



بكالوريا تجريبية

المدة: 04 سا و30د



الشعبة: رياضيات



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين

الموضوع الأول

يحتوي الموضوع الأول على صفتين (الصفحة 1 من 5 والصفحة 2 من 5)

04.25 التمرين الأول

نقطة

كيس يحتوي على: خمس كريات حمراء تحمل الأعداد: 1، e ، e^2 و ثلاث كريات سوداء تحمل الأعداد: e ، e^2 و ثلاث كريات خضراء تحمل الأعداد 1، $\frac{1}{e}$ و $\frac{1}{e^2}$ (الكرات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس)

نسحب بطريقة عشوائية من هذا الكيس كرتان في آن واحد

نعتبر الأحداث A ، B و C حيث: A : "سحب كرتان مختلفتان مختلفتان في اللون" B : "سحب كرتان لهما نفس العدد"1 / احسب $P(A)$ ، $P(B)$ و $P(A \cup B)$

ب / ما احتمال سحب كرتان مختلفتان في اللون علما أن لهما نفس العدد؟

2 / نسمي α و β العددين الظاهريين على الكرتين المسحوبتين،ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب العدد $\ln(\alpha\beta)$ أ / عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ب / احسب احتمال الحادثة " $X^2 > 4$ "

3 / نسحب الآن من هذا الكيس ثلاث كريات على التوالي بدون ارجاع بحيث نرتبها ترتيبا تصاعديا عند ظهورها

نعتبر الحدثان C ، D حيث: C : "سحب كرية واحدة فقط حمراء والكرة الأولى سوداء" D : "سحب ثلاث كريات تحمل أعداد تشكل حدودا متتابعة من متتالية هندسية"- احسب $P(C)$ و $P(D)$

04.25 التمرين الثاني

نقطة

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_n = 2^n$ ، وليكن S_n المجموع المعروف بـ $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$ 1 / اكتب S_n بدلالة n ، ثم استنتج أن S_n و U_n أوليان فيما بينهما2 / أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية لـ U_n على 7ب / نعتبر العدد A حيث $A = (U_{2024} + U_{1962} - S_{1445})^{1954} - 2 \times 6^{2022}$ - بيّن أن A يقبل مضاعف لـ 7ج / عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها S_{2n} مضاعفا لـ 73 / نعتبر المعادلة $4x - 7y = 3$ (E): ذات المجهولين الصحيحين x و y أ / بيّن أن الثنائية $(S_1; S_2)$ حل لـ (E)، ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)ب / نضع $D = \text{PGCD}(x; y)$ ، عيّن القيم الممكنة لـ D 4 / ليكن P العدد الطبيعي الذي يكتب $1\alpha\alpha220$ في النظام ذا الأساس 4، بحيث α عدد طبيعي- جد قيمة α حتى يكون $(P - 1)$ مضاعفا لـ 7، ثم اكتب P في النظام العشري

(I) نعتبر العدد المركب $L = 2 + \sqrt{3} + i$

1 بيّن أن طويّلة L هي $2\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

2 تحقق من أن: $L = 2 \left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \right] + 2i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

3 أ / بيّن أن: $1 + \cos(2\theta) = 2 \cos^2(\theta)$

ب / بيّن أن $L = 4 \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + 4i \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ (تذكر أن: $\sin(2\theta) = 2 \cos(\theta) \sin(\theta)$)

ج / اكتب العدد المركب L على شكله الأسّي

د / بين أن: $L^6 = (8 + 4\sqrt{3})^3 i$

(II) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ النقطتين Ω و P اللتين لاحقتهما $\omega = \sqrt{3}$ و L على

الترتيب، وليكن h التحاكي الذي مركزه Ω ونسبته 2

1 بيّن أن d لاحقة النقطة D صورة النقطة P بالتحاكي h هي $(4 + \sqrt{3}) + 2i$

2 حدد (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث: $|\bar{z} - 4 - \sqrt{3} + 2i| = |L|$

(I) لتكن الدالة العددية f_α المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f_\alpha(x) = e^{2x} - 2\alpha e^x + 3$ ، حيث α وسيط حقيقي

وليكن (C_α) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1 احسب f'_α الدالة المشتقة للدالة f_α ، ثم عيّن حسب قيم الوسيط الحقيقي α القيم الحدية للدالة f_α

2 نسمي Ω_α النقطة الحدية لـ (C_α) في حالة وجودها

أ / عيّن بدلالة α احداثيي النقطة Ω_α

ب / عيّن مجموعة النقط Ω_α لما α يسمح $\mathbb{R}_+^*$

(II) نعتبر الدالة f_1 حيث (C_1) تمثيلها البياني

1 أ / عيّن المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_1)

ب / ادرس تغيرات الدالة f_1 ، ثم شكل جدول تغيراتها

2 عيّن معادلة المماس (T) لـ (C_1) عند النقطة ذات الترتيبة 3

3 ارسم كلا من (T) و (C_1)

4 لتكن (Δ_m) عائلة المستقيمات المعرفة بـ: $y = mx + 3 - m \ln 2$ ، حيث m وسيط حقيقي

أ / بيّن أن المستقيمات (Δ_m) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيين احداثيها

ب / ناقش بيانها حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $e^x(e^x - 2) = m(x - \ln 2)$

(III) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = -e^{2x} + 2e^x + 3$ و (C') تمثيلها البياني

1 اكتب $g(x)$ بدلالة $f_1(x)$ ، ثم بيّن أن (C') و (C_1) متناظران بالنسبة إلى المستقيم (D) الذي يطلب تعيين معادلته

2 ارسم (C')

3 بيّن أن $A = 1u.a$ حيث A هي مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_1) و (C') والمستقيمان ذو المعادلتان $x = \ln 2$ و $x = 0$

التمرين الأول

04.00
نقطة

- ① ادرس حسب قيم بواقي القسمة الاقليدية للعدد 4^n على 13
- ② نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $(E_n) = 286x - 247y = 4^n - 25$ حيث n عدد طبيعي
- عيّن قيم n التي من أجلها المعادلة (E_n) تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}^2$
- ③ نضع: $n = 3$
أ/ بيّن أن (E_3) تكافئ المعادلة $(E'): 22x - 19y = 3$ ، ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E')
ب/ ما هي القيم الممكنة لـ $\text{PGCD}(x; y)$ حيث $(x; y)$ حلول المعادلة (E')
ج/ عيّن الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E') بحيث يكون $\text{PGCD}(x; y) = 3$
د/ عيّن الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E') التي تحقق $|2x - y| < 17$

التمرين الثاني

04.00
نقطة

(I) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، α عدد مركب حيث:

$$\begin{cases} \alpha + \bar{\alpha} = 2\sqrt{2 + \sqrt{2}} \\ \alpha \bar{\alpha} = 4 \\ \text{Im}(\alpha) > 0 \end{cases}$$

- ① أ/ اكتب العدد α على الشكل الجبري
ب/ اكتب العدد α^2 على الشكل الأسّي
- ② أ/ بين أن $\alpha = 2e^{\frac{\pi i}{8}}$
ب/ استنتج القيمة المضبوطة لـ $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$
- (II) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $L_n = \alpha^n$ ، ونعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين L_1 و L_2 على الترتيب
 - ① عيّن قيم n التي من أجلها العدد L_{4n} تخيلي صرف
 - ② المتتالية العددية (U_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_n = \arg(L_n)$
أ/ بيّن أن (U_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول، ثم اكتب U_n بدلالة n
ب/ احسب بدلالة n عبارة S_n حيث: $S_n = \arg(\overline{L_0} \times \overline{L_1} \times \dots \times \overline{L_n})$
 - ③ أ/ عيّن (E_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق $z = L_1(L_2 - e^{i\theta})$ حيث: $\theta \in \mathbb{R}$
ب/ عيّن (E_2) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق $\arg\left[(iz + i\overline{L_2})^2\right] = \frac{3\pi}{4} + 4k\pi$ حيث: $k \in \mathbb{Z}$

التمرين الثالث

04.50
نقطة

زهرة نرد ذو ستة أوجه مرقمة من 1 إلى 6، p_k هو احتمال الحصول على الرقم k حيث $(1 \leq k \leq 6)$
هذه الزهرة مغشوشة بحيث:

- الأعداد p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 و p_6 تشكل بهذا الترتيب متتالية حسابية أساسها r
- والأعداد: p_1, p_2, p_4 تشكل بهذا الترتيب متتالية هندسية أساسها q

- ① اثبت أن $p_k = \frac{k}{21}$ من أجل $1 \leq k \leq 6$

② نرمي هذه الزهرة مرة واحدة، ونعتبر الحوادث التالية:

A : "العدد المحصل عليه زوجي"

B : "العدد المحصل عليه أكبر أو يساوي 3"

C : "العدد المحصل عليه 3 أو 4"

أ/ احسب احتمال كل من الحوادث A ، B و C

ب/ احسب احتمال الحصول على عدد أكبر من أو يساوي 3، علماً أنه زوجي

ج/ هل الحادثتان A و B مستقلتان؟

③ نستعمل الآن هذه الزهرة لإجراء اللعبة التالية:

لدينا صندوق U_1 يحتوي على كرة حمراء و ثلاث كرات سوداء، وصندوق U_2 يحتوي على كرتين حمراوين وكرة سوداء واحدة، يأتي لاعب ويرمي الزهرة:

- إذا حصل على رقم زوجي يسحب عشوائياً كرة واحدة من الصندوق U_1

- إذا حصل على رقم فردي يسحب عشوائياً كرة واحدة من الصندوق U_2

اللاعب يعتبر رابحاً إذا سحب كرة حمراء، ونسمي G الحادثة: "اللاعب رابح"

أ/ عيّن احتمال الحادثة $G \cap A$ ، ثم احتمال الحادثة G

ب/ علماً أن اللاعب رابح، عيّن احتمال أن يكون حصل على عدد زوجي.

07.50 نقطة التمرين الرابع

n عدد طبيعي غير معدوم

(I) $h_n(x) = x^2 - n + n \ln x$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بـ:

① أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} h_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} h_n(x)$

ب/ ادرس اتجاه تغير h_n ، ثم شكل جدول تغيراتها

② أ/ بيّن أن المعادلة $h_n(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α_n بحيث $1 \leq \alpha_n < e$

ب/ استنتج إشارة $h_n(x)$ على $\mathbb{R}_+^*$

(II) نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بـ: $f_n(x) = x - n - \frac{n \ln x}{x}$

و (C_n) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، (الوحدة $2cm$)

① احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x)$ وفسر النتيجة هندسياً، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$

② أ/ بيّن أن المستقيم (Δ_n) ذو المعادلة $y = x - n$ مقارب مائل لـ (C_n)

ب/ ادرس وضعية (C_n) بالنسبة إلى (Δ_n)

③ أ/ بيّن أنه من أجل كل $x > 0$: $f_n'(x) = \frac{h_n(x)}{x^2}$

ب/ استنتج اتجاه تغير f_n ، ثم شكل جدول تغيراتها

④ تحقق أن $f_n(\alpha_n) = 2\alpha_n - n - \frac{n}{\alpha_n}$

⑤ بيّن أنه يوجد مماس (T_n) للمنحنى (C_n) يوازي (Δ_n) ثم اكتب معادلة له

⑥ أ/ تحقق أن $t = 1$ هو الحل الوحيد للمعادلة $1 - t = 2 \ln t$

ب/ بيّن أنه يوجد مماس وحيد (D_n) للمنحنى (C_n) يشمل مبدأ المعلم، ثم اكتب معادلة له

III) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ كما يلي: $g(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$

① ادرس تغيرات الدالة g

② بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β بحيث $0.5 < \beta < 0.6$

③ استنتج الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1})

④ بيّن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $f_n(\beta) = \beta$ ، ماذا تستنتج؟

IV)

① ارسم (C_2) (نأخذ $1.2 < \alpha_2 < 1.3$ و $f(\alpha_2) \approx -1.1$)

② عيّن قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها المعادلة $f_2(x) = mx$ حلين مختلفين



﴿بالتوفيق والنجاح لجموع التلاميذ الشرفاء﴾

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

وزارة التربية الوطنية

امتحان: شهادة البكالوريا

دورة: جوان 2024

الشعبة: رياضيات

اختبار مادة: الرياضيات

يوم: 10 جوان 2024

امضاء المترشح (ة):

اللقب:

الاسم:

تاريخ ومكان الميلاد: 5 - 5 - 1996 / أكلفه

رقم التسجيل:

اسم ولقب وتوقيع الحراس

1. 2. 3.

لا بد من ملأ أعلى هذه الوثيقة - ويمنع التوقيع في آخر ورقة الاختبار

اختبار مادة: الرياضيات

الموضوع الأول

المترشح الأول

$P(A \cup B)$ و $P(A \cap B)$, $P(A)$, $P(B)$, $P(A)$

$$P(A) = 1 - \frac{C_5^2 + C_3^2 + C_3^2}{C_n^2} = \frac{39}{55}$$

$$P(B) = \frac{C_4^2 + C_3^2 + C_2^2}{C_n^2} = \frac{10}{55} = \frac{2}{11}$$

$$P(A \cap B) = \frac{C_2^1 C_2^1 + C_2^1 C_1^1 + C_1^1 C_1^1}{C_n^2} = \frac{7}{55}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{42}{55}$$

ب/ حسب احتمال سحب كرتين مختلفتين في اللون حلما أثر لهما

نفس العدد :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{7}{55}}{\frac{10}{55}} = \frac{7}{10}$$

② / قانون احتمال X:

لدينا $X(\Omega) = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$ حيث

$$P(X = -3) = \frac{C_1^1 C_1^1}{C_{55}^2} = \frac{1}{55}$$

$$\left\{ \frac{1}{e} \times \frac{1}{e} = e^{-2} \right\}$$

$$P(X = -2) = \frac{C_2^1 \cdot C_1^1}{C_{55}^2} = \frac{2}{55}$$

$$\left\{ \frac{1}{e} \times 1 = e^{-1} \right\}$$

$$P(X = -1) = \frac{C_1^1 C_3^1 + C_1^1 C_2^1}{C_{55}^2} = \frac{5}{55}$$

$$\left\{ \frac{1}{e} \times e = \frac{1}{e} \times 1 = e^{-1} \right\}$$

$$P(X = 0) = \frac{C_2^2 + C_3^1 C_1^1 + C_4^1 C_1^1}{C_{55}^2} = \frac{8}{55}$$

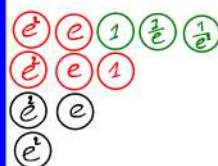
$$\left\{ 1 \times 1 = \frac{1}{e} \times e = \frac{1}{e} \times e = 1 \right\}$$

$$P(X = 1) = \frac{C_2^1 C_3^1 + C_4^1 C_1^1}{C_{55}^2} = \frac{10}{55}$$

$$\left\{ 1 \times e = e^1 \times \frac{1}{e} = e^0 \right\}$$

$$P(X = 2) = \frac{C_2^1 C_4^1 + C_3^2}{C_{55}^2} = \frac{11}{55}$$

$$\left\{ 1 \times e^1 = e \times e = e^2 \right\}$$



$$P(X=3) = \frac{C_4^1 \cdot C_3^1}{C_{11}^2} = \frac{12}{55} ; \{e^2 \times e = e^3\}$$

$$P(X=4) = \frac{C_4^2}{C_{11}^2} = \frac{6}{55} ; \{e^2 \times e^2 = e^4\}$$

= محلي

$X=x_i$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{55}$	$\frac{2}{55}$	$\frac{5}{55}$	$\frac{8}{55}$	$\frac{10}{55}$	$\frac{11}{55}$	$\frac{12}{55}$	$\frac{6}{55}$

$$P(X^2 > 4) = P(|X| > 2)$$

بنا

$$= P(X < -2) + P(X > 2)$$

$$= P(X = -3) + P(X = 3) + P(X = 4)$$

$$= \frac{19}{55}$$

: (3) حساب

نمبر 3 حالات

e^2	e^2	e^2	e^2	e^2	e	e^2	e	e
-------	-------	-------	-------	-------	-----	-------	-----	-----

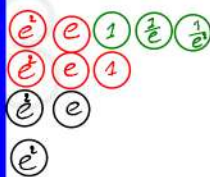
$$P(C) = \frac{A_1^1 A_2^1 A_2^1 + 2A_1^1 A_2^1 A_2^1 + 2A_2^1 A_1^1 A_2^1}{A_{11}^3} = \frac{20}{990} = \frac{2}{99}$$

: (4) حساب

نمبر 4 حالات

$$\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}, 1\right); \left(\frac{1}{e}, 1, e\right); \left(\frac{1}{e}, 1, e\right); (1, e, e); (e, e, e); (e^2, e^2, e)$$

$$P(b) = \frac{A_1^1 A_1^1 A_2^1 + A_1^1 A_2^1 A_4^1 + A_1^1 A_2^1 A_3^1 + A_2^1 A_3^1 A_4^1 + A_3^1 + A_4^1}{A_{11}^3} = \frac{70}{990} = \frac{7}{99}$$



المُعرِّين الثاني

١) كتابة u_n بدلالة n :

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ لدينا:

$$\begin{aligned} S_n &= U_0 + U_1 + \dots + U_n \\ &= 2^0 + 2^1 + \dots + 2^n \\ &= 2 \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} \\ &= 2^{n+2} - 1 \end{aligned}$$

من استنتاج $U_n \wedge S_n = 1$:

$$S_n = 2^{n+2} - 1 \quad \text{لدينا:}$$

$$S_n = 2^n + 2 - 1$$

$$2(2)^n - S_n = 1$$

$$2U_n - S_n = 1$$

توجد لنا قيمة $(u, v) = (2, -1)$ تحقق $uU_n + vS_n = 1$

ومن هنا حسب مبرهنة بيزو فإن $U_n \wedge S_n = 1$

(٢) - بواني قسمه u على f :

$$U_0 = 2^0 \equiv 1 [7] \quad \text{لدينا:}$$

$$U_1 = 2^1 \equiv 2 [7]$$

$$U_2 = 2^2 \equiv 4 [7]$$

$$U_3 = 2^3 \equiv 1 [7]$$

ومنه بواني مسمية U_n عدد 7 ناختها في الجدول التالي :

$n =$	3α	$3\alpha+1$	$3\alpha+2$	$\alpha \in \mathbb{N}$
$U_n =$	1	2	4	$[7]$

ب/ لتعين أن A مضاعف 7 :

$$A = (U_{2024} + U_{1962} - S_{1445})^{1954} - 2(6)^{2022} \quad [7]$$

$$= (2^{2024} + 2^{1962} - 2^{1445+1} + 1)^{1954} - 2(6)^{2022} \quad [7]$$

$$= (2^{3\alpha+2} + 2^{3\alpha} - 2^{3\alpha} + 1)^{1954} - 2(-1)^{2022} \quad [7]$$

$$= (4 + 1 - 1 + 1)^{1954} - 2 \quad [7]$$

$$= 5^{1954} - 2 \quad [7]$$

$$= (-2)^{1954} - 2 \quad [7]$$

$$= 2^{1954} - 2 \quad [7]$$

$$= 2^{3\alpha+1} - 2 \quad [7]$$

$$= 2 - 2 \quad [7]$$

$$= 0 \quad [7]$$

ومنه : $A \equiv 0 \quad [7]$

ج/ لتعيين قيم n التي مساوية لـ S_n مضاعف 7 :

$$S_{2n} \equiv 0 \quad [7] \quad \text{لدينا}$$

$$2^{2n+2} - 1 \equiv 0 \quad [7] \quad \text{معناه}$$

$$2^{2n+1} = 1[7] : \text{ومن}$$

$$\alpha \in \mathbb{N}^* \text{ صحيح}$$

$$2^{2n+1} = 3\alpha : \text{ومن}$$

$$2^{2n+1} \equiv 0[3] : \text{ومن}$$

$$2^n \equiv 2[3] : \text{ومن}$$

$$n \equiv 1[3] : \text{ومن}$$

$$(3 \wedge 2 = 1 : \text{في})$$

$$k \in \mathbb{N} \text{ صحيح}$$

$$n = 3k + 1 \text{ ومنه}$$

$$(3) \text{ ١/ تين اثبات } (S_1, S_2) \text{ حل لـ (E) :}$$

$$\begin{aligned} 4(S_2 - 1) - 7S_1 &= 4(2^{2+2} - 2 - 1) - 7(2^{1+1} - 1) \\ &= 4(6) - 7(3) \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\text{ومن النتيجة } (S_1, S_2) \text{ حل لـ (E)}$$

$$\text{حل في } \mathbb{Z}^* \text{ المعادلة (E) :}$$

$$\begin{cases} 4n - 7y = 3 \\ 4(6) - 7(3) = 3 \end{cases} \text{ لدينا}$$

$$4(n-6) - 7(y-3) = 0 : \text{نطرح المعادلتين من بعضهما البعض}$$

$$4(n-6) = 7(y-3) : \text{ومن}$$

$$4 \mid 7(y-3) \text{ و } 7 \mid 4(n-6) : \text{ومن}$$

$$4 \wedge 7 = 1 \text{ عكاس}$$

$$4 \mid y-3 \text{ و } 7 \mid n-6 : \text{لدينا (حسب خصوصية)}$$

$$k \in \mathbb{Z} \text{ صحيح } \begin{cases} n-6 = 7k \\ y-3 = 4k \end{cases} : \text{ومن}$$

$$\begin{cases} x = 7k + 6 \\ y = 4k + 3 \end{cases} \text{ ومنه :}$$

اذن حلول المعادلة (E) هي الثنائيات (x, y) من $\mathbb{Z}^2$ حيث :

$$(x, y) \in \{(7k+6; 4k+3) / k \in \mathbb{Z}\}$$

(4) تعيين الثمر الممكن لـ D :

$$D = xy \text{ لدينا}$$

$$\text{ومنه : } D \mid x \text{ و } D \mid y$$

$$\text{ومنه } D \mid 4x - 3y$$

$$\text{ومنه } D \mid 3$$

$$\text{اذن } D \in \{1, 3\}$$

(4) تعيين قيمة α :

$$P = \overline{1\alpha\alpha220}^4$$

لدينا :

$$= 0(4)^0 + 2(4)^1 + 2(4)^2 + \alpha(4)^3 + \alpha(4)^4 + 1(4)^5$$

$$= 320\alpha + 1064$$

$$\text{لدينا } P - 1 \equiv 0 [7]$$

$$\Rightarrow 320\alpha + 1064 - 1 \equiv 0 [7]$$

$$\text{ومنه : } 5\alpha + 6 \equiv 0 [7]$$

$$\text{ومنه : } 5\alpha \equiv 1 [7]$$

$$\text{ومنه : } 15\alpha \equiv 3 [7]$$

$$\text{ومنه : } \alpha \equiv 3 [7]$$

حيث $k \in \mathbb{N}$

$$\text{ومنه : } \alpha = 7k + 3$$

$$\text{ولدينا : } 0 \leq \alpha < 4$$

$$\text{ومنه : } \alpha = 3$$

$$P = \overline{133220}^4 = 2024 \text{ وحليته :}$$

المسألة الثالثة

(1) $L = 2 + \sqrt{3} + i$ نريد أن نكتبه =

لدينا =

$$|L| = |2 + \sqrt{3} + i|$$

$$= \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2 + (1)^2}$$

$$= \sqrt{4 + 3 + 4\sqrt{3} + 1}$$

$$= \sqrt{8 + 4\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{4(2 + 2\sqrt{3})}$$

$$= 2\sqrt{2 + 2\sqrt{3}}$$

(2) التحقق آتية = $L = 2\left[1 + \cos\frac{\pi}{6}\right] + 2i \sin\frac{\pi}{6}$

لدينا =

$$L = 2 + \sqrt{3} + i$$

$$= 2\left[1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right] + 2i \frac{1}{2}$$

$$= 2\left[1 + \cos\frac{\pi}{6}\right] + 2i \sin\frac{\pi}{6}$$

(3) $1 + \cos(2\theta) = 2\cos^2\theta$ نريد أن نثبت =

لدينا =

$$\cos^2\theta = \left[\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right]^2$$

$$= \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + 2}{4}$$

$$= \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{4} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{2} + 1 \right]$$

$$= \frac{1}{2} [\cos(2\theta) + 1]$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2} [\cos 2\theta + 1]$$

ومنه =

$$1 + \cos 2\theta = 2\cos^2\theta$$

ومنه =

ب/ تبیین آتے = $L = 4 \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + 4i \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$$L = 2 \left[1 + \cos \frac{\pi}{6} \right] + 2i \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= 2 \left[1 + \cos \left(2 \cdot \frac{\pi}{12} \right) \right] + 2i \sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{12} \right)$$

$$= 2 \left[2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{12} \right) \right] + 2i 2 \cos \left(\frac{\pi}{12} \right) \sin \left(\frac{\pi}{12} \right)$$

$$= 4 \cos^2 \frac{\pi}{12} + 4i \cos \frac{\pi}{12} \sin \frac{\pi}{12}$$

ج/ کتابت L حذر الشکل کاسی =

$$L = 4 \cos^2 \frac{\pi}{12} + 4i \cos \frac{\pi}{12} \sin \frac{\pi}{12}$$

$$= 4 \cos \frac{\pi}{12} \left[\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right]$$

$$= 4 \cos \frac{\pi}{12} e^{i \frac{\pi}{12}}$$

$$= 2\sqrt{2+\sqrt{3}} e^{i \frac{\pi}{12}}$$

د/ تبیین آتے = $L^6 = (8+4\sqrt{3})^3 i$

لرنا =

$$L^6 = \left(2\sqrt{2+\sqrt{3}} e^{i \frac{\pi}{12}} \right)^6$$

$$= \left(2\sqrt{2+\sqrt{3}} \right)^6 e^{i \frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}} \right)^2 \right]^3 i$$

$$= \left[4(2+\sqrt{3}) \right]^3 i$$

$$= (8+4\sqrt{3})^3 i$$

h: $z - \omega = 2(z - \omega)$

لرنا (I) (II)

d - $\omega = 2(L - \omega)$

حکایت

ومن

$$\begin{aligned}
 d &= 2(L - w) + w \\
 &= 2(2 + \sqrt{3} + i - \sqrt{3}) + \sqrt{3} \\
 &= 2(2 + i) + \sqrt{3} \\
 &= 4 + \sqrt{3} + 2i
 \end{aligned}$$

② تحديد صليبية (5):

$$|\bar{z} - 4 - \sqrt{3} + 2i| = |L|$$

لدينا:

$$|\bar{z} - 4 - \sqrt{3} + 2i| = |L|$$

$$|z - 4 - \sqrt{3} - 2i| = |L|$$

$$|z - (4 + \sqrt{3} + 2i)| = |L|$$

$$|z - d| = |L|$$

$$DM = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

ومنه (5) هي الدائرة التي مركزها D ونصف قطرها $2\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

المبحث الرابع

(I) ① حساب f'_x :

لدينا f_x قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

$$\begin{aligned}
 f'_x(x) &= 2e^{2x} - 2\alpha e^x \\
 &= (e - \alpha)2e^x
 \end{aligned}$$

ف نعين القيمة الحدية لـ f'_x :

$$2e^x > 0$$

$$e^x = 0 \Rightarrow e - \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = e$$

ف عا $\alpha \leq 0$: معناه $\alpha = \ln \alpha$ (وهذا مستحيل)

ومنه لا توجد أي قيمة حدية لـ f'_x على $\mathbb{R}$ ، $\alpha \leq 0$

ف عا $\alpha > 0$: معناه $\alpha = \ln \alpha$

اذن f'_x كثر قيمة حدية عند $\alpha = \ln \alpha$.

② / ١ تعيين الحد اثنى : Ω_α

لنا $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned} f_\alpha(h\alpha) &= e^{2h\alpha} - 2\alpha e^{h\alpha} + 3 \\ &= e^{h\alpha^2} - 2\alpha\alpha + 3 \\ &= \alpha^2 - 2\alpha^2 + 3 = 3 - \alpha^2 \end{aligned}$$

ومن ثم :

$$\Omega_\alpha(h\alpha; 3 - \alpha^2)$$

ب / ٢ تعيين مجموعة، لنقط Ω_α : $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$: $\alpha > 0$

$$\Omega_\alpha(h\alpha; 3 - \alpha^2) \text{ لنا } =$$

$$\begin{cases} \alpha = e^x \\ y = 3 - (e^x)^2 \end{cases} \text{ ومن ثم، } \begin{cases} x = h\alpha \\ y = 3 - \alpha^2 \end{cases} \text{ لنا } =$$

$$y = 3 - e^{2x} \text{ ومن ثم}$$

اذ $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$: $\alpha > 0$: Ω_α لنقط

$$x \mapsto 3 - e^{2x}$$

II ① / ٢ تعيين المستقيم المقاربة ل (C) :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - 2e^x + 3)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x(e^x - 2) + 3] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ لاني } =$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ((e^x)^2 - 2e^x + 3) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ لاني } =$$

ومنه (C_1) يقبل مقارب معادلته $y=3$

ب/ تغيرات f_n :

لينا: $f_n'(x) = (e^x - 1)2e^x$

بحالتج 170

فايت (C_1) يقبل قيمة حدية عند $(-1; 3)$ $\Omega_n(h_n)$
 أي عند: $\Omega_n(0; 2)$

وعليه 2

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	$+$

لينا f_n متزايدة تمامًا على $]0, +\infty[$
 ومتناقصه تمامًا على $]0, -\infty[$

جدول تغيرات f_n :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	$+$
$f_n(x)$	3	2	$+\infty$

② معادلة المماس (T)

لينا: $f_n(x) = 3$

معناه $e^{2x} - 2e^x + 3 = 3$

ومنه $e^x(e^x - 2) = 0$

ومنه: $e^x - 2 = 0$ (لا يت $e^x \neq 0$)

ومنه: $e^x = 2$

ومنه $x = \ln 2$

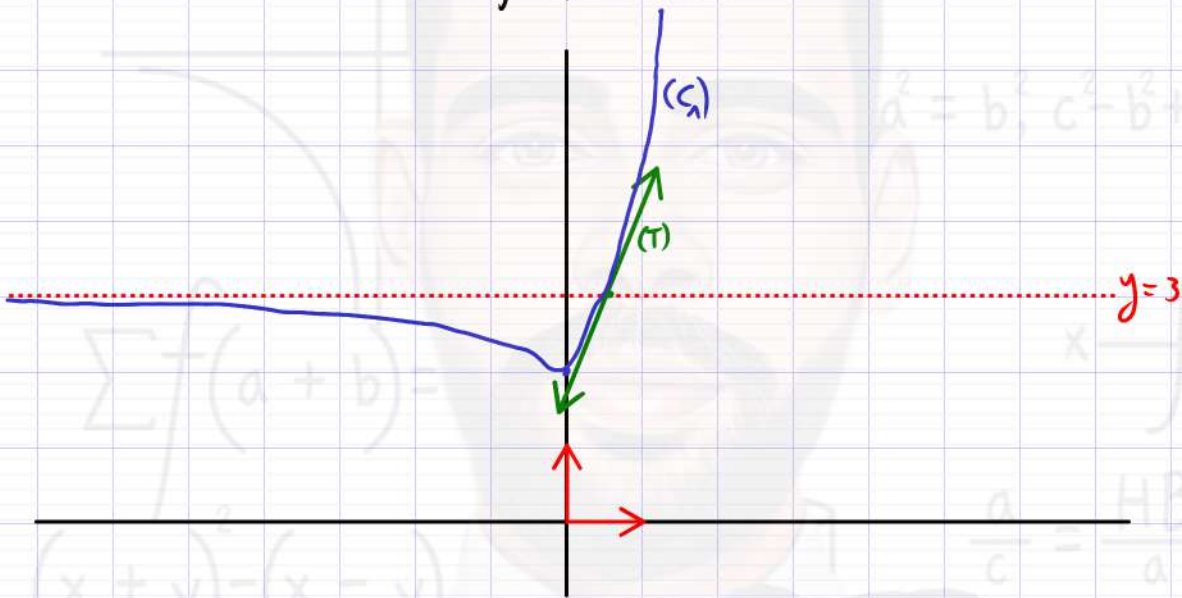
ومنه (T) مماس ل (C_1) في النقطة $A(\ln 2, 3)$

اذن :

$$\begin{aligned} (T) : y &= f_n(p_2)(n - p_2) + f_n(p_2) \\ &= 4(n - p_2) + 3 \\ &= 4n - p_2 + 3 \end{aligned}$$

③ رسم (T) و (C₁)

$$\begin{cases} f(1) \approx 4.95 \\ f(2) \approx 42.82 \end{cases} \quad \text{لدينا} =$$



④ / م تبين ان (Δ_m) تمثل نقطة ثابتة :

$$(\Delta_m) : y = mx + 3 - mp_2 \quad \text{لدينا}$$

$$mx + 3 - mp_2 - y = 0 \quad \text{ومن}$$

$$(n - p_2)m + 3 - y = 0 \quad \text{ومن}$$

$$\begin{cases} n - p_2 = 0 \\ 3 - y = 0 \end{cases} \quad \text{ومن}$$

$$\begin{cases} n = p_2 \\ y = 3 \end{cases} \quad \text{ومن}$$

اذن جميع المستقيمات (Δ_m) تدور حول A(p₂, 3)

ب/ المناقشة، لبيانتي

$$e^n(e^n - 2) = m(n - p_2) \quad \text{لدينا}$$

$$e^{2n} - 2e^n + 3 = mn - mp_2 + 3 \quad \text{ومن}$$

$$f_1(n) = \gamma(\Delta_m) \quad \text{ومن} \quad (E) \dots$$

وعليه حلول (E) هي عوامل نقط تقاطع (C) مع المستقيمة (Δ_p)
برسي:

$$m \leq 0 \quad \text{ل} \quad (E) \text{ حل وحيد}$$

$$0 < m < 4 \quad \text{ل} \quad (E) \text{ حلان}$$

$$m = 4 \quad \text{ل} \quad (E) \text{ حل وحيد (مضاعف)}$$

$$m > 4 \quad \text{ل} \quad (E) \text{ حلان}$$

(III) ① كتابة g(n) بدلالة f₁(n):

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، لدينا:

$$\begin{aligned} g(n) &= -e^{2n} + 2e^n + 3 \\ &= -(e^{2n} - 2e^n + 3) + 6 \\ &= -f_1(n) + 6 \end{aligned}$$

$$g(n) = 6 - f_1(n) \quad \text{ومن}$$

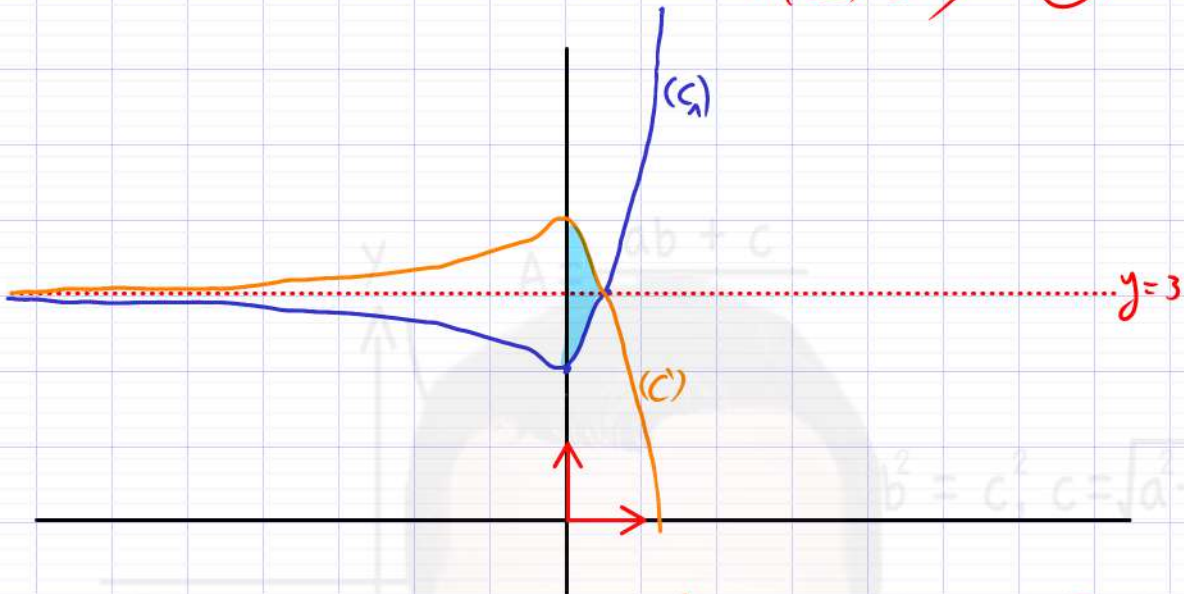
تذكير
(f) و (g) متماثلان بالنسبة للمستقيم ذو
المعادلة $y = a$ معناه: $f(n) + g(n) = 2a$

$$g(n) = -f_1(n) + 6 \quad \text{لدينا}$$

$$g(n) + f_1(n) = 2(3) \quad \text{ومن}$$

ومن (C₁) و (C') متماثلان بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة $y = 3$

② رسم (C) :



③ تبين أن $A=1$:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^{h_2} (g(x) - f_1(x)) dx \\
 &= \int_0^{h_2} (-e^{2x} + 2e^x + 3 - e^{2x} + 2e^x - 3) dx \\
 &= \int_0^{h_2} (-2e^{2x} + 4e^x) dx \\
 &= -e^{2x} + 4e^x \Big|_0^{h_2} \\
 &= -e^{2h_2} + 4e^{h_2} + e^{2(0)} - 4e^0 \\
 &= -4 + 8 + 1 - 4 = \boxed{1 \text{ وحدة}}
 \end{aligned}$$



﴿ بالتوفيق والنجاح لجموع التلاميذ الشرفاء ﴾

الموضوع الثاني

التعريف الأول

① دراسة بوابتي قسمة 4^n على 13 :

$$4^0 \equiv 1 [13] \quad \text{لدينا}$$

$$4^1 \equiv 4 [13]$$

$$4^2 \equiv 3 [13]$$

$$4^3 \equiv 4^2 \times 4 [13] \equiv 12 [13]$$

$$4^4 \equiv 4^3 \times 4 [13] \equiv 9 [13]$$

$$4^5 \equiv 4^4 \times 4 [13] \equiv 10 [13]$$

$$4^6 \equiv 4^5 \times 4 [13] \equiv 1 [13]$$

ومن البوابتي قسمة 4^n على 13 نلاحظ في الجدول التالي

$n =$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	$k \in \mathbb{N}$
$4^n \equiv$	1	4	3	12	9	10	[13]

② نضرب قيم n حيث (E_n) تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}^2$:

لدينا

$$286 = 247(1) + 39$$

$$247 = 39(6) + 13$$

$$39 = 13(3) + 0$$

$$\text{و منه } \text{PGCD}(286; 247) = 13$$

المعادلة (E_n) تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}^2$

$$13 \mid 4^n - 25$$

معناه

$$k \in \mathbb{N} ; \quad 4^n - 25 = 13k \quad \text{وضوح}$$

$$4^n - 25 \equiv 0 [13] \quad \text{ومنه}$$

$$4^n \equiv 25 [13] \quad \text{ومنه}$$

$$4^n \equiv 12 [13] \quad \text{ومنه}$$

$$n = 6k + 3 \quad \text{مع } k \in \mathbb{N}$$

(3)

1/ نبيين أن (E_3) تكافئ (E') :

$$(E_3): 286x - 247y = 39 \quad \text{لدينا}$$

$$(E'): 22x - 19y = 3 \quad \text{ومنه}$$

$$(E') \Leftrightarrow (E_3) \quad \text{اذن}$$

- حل المعادلة (E') :

$$(E') \quad \text{نلاحظ أن } (1, 1) \text{ حل خاص لـ}$$

$$\begin{cases} 22x - 19y = 3 \end{cases} \quad \text{ومنه}$$

$$\begin{cases} 22(1) - 19(1) = 3 \end{cases}$$

$$\text{بالضرب نجد: } 22(x-1) = 19(y-1)$$

$$22 \mid 19(y-1) \quad \text{ومنه} \quad 19 \mid 22(x-1)$$

$$22 \wedge 19 = 1 \quad \text{بما أن}$$

فإنه (حساب غوسي):

$$22 \mid y-1 \quad \text{و} \quad 19 \mid x-1$$

$$y-1 = 22k \quad \text{و} \quad x-1 = 19k \quad \text{ومنه}$$

$$y = 22k+1 \quad \text{و} \quad x = 19k+1 \quad \text{ومنه}$$

اذن حلول (E') هي أزواج (x, y) من $\mathbb{Z}^2$ حيث:

$$(x, y) \in \{ (19k+1, 22k+1) \}$$

ب/ تعيين القيم الممكنة لـ $\text{PGCD}(n, y)$:

لكن $d = n \wedge y$

لذا $d \mid n$ و $d \mid y$

ومنه $d \mid 22n - 19y$

ومنه $d \mid 3$

ومنه $d \in D_3$

ومنه $d \in \{1, 3\}$

ج/ تعيين النتائج (الناتج) (n, y) حلول (E) حيث $n \wedge y = 3$:

لذا $n \wedge y = 3$

ومنه $\begin{cases} n \equiv 0 [3] \\ y \equiv 0 [3] \end{cases}$

ومنه $\begin{cases} 19k+1 \equiv 0 [3] \\ 22k+1 \equiv 0 [3] \end{cases}$

ومنه $\begin{cases} k+1 \equiv 0 [3] \\ k+1 \equiv 0 [3] \end{cases}$

ومنه $k+1 \equiv 0 [3]$

اذ $k \equiv 2 [3]$

$k = 3k' + 2$

مع $k' \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} x = 19k + 1 \\ y = 22k + 1 \end{cases} \text{ لدينا}$$

$$k' \in \mathbb{Z} \text{ مع } \begin{cases} x = 5k' + 39 \\ y = 66k' + 45 \end{cases} \text{ وحلها:}$$

دا تقيس النتيحة (n, y) حلو (E) حيث $|2n - y| < 17$

$$\text{لدينا } |2n - y| < 17$$

$$|2(19k + 1) - (22k + 1)| < 17 \text{ معناه}$$

$$|16k + 1| < 17 \text{ وهو}$$

$$-17 < 16k + 1 < 17 \text{ وهو}$$

$$-18 < 16k < 16 \text{ وهو}$$

$$-1.1 < k < 1 \text{ وهو}$$

$$k \in]-1; 0[\text{ وهو}$$

اذن:

$$(n, y) \in \{(-18, -21); (1, 1)\}$$

المشرف الثاني

(I) كتابة α على الشكل الجبري =

$$\begin{cases} \alpha + \bar{\alpha} = 2\sqrt{2 + \sqrt{21}} \\ \alpha + \bar{\alpha} = 2\operatorname{Re}(\alpha) \end{cases} \text{ لدينا}$$

$$2\operatorname{Re}(\alpha) = 2\sqrt{2 + \sqrt{21}} \text{ وحلها:}$$

$$\operatorname{Re}(\alpha) = \sqrt{2 + \sqrt{21}} \text{ ومنه:}$$

$$\begin{cases} \alpha \bar{\alpha} = 4 \\ \alpha \bar{\alpha} = \text{Re}^2(\alpha) + \text{Im}^2(\alpha) \end{cases} \quad \text{ولينا}$$

$$\text{Re}^2(\alpha) + \text{Im}^2(\alpha) = 4 \quad \text{ومنى}$$

$$2 + \sqrt{2} + \text{Im}^2(\alpha) = 4 \quad \text{ومنى}$$

$$\text{Im}^2(\alpha) = 2 - \sqrt{2} \quad \text{ومنى}$$

$$\text{Im}(\alpha) = -\sqrt{2-\sqrt{2}} \quad \text{أو} \quad \text{Im}(\alpha) = \sqrt{2-\sqrt{2}} \quad \text{ومنى}$$

$$\text{Im}(\alpha) > 0 \quad \text{لكن}$$

$$\text{Im}(\alpha) = \sqrt{2-\sqrt{2}} \quad \text{اذن}$$

$$\begin{cases} \text{Re}(\alpha) = \sqrt{2+\sqrt{2}} \\ \text{Im}(\alpha) = \sqrt{2-\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{ولينا}$$

$$\alpha = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}} \quad \text{اذن}$$

$$\text{ب/ كتابة } \alpha^2 \text{ على الشكل الأسّي:}$$

$$\alpha = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}} \quad \text{ولينا}$$

$$\text{ومنى}$$

$$\alpha^2 = \frac{2+\sqrt{2} - (2-\sqrt{2}) + 2i\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}}{2}$$

$$= 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{4-2}$$

$$= 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$$

$$= 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$= 4\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 4e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\alpha = 2e^{i\frac{\pi}{8}} \quad \text{2) ا) تبياناً صحيح}$$

$$|\alpha^2| = 4 \quad \text{لدينا ،}$$

$$|\alpha| = 2 \quad \text{و هو :}$$

$$\arg(\alpha^2) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{ولدينا :}$$

$$2\arg(\alpha) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{و هو :}$$

$$\arg(\alpha) = \frac{\pi}{8} + k\pi \quad \text{و هو :}$$

$$k = 2k' \quad (k' \in \mathbb{Z}) \quad \text{لأنه}$$

$$\arg(\alpha) = \frac{\pi}{8} + 2k'\pi \quad \text{فإنه}$$

$$k = 2k' + 1 \quad (k' \in \mathbb{Z}) \quad \text{لأنه}$$

$$\arg(\alpha) = \frac{\pi}{8} + \pi + 2k'\pi \quad \text{فإنه}$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\alpha) > 0 \\ \operatorname{Im}(\alpha) > 0 \end{cases}$$

بما أنه

$$\arg(\alpha) = \frac{\pi}{8} + 2k'\pi \quad \text{فإنه}$$

$$\alpha = 2e^{i\frac{\pi}{8}} \quad \text{اذن :}$$

ب) استخرج القيمة المضبوطة لـ $\tan(\frac{\pi}{8})$

$$\alpha = 2e^{i\frac{\pi}{8}} \quad \text{لدينا -}$$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$$

$$= \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$\begin{cases} 2\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{2+\sqrt{2}} \\ 2\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{2-\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{و هو :}$$

$$\begin{cases} 2\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{2+\sqrt{2}} \\ 2\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{2-\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{cases} \quad \text{اذن :}$$

مرحلة 2

$$\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

(II) ① تعيين قيم n حيث L_{4n} جذبي صرف.

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ لدينا ، $L_{4n} \in \mathbb{Q} - \mathbb{R}$

$$\arg(\alpha^{4n}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{معناه}$$

$$4n \cdot \arg(\alpha) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ومنه}$$

$$4n \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{نقسم}$$

$$n = 2k+1 \quad \text{نجدد}$$

(2) ② / 1 تعيين L_n حسابية :

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ لدينا ،

$$\begin{aligned} L_{n+1} &= \arg(L_{n+1}) \\ &= \arg(\alpha^{n+1}) \\ &= \arg(\alpha^n \cdot \alpha) \\ &= \arg(\alpha^n) + \arg(\alpha) \\ &= \arg(L_n) + \frac{\pi}{8} \\ &= L_n + \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

اذ $r = \frac{\pi}{8}$ (حسابية أساسية) (H_n) وحاصلها V_0 حيث

$$\begin{aligned} U_0 &= \arg L_0 \\ &= \arg(L^0) \\ &= \arg(1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

= كتابة H_n بدلالة n :

$$\begin{aligned} U_n &= U_0 + nr \\ &= \frac{n\pi}{8} \end{aligned}$$

من اجل كل $n \in \mathbb{N}$ لدينا =

ب/ حساب بدلالة n المجموع S_n :

من اجل كل $n \in \mathbb{N}$ لدينا =

$$S_n = \arg(L_0 \times L_1 \times \dots \times L_n)$$

$$= \arg(\overline{L_0 \times L_1 \times \dots \times L_n})$$

$$= -\arg(L_0 \times L_1 \times \dots \times L_n)$$

$$= -[\arg(L_0) + \arg(L_1) + \dots + \arg(L_n)]$$

$$= -[U_0 + U_1 + \dots + U_n]$$

$$= -\frac{1}{2}(n+1)(U_0 + U_n)$$

$$= -\frac{1}{2}(n+1)\arg(L_n)$$

$$= -\frac{1}{2}(n+1) \frac{9\pi}{8}$$

$$= \frac{-n\pi(n+1)}{16}$$

(3) أ/ تعيين (E_1) :

$$z = L_1(L_2 - e^{i\theta})$$

$$z = L_1 L_2 - L_1 e^{i\theta}$$

$$z = L_3 - d e^{i\theta}$$

$$z = L_3 + d e^{i\frac{7\pi}{8}} e^{i\theta}$$

$$z - L_3 = 2 e^{i\frac{7\pi}{8}} e^{i\theta}$$

$$z - L_3 = 2 e^{i(\frac{7\pi}{8} + \theta)}$$

من أجل $\theta \in \mathbb{R}$ ، لدينا :

مضاد

ومضاد

ومضاد

ومضاد

ومضاد

$$\theta \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z} \quad \left\{ \begin{array}{l} MB = 2 \\ (\vec{ML}, \vec{MB}) = \frac{9\pi}{8} + \theta + 2k\pi \end{array} \right.$$

إذن (E_1) هي دائرة التي

◀ مركزها النقطة B

◀ نصف قطرها 2

ب/ تعيين (E_2) :

$$\arg[(iz + i\overline{L_2})^2] = \frac{3\pi}{4} + 4k\pi \quad \text{لدينا}$$

$$2 \arg [i(z - z_2)] = \frac{5\pi}{4} + 4k\pi \quad \text{معناه}$$

$$\arg [i(z - z_2)] = \frac{3\pi}{8} + 2k\pi \quad \text{ومع}$$

$$\arg(i) + \arg(z - z_2) = \frac{3\pi}{8} + 2k\pi \quad \text{ومع}$$

$$\frac{\pi}{2} + \arg(z - z_2) = \frac{3\pi}{8} + 2k\pi \quad \text{ومع}$$

$$\arg(z - z_2) = -\frac{\pi}{8} + 2k\pi \quad \text{ومع}$$

$$(\vec{u}, \vec{MA}) = -\frac{\pi}{8} + 2k\pi \quad \text{وعليه}$$

اذ $C(E_2)$ هي نصف اطياف $\vec{v}$ منه $\vec{u}$
النقطة A هي $\tan(-\frac{\pi}{8})$

المبحث الثالث

① اثبات $P_2 = \frac{2}{21}$

$$\sum_{i=1}^6 p_i = 1 \quad \text{لنا}$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1 \quad \text{ومع}$$

لنا الأعداد $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ تشكل هذا الترتيب
متتالية حسابية أساسها v

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = \frac{6}{2}(p_1 + p_6) \quad \text{معناه}$$

$$\frac{6}{2}(p_1 + p_6) = 2 \quad \text{وعليه}$$

$$(I) \dots P_1 + P_6 = \frac{1}{3} = \text{ومنه}$$

ولدينا: الأعداد P_1, P_2, P_4 تشكل هذا الترتيب متتالية هندسية أساسها 9

$$(II) \dots P_1 \cdot P_4 = P_2^2 \quad \text{معناه}$$

$$P_1 = P_2 - r \quad \text{ومنه} \quad P_2 = P_1 + r \quad \text{ولدينا}$$

$$\begin{cases} P_4 = P_2 + 2r \\ P_6 = P_2 + 4r \end{cases} \quad \text{ولدينا}$$

$$\neq \text{لنعوض في (I) نجد: } P_2 + 2r + P_2 + 4r = \frac{1}{3}$$

$$(III) \dots 2P_2 + 6r = \frac{1}{3} = \text{ومنه}$$

$$\neq \text{لنعوض قيمة } P_1 \text{ و } P_4 \text{ في (II) نجد: } (P_2 - r)(P_2 + 2r) = P_2^2$$

$$rP_2 - 2r^2 = 0 \quad \text{ومنه}$$

$$r(P_2 - 2r) = 0 \quad \text{ومنه}$$

$$(r \neq 0) \quad P_2 - 2r = 0 \quad \text{ومنه}$$

$$P_2 = 2r = \text{ومنه}$$

$$\neq \text{لنعوض قيمة } P_2 \text{ في (III) نجد: } 2(2r) + 6r = \frac{1}{3}$$

$$P_2 = \frac{2}{21} \text{ و } r = \frac{1}{21} = \text{ومنه}$$

$$P_1 = P_2 - r \quad \text{اذن،}$$

تکافؤ: $P_1 = \frac{1}{21}$

اذاً من آبی کل $1 \leq k \leq 6$ لیا $P_k = \frac{k}{21}$

② 1/ حساب $P(A)$ ، $P(B)$ و $P(C)$:

من آبی کل $1 \leq k \leq 6$ لیا:

k	1	2	3	4	5	6
P_k	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

وکل:

• $P(A) = P_2 + P_4 + P_6 = \frac{2+4+6}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$

• $P(B) = 1 - (P_1 + P_2) = 1 - \frac{1+2}{21} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$

• $P(C) = P_3 + P_4 = \frac{3+4}{21} = \frac{1}{3}$

ب) 1/ حساب احتمال الحصول على عدد أكبر من أو يساوي 3
علماً أنه زوجي:

$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{4+6}{21}}{\frac{12}{21}} = \frac{5}{6}$

ج) 1/ تبين أن A و B مستقلتان:

• لیا: $P(A) \cdot P(B) = \frac{24}{49}$

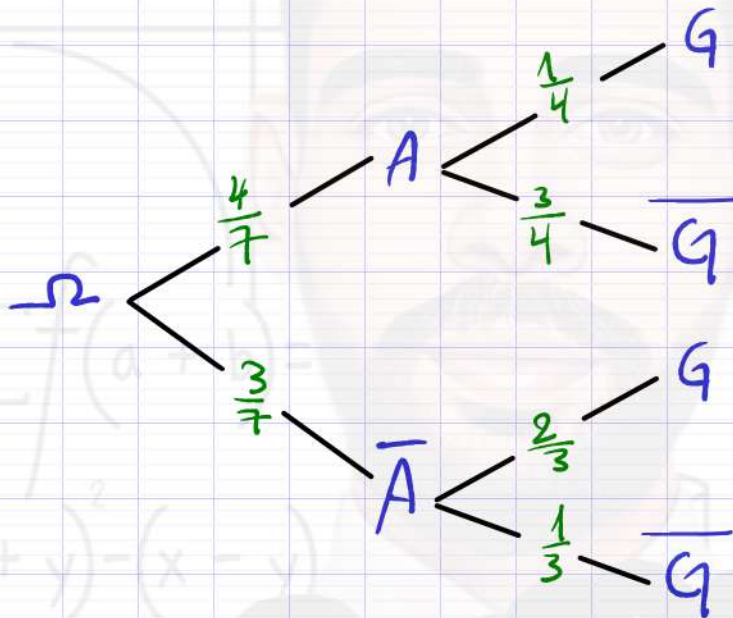
$$P(A \cap B) = P_4 + P_6 = \frac{4+6}{21} = \frac{10}{21}$$

$$P(A) \cdot P(B) \neq P(A \cap B) \quad \text{مما يعني}$$

فان A و B غير مستقلتان

$$P(A \cap G) \quad \text{أو} \quad \text{نفس}$$

نستخدم هذه الطريقة بشجرة الاحتمالات:



$$P(A \cap G) = \frac{4}{7} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{7} \quad \text{ومن}$$

$$P(G) \quad \text{أو} \quad \text{نفس}$$

$$P(G) = P(A \cap G) + P(\bar{A} \cap G)$$

$$= \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{7}$$

(I)
(1) حساب نهاية الدالة P_n :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} P_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - n + n \ln x)$$

$$= -\infty$$

$$\begin{cases} n \geq 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} P_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - n + n \ln x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + n \ln x)$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

ب/ اعتبار الدالة P_n :

لدينا P_n قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ حسب:

$$P'_n(x) = 2x + \frac{n}{x}$$

$$= \frac{2x^2 + n}{x}$$

$$D_g = \mathbb{R}_+^*$$

$$n \geq 2$$

نعم
نعم

لدينا : $n > 0$
ولدينا : $2n^2 + n > 0$

اذن $h'_n(n) > 0$

ومما h_n متزايدة - تمامًا على $]0, +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$h'_n(x)$		+
$h_n(x)$		$+\infty$

- ∞ $\rightarrow$

② / تبيّن أن $h_n(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α_n :

لدينا h_n متزايدة - تمامًا على $I =]0, +\infty[$

ولدينا : $[1, e] \subset I$

$$\begin{cases} h_n(1) \approx 1 - n \leq 0 \\ h_n(e) \approx e^2 > 0 \end{cases}$$

ولدينا :

ومن حساب مبرهن القيمة المتوسطة $h_n(x) = 0$ تقبل حلاً

وحيداً α_n حيث $1 \leq \alpha_n < e$

بما أن $h_n(x) = 0$

x	0	α_n	$+\infty$
$h_n(x)$		-	+

$$f_n(x) = x - n - \frac{n \ln x}{n} \quad (II)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = +\infty \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{n} = -\infty$$

التفسير الهندسي: (C_f) يقل مع x معادلة $x=0$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-n) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n \ln x}{n} = 0 \end{cases}$$

② / تبين آت (ب) مع ماكل (ب)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f_n(x) - y_{\Delta_n}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{n \ln x}{n} \right] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{n} = 0$$

ب / د، است و حصة (C_n) المنحنية إلى (Δ_n)

من أجل كل $x > 0$ و $n \geq 1$ لدينا

$$f_n(x) - (x-n) = -\frac{n \ln x}{n}$$

لذا $n > 0$

$$-n p_n x = 0$$

$$n = 1$$

ولذا

هنا

وعليه

x	0	1	$+\infty$
$f_n(x) - y_0$		+	-

◀ (C_n) فوق (Δ_n) لـ $0 < n < 1$

◀ (C_n) تحت (Δ_n) لـ $n > 1$

◀ (C_n) يقطع (Δ_n) في $A_n(1, 1-n)$

$$f'_n(x) = \frac{h_n(x)}{x^2}$$

③ / تبي أن

لذا f_n قابلة للتفاضل على $[0, +\infty[$ و $h_n > 0$

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= 1 - \frac{\frac{n}{x}x - n p_n x}{x^2} \\ &= \frac{x^2 - n - n p_n x}{x^2} \\ &= \frac{h_n(x)}{x^2} \end{aligned}$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير f_n :

$$f'_n(n) = \frac{h_n(n)}{n^2} \quad \text{لدينا}$$

$$x^2 > 0 \quad \text{مما يترتب عنه}$$

فإن :

n	0	α_n	$+\infty$
$f'_n(n)$		-	+

و $f_n(n)$ متزايدة - متناقصا على $[\alpha_n; +\infty[$ و متناقصا - متزايدا على $]0; \alpha_n]$

n	0	α_n	$+\infty$
$f'_n(n)$		-	+
$f_n(n)$		$f_n(\alpha_n)$	$+\infty$

$$f_n(\alpha_n) = 2\alpha_n - n - \frac{n}{\alpha_n} \quad (4) \quad \text{التي يجب التحقق منها}$$

من أجل كل $n \geq 1$ ، $n > 0$ لدينا $f_n(\alpha_n) = 0$

$$\alpha_n^2 - n + n h_n \alpha_n = 0 \quad \text{و مما يلي}$$

$$h_n \alpha_n = \frac{n - \alpha_n^2}{n} \quad \text{و مما يلي}$$

$$f_{\alpha}(x_n) = x_n - n - \frac{n p_n x_n}{x_n} \quad \text{و منه :}$$

$$= x_n - n - \frac{n \left(\frac{n - x_n^2}{n} \right)}{x_n}$$

$$= x_n - n - \frac{n - x_n^2}{x_n}$$

$$= x_n - n - \frac{n}{x_n} + x_n$$

$$= 2x_n - n - \frac{n}{x_n}$$

(٥) تبين أنه يوجد مقامات يوازى (Δ_n) :

$$\Delta_n \parallel T_n$$

معناه يوجد عدد صحيح a يحقق $f'_n(a) = 1$

$$\frac{a^2 - n + n p_n a}{a^2} = 1 \quad \text{و منه :}$$

$$a^2 - n + n p_n a = a^2 \quad \text{و منه :}$$

$$n p_n a = n \quad \text{و منه :}$$

$$p_n a = 1 \quad \text{و منه :}$$

$$a = e \quad \text{و منه :}$$

ومن يوجد محاسن لـ (C_n) يوزن (Δ_n) معادلة :

$$\begin{aligned} (T_n): y &= f'_n(e)(n-e) + f_n(e) \\ &= n-e + e-n - \frac{n}{e} \\ &= n - \left(n + \frac{n}{e}\right) \end{aligned}$$

6/1 / التحقق آن $t=1$ هو الحل الوحيد للمعادلة :

من أجل كل $t > 0$ لدينا :

$$1-t = 2 \ln t$$

$$1-t-2 \ln t = 0 \quad \text{كفحي}$$

$$\varphi(t) = 1-t-2 \ln t \quad \text{نضع}$$

لدينا φ قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ حيث :

$$\varphi'(t) = -1 - \frac{2}{t} = -\frac{t+2}{t}$$

لدينا $t > 0$ ولدينا $-(t+2) = 0$ صاه $t = -2$
ولدينا $\varphi(1) = 0$

t	0	1	$+\infty$
$\varphi'(t)$	$-\infty$	$-$	$-$
$\varphi(t)$	$+\infty$	0	$-\infty$

اذن $t = 1$ هو الحل الوحيد للمعادلة $1-t=2ht$
 ب/ تبين أنه يوجد مسائل وحيد (n) يشمل مبدأ الحكم:

(D_n) مسائل (n) يشمل مبدأ الحكم

معناه يوجد عدد صحيح b حيث:

$$f'_n(b)(1-b) + f_n(b) = 0$$

$$\frac{b^2 - n + nhb}{b^2}(-b) + b - n - \frac{nhb}{b} = 0 \quad \text{ومما}$$

$$\frac{-(b^2 - n + nhb) + b^2 - nb - nhb}{b} = 0 \quad \text{ومما}$$

$$-b^2 + n - nhb + b^2 - nb - nhb = 0 \quad \text{ومما}$$

$$n - nb - 2hb = 0 \quad \text{ومما}$$

$$n(1 - b - 2hb) = 0 \quad \text{ومما}$$

$$1 - b - 2hb = 0 \quad \text{ومما}$$

$$v(b) = 0 \quad \text{ومما}$$

$$b = 1 \quad \text{ومما}$$

اذن يوجد مسائل وحيد (n) يشمل

صيغة التaylor : $\dots$

$$\begin{aligned}(D_n): y &= f'_n(1)(x-1) + f_n(1) \\ &= (1-n)(x-1) + 1-n \\ &= (1-n)x\end{aligned}$$

$$g(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$$

(١) لتعريف g = الدالة

لدينا g دالة متصلة على $[1, 2]$ $\hookrightarrow$ $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}g'(x) &= f'_{n+1}(x) - f'_n(x) \\ &= \frac{f_{n+1}(x) - f_n(x)}{x^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{x^2} (x^2 - (n+1) + (n+1)nx - x^2 + n - nxn) \\ &= \frac{1}{x^2} (-n-1 + nx + nx + n - nxn) \\ &= \frac{1}{x^2} (-1 + nx)\end{aligned}$$

لدينا $n > 0$

$$-1 + \ln n = 0$$

$$n = e$$

ولدينا ،
معناه ،

n	0	e	$+\infty$
$g'(n)$	$\parallel$	$-$	$+$

اذن ،

وعليه g متزايدة تمامًا على $[e, +\infty[$

ومتناقصه تمامًا على $]0, e[$

(2) نبيان أن $g(n) = 0$ تقبل حصة رصيدة β :

ليتنا g مستمرة ومتناقصه تمامًا على $]0, e[$

ولدينا $\exists 0, s ; 0, t \subset]0, e[$

$$\begin{cases} g(0,6) \approx -0,14 \\ g(0,5) \approx 0,38 \end{cases}$$

اذن حسب مبرهنة القيمة المتوسطة $g(n) = 0$ تقبل حصة رصيدة β حيث $0,5 < \beta < 0,6$

(3) الوضع النسبي بين (C_n) و (C_{n+1})

من أجل كل $n > 0$ و $n \geq 1$ لدينا -

$$f_{n+1}(n) - f_n(n) = g(n)$$

وعليه ،

◀ (C_{n+1}) فوق (C_n) لما $0 < n < 1$

◀ (C_{n+1}) تحت (C_n) لما $n > 1$

◀ (C_{n+1}) يقطع (C_n) في $B_n(e, e - n - \frac{n}{e})$

$$\textcircled{4} \quad \text{تبيين ان } f_n(\beta) = \beta$$

من اجل كل $n > 0$ لدينا :

$$g(n) = f_{(n+1)}(x) - f_n(x)$$

$$= x - (n+1) - \frac{(n+1) \ln x}{x} - x + n + \frac{n \ln x}{x}$$

$$= -1 - \frac{\ln x}{x}$$

$$= -\left(1 + \frac{\ln x}{x}\right)$$

من اجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ لدينا : $g(\beta) = 0$

$$-\left(1 + \frac{\ln \beta}{\beta}\right) = 0 \quad \text{وذن}$$

$$\frac{\ln \beta}{\beta} = -1 \quad \text{وذن}$$

$$\ln \beta = -\beta \quad \text{وذن}$$

$$f_n(\beta) = \beta - n + \frac{n \beta}{\beta} \quad \text{فعلينا}$$

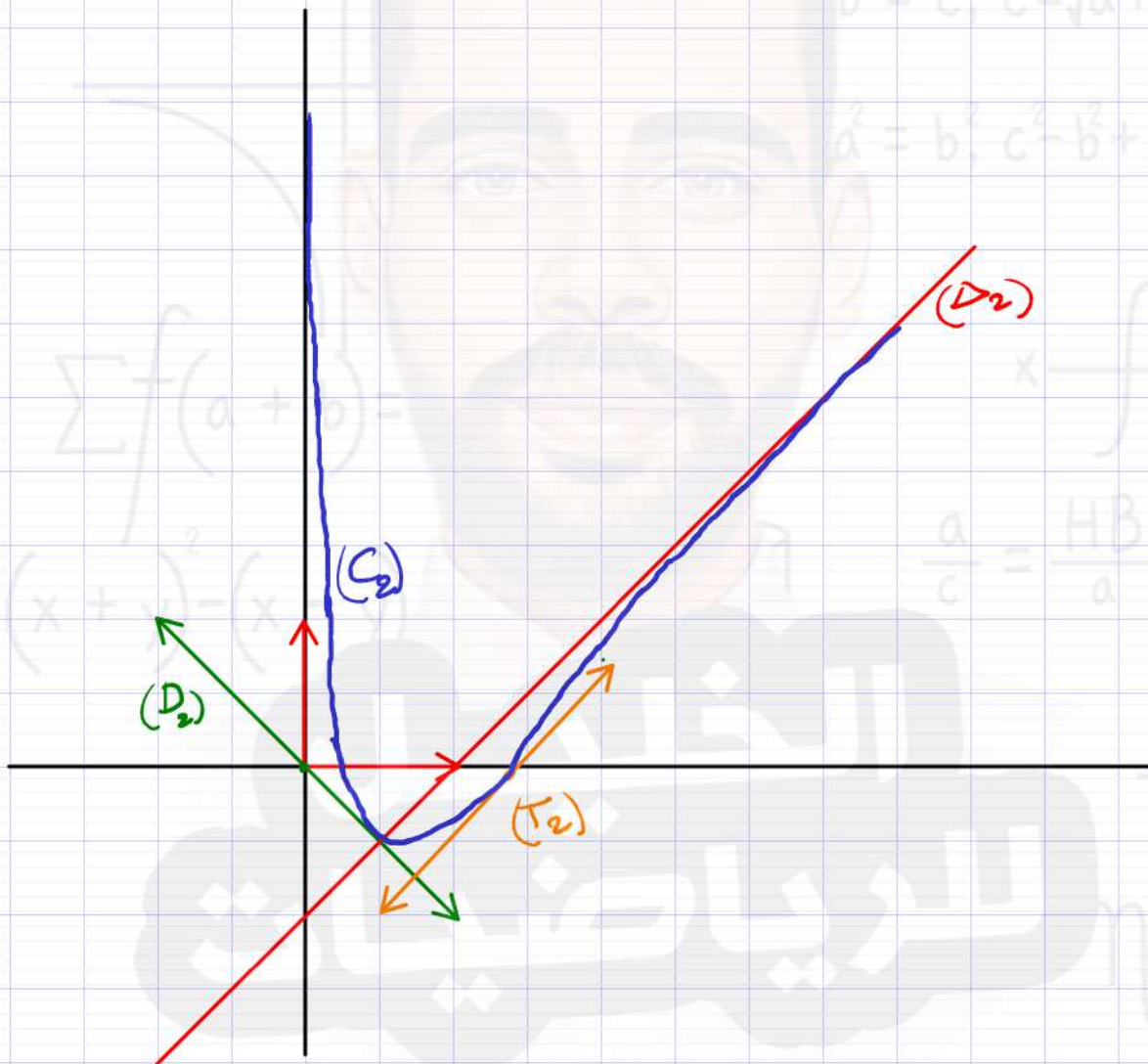
$$= \beta - n + n$$

$$= \beta$$

(IV)

① رسم (C_2) من أجل $n=2$ لدينا

$$\begin{cases} (T_2): y = x - 2\left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ (A_2): y = x - 2 \\ (D_2): y = -x \end{cases}$$



② المتانسة اليانية :

حل المعادلة $f_2(x) = mx$ في ضواصل نقط تقاطع(C) مع طسقية $y = mx$ = المعادلة

$$y = mx$$

لينا

$$mx - y = 0$$

ومد

$$\begin{cases} x = 0 \\ -y = 0 \end{cases}$$

ومد

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

ومد

اذن المستقيمات ذات المعادلة $y = mx$

تدور حول مبدأ المحاور.

ووجد أنه طال: $-1 < m < -2\left(1 + \frac{1}{e}\right)$

للمعادلة حسين متصلي



﴿بالتوفيق والنجاح لجموع التلاميذ الشرفاء﴾