معناه: $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0$ ولدينا: $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}$ و $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

إذن $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0$ معناه: $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$ أي: $ax+by-ax_0-by_0=0$

بوضع : $c=-ax_0-by_0$ نجد: $(D):ax+by+c=0$

وبالتالي مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$ هي المستقيم $(D)$ ذو المعادلة $ax+by+c=0$.

**معادلة مستقيم عُلم شعاع ناظمي له و نقطة منه:**

**مبرهنة:**

في معلم متعامد و متجانس ،يكون لكل مستقيم ،حيث الشعاع غير المعدوم $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي له ، معادلة من الشكل $ax+by+c=0$ حيث $c$ عدد حقيقي .

**مثال:**

المعادلة الديكارتية للمستقيم $(\Delta)$ الذي يشمل النقطة $A(2;-1)$ و $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي له هي من الشكل : $2x+3y+c=0$

و بما أن $A\in(\Delta)$ فإن : $2\times2+3\times(-1)+c=0$ و منه : $c=-1$.

إذن : $2x+3y-1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم $(\Delta)$ .

**ملاحــظات:**

1) إذا كان $\vec{n}$ شعاع ناظمي لمستقيم $(D)$ فإن كل شعاع يوازي $\vec{n}$ هو شعاع ناظمي لـ $(D)$ .

2) إذا كانت $ax+by+c=0$ معادلة للمستقيم $(D)$ فإن $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ شعاع توجيه له ومنه الشعاع $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستقيم $(D)$ لأن فعلا $\vec{u}$ و $\vec{n}$ متعامدان ما دام $\vec{n}.\vec{u}=0$

**تمرين تطبيقي :**

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ نعتبر النقط $A(-2;0)$ ، $B(2;1)$ و $C(-3;3)$ .

1) أكتب معادلة دكارتية للإرتفاع المتعلق بالضلع $[BC]$ في المثلث $ABC$.

2) أكتب معادلة ديكارتية للمستقيم $(\Delta')$ الذي يشمل $B$ و يعامد المستقيم $(\Delta)$ ذي المعادلة $y=3x-4$

**الحل :**

1) $(D)$ هو المستقيم الذي يشمل النقطة $A$ و $\overrightarrow{BC}$ شعاع ناظمي له. لدينا $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$ و منه

معادلة لـ$(D)$ من الشكل : $-5x+y+c=0$ و بما أن $A\in(D)$ فإن : $-5\times1+1+c=0$ و منه :

$c=4$. إذن : $-5x+y+4=0$ هي معادلة دكارتية لـ$(D)$ .

2) بما أن $(\Delta)$ و $(\Delta')$ متعامدان فإن شعاع توجيه $(\Delta)$ هو شعاع ناظمي لـ $(\Delta')$ .

لدينا : $(\Delta): y=3x-4$ و منه $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستقيم $(\Delta')$ .

إذن معادلة $(\Delta')$ من الشكل : $x+3y+c=0$ و بما أن $B\in(\Delta)$ فإن :

$1\times2+3\times1+c=0$ و منه : $c=-5$. إذن : $x+3y-5=0$ هي معادلة دكارتية لـ$(D)$.

***حل تمرين رقم 65 صفحة 302***

تعيين معادلة المستقيم $(D)$ في كل حالة من الحالات التالية:

1. المستقيم $(\boldsymbol{D})$ يشمل $\boldsymbol{A}\ (\mathbf{2};-\mathbf{1})$ و $\vec{\boldsymbol{n}}\binom{2}{3}$ شعاع ناظمي له :

لتكن $M\ (x;y)$ نقطة من $(D)$ اذن $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{n}$ متعامدان

إذن: $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$

أي: $(x-2)\times2+(y+1)\times3=0$

ومنه: $2x-4+3y+3=0$

وبالتالي: $2x+3y-1=0$ وهي معادلة المستقيم $(D)$

2. $(D)$ يشمل $A\ (\sqrt{2};1)$ وعمودي على المستقيم (BC) حيث $B(-2;1)$ و$C\ (5;2)$

بما أن (BC) و $(D)$ متعامدان فان الشعاع $\overrightarrow{BC}$ ناظمي للمستقيم $(D)$ حيث $\overrightarrow{BC}\ \binom{7}{1}$

ومنه معادلة $(D)$ من الشكل: $ax+by+c=0$

أي: $7x+y+c=0$ وبما أن A تنتمي إلى $(D)$ فإن: $7x_a+y_a+c=0$

ومنه: $7(-\sqrt{2})+1+c=0$ أي: $c=7\sqrt{2}-1$

وبالتالي معادلة $(D)$ هي: $7x+y+7\sqrt{2}-1=0$

3. $(D)$ يشمل $O$ وعمودي على المستقيم $(\Delta): 2x+3y-6=0$

بما أن $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي لـ $(\Delta)$ فإن $\vec{n}$ هو شعاع توجيه لـ(D) ومنه الشعاع $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ هو شعاع ناظمي للمستقيم$(D)$

إذن معادلة المستقيم $(D)$ من الشكل: $3x+2y+C=0$

وبما أن $O(0,0)$ تنتمي إلى$(D)$ فإن: $-3x_0+2y_0+c=0$ أي $c=0$

ومنه معادلة $(D)$ هي $3x+2y=0$ .

**واجب منزلي :** التمرين رقم 66 صفحة 302 من الكتاب المدرسي .

**المراجع:** الكتاب المدرسي ،المنهاج ،لتوزيع السنوي ، التدرج ، الوثيقة المرفقة.

| | | |
|---|---|---|
| ثانوية: .........باتنة<br>ميدان التعلم: هندسة<br>الوحدة التعلمية الجداء السلمي في المستوي<br>المحتوى المعرفي _ تطبيقات الجداء السلمي (معادلة الدائرة ) | مذكرة سير حصة رقم 05. | الأستاذ:بن حولة عثمـــان<br>المـادة: رياضيـات<br>المـدة: 02 ساعة<br>المستوى 2 ع ت . |

| | |
|---|---|
| الكفاءات القبلية: حساب الجداء السلمي لشعاعين - خواص الجداء السلمي .. | الكفاءات المستهدفة:- استعمال خواص الجداء السلمي لتعيين معادلة دائرة |

توجيهات و تعاليق من المنهاج:

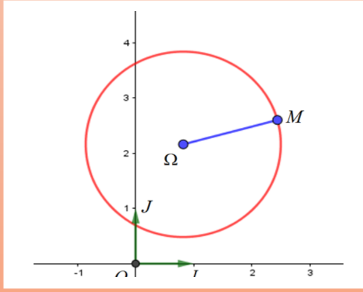
- استعمال خواص الجداء السلمي لتعيين معادلة دائرة .

| مراحل الحصة | سير الحصـــة | المـدة |
|---|---|---|
| مرحلة الإنطلاق ( الإستعداد ) | **نشاط مقترح :**<br>المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.<br>I. لتكن $A$ , $B$ و $\Omega$ نقط إحداثياها على الترتيب : $(-1;2)$ , $(3;4)$ و $\Omega(1;3)$ .<br>1. أ. عين مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي حيث : $\Omega M=\sqrt{5}$.<br>ب. أكتب معادلة لها .<br>II. لتكن $M$ نقطة من $(C)$ حيث $(C)$ هي عين مجموعة النقط $M(x;y)$ .<br>1. وضح لماذا $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ .<br>2. عبر بدلالة $x$ و $y$ عن $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ .<br>3. بين ان $(x-1)^2+(y-3)^2=5$ تكافئ $x^2+y^2-2x-6y+5=0$ وماذا تستنتج؟ | 20 دقيقة |
| مرحلة التكوين ( البناء ) | **مناقشة النشاط :**<br>المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.<br>I. لتكن $A$ , $B$ و $\Omega$ نقط إحداثياها على الترتيب: $(-1;2)$ , $(3;4)$ و $\Omega(1;3)$ .<br>1. أ. عين مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي حيث : $\Omega M=\sqrt{5}$.<br>مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي حيث : $\Omega M=\sqrt{5}$. هي دائرة $(C)$ مركزها $\Omega$ ونصف قطرها $\sqrt{5}$. | 15 دقيقة |
| مرحلة الإستثمار ( التحصيل) | ب. كتابة معادلة للدائرة $(C)$:<br>لدينا: $\Omega M=\sqrt{(x_M-x_\Omega)^2+(y_M-y_\Omega)^2}$.<br>إذن: $\Omega M=\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}$.<br>ولدينا $\Omega M=\sqrt{5}$<br>ومنه $\Omega M^2=\left(\sqrt{5}\right)^2$<br>أي $\left(\sqrt{(x_M-x_\Omega)^2+(y_M-y_\Omega)^2}\right)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2$<br>تكافئ $\boxed{(x-1)^2+(y-3)^2=5}$. وتسمى معادلة الدائرة $(C)$. | 25 دقيقة |

## 1. معادلة دائرة علم مركزها ونصف قطرها:

### مبرهنة

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$،
الدائرة $(C)$ ذات المركز $\Omega$، حيث $(\Omega(x_0\,;\,y_0))$
ونصف القطر $r$ $(r>0)$ لها معادلة من
الشكل: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$.




### البرهان:

الدائرة $(C)$ هي مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تحقق $\Omega M=r$ أي $\Omega M^2=r^2$
مركبتا الشعاع $\overrightarrow{\Omega M}$ هما $(x-x_0,y-y_0)$
من المبرهنة استنتجنا $\Omega M^2=r^2$
تكافئ $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

### مثال

في معلم متعامد ومتجانس، **اكتب معادلة للدائرة $(C)$ التي مركزها $\Omega(-1;2)$ و نصف قطرها $r=3$.**

**الحـــــل:**

- **لدينا** $(C):\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$
- معادلة الدائرة $(C)$ هي $(x+1)^2+(y-2)^2=9$

**تكملة حل النشاط:**

**II.** -1 $M$ نقطة من $(C)$. أوضح لماذا: $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

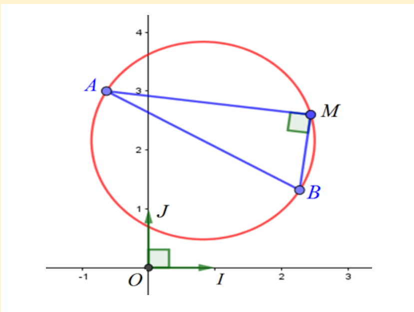
لتكن $M$ نقطة من $(C)$. إذا كانت $M$ تختلف عن $A$ و $B$ فإن المثلث $ABM$ قائم في $M$ حسب خاصية **الدائرة المحيطة بالمثلث و $[AB]$ قطر الدائرة $(C)$ هو وتر للمثلث $ABM$** وبالتالي $\overrightarrow{MA}$ و $\overrightarrow{MB}$ متعامدين أي: $\boxed{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0}$

وإذا كانت $M$ تنطبق على $A$ أو $B$ فإن $\overrightarrow{MA}=\vec{0}$ أو $\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ وبالتالي: $\boxed{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0}$.

## 1. دائرة علم قطرها:

### نتيـــــجة

الدائرة التي قطرها $[AB]$ هي مجموعة النقط $M$
حيث $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.



**مثال:**

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ نعتبر النقطتان $A(0;1)$ و $B(2;3)$

$(C)$ دائرة قطرها $[AB]$ و $M(x;y)$ نقطة من $(C)$

اكتب معادلة الدائرة $(C)$ التي قطرها $[AB]$ .

**الحــــــل**

- $M\in(C)$ يعني $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ :

$\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}-x\\1-y\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}2-x\\3-y\end{pmatrix}$ ومنه $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=-x(2-x)+(1-y)(3-y)$ تكافئ

$x^2-2x+y^2-3y-y+3=0$ ومنه معادلة الدائرة $(C)$ هي

$x^2-2x+y^2-4y+3=0$.

**ملاحظة :**

$M$ ، $A$ و $B$ نقط من المستوي، إذا كانت $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

فإن $M$ تنتمي إلى الدائرة ذات القطر $[AB]$. و $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=x^2+y^2+ax+by+c$

**تكملة حل النشاط:**

2. **أعبر بدلالة** $x$ **و** $y$ **عن** $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$:

✓ **إيجاد مركبتي** $\overrightarrow{MA}$ **و** $\overrightarrow{MB}$:

لدينا $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}x_A-x_M\\y_A-y_M\end{pmatrix}$ ومنه $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}-1-x\\2-y\end{pmatrix}$.

لدينا $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}x_B-x_M\\y_B-y_M\end{pmatrix}$ ومنه $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}3-x\\4-y\end{pmatrix}$.

✓ ومنه $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=xx'+yy'$

$=(-1-x)(3-x)+(2-y)(4-y)$

$=-3+x-3x+x^2+8-2y-4y+y^2$

إذن $\boxed{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=x^2+y^2-2x-6y+5}$

3. نبين أن $(x-1)^2+(y-3)^2=5$ . تكافئ $x^2+y^2-2x-6y+5=0$ .

لدينا $(x-1)^2+(y-3)^2=5$

بالنشر نجد $x^2+1-2x+y^2+9-6y=5$ .

با لتبسيط نجد $x^2+y^2-2x-6y+5=0$

الاستنتاج : مما سبق نستنتج أن $x^2+y^2-2x-6y+5=0$ هي هي كذالك معادلة للدائرة $(C)$.

نتيجة :

$a$ ، $b$ ، $c$ أعداد حقيقية معلومة. يمكن كتابة معادلة دائرة أيضا على الشكل

$x^2+y^2+ax+by+c=0$ $(*)$...

**ملاحـظة:**

ليس كل معادلة من الشكل $(*)$ هي معادلة دائرة.

**تطبيق:**

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1. عين معادلة $(C)$ الدائرة التي مركزها $\Omega(-2;1)$ ونصف قطرها 3
2. عين معادلة $(C')$ الدائرة التي قطرها $[AB]$ علما أن $A(-1;6)$ و $B(1;2)$
3. بين أن مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث $x^2-4x+y^2+2=0$ دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

الحــل:

1. معادلة $(C)$ هي $\boxed{(x+2)^2+(y-1)^2=3^2}$

2. <u>معادلة</u> $(C')$: لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوي $M\in(C')$

يكافئ $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ حيث $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}1-x\\2-y\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}-1-x\\6-y\end{pmatrix}$

ومنه $(-1-x)(1-x)+(6-y)(2-y)=0$

ومنه $\boxed{x^2+y^2-8y+11=0}$

3. لتكن $(C'')$ مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تحقق $x^2-4x+y^2+2=0$

لدينا $x^2-4x+4-4+y^2+2=0$ تكافئ $(x-2)^2+y^2-2=0$ ومنه $\boxed{(x-2)^2+y^2=2}$

إذن $(C'')$ هي دائرة مركزها $I(2;0)$ ونصف قطرها $\sqrt{2}$ .

<u>التمرين 75 ص 303:</u>

<u>نص التمرين:</u>

عين في كل حالة من الحالات التالية معادلة الدائرة $(C)$.

أ. $(C)$ مركزها $A(-1;2)$ ونصف قطرها $r=3$.

ب. $(C)$ تشمل النقطة $A(4;1)$ ومركزها $B(2;3)$.

ج. $(C)$ قطرها $[AB]$ حيث $A(2;1)$ و $B(4;-1)$.

<u>الحل:</u>

<u>أتعيين في كل حالة من الحالات التالية معادلة الدائرة</u> $(C)$.

أ. $(C)$ <u>مركزها</u> $A(-1;2)$ <u>ونصف قطرها</u> $r=3$:

معادلتها من الشكل $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$.

أي $\boxed{(x+1)^2+(y-2)^2=9}$.

ب. $(C)$ <u>تشمل النقطة</u> $A(4;1)$ <u>ومركزها</u> $B(2;3)$:

✓ <u>نحسب أولا نصف القطر</u> $AB$ :

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$
$$=\sqrt{(2-4)^2+(3-1)^2}$$
$$=\sqrt{8}$$

إذن معادلتها من الشكل: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$.

أي $\boxed{(x-2)^2+(y-3)^2=8}$

ح. $(C)$ قطرها $[AB]$ حيث $A(2;1)$ و $B(4;-1)$.

$(C)$ هي مجموعة النقط $M$ حيث: $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

✓ **إيجاد مركبتي** $\overrightarrow{MA}$ و $\overrightarrow{MB}$:

لدينا $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}x_A-x_M\\ y_A-y_M\end{pmatrix}$ ومنه $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}2-x\\ 1-y\end{pmatrix}$.

لدينا $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}x_B-x_M\\ y_B-y_M\end{pmatrix}$ ومنه $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}4-x\\ -1-y\end{pmatrix}$.

✓ إذن: $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

تكافئ $xx'+yy'=0$.

تكافئ $(2-x)(4-x)+(1-y)(-1-y)=0$.

تكافئ $\boxed{x^2+y^2-6x+7=0}$.

✓ **ملاحظة:** يمكن حساب إحداثيات مركز الدائرة ونصف قطرها لإيجاد معادلة الدائرة.

التمرين 76 ص 303:فكرة الحل:

**لدينا:** $x^2+y^2-10x+4y+23=0$ **تكافئ** $x^2-2\times5x+25+y^2+2\times2y+4=-23+25+4$

**تكافئ** $(x-5)^2+(y+2)^2=6$.

**المراجع:** الكتاب المدرسي ،المنهاج ،لتوزيع السنوي ، التدرج ، الوثيقة المرفقة.

| | |
|---|---|
| ثانوية: .....باتنة | الأستاذ:بن حولة عثمـــــان |
| ميدان التعلم: هندسة | المــادة: رياضيــات |
| الوحدة التعلمية الجداء السلمي في المستوي | المــدة: 02 ساعة |
| المحتوى المعرفي _ البعد بين نقطة ومستقيم . | المستوى 2 ع ت . |

## مذكرة سير حصة رقم 06.

**الكفاءات القبلية:** معادلة المستقيم – المسافة بين نقطتين - **خواص الجداء السلمي** .

**الكفاءات المستهدفة:-** حساب المسافة بين نقطة و مستقيم

**توجيهات و تعاليق من المنهاج:**

حساب البعد بين نقطة و مستقيم .

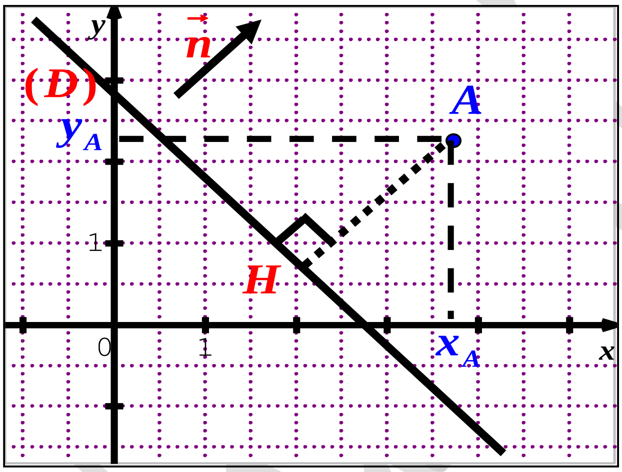
| مراحل الحصة | سير الحصـــة | المـدة |
|---|---|---|

**مرحلة الإنطلاق ( الإستعداد )**

### نشاط (أعمال موجهة ص 292 ):

**تعريف:** المسافة بين نقطة $A$ و مستقيم $(D)$ هي المسافة $AH$ بين $A$ و النقطة $H$ مسقطها العمودي على $(D)$.

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ نقطة $A(x_0,y_0)$ و مستقيما $(D)$ معادلته $ax+by+c=0$ حيث $(a,b)\neq(0,0)$.




لتكن النقطة $H$ المسقط العمودي للنقطة $A$ على $(D)$ وليكن $\vec{n}$ الشعاع الناظمي للمستقيم $(D)$ الذي إحداثيتاه هما $(a,b)$.

**الهدف:** حساب المسافة $AH$ بدلالة $a$، $b$، $c$، $x_0$ و $y_0$.

20 دقيقة

1) بيّن أن $\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AH}\right|=\left\|\vec{n}\right\|\times AH$ ثم استنتج أن

$$\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AH}\right|=\sqrt{a^2+b^2}\times AH \quad ...... \quad (1)$$

15 دقيقة

**مرحلة التكوين ( البناء )**

2) علما أن النقطة $H$ تنتمي إلى المستقيم $(D)$ و بفرض أن إحداثيتيها هي $(x,y)$ بيّن أن:

$$\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AH}\right|=\left|ax_0+by_0+c\right| \quad ......... \quad (2)$$

3) استنتج من $(1)$ و $(2)$ أن : $AH=\dfrac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

25 دقيقة

**مرحلة الإستثمار ( التحصيل )**

### مناقشة النشاط :

1) $\left|\vec{n}.\overrightarrow{AH}\right|=\left|\left\|\vec{n}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AH}\right\|\cos\left(\vec{n},\overrightarrow{AH}\right)\right|$

$$=\left\|\vec{n}\right\|\times AH\times 1$$

$$\left|\vec{n}.\overrightarrow{AH}\right|=\left\|\vec{n}\right\|\times AH$$

$$\left|\vec{n}.\overrightarrow{AH}\right|=\sqrt{a^2+b^2}\times AH.....(1)$$

2) لدينا :

$H(x,y)$ , $\vec{n}(a,b)$ , $\overrightarrow{AH}(x-x_0, y.y_0)$ و منه :

$$\left|\vec{n}.\overrightarrow{AH}\right| = |ax - ax_0 + by - by_0|$$

$$= |ax + by - ax_0 - by_0| = |-c - ax_0 - by_0|$$

أي : $\left|\vec{n}.\overrightarrow{AH}\right| = |ax_0 + by_0 + c| .....(2)$

3) من (1) و (2) نستنتج أن : $\sqrt{a^2+b^2} \times AH = |ax_0 + by_0 + c|$

و منه : $AH = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

**المسافة بين نقطة و مستقيم:**

**مبرهنة:**

في معلم متعامد و متجانس المسافة بين نقطة $A(x_0, y_0)$ و مستقيم $(D)$ معادلته $ax + by + c = 0$

هي: $\dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

**مثال:** المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

حساب المسافة بين النقطة $A(1;2)$ و المستقيم $(D)$ ذي المعادلة: $2x - 3y + 1 = 0$

$$d(A,D) = \frac{|2\times 1 - 3\times 2 + 1|}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

**نشاط تقويمي :**

1) أحسب المسافة بين النقطة $A(2,3)$ و المستقيم $(D)$ ذو المعدلة: $y = 2x + 1$

2) عيّن معادلة الدائرة $(C)$ التي مركزها $\Omega(-2,1)$ و تمس المستقيم $(D)$ ذو المعادلة : $x + y - 2 = 0$

3) لتكن $(C')$ مجموعة النقط $M(x,y)$ و التي تحقق المعادلة: $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 3 = 0$

- بيّن أن $(C')$ دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.
- هل المستقيم $(D')$ ذو المعادلة $3x + 2y + 4 = 0$ مماس للدائرة $(C')$ ؟

**الحل :**

1) المسافة بين النقطة $A(2,3)$ و المستقيم $(D)$ ذو المعدلة: $y = 2x + 1$ :

$$d(A,D) = \frac{|2(2) - 3 + 1|}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

2) معادلة للدائرة $(C)$ من الشكل : $(x+2)^2 + (y-1)^2 = r^2$ .

و $r = \dfrac{|1 - 2 + 1 - 2|}{\sqrt{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ و منه معادلة لـ $(C)$: $(x+2)^2 + (y-1)^2 = \dfrac{9}{2}$

3) •تبيان أن $(C')$ دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

$x^2 + y^2 - 2x - 6y - 3 = 0$ تكافئ $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 13$

و منه $(C')$ هي دائرة مركزها $\Omega'(1;3)$ و نصف قطرها $\sqrt{13}$

•و من جهة أخرى : $d(\Omega', D') = \dfrac{|3(1) + 2(3) + 4|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$ و منه $(D')$ هو مماس لـ $(C')$

ثانوية: ......باتنة...

الأستاذ:بن حولة عثمـــــان

ميدان التعلم: هندسة

المـــادة: رياضيـــات

## مذكرة سير حصة رقم 07.

الوحدة التعلمية الجداء السلمي في المستوي

المـدة: 02 ساعة

المحتوى المعرفي : حساب أطوال و أقياس زوايا .

المستوى 2 ع ت .

| الكفاءات القبلية: | الكفاءات المستهدفة:- |
|---|---|
| أطوال و أقياس زوايا . | إستعمال خواص الجداء السلمي أو عبارته التحليلية لحساب مسافات و أقياس زوايا.. |

توجيهات و تعاليق من المنهاج:

مفاهيم حول حساب أطوال و أقياس زوايا .

| مراحل الحصة | سير الحصــــة | المـدة |
|---|---|---|
| مرحلة الإنطلاق ( الإستعداد ) | **نشاط مقترح :** | |

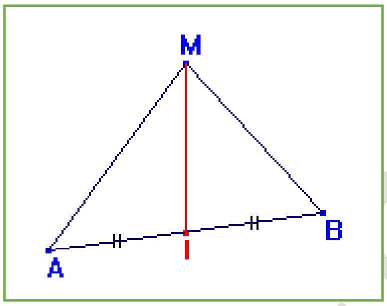
لتكن $A$ و $B$ نقطتان، $I$ منتصف القطعة $[AB]$ ، $M$ نقطة كيفية من المستوي

برهن أن: $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$

**مناقشة النشاط :**

لدينا: $MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2$

و منه: $MA^2 + MB^2 = 2\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2$




20 دقيقة

و بما أن: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ و $IA = IB = \frac{1}{2}AB$ أي

$\overrightarrow{IA}^2 = \overrightarrow{IB}^2 = \frac{1}{4}AB^2$

فإن: $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$ .

وهو المطلوب اثباته .

15 دقيقة

**استعمال خواص الجداء السلمي أو عبارته التحليلية لحساب مسافات أو أقياس زوايا :**

### 1. مبرهنة المتوسط:

$A$ و $B$نقطتان، $I$ منتصف القطعة $[AB]$ ،من أجل كل نقطة $M$ لدينا :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

مرحلة التكوين ( البنـاء )

25 دقيقة

مثال تطبيقي: $ABC$ مثلث حيث: $AC = 8$، $AB = 5$ و $BC = 7$

عين $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي و التي تحقق : $MA^2 + MC^2 = 38$.

مرحلة الإستثمار ( التحصيل)

الحـل:

1.لتكن النقطة $I$ منتصف القطعة المستقيمة$[AC]$. بتطبيق مبرهنة المتوسط يكون لدينا:

$MA^2 + MC^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AC^2$ . إذن القول أن $M$ نقطة من $(\Gamma)$ يعني أن: $2MI^2 + \frac{1}{2}AC^2 = 38$

أي $2MI^2 + 32 = 38$ أي $MI^2 = 3$ أي $MI = \sqrt{3}$ . و بالتالي فإن $(\Gamma)$ هي الدائرة التي مركزها النقطة $I$ و نصف قطرها $\sqrt{3}$.

**نشاط مقترح :** $ABC$ مثلث من المستوي ، كما هو موضح في الشكل المقابل :

1) أ - تحقق أن $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ .

ب - أحسب $BC^2$ بدلالة $\cos\hat{A}$ ، $AB$ و $AC$ .

2) لتكن النقطة $H$ المسقط العمودي للنقطة $A$ على المستقيم $(BC)$.

أ - أكتب $\sin\hat{B}$ بدلالة $AH$ و $BA$ . ثم إستنتج $AH$ .

ب - بيّن أن $S$ مساحة المثلث $ABC$ تعطى بالعلاقة : $S=\frac{1}{2}BA.BC.\sin\hat{B}$.

**مناقشة النشاط :**

1) أ - التحقق أن $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ .

لدينا حسب علاقة شال : $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ ومنه: $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

ب - حساب $BC^2$ بدلالة $\cos\hat{A}$ ، $AB$ و $AC$ .

لدينا : $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ و نعلم أن : $BC^2=\overrightarrow{BC}^2$ أي أن: $\overrightarrow{BC}^2=\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)^2$

ومنه : $\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{AC}^2-2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}^2$ إذن : $\overrightarrow{BC}^2=AC^2+AB^2-2AB.AC.\cos\hat{A}$.

## 1. العلاقات المترية في المثلث :

$ABC$ مثلث نضع $AC=b$، $AB=c$ و $BC=a$ ، $\widehat{CBA}=\hat{B}$ ، $\widehat{BAC}=\hat{A}$ و $\widehat{ACB}=\hat{C}$ .

**مبرهنة الكاشي:**

**مبرهنة:** $ABC$ مثلث لدينا :

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\hat{B}$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\hat{C}$$

**البرهان:** لدينا:

$BC^2=\overrightarrow{BC}^2=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)^2=\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)^2=AC^2+AB^2-2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$ .

ومنه $BC^2=AC^2+AB^2-2AC.AB.\cos A$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$$

بنفس الطريقة نجد $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\hat{B}$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\hat{C}$$

**مثال 1:** $ABC$ مثلث من المستوي، حيث $AB=2cm$ ، $BC=3cm$ و $\hat{B}=\frac{\pi}{3}$ .

**لنحسب $AC$ :** لدينا حسب مبرهنة الكاشي: $AC^2=BC^2+BA^2-2BC.BA\cos\hat{B}$

ومنه: $AC^2=9+4-2\times2\times3\times\cos\frac{\pi}{3}$ أي : $AC^2=7$ إذن : $AC=\sqrt{7}cm$

**2. حالة خاصة :** من أجل $\hat{A}=\frac{\pi}{2}$ نجد : $BC^2=AC^2+AB^2$ ، وهي مبرهنة فيثاغورس

**إذن مبرهنة فيثاغورس هي حالة خاصة لمبرهنة الكاشي .**

**متابعة مناقشة النشاط :**

2) أ - إيجاد $\sin\hat{B}$ بدلالة $AH$ و $BA$ :

لدينا المثلث $BHA$ قائم في $H$ و منه : $\sin\hat{B}=\frac{AH}{BA}$ و منه نستنتج أن: $AH=BA\sin\hat{B}$ .

ب - إثبات أن : $S=\frac{1}{2}BA.BC.\sin\hat{B}$

نعلم أن مساحة المثلث هي : $S = \frac{1}{2} BC.AH$ بتعويض $AH$ نجد: $S = \frac{1}{2} BA.BC.\sin \hat{B}$.

**3. قاعدة المساحة :**

**مبرهنة:** $ABC$ مثلث لدينا العلاقات التالية :

$$S = \frac{1}{2} a \times b \times sin\hat{C}$$
$$S = \frac{1}{2} b \times c \times sin\hat{A}$$
$$S = \frac{1}{2} a \times c \times sin\hat{B} .$$

**البرهـان :**

$S = \frac{BC \times AI}{2} = \frac{a \times b \times sin\hat{C}}{2}$ و منه $S = \frac{1}{2} a \times b \times sin\hat{C}$

بنفس الطريقة نجد : $S = \frac{1}{2} b \times c \times sin\hat{A}$

$$S = \frac{1}{2} a \times c \times sin\hat{B}$$

**مثال:** من معطيات التطبيق السابق ، احسب $BH$ حيث: $H$ هي المسقط العمودي للنقطة $B$ على $(AC)$

**1. قانون الجيوب :**

**2. مبرهنة :**

3. $ABC$ مثلث لدينا العلاقات التالية : $\frac{b}{sin\hat{B}} = \frac{a}{sin\hat{A}} = \frac{c}{sin\hat{C}}$ .

**البرهـــان**

لدينا: $S = \frac{1}{2} a \times b \times sin\hat{C} = \frac{1}{2} b \times c \times sin\hat{A} = \frac{1}{2} a \times c \times sin\hat{B}$

ومنه: $\frac{1}{2} b \times c \times sin\hat{A} = \frac{1}{2} a \times c \times sin\hat{B}$ و منه $b \times sin\hat{A} = a \times sin\hat{B}$

ومنه: $\frac{b}{sin\hat{B}} = \frac{a}{sin\hat{A}}$

ولدينا: $\frac{1}{2} a \times b \times sin\hat{C} = \frac{1}{2} b \times c \times sin\hat{A}$ ومنه $a \times sin\hat{C} = c \times sin\hat{A}$ ومنه $\frac{c}{sin\hat{C}} = \frac{a}{sin\hat{A}}$. إذن : $\frac{b}{sin\hat{B}} = \frac{a}{sin\hat{A}} = \frac{c}{sin\hat{C}}$ .

**تطبيق:** $ABC$ مثلث حيث: $BC = 8$ ، $\hat{B} = 50°$ و $\hat{C} = 70°$

- احسب $\hat{A}$
- احسب $AB$ و $AC$ .

**التقويم:** التمرين 104ص 306 .تمرين 105 ص 306.

**مجموعة النقط (ادراج العلاقات المترية في البحث عن مجموعة النقط )**

**حل تمرين 84 ص 304 .**

**لدينا** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ **تكافئ** $\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM})=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ **تكافئ** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
تكافئ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CM}=0$ .

إذن مجموعة النقط $M$ من المستوي حيث: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ هي المستقيم الذي يشمل النقطة $C$ و $\overrightarrow{AB}$ شعاع ناظمي له .

**حل تمرين 85 ص 304 .**

لتكن النقطة $I$ منتصف القطعة المستقيمة$[AB]$ . بتطبيق مبرهنة المتوسط يكون لدينا: $MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$ ولدينا $MA^2+MB^2=16$ إذن القول أن $M$ نقطة من $(\Gamma)$ يعني أن: $2MI^2+\frac{1}{2}AB^2=16$ أي $MI^2=4$ أي $MI=2$ و بالتالي فإن $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي حيث $MA^2+MB^2=16$ هي الدائرة التي مركزها النقطة $I$ ونصف قطرها 2 .أو هي الدائرة التي قطرها $[AB]$ .

**حل تمرين 86 ص 304 .**

تعيين مجموعة النقط $M$ من المستوي حيث:

أ) $\left(2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right).\overrightarrow{AB}=0$ :

نعتبر النقطة $G$ مرجح الجملة المثقلة $\{(A,2);(B,-3)\}$.

ونعلم أنه من أجل كل نقطة $M$ من المستوي فإن $2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MG}$ إذن $\left(2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right).\overrightarrow{AB}=0$ تكافئ $-\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{AB}=0$ تكافئ $\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{AB}=0$ .

وبالتالي مجموعة النقط $M$ من المستوي حيث: $\left(2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right).\overrightarrow{AB}=0$ هي المستقيم الذي يشمل النقطة $G$ و $\overrightarrow{AB}$ شعاع ناظمي له .

ب) $\left(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)=0$ :

نعتبر النقطة $H$ مرجح الجملة المثقلة $\{(A;2),(B;1)\}$.

ونعلم أنه من أجل كل نقطة $M$ من المستوي فإن $2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MH}$ إذن $\left(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)=0$ تكافئ $3\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{BA}=0$ تكافئ $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{BA}=0$ .

وبالتالي مجموعة النقط $M$ من المستوي حيث: $\left(2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right).\overrightarrow{AB}=0$ هي المستقيم الذي يشمل النقطة $H$ و $\overrightarrow{BA}$ شعاع ناظمي له .

**حل تمرين 88 ص 304 .**

$A$ و $B$ نقطتان متمايزتان من المستوي و $G$ مرجح $(A;3)$ و $(B;2)$ حيث $AB=5$ .

1) أ) كتابة $\overrightarrow{AG}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$:

لدينا $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

ب) لتكن $(E)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي حيث: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=10$

- نبين أن $G\in(E)$ :

$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{AB} = AG \times AB \times \cos\left(\overrightarrow{AG};\overrightarrow{AB}\right)$

لدينا $= 2 \times 5 = 10$ وبالتالي $G \in (E)$ .

$= 10$

- نبرهن أن $(E)$ هي المستقيم العمودي على $(AB)$ في $G$.

لدينا $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 10$ تكافئ $(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GM}).\overrightarrow{AB} = 10$ تكافئ $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{GM} = 10$ تكافئ $10+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{GM} = 10$ تكافئ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{GM} = 0$.

إذن مجموعة النقط $M$ من المستوي حيث: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 10$ هي المستقيم العمودي على $(AB)$ في $G$

أو هي المستقيم الذي يشمل النقطة $G$ و $\overrightarrow{AB}$ شعاع ناظمي له .

2) حدد $(F)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي حيث: $MA^2+MB^2 = 7$

لتكن النقطة $I$ منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ . بتطبيق مبرهنة المتوسط يكون لدينا: $MA^2+MB^2 = 2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$ ولدينا $MA^2+MB^2 = 7$ إذن القول أن $M$ نقطة من $(\Gamma)$ يعني أن: $2MI^2+\frac{1}{2}AB^2 = 7$ أي $MI^2 = -2,75$ و بالتالي فإن $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي حيث $MA^2+MB^2 = 7$ هي: $(F) = \phi$ .

- حل حل تمرين 87 ص 304 واجب منزلي .
- تمرين 89 ص 304 حل تمرين 91 ص 304 واجب منزلي .

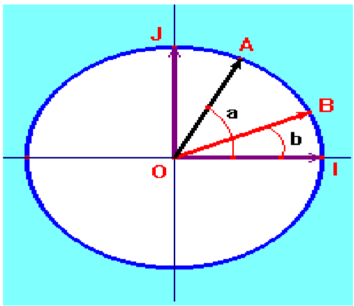
**المراجـع:** الكتاب المدرسي ،المنهاج ،لتوزيع السنوي ، التدرج ، الوثيقة المرفقة.

<table>
<tr><td colspan="3">
ثانوية: ......باتنة.<br>
ميدان التعلم: هندسة<br>
الوحدة التعلمية الجداء السلمي في المستوي<br>
المحتوى المعرفي _ دساتير الجمع .
</td><td colspan="2">
مذكرة سير حصة رقم 08.
</td><td>
الأستاذ:بن حولة عثمــــان<br>
المــادة: رياضيــات<br>
المــدة: 02 ساعة<br>
المستوى 2 ع ت .
</td></tr>
<tr><td colspan="3">
الكفاءات القبلية: حساب المثلثات .<br>
مفاهيـــــم أولية حول جيب تمام و جيب والزوايا الموجهة .
</td><td colspan="3">
الكفاءات المستهدفة:- توظيف الجداء السلمي لإثبات دساتير الجمع المتعلقة بجيب تمام و جيب و عبارة $\sin 2a$ و $\cos 2a$ التي تستنتج منها
</td></tr>
<tr><td colspan="6">
توجيهات و تعاليق من المنهاج:<br>
الربط بين حساب المثلثات والزوايا الموجهة و دساتير الجمع. .
</td></tr>
</table>

| مراحل الحصة | سير الحصــــة | المــدة |
|---|---|---|
| مرحلة الإنطلاق ( الإستعداد ) | | 20 دقيقة |
| مرحلة التكوين ( البناء ) | | 15 دقيقة<br>25 دقيقة |
| مرحلة الإستثمار ( التحصيل) | | |

**مناقشة ( أعمال موجهة ص 293):**

1) حساب $\cos(a+b)$ , $\cos(a-b)$ , $\sin(a-b)$ , $\sin(a+b)$




نضع : $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})=a$ , $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB})=b$

لدينا : $\overrightarrow{OA}(\cos a,\sin a)$ , $\overrightarrow{OB}(\cos b,\sin b)$

$$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}=\cos b\cos a+\sin b\sin a....(1)$$

$$(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})=(\vec{i},\overrightarrow{OA})-(\vec{i},\overrightarrow{OB})$$

$$(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})=a-b$$

لدينا : $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}=\|\overrightarrow{OB}\|\times\|\overrightarrow{OA}\|\cos(a-b)$ و منه : $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}=1\times1\times\cos(a-b)$

أي : $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}=\cos(a-b).....(2)$

من (1) و (2) نجد : $\cos(a-b)=\cos a\ \cos b+\sin a\ \sin b$

- لدينا : $\cos(a+b)=\cos(a-(-b))=\cos a\cos(-b)+\sin a\ \sin(-b)$

$$\cos(a+b)=\cos a\ \cos b-\sin a\ \sin b$$

- نعلم أن :

$$\sin(a-b)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(a-b)\right]$$

$$=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-a\right)+b\right]=\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cos b-\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\sin b$$

و منه : $\sin(a-b)=\sin a\ \cos b-\cos a\ \sin b$

- $\sin(a+b)=\sin(a-(-b))=\sin a\ \cos(-b)-\cos a\ \sin(-b)$

و منه : $\sin(a+b)=\sin a\ \cos b+\cos a\ \sin b$

**مبرهنة:**

- $$\begin{cases}\cos(a-b)=\cos a\ \cos b+\sin a\ \sin b\\ \cos(a+b)=\cos a\ \cos b-\sin a\ \sin b\\ \sin(a-b)=\sin a\ \cos b-\cos a\ \sin b\\ \sin(a+b)=\sin a\ \cos b+\cos a\ \sin b\end{cases}$$

**تطبيق:**

لنحسب $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

لدينا : $\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}$

و منه : $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}$

و منه : $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

**نشاط تقويمي :**

1) أحسب $\sin 2\alpha$ , $Cos\,2\alpha$

2) أحسب $\cos\frac{\pi}{8}$ , $\sin\frac{\pi}{8}$ دون الحاسبة

**الحل :**

1) حساب $\sin 2\alpha$ , $Cos\,2\alpha$ :

$\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=1-2\sin^2 a=2\cos^2 a-1$

$\sin 2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

2) لدينا : $\cos\frac{\pi}{4}=\cos\left(2\frac{\pi}{8}\right)$ أي : $\frac{\sqrt{2}}{2}=2\cos^2\frac{\pi}{8}-1$ و منه : $\cos^2\frac{\pi}{4}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

و منه : $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ لأن : $\frac{\pi}{8}\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

$\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ باستعمال : $\cos\frac{\pi}{4}=1-2\sin^2\frac{\pi}{8}$

**تمارين منزلية :**

- التمرين 109 ص 307

التمرين 110 ص 307 .

المراجـع: الكتاب المدرسي ،المنهاج ،لتوزيع السنوي ، التدرج ، الوثيقة المرفقة.

ثانوية: ......باتنة
ميدان التعلم: هندسة
الوحدة التعلمية الجداء السلمي في المستوي
المحتوى المعرفي _ دساتير الجمع .

**مذكرة سير حصة رقم 08.**

الأستاذ:بن حولة عثمـــــان
المـادة: رياضيـات
المـدة: 02 ساعة
المستوى 2 ع ت .

**الكفاءات القبلية:** حساب المثلثات .
- مفاهيــــم أولية حول جيب تمام و جيب والزوايا الموجهة ..

**الكفاءات المستهدفة:-** توظيف الجداء السلمي لإثبات دساتير الجمع المتعلقة بجيب تمام و جيب وعبارة $\sin 2a$ و $\cos 2a$ التي تستنتج منها

**توجيهات و تعاليق من المنهاج:**
- الربط بين حساب المثلثات والزوايا الموجهة و **دساتير الجمع**.

| مراحل الحصة | سير الحصــة | المـدة |
|---|---|---|

**مرحلة الإنطلاق ( الإستعداد )**

**مناقشة ( أعمال موجهة ص 293):**

ينسب المستوي إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، $(C)$ الدائرة المثلثية المرفقة بهذا المعلم .

نعتبر النقطتين $A$ و $B$ من الدائرة المثلثية حيث : $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA})=\alpha$ و $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB})=\beta$

1. باستعمال العبارة التحليلية للجداء السلمي احسب $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$:

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=cos\alpha cos\beta+sin\alpha sin\beta \ldots\ldots\ldots(1)$$

2. باستعمال تعريف الجداء السلمي احسب $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$:

20 دقيقة

لدينا حسب علاقة شال: $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB})-(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA})=\beta-\alpha$

إذن : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\|\overrightarrow{OA}\|\|\overrightarrow{OB}\|cos(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})=cos(\beta-\alpha)\ldots\ldots\ldots(2)$

من $(1)$ و $(2)$ نجد: $cos(\beta-\alpha)=cos\alpha cos\beta+sin\alpha sin\beta$

3. **حساب $cos(\beta+\alpha)$** :

15 دقيقة

لحساب $\cos(\beta+\alpha)$ نعوض في المساواة السابقة كل $\alpha$ بـ $-\alpha$ فنجد :

$$cos(\beta-(-\alpha))=\cos(-\alpha)cos\beta+\sin(-\alpha)sin\beta$$

ومنه $\cos(\beta+\alpha)=cos\alpha cos\beta-sin\alpha sin\beta$

**مرحلة التكوين ( البناء )**

4. **حساب $si(\beta-\alpha)$** :

25 دقيقة

نعلم ان : $sinx=\cos(\frac{\pi}{2}-x)$ و منه $sin(\beta-\alpha)=cos(\frac{\pi}{2}-(\beta-\alpha))$

ومنه $sin(\beta-\boldsymbol{\alpha})=cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)+\alpha\right)=\cos(\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)cos\alpha-sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)sin\alpha$

5. **حساب $si(\beta+\alpha)$** :

**مرحلة الإستثمار ( التحصيل)**

لحساب $sin(\beta+)$ نعوض في العلاقة السابقة كل $\alpha$ بـ $-\alpha$ فنجد :

$$sin(\beta+\alpha)=sin(\beta-(-\alpha))=sin\beta\cos(-\alpha)-cos\beta\sin(-\alpha)$$

ومنه $sin(\beta+\boldsymbol{\alpha})=sin\beta cos a+cos\beta sin a$

6. **حساب $cos(2\alpha)$** :

$$cos(2\alpha)=\cos(\alpha+\alpha)=cos\alpha cos-sin\alpha sin\alpha$$

ومنه $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي $\alpha$ : $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ ومنه

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ و $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

بتعويض $\cos\alpha$ في العلاقة السابقة نجد : $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$

بتعويض $\sin\alpha$ في العلاقة السابقة نجد : $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$

إذن: $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

**7. حساب $\sin(2\alpha)$:**

$$\sin(2\alpha) = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha$$

إذن $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$

**مثال1:**

- تحقق أن $\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ ثم احسب القيمة المضبوطة لـ : $\cos(\frac{\pi}{12})$ و $\sin(\frac{\pi}{12})$
- احسب القيمة المضبوطة لـ : $\cos(\frac{5\pi}{12})$ و $\sin(\frac{5\pi}{12})$

**مثال2:**

احسب القيمة المضبوطة لـ : $\cos(\frac{\pi}{8})$ و $\sin(\frac{\pi}{8})$

**تمرين رقم 109 ص 307**

**المراجع:** الكتاب المدرسي ،المنهاج ،لتوزيع السنوي ، التدرج ، الوثيقة المرفقة.