# مجلة Top Maths

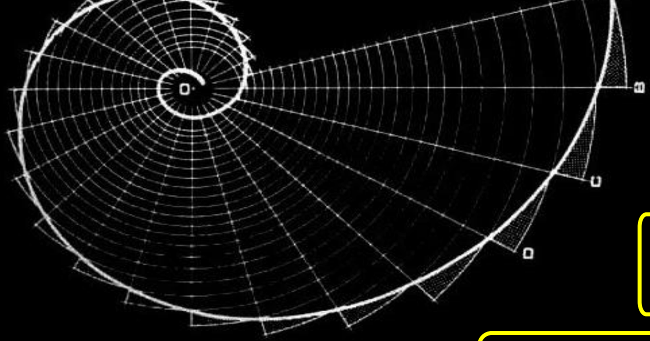
# 2AS M TM

## المتتاليات العددية

## numerical sequence

المجلة تتضمن
- ✓ ملخص
- ✓ درس مفصل
- ✓ متتاليات حسابية
- ✓ متتاليات هندسية
- ✓ تمارين شاملة مع الحل المفصلة

اعداد الاستاذ بوشناق يوسف




افريل 2020

Top Maths Tlemcen

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1,6180339887498948204586834365$$

بسم الله الرحمن الرحيم

اقدم لكم اخواني الاساتذة ابنائي الطلبة هذه المجلة و المتمثلة في درس مفصل للمتتاليات العددية مع عشر تمارين شاملة محلولة بالتفصيل

تتضمن المجلة



»رَبِّ قَدْ آتَيْتَنِى مِنَ الْمُلْكِ وَعَلَّمْتَنِى مِنْ تَأْوِيلِ الأَحَادِيثِ فَاطِرَ السَّمَاوَاتِ وَالأَرْضِ أَنْتَ وَلِيِّى فِى الدُّنْيَا وَالآخِرَةِ تَوَفَّنِى مُسْلِمًا وَأَلْحِقْنِى بِالصَّالِحِينَ«

لا تنسونا بالدعاء محبكم في الله الاستاذ بوشناق يوسف

# المتتاليات العددية

# المتتاليات العددية

## ملخص المتتاليات الحسابية و الهندسية

| المتتالية الحسابية | المتتالية الهندسية |
|---|---|
| **تعريف:**<br>نقول أن المتتالية $(u_n)$ متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ وأساسها $r$ ( $r$ عدد حقيقي) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}=u_n+r$ | **تعريف:**<br>نقول أن المتتالية $(u_n)$ متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ وأساسها $q$ ( $q$ عدد حقيقي غير معدوم) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}=u_n\times q$ |
| **عبارة الحد العام:**<br>إذا كانت $(u_n)$ متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ وأساسها $r$ ( $r$ عدد حقيقي) فإنه من أجل كل عددين طبيعيين $n$ و $p$ ، $u_n=u_p+(n-p)r$<br>حالة خاصة: من أجل $p=0$ فإن $u_n=u_0+nr$<br>من أجل $p=1$ فإن $u_n=u_1+(n-1)r$ | **عبارة الحد العام:**<br>إذا كانت $(u_n)$ متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ وأساسها $q$ ( $q$ عدد حقيقي غير معدوم) فإنه من أجل كل عددين طبيعيين $n$ و $p$ ، $u_n=u_p\times q^{(n-p)}$<br>حالة خاصة: من أجل $p=0$ فإن $u_n=u_0\times q^n$<br>من أجل $p=1$ فإن $u_n=u_1\times q^{(n-1)}$ |
| **مجموع حدود متتابعة:**<br>إذا كانت $(u_n)$ متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ وأساسها $r$ ( $r$ عدد حقيقي) فإن:<br>$s=u_0+u_1+......+u_n=\frac{n+1}{2}(u_0+u_n)$ | **مجموع حدود متتابعة:**<br>إذا كانت $(u_n)$ متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ وأساسها $q$ ( $q$ عدد حقيقيغير معدوم و يختلف عن $1$) فإن:<br>$s=u_0+u_1+......+u_n=u_0\times\frac{1-q^{(n+1)}}{1-q}$ |
| **الوسط الحسابي:**<br>تكون الأعداد الحقيقية $a;b;c$ بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان $a+c=2b$<br>يسمى $b$ الوسط الحسابي للعددين $a;c$ | **الوسط الهندسي:**<br>تكون الأعداد الحقيقية $a;b;c$ بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان $a\times c=b^2$<br>يسمى $b$ الوسط الهندسي للعددين $a;c$ |
| **اتجاه تغير متتالية حسابية:**<br>إذا كانت $(u_n)$ متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ وأساسها $r$ ( $r$ عدد حقيقي)<br>$r\succ 0$ المتتالية $(u_n)$ متزايدة تماما<br>$r\prec 0$ المتتالية $(u_n)$ متناقصة تماما<br>$r=0$ المتتالية $(u_n)$ ثابتة | **اتجاه تغير متتالية هندسية:**<br>إذا كانت $(u_n)$ متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ وأساسها $q$ ( $q$ عدد حقيقيغير معدوم)<br>ندرس اشارة الفرق: $u_{n+1}-u_n$ |
| **نهاية متتالية حسابية:**<br>إذا كانت $(u_n)$ متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ وأساسها $r$ ( $r$ عدد حقيقي)<br>إذا كان $r=0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=u_0$<br>إذا كان $r\succ 0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$<br>إذا كان $r\prec 0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$ | **نهاية متتالية هندسية:**<br>إذا كانت $(u_n)$ متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ وأساسها $q$ ( $q$ عدد حقيقيغير معدوم)<br>$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}u_0\times q^n$<br>إذا كان $-1\leq q\leq 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0$<br>إذا كان $q=1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=1$<br>إذا كان $q\succ 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=+\infty$<br>إذا كان $q\prec -1$ فإنه لا يمكن حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n$ |

# عموميات حول المتتاليات العددية

## 1. التعريف

نسمي متتالية عددية كل دالة $u$ ترفق بكل عدد طبيعي $n$ أكبر من أو يساوي عدد طبيعي $n_0$ معطى ، العدد $u(n)$.

الترميز : نرمز إلى صورة $n$ بـ $u_n$ عوضا $u(n)$ ، وللمتتالية $u$ نرمز لها كذلك بالرمز $(u_n)$ .

$u_n$ هو الحد الذي دليله $n$ ويسمى الحد العام للمتتالية $(u_n)$ .

$u_{n_0}$ هو الحد الأول للمتتالية $(u_n)$.

**أمثلة :**

1. المتتالية $(u_n)$ معرفة بـ : $u_0 = \frac{1}{2}$ ، $u_1 = \frac{3}{2}$ ، $u_2 = \frac{5}{2}$ ، $u_4 = \frac{7}{2}$ ، ... (معرفة بإعطاء جميع حدودها)
2. المتتالية $(v_n)$ معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = -3n+5$.(معرّفة بحدّها العام)
3. المتتالية $(w_n)$ معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $w_0 = 1$ و $w_{n+1} = 2w_n - 5$ .(معرّفة بعلاقة تراجعية)

**ملاحظات:**

1) يمكن لمتتالية $(u_n)$ أن تعرف ابتداءً من حد ذا مرتبة $n_0$ و نرمز لها أحيانا بـ $(u_n)_{n \geq n_0}$ و يكون حدها الأول هو $u_{n_0}$

**مثال:** المتتالية $(u_n)$ التي حدها العام $u_n = \sqrt{n-4}$ معرفة من أجل $n \geq 4$ و نكتب $(u_n)_{n \geq 4}$

2) تعرف متتالية بإعطاء جميع حدودها أو بإعطاء حدّها العام أو بإعطاء حدها الأول علاقة تراجعية .

## 2. طرق توليد متتالية : ( تعين حدود المتتالية)

❖ **ـتوليد متتالية بالحد العام** $u_n = f(n)$:

إذا كان الحد العام لمتتالية عددية معطى بدلالة $n$ فإنها معرفة تماما ويمكن حساب أي حد من حدودها

**مثال:**

المتتالية $(u_n)$ معرفة ب: $u_n = 2n^2 + 3n + 2$

أحسب: $u_0$; $u_1$; $u_2$; $u_{10}$

ملاحظة:

يمكن التعبير عن الحد العام لهذه المتتالية باستعمال الدالة $f$ ونكتب: $u_n = f(n)$ حيث $f$ معرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي: $f : x \mapsto 2x^2 + 3x + 2$

بـتوليد متتالية بعلاقة تراجعية:

❖ **يمكن تعريف متتالية بالتراجع وذلك بإعطاء :**

✓ قيمة الحد الأول

✓ علاقة تراجعية تربط بين حدين متتابعين من المتتالية .

**مثال:**

نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1} = -3u_n + 2$

- احسب الحدود : $u_1$; $u_2$; $u_3$

**الحل:**

حساب الحدود : $u_1$; $u_2$; $u_3$

$u_1 = u_{0+1} = -3u_0 + 2 = -3\times 2 + 2 = -4$ ، $u_2 = u_{1+1} = -3u_1 + 2 = -3\times(-4) + 2 = 14$ ،

$u_3 = u_{2+1} = -3u_2 + 2 = -3\times(14) + 2 = -40$

**ملاحظة:**

يمكن التعبير عن العلاقة التراجعية باستعمال الدالة $f$ ونكتب: $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث $f$ معرفة على المجال $D$ حيث من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $D$ فإن $f(x)\in D$ كما يلي: $f: x \mapsto -3x+2$ تسمى الدالة $f$ الدالة المرفقة بالمتتالية $(u_n)$

## 3. اتجاه تغيّر متتالية

**مبرهنة:**

- ✓ تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) ابتداء من الرتبة $n_0$ إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي $n$ أكبر من أو يساوي $n_0$ ، $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ($u_{n+1} - u_n > 0$ على الترتيب).
- ✓ تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) ابتداء من الرتبة $n_0$ إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي $n$ أكبر من أو يساوي $n_0$ ، $u_{n+1} - u_n \leq 0$ ($u_{n+1} - u_n < 0$ على الترتيب).
- ✓ تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ ثابتة ابتداء من الرتبة $n_0$ إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي $n$ أكبر من أو يساوي $n_0$ ، $u_{n+1} = u_n$.

**ملاحظة:**

تكون المتتالية الرتيبة (رتيبة تماما على الترتيب ) إذا وفقط إذا كانت إما متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) وإما متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) .

**مثال1 :**

$(u_n)$ معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = 5n+4$ .

ليكن $n\in\mathbb{N}$ ، $u_{n+1} - u_n = 5(n+1)+4-(5n+4) = 5n+5+4-5n-4 = 5$ إذن $(u_n)$ متزايدة تماما .

**مثال2 :**

$(w_n)$ معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = -3n+4$ .

ليكن $n\in\mathbb{N}$ ، $w_{n+1} - w_n = -3$ إذن $(w_n)$ متناقصة تماما .

**ملاحظة :**

في حالة $u_n = f(n)$ وهذا من أجل كل عدد طبيعي $n$ ،

- ✓ إذا كنت $f$ متزايدة على $[0;+\infty[$ فإنه تكون $(u_n)$ متزايدة .

✓ إذا كنت $f$ متناقصة على $[0;+\infty[$ فإنه تكون $(u_n)$ متناقصة .

تسمى $f$ الدالة المرفقة

**مثال3 :**

$(u_n)$ معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n = \dfrac{2-4n}{n+2}$ .

ليكن $n \in \mathbb{N}$ ، $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-4n-2}{n+3} - \dfrac{2-4n}{n+2} = \dfrac{-4n^2-10n-4+10n+4n^2-6}{(n+3)(n+2)} = \dfrac{-10}{(n+3)(n+2)}$

إذن $(u_n)$ متناقصة تماما .

**مثال4 :**

$(u_n)$ معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n = \dfrac{n+1}{2^n}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+2}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n+1} = \frac{1}{2} \times \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{n+1+1}{n+1}\right) = \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$$

لدينا: $n \geq 0$ ومنه $n+1 \geq 1$ ومنه $\dfrac{1}{n+1} \leq 1$ ومنه $1 + \dfrac{1}{n+1} \leq 2$ ومنه $\dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) \leq 1$

أي $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$

أي $u_{n+1} \leq u_n$ لأن $u_n > 0$ و بالتالي $(u_n)$ متناقصة تماما

**ملاحظة:**

$(u_n)$ متتالية حدودها موجبة تماما.إذا كان $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ فإن $(u_n)$ متناقصة و إذا كان $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ فإن $(u_n)$ متزايدة.

# المتتاليات الحسابية و الهندسية

**نشاط**

**I**) تقترح مؤسسة اقتصادية أخرى عقدا للتوظيف كما يلي : مرتب شهري بـ $DA$ 10000 الشهر الأول و زيادة في المرتب الشهري تقدر بـ $1300\,DA$ بعد كل سنة نسمي $v_1$ المرتب الشهري في السنة الأولى .

نرمز بـ $v_n$ للمرتب الشهري خلال السنة $n$ $(n \geq 1)$.

1) أحسب $v_2$ ، $v_3$ ، $v_4$ ،

2) عين علاقة بين $v_{n+1}$ و $v_n$ .

**حل النشاط :**

**II**) 1) $v_1 = 10000$ ،

$v_2 = v_1 + 1300 = 11300$ ،

$v_3 = v_2 + 1300 = 12600$ ،

$v_4 = v_3 + 1300 = 13900$

2) العلاقة بين $v_{n+1}$ و $v_n$

$v_{n+1} = v_n + 1200$ .

## 1) المتتاليات الحسابية

### 1.1.تعريف

نقول أن المتتالية $(u_n)$ متتالية حسابية حدها الأول $u_0$ إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي $r$ بحيث أن من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1} = u_n + r$ . يسمى $r$ أساس المتتالية $(u_n)$.

**ملاحظة:**

$u_{n+1} = u_n + r$ معناه $u_{n+1} - u_n = r$ (الأساس هو الفرق بين كل حدين متتابعين)

إذا كان $r = 0$ فإن المتتالية $(u_n)$ ثابتة و كل حدودها تساوي الحد الأول $u_0$ و إذا كان $r > 0$ فإن المتتالية $(u_n)$ متزايدة و إذا كان $r < 0$ فإن المتتالية $(u_n)$ متناقصة

**مثال :**

أتبث أن المتتالية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام $u_n = 4n + 2$ أنها متتالية حسابية معينا حدها الأول وأساسها

طريقة :

للبرهان على أن المتتالية $(u_n)$ متتالية حسابية نبرهن على أن الفرق $u_{n+1} - u_n$ هو عدد ثابت هذا العدد الثابت هو أساس هذه المتتالية الحسابية

$$u_{n+1} - u_n = 4(n+1) + 2 - (4n+2)$$
$$= 4n + 4 + 2 - 4n - 2 = 4$$

$(u_n)$ متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = 2$ وأساسها $r = 4$

**أمثلة:**

- ✓ المتتالية $(u_n)$ حيث أن $u_n = 3n+5$ متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = 5$ أساسها $r = 3$.
- ✓ مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية متتالية حسابية حدها الأول 1 أساسها 2.

## 12. الحد العام لمتتالية حسابية

$(u_n)$ متتالية حسابية حدها الأول $u_0$ أساسها $r$. لدينا: $u_1 = u_0 + r$ ، $u_2 = u_1 + r = u_0 + 2r$ ، $u_3 = u_2 + r = u_0 + 3r$

في الحالة العامة لدينا النتيجة التالية:

**مبرهنة:**

$(u_n)$ متتالية حسابية حدها الأول $u_0$ أساسها $r$.

الحد العام للمتتالية الحسابية $(u_n)$ هو $u_n = u_0 + nr$ من أجل كل عدد طبيعي $n$.

ملاحظة:

- ✓ إذا كان $r = 0$ فإن المتتالية $(u_n)$ ثابتة وكل حدودها تساوي الحد الأول $u_0$
- ✓ إذا كان $r \succ 0$ فإن المتتالية $(u_n)$ متزايدة
- ✓ إذا كان $r \prec 0$ فإن المتتالية $(u_n)$ متناقصة

**ملاحظات:**

- ✓ إذا كان $u_1$ الحد الأول فإن عبارة الحد العام هي $u_n = u_1 + (n-1)r$.
- ✓ بصفة عامة إذا كان $u_p$ الحد الأول فإن عبارة الحد العام هي : $u_n = u_p + (n-p)r$.

**تطبيق:**

$(u_n)$ متتالية حسابية متزايدة أساسها $r$ و حدها الأول $u_0 = 1$. عين $r$ علما أن $u_1 \times u_2 = 66$

الحل

$$u_1 \times u_2 = (u_0 + r)(u_0 + 2r) =$$
$$= u_0^2 + 2ru_0 + ru_0 + 2r^2$$
$$= 1 + 2r + r + 2r^2 = 66$$
$$2r^2 + 3r - 65 = 0$$
$$\Delta = 529 = 23^2$$
$$r_1 = -\frac{13}{2} \quad r_2 = 5$$

بما أن $(u_n)$ متتالية حسابية متزايدة فان $r = 5$

تمرين

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بحدها الأول $u_0 = 3$ و بالعلاقة: $u_{n+1} = u_n - 5n - 1$.

لتكن المتتالية $(v_n)$ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ بالعلاقة: $v_n = u_{n+1} - u_n$.

- أثبت أن المتتالية $(v_n)$ متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .
- أحسب $v_n$ بدلالة $n$ ثم أحسب المجموع $S$ مجموع $n$ حد الأولى من المتتالية $(v_n)$. استنتج $(u_n)$ بدلالة $n$ .

الحل:

- الحد الأول للمتتالية $(v_n)$ هو $v_0$ ، $v_0 = u_1 - u_0 = 3-5(0)-1-3 = -1$.

لدينا $u_{n+1} - u_n = -5n-1$ . إذن: $v_n = -5n-1$

$v_{n+1} - v_n = -5(n+1)-1-(-5n-1) = -5$ . إذن من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $v_{n+1} - v_n = -5$ .

و منه المتتالية $(v_n)$ متتالية حسابية أساسها $r=-5$ و حدها الأول $v_0 = -1$ .

- من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $v_n = -1-5n$ . $S = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1} = \frac{n}{2}(5+5-5n) = \frac{n}{2}(-2-5n)$ .

$v_0 = u_1 - u_0$ ، $v_1 = u_2 - u_1$ ، ... ، $v_{n-1} = u_n - u_{n-1}$ بالجمع طرف بطرف نجد $u_n = S + u_0$

و منه $u_n = \frac{n}{2}(-2-5n)+3$ .

## 1.3. مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية

### مبرهنة:

$(u_n)$ متتالية حسابية حدها الأول $u_0$ و أساسها $r$ . من أجل كل عدد طبيعي $n$ :

$$u_0 + u_1 + ... + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$$

### البرهان:

نضع: $S = u_0 + u_1 + u_2 + ............ + u_{n-1} + u_n$

$$(1)..... S = u_0 + u_1 + u_2 + ............ + u_{n-1} + u_n = u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + ...... + (u_0 + (n-1)r) + (u_0 + nr)$$

$$(2)..... S = u_n + u_{n-1} + ............ + u_2 + u_1 + u_0 = u_n + (u_n - r) + (u_n - 2r) ............ + (u_0 - 2r) + (u_0 - r) + u_0$$

بجمع (1) و(2) نحصل على: $2S = \underbrace{(u_0 + u_n) + (u_0 + u_n) + (u_0 + u_n) + ............ + (u_0 + u_n)}_{(n+1)\ \text{حد}}$

و منه $2S = (n+1)(u_0 + u_n)$ أي $S = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$

### ملاحظات:

- ✓ $u_1 + ... + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$
- ✓ $u_0 + u_1 ... + u_{n-1} = \frac{n}{2}(u_0 + u_n)$
- ✓ $u_p + u_{p+1} ... + u_n = \frac{n-p+1}{2}(u_p + u_n)$

**تطبيق:**

أحسب المجموعين $S=1+2+3+4+5+6+........+1441$ و $M=1+3+5+7+9+....+2020$

**حل**

$$S=1+2+3+4+5+6+........+1441$$
$$=(1+1441)\frac{1441-1+1}{2}=1442(\frac{1441}{2})=1038961$$
$$M=1+3+5+7+9+....+2020$$
$$=(1+2020)(\frac{2020-1+1}{2})=2021(\frac{2020}{2})=2041210$$

## 1.4.الوسط الحسابي

نشاط:

$(u_n)$ متتالية حسابية معرفة على N بحدها الأول $u_0$ و أساسها $r$

لتكن : $u_{n-1};u_n;u_{n+1}$ ثلاث حدود متتابعة من المتتالية الحسابية $(u_n)$

1.أكتب عبارة الحد العام للمتتالية $(u_n)$ بدلالة $u_0$ و $r$

2.أستنتج عبارة $u_{n-1};u_{n+1}$ بدلالة $u_0$ و $r$ وبين أن $u_{n+1}+u_{n-1}=2u_n$

الحل:

1 - عبارة الحد العام للمتتالية $(u_n)$ بدلالة $u_0$ و $r$ : $u_n=u_0+nr$

2 - أستنتج عبارة $u_{n-1};u_{n+1}$ بدلالة $u_0$ و $r$ : $u_{n-1}=u_0+(n-1)r$ و $u_{n+1}=u_0+(n+1)r$

3 - $u_{n+1}+u_{n-1}=u_0+(n+1)r+u_0+(n-1)r=2u_n$

**مبرهنة :**

تكون الأعداد الحقيقية $a$، $b$ و $c$ بهذا الترتيب حدودا متتابعة لمتتالية حسابية إذا وفقط إذا كان $2b=a+c$ العدد $b$ يسمى الوسط الحسابي للعددين $a$ و $c$ .

**تطبيق:**

أوجد ثلاثة أعداد حقيقية $a$ ، $b$ ، $c$ حدود متتابعة من متتالية حسابية علما أن: $\begin{cases} a+b+c=15 \\ a\times b\times c=80 \end{cases}$.........(1)

الحل

$\begin{cases} a+b+c=15 \\ a\times b\times c=80 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 2b+b=15 \\ a\times b\times c=80 \end{cases}$

$\begin{cases} 3b=15 \\ a\times b\times c=80 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} b=15/3=5 \\ a\times b\times c=80 \end{cases}$

نعوض b في المعادلة الثانية

$\begin{cases} b=5 \\ a\times c=16 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} b=5 \\ a\times 5\times c=80 \end{cases}$

نعوض b في (1)

$\begin{cases} a+c=10 \\ a\times c=16 \end{cases}$

عددين علم مجموعهما و جداؤهما هما حلا للمعادلة $x^2-Sx+P=0$

حيث $S$ هو المجموع $a+c$

و $P$ هو الجداء $a\times c$

$$x^2-10x+16=0$$

$$\Delta=100-64=36=6^2$$

ومنه $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ; $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$$x_1=\frac{10-6}{2}=2 \ ; \ x_2=\frac{10+6}{2}=8$$

اذن $(a;b;c)=(2;5;8)$ متتالية حسابية متزايدة اساسها $r=3$

او $(a;b;c)=(8;5;2)$ متتالية حسابية متزايدة اساسها $r=-3$

## نشاط

I) تقترح مؤسسة اقتصادية عقدا للتوظيف كما يلي : مرتب شهري بـ $10000\ DA$ في الشهر الأول و زيادة سنوية تقدر

بـ 10 ٪ . نسمي $u_1$ المرتب الشهري في السنة الأولى . نرمز بـ $u_n$ للمرتب الشهري خلال السنة $n$ $(n\geq 1)$.

1) أحسب $u_2$ ، $u_3$ ، $u_4$ ، $u_5$

2) عين علاقة بين $u_{n+1}$ و $u_n$ .

## حل

حساب $u_2$ ، $u_3$ ، $u_4$ ، $u_5$

$u_1=10000$،

$u_2=u_1+\dfrac{1}{10}u_1=\dfrac{11}{10}u_1=11000$ ،

$u_3=u_2+\dfrac{1}{10}u_2=\dfrac{11}{10}u_2=12100$ ،

$u_4=\dfrac{11}{10}u_3=13310$ ،

$u_5=\dfrac{11}{10}u_4=14641$ ،.

تعين علاقة بين $u_{n+1}$ و $u_n$ .

$u_{n+1}=\dfrac{11}{10}u_n$ .

## 1. المتتاليات الهندسية

### 1.1 تعريف

نقول أن المتتالية $(u_n)$ متتالية هندسية حدها الأول $u_0$ إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي $q$ حيث أن من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}=u_n \times q$ . يسمى $q$ أساس المتتالية $(u_n)$.

**ملاحظات:**

- إذا كان $q=1$ فإن المتتالية ثابتة جميع حدودها تساوي $u_0$.
- إذا كان $q=0$ فإن حدود المتتالية معدومة ابتداء من الحد الثاني.

طريقة:

لإثبات أن متتالية عددية $(u_n)$ أنها متتالية هندسية يمكن :

-البرهان على وجود عدد حقيقي غير معدوم $q$ حيث أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}=u_n \times q$

-إثبات أن حاصل القسمة $\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$ حيث $q$ عدد ثابت غير معدوم

**مثال :**

أثبت أن المتتالية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام $u_n=3^n$ أنها متتالية هندسية معينا حدها الأول وأساسها

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3^{n+1}}{3^n}=\frac{3^n.3}{3^n}=3$$

$(u_n)$ متتالية هندسة حدها الأول $u_0=3^0=1$ وأساسها $q=3$

**مثال:**

المتتالية $(u_n)$ حيث أن $u_n=2^n$ متتالية هندسية حدها الأول $u_0=1$ أساسها $q=2$.

### 1.2 الحد العام لمتتالية هندسية

$(u_n)$ متتالية هندسية حدها الأول $u_0$ و أساسها $q$

لدينا: $u_1=u_0 \times q$ ، $u_2=u_1 \times q=u_0 \times q^2$ ، $u_3=u_2 \times q=u_0 \times q^3$

في الحالة العامة لدينا النتيجة التالية:

**مبرهنة:**

$(u_n)$ متتالية هندسية حدها الأول $u_0$ أساسها $q$.

عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية $(u_n)$ هي: $u_n=u_0 \times q^n$ من أجل كل عدد طبيعي $n$ .

**ملاحظات:**

✓ إذا كانت المتتالية الهندسية معرفة بالحد $u_1$ والأساس $q$ فإن عبارة الحد العام هي: $u_n=u_1 \times q^{n-1}$.

✓ بصفة عامة من أجل كل عددين طبيعيين $n$ و $p$ لدينا : $u_n=u_p \times q^{n-p}$.

### 1.3 مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية

**مبرهنة :**

$(u_n)$ متتالية هندسية حدها الأول $u_0$ أساسها $q$ . ليكن المجموع : $S=u_0+u_1+........+u_{n-1}+u_n$

- إذا كان $q=1$ فإن $S=(n+1)u_0$ من أجل كل عدد طبيعي $n$ .
- إذا كان $q\neq 1$ فإن $S=u_0\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)$ من أجل كل عدد طبيعي $n$ .

**البرهان:**

- في الحالة $q=1$ ،

$S$ هو مجموع $n+1$ مرة الحد $u_0$ و منه $S=(n+1)u_0$ .

- في الحالة $q\neq 1$

ليكن المجموع $S=u_0+u_1+........+u_{n-1}+u_n$ ....(1)

ومنه $q\times S=qu_0+qu_1+........+qu_{n-1}+qu_n$ أي $q\times S=u_1+u_2........+u_n+u_{n+1}$ ....(2)

بطرح (1) من (2) طرفا إلى طرف نجد: $q\times S-S=u_{n+1}-u_0$ أي $S(q-1)=u_0q^{n+1}-u_0$ أي $S(q-1)=u_0(q^{n+1}-1)$

و بالتالي $S=u_0\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)$ .

**تطبيق:**

$(u_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام كما يلي: $u_n=2^n$ . أحسب المجموع $S$ حيث $S=u_0+u_1+........+u_n$

**الجواب:**

$$S=1\times\frac{2^{n+1}-1}{2-1}=2^{n+1}-1$$

## 1.4 . الوسط الهندسي

**مبرهنة :**

تكون الأعداد الحقيقية $a$، $b$ و $c$ بهذا الترتيب حدودا متتابعة لمتتالية هندسية إذا وفقط إذا كان

$$b^2=a\times c$$

العدد $b$ يسمى الوسط الهندسي للعددين $a$ و $c$ .

**تطبيق:**

أوجد ثلاث أعداد حقيقية $a$ ، $b$ ، $c$ حدود متتابعة من متتالية هندسية علما أن: $\begin{cases}a+b+c=26\\ a\times b\times c=216\end{cases}$

الحل

$\begin{cases}a+b+c=26\\ a\times b\times c=216\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}a+b+c=26\\ b^2\times b=216\end{cases}$

$\begin{cases}a+b+c=26\\ b^3=216\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}a+b+c=26\\ b=\sqrt[3]{216}=6\end{cases}$

نعوض b في المعادلة الثانية

$$\begin{cases} a+6+c=5 \\ a\times 6\times c=216 \end{cases} \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} a+b+c=26 \\ b=\sqrt[3]{216}=6 \end{cases}$$

نعوض b في (1)

$$\begin{cases} a+c=20 \\ a\times c=36 \end{cases}$$

عددين علم مجموعهما و جداؤهما هما حلا للمعادلة $x^2-Sx+P=0$

حيث $S$ هو المجموع $a+c$

و $P$ هو الجداء $a\times c$

$$x^2-20x+36=0$$

$$\Delta=400-144=256=16^2$$

ومنه

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \;;\; x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1=\frac{20-16}{2}=2 \;;\; x_2=\frac{20+16}{2}=18$$

اذن $(a;b;c)=(2;6;18)$ متتالية حسابية متزايدة اساسها $r=3$

او $(a;b;c)=(18;6;2)$ متتالية حسابية متزايدة اساسها $r=\frac{1}{3}$

## نهاية متتالية

### ملاحظات:

- ✓ إذا كانت $(u_n)$ متتالية متقاربة فإن نهايتها وحيدة .
- ✓ إذا كانت $(u_n)$ متتالية غير متقاربة فهي متباعدة ( نهايتها غير منتهية أو غير موجودة ).

## نهاية متتالية عددية مرفقة بدالة

### مبرهنة:

لتكن المتتالية $(u_n)$ المعرفة كما يلي $u_n=f(n)$ . حيث $f$ دالة معرفة على مجال من الشكل $[\alpha,+\infty[$

حيث $\alpha$ عدد حقيقي . نهاية الدالة $f$ عندما $x$ يؤول إلى $+\infty$ هي نهاية المتتالية $(u_n)$.

### ملاحظة:

النتائج و النظريات حول نهايات الدوال تبقى صحيحة في المتتاليات .

## نهاية متتالية هندسية

**مبرهنة:**

$q$ عدد حقيقي غير معدوم ويختلف عن $1$ .

✓ إذا كان $q > 1$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ .

✓ إذا كان $-1 < q < 1$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ .

✓ إذا كان $q < -1$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$ غير موجودة.

**نتيجة :**

تكون المتتالية الهندسية $(u_n)$ ذات الأساس $q$ متقاربة إذا وفقط إذا كان $-1 < q \leq 1$ .

## نهاية متتالية عددية باستعمال الحصر

**مبرهنة1:**

$(u_n)$ ، $(v_n)$ و $(w_n)$ ثلاث متتاليات عددية و $l$ عدد حقيقي.

إذا كانت $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = l$ و إذا كان ابتداءً من عدد طبيعي $n_0$ ، $v_n \leq u_n \leq w_n$

فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$

**مبرهنة2:**

$(u_n)$ و $(v_n)$ متتاليتان عدديتان . إذا كان ابتداءً من عدد طبيعي $n_0$ ، $u_n \geq v_n$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

**مبرهنة3:**

$(u_n)$ و $(v_n)$ متتاليتان عدديتان . إذا كان إبتداءًا من عدد طبيعي $n_0$ ، $u_n \leq v_n$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$

فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

**أمثلة محلولة**

1) $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية تحقق ما يلي : $\frac{1}{n-1} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$. عين نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$.

بما أن $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{n-1} = 0$

ومنه $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

2) لتكن المتتالية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = n^2 + \cos(n)$ . عين نهاية المتتالية $(u_n)$.

نعلم من أجل كل عدد طبيعي $n$

$$-1 \leq \cos(n) \leq 1$$

$$-1 + n^2 \leq n^2 + \cos(n) \leq 1 + n^2$$

بما أن $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 - 1 = +\infty$

ومنه $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

3) $(u_n)_{n\geq 1}$ **متتالية تحقق ما يلي :** $\frac{2n+1}{n} \leq u_n \leq \frac{4n}{2n+3}$ **. عين نهاية المتتالية** $(u_n)_{n\geq 1}$ .

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2+\frac{1}{n}\right) = 2$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n} =$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{\left(2+\frac{3}{n}\right)} = 2$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4n}{2n+3} =$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$ .

4) **لتكن المتتالية** $(u_n)$ **المعرفة على** $\mathbb{N}$ **كما يلي :** $u_n = n+\sin(n)$ **. عين نهاية المتتالية** $(u_n)$ .

نعلم من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $-1\leq \sin(n) \leq 1$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $\sin(n) \geq -1$ .

إذا $u_n \geq n-1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} n-1 = +\infty$ وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

تمرين الاول

$(u_n)$ متتالية معرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = \frac{3n^2-5n+1}{n^2+5}$ .

عين نهاية هذه المتتالية .

حل:

لتكن $f$ الدالة المرفقة بالمتتالية $(u_n)$ و منه $f(x) = \frac{3x^2-5x+1}{x^2+5}$ و المعرفة على $\mathbb{R}$

و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$ ( تطبيق النظريات على النهايات ) فإن المتتالية $(u_n)$ لها نفس النهاية

مع الدالة المرفقة لها و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$ .

تمرين الثاني

$(u_n)$ متتالية معرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = \sqrt{\frac{4n+3}{n+1}}$ .

عين نهاية هذه المتتالية .

الحل:

المتتالية $(u_n)$ من الشكل $u_n = f(v_n)$ حيث $v_n = \frac{4n+3}{n+1}$ و $f$ الدالة العددية حيث $f(x) = \sqrt{x}$ .

المعرفة على $[0;+\infty[$ .

الدالة المرفقة بالمتتالية $(v_n)$ هي الدالة $g$ حيث $g(x) = \frac{4x+3}{x+1}$ المعرفة على $[0;+\infty[$ .

و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 4$ ( تطبيق النظريات على النهايات ) فإن المتتالية $(v_n)$ لها نفس النهاية

مع الدالة المرفقة لها و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 4$ . و بالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{4} = 2$ .

## التمثيل البياني لمتتالية عددية

### ❖ متتالية معرفة بالحد العام

**يمكن تمثيل متتالية عددية معرفة بحدها العام**

( ترفق هذه المتتالية بدالة $f$ ).

**مثال:** لتكن المتتالية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي:

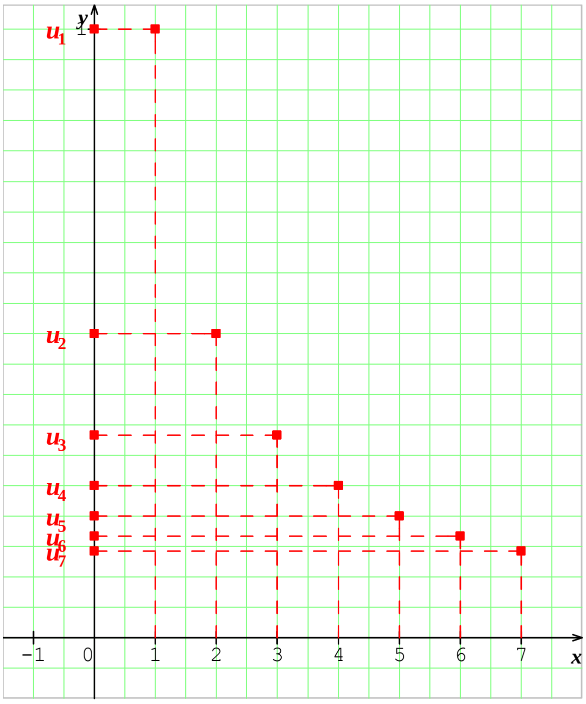
$u_n = \dfrac{1}{n}$.

$(u_n)$ معرفة كذالك $u_n = f(n)$ حيث: $f(x) = \dfrac{1}{x}$

بما أن $n$ عدد طبيعي نعرف $f$ على المجال $[0,+\infty[$.

في الرسم المقابل التمثيل البياني للمتتالية $(u_n)$ في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$ هو مجموعة النقط ذات الاحداثيات $(1;1)$، $\left(2;\dfrac{1}{2}\right)$، $\left(3;\dfrac{1}{3}\right)$، إلخ...

مجموعة النقط $M(n, f(n))$ هي التمثيل البياني للمتتالية $(u_n)$ .




## ❖ متتالية معرفة بعلاقة تراجعية

لتكن المتتالية $(u_n)$ المعرفة بحدها الأول $u_0$ و العلاقة التراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث $f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ .

مجموعة النقط $M(u_n , f(u_n))$ هي التمثيل البياني في المستوي المنسوب إلى معلم للمتتالية.

**مثال:** مثل بيانيا خمس حدود الأولى للمتتالية $(u_n)$ المعرفة

بـ: $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 4$

المتتالية من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث $f$ دالة معرفة

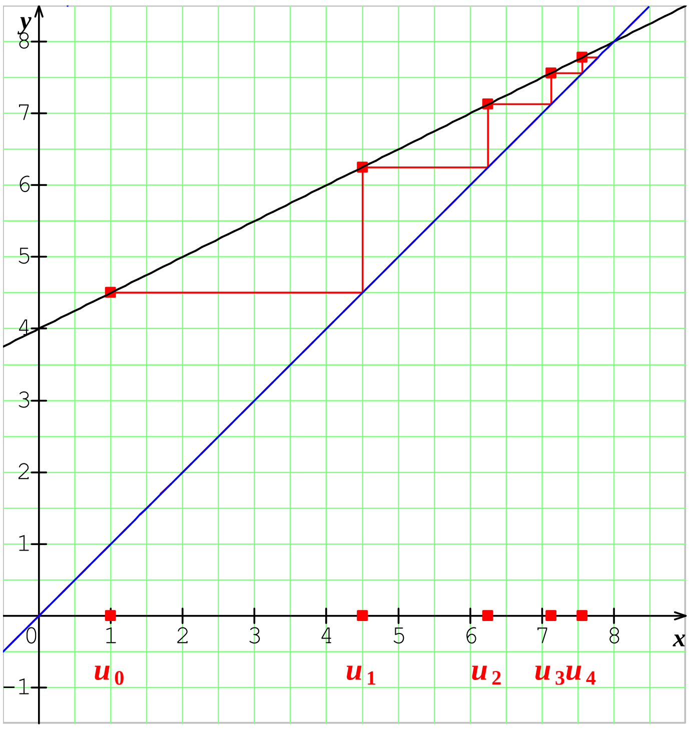
بـ: $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 4$

نرسم منحنى الدالة $f$ و نرسم المستقيم الذي معادلته $y = x$

**طريقة:**

لتمثيل المتتالية $(u_n)$ بيانيا ننشئ الرسم البياني للدالة $f$ المرفقة بالمتتالية $(u_n)$ ثم ننشئ المستقيم ذا المعادلة $y = x$ لأن المتتالية من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$

والتمثيل البياني هو مجموعة النقط $M(u_n, u_{n+1})$



# تمارين محلولة

# تمارين محلولة

## التمرين الاول

$(u_n)$ و $(v_n)$ متتاليتان عدديتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي $n$ بـ: $u_0=2$ ، $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n-2$ و $v_n=u_n+3$. نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $s_n=v_0+v_1+...+v_n$ و $t_n=u_0+u_1+...+u_n$.

1) برهن أن المتتالية $(v_n)$ هندسية.

2) عين نهاية لكل من المتتاليات $(u_n)$ ، $(s_n)$ و $(t_n)$.

## حل التمرين:

1) ليكن $n$ عددا طبيعيا ، $v_{n+1}=u_{n+1}+3=\frac{1}{3}u_n-2+3=\frac{1}{3}u_n+1=\frac{1}{3}(u_n+3)=\frac{1}{3}v_n$ ؛ إذن $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0=u_0+3=5$.

2) $v_n=u_n+3$ معناه $u_n=v_n-3$ ولدينا $v_n=v_0\times q^n=5\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$ إذن $u_n=5\times\left(\frac{1}{3}\right)^n-3$ ولدينا $-1<\frac{1}{3}<1$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}5\times\left(\frac{1}{3}\right)^n-3=-3$.

$s_n=v_0+v_1+...+v_n=v_0\frac{q^{n+1}-1}{q-1}=5\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-1}{\frac{-2}{3}}=-\frac{15}{2}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-1\right]$ ؛ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}s_n=\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{15}{2}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-1\right]=\frac{15}{2}$.

$t_n=u_0+u_1+...+u_n=(v_0-3)+(v_1-3)+...+(v_n-3)=s_n-3n-3$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}t_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(s_n-3n-3)=-\infty$.

## تمرين الثاني

نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0=1$ والعلاقة التراجعية : $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+\frac{14}{3}$.

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول $x$ التالية : $x=\frac{1}{3}x+\frac{14}{3}$.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $v_n=u_n-7$

أثبت أن المتتالية $(v_n)$ هندسية،

أكتب عبارة الحد العام $v_n$ بدلالة $n$ ،

استنتج أن المتتالية $(u_n)$ متقاربة.

## حل التمرين:

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول $x$ التالية : $x=\frac{1}{3}x+\frac{14}{3}$.

$x=\frac{1}{3}x+\frac{14}{3}$ معناه $3x=x+14$ ومعناه $x=7$.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $v_n = u_n - 7$

أثبت أن المتتالية $(v_n)$ هندسية ، أكتب عبارة الحد العام $v_n$ بدلالة $n$ ، استنتج أن المتتالية $(u_n)$ متقاربة .

ليكن $n$ عددا طبيعيا ، $v_{n+1} = u_{n+1} - 7 = \frac{1}{3}u_n + \frac{14}{3} - 7 = \frac{1}{3}u_n - \frac{7}{3} = \frac{1}{3}(u_n - 7) = \frac{1}{3}v_n$ ومنه $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - 7 = 6$ .

$v_n = v_0 q^n = 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$ ؛

ومنه $u_n = v_n + 7 = 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 7$

بما أن $-1 < \frac{1}{3} < 1$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ ومنه $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 7$ .

## التمرين الثالث

لتكن المتتالية $(u_n)$ المعرفة بحدها الأول $u_0 = 2$ و العلاقة : $u_{n+1} = 1 + \frac{2}{5}u_n$ .

لتكن المتتالية $(v_n)$ المعرفة كما يلي : $v_n = u_n - \frac{5}{3}$

1) أثبت أن المتتالية $(v_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

2) عين نهاية المتتالية $(u_n)$ .

**حـل:**

1) لنحسب $v_{n+1}$ .

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{5}{3} \\ &= 1 + \frac{2}{5}u_n - \frac{5}{3} \\ &= \frac{2}{5}u_n - \frac{2}{3} = \frac{2}{5}\left(u_n - \frac{5}{3}\right) \\ &= \frac{2}{5}v_n \end{aligned}$$

إذا أن المتتالية $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{5}$ و حدها الأول $v_0 = u_0 - \frac{5}{3} = 2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$ .

2) أساس المتتالية هو $q = \frac{2}{5}$ .

$-1 < \frac{2}{5} < 1$ إذن المتتالية $(v_n)$ متقاربة و $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ و بالتالي $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{5}{3}$ لأن $u_n = v_n + \frac{5}{3}$

## التمرين الرابع

لتكن المتتالية $(u_n)$ و المتتالية $(v_n)$ المعرفتين كما يلي :

$u_0 = 12$ ، $v_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$ و $v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$ .

نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $w_n = u_n - v_n$ و $t_n = 3u_n + 8v_n$ .

1) أثبت أن المتتالية $(w_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول . أحسب $w_n$ بدلالة $n$ .
2) أثبت أن المتتالية $(t_n)$ متتالية ثابتة.
3) أثبت أن المتتالية $(u_n)$ متناقصة على $\mathbb{N}$ . و أن المتتالية $(v_n)$ متزايدة على $\mathbb{N}$ .
4) عين $u_n$ و $v_n$ بدلالة $n$ .

## حل التمرين

نحسب $w_{n+1}$ بدلالة $w_n$ .

$$w_{n+1}=u_{n+1}-v_{n+1}=\frac{u_n+2v_n}{3}-\frac{u_n+3v_n}{4}=\frac{4u_n+8v_n-3u_n-9v_n}{12}$$
$$=\frac{1}{12}(u_n-v_n)=\frac{1}{12}w_n$$

إذن المتتالية $(w_n)$ متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{12}$ و حدها الأول $w_0=11$ . ومنه $w_n=11\times\left(\frac{1}{12}\right)^n$

2) نحسب $t_{n+1}$ بدلالة $t_n$ .

$$t_{n+1}=3u_{n+1}+8v_{n+1}=\frac{3(u_n+2v_n)}{3}+\frac{8(u_n+3v_n)}{4}=u_n+2v_n+2u_n+6v_n$$
$$=3u_n+8v_n=t_n$$

إذن المتتالية $(t_n)$ متتالية ثابتة على $\mathbb{N}$ . و منه من أجل كل عدد طبيعي $n$ $t_n=t_0=3u_0+8v_0=44$

3) نحسب : $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+2v_n}{3}-u_n=-\frac{2}{3}(u_n-v_n)=-\frac{2}{3}w_n$

بما أن من أجل كل عدد طبيعي $n$ $w_n>0$ فإن $u_{n+1}-u_n<0$ و منه المتتالية $(u_n)$ متناقصة على $\mathbb{N}$.

نحسب : $v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+3v_n}{4}-v_n=\frac{1}{4}(u_n-v_n)=\frac{1}{4}w_n$

بما أن من أجل كل عدد طبيعي $n$ $w_n>0$ فإن $v_{n+1}-v_n>0$ و منه المتتالية $(v_n)$ متزايدة على $\mathbb{N}$.

4) $\begin{cases} u_n-v_n=11\times\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ 3u_n+8v_n=44 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} u_n=4+8\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ u_n=4-3\left(\frac{1}{12}\right)^n \end{cases}$

## التمرين الخامس

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بحدها الأول $u_0=3$ و بالعلاقة: $u_{n+1}=u_n-5n-1$ .

لتكن المتتالية $(v_n)$ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ بالعلاقة: $v_n=u_{n+1}-u_n$ .

- أثبت أن المتتالية $(v_n)$ متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .
- أحسب $v_n$ بدلالة $n$ ثم أحسب المجموع $S$ مجموع $n$ حد الأولى من المتتالية $(v_n)$. استنتج $(u_n)$ بدلالة $n$ .

## حل التمرين

الحد الأول للمتتالية $(v_n)$ هو $v_0$ ، $v_0=u_1-u_0=3-5(0)-1-3=-1$.

لدينا $u_{n+1}-u_n=-5n-1$ .إذن : $v_n=-5n-1$

$v_{n+1}-v_n=-5(n+1)-1-(-5n-1)=-5$ . إذن من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $v_{n+1}-v_n=-5$ .

و منه المتتالية $(v_n)$ متتالية حسابية أساسها $r=-5$ و حدها الأول $v_0=-1$ .

• من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $v_n=-1-5n$ . $S=v_0+v_1+...+v_{n-1}=\frac{n}{2}(5+5-5n)=\frac{n}{2}(-2-5n)$ .

$v_0=u_1-u_0$ ، $v_1=u_2-u_1$ ، ... ، $v_{n-1}=u_n-u_{n-1}$ بالجمع طرف بطرف نجد $u_n=S+u_0$

و منه $u_n=\frac{n}{2}(-2-5n)+3$ .

## التمرين السادس

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بحدها الأول $u_0=2$ و بالعلاقة: $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2$

لتكن المتتالية $(v_n)$ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ بالعلاقة: $v_n=u_n-3$.

• أثبت أن المتتالية $(v_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

• أحسب $v_n$ بدلالة $n$ ، استنتج $u_n$ بدلالة $n$، ثم أحسب المجموع $S$ مجموع $n$ حد الأولى من المتتالية $(v_n)$.

• ما هو اتجاه تغير المتتالية $(v_n)$ ؟

• أحسب نهاية $v_n$ بدلالة $n$ ثم أحسب نهاية $S$. استنتج نهاية $(u_n)$.

## حل التمرين

• $v_{n+1}=u_{n+1}-3=\frac{1}{3}u_n+2-3$

$v_{n+1}=\frac{1}{3}(u_n-3)=\frac{1}{3}v_n$ إذن المتتالية $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0=-1$ .

• من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $v_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n$ و $S=v_0+v_1+...+v_{n-1}=-\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

$u_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n+3$ .

$v_{n+1}-v_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-\left(-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^n\times\frac{2}{3}$ • إذن $v_{n+1}-v_n>0$ و منه $(v_n)$ متزايدة على $\mathbb{N}$ .

$-1<\frac{1}{3}<1$ • و منه $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ و بالتالي $\lim_{n\to+\infty}v_n=0$ . $\lim_{n\to+\infty}S=-\frac{3}{2}$ . $\lim_{n\to+\infty}u_n=3$

## التمرين السابع

$(u_n)$ متتالية عددية معرفة كما يلي $u_0=14$ و من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$ : $u_{n+1}=4u_n+3$

و نعرف المتتالية $(v_n)$ على $\mathbb{N}$ كما يلي $v_n=u_n+1$

أ- أثبت أن المتتالية $(v_n)$ هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الأول

ب- اكتب عبارة $v_n$ بدلالة $n$ ثم استنتج عبارة $u_n$ بدلالة $n$

ت-أحسب بدلالة $n$ المجموع: $S_n=v_0^2+v_1^2+............+v_n^2$

ج-احسب بدلالة $n$ الجذاء: $p_n=v_0\times v_1\times............\times v_n$

## الحل:

$(u_n)$ متتالية عددية معرفة كما يلي $u_0=14$ و من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$ : $u_{n+1}=4u_n+3$

و نعرف المتتالية $(v_n)$ على $\mathbb{N}$ كما يلي $v_n=u_n+1$

ا-إثبات أن المتتالية $(v_n)$ هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الأول

من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$ : $v_{n+1}=u_{n+1}+1=4u_n+3+1=4(u_n+1)=4v_n$ وبالتالي المتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها $q=4$ وحدها الأول $v_0=u_0+1=15$

ب-كتابة عبارة $v_n$ بدلالة $n$ ثم استنتج عبارة $u_n$ بدلالة $n$ : $v_n=15\times(4)^n$ ، $u_n=15\times(4)^n-1$

ت-حساب بدلالة $n$ المجموع: $S_n=v_0^2+v_1^2+............+v_n^2$

$$S_n=v_0^2+v_1^2+............+v_n^2$$
$$=\left(15\times(4)^0\right)^2+\left(15\times(4)^1\right)^2+\left(15\times(4)^2\right)^2+.....+\left(15\times(4)^n\right)^2$$
$$=(15)^2\left[4^0+4^2+4^4+.......+4^{2n}\right]$$
$$=(15)^2\left(\frac{1-16^{n+1}}{1-16}\right)$$
$$=15\left(16^{n+1}-1\right)$$

ج-حساب بدلالة $n$ الجذاء: $p_n=v_0\times v_1\times............\times v_n$

$$p_n=v_0\times v_1\times............\times v_n$$
$$=\left(15\times(4)^0\right)\times\left(15\times(4)^1\right)\times\left(15\times(4)^2\right)\times.....\times\left(15\times(4)^n\right)$$
$$=(15)^{n+1}\left[4^{0++1+2+3+....+n}\right]$$
$$=(15)^{n+1}\times(4)^{\frac{n+1}{2}\times n}$$

## التمرين الثامن

$(U_n)$ متتالية عددية معرفة كما يلي: $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+2$

1) ا)ارسم في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y=x$ والمنحنى $(d)$ الممثل للدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x)=\frac{1}{2}x+2$

ب)باستعمال الرسم السابق مثل على حامل محور الفواصل و بدون حساب الحدود : $u_3,u_2,u_1,u_0$

ج)ما هو اتجاه تغير $(U_n)$؟ هل $(U_n)$ متقاربة ؟

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $v_n=u_n-4$

ا)اثبت أن $(v_n)$ متتالية هندسية يطلب تعين أساسها و حدها الأول.

ب)اكتب عبارة $v_n$ بدلالة $n$ ثم استنتج عبارة $u_n$ بدلالة $n$ .

ج)احسب نهاية المتتالية $(u_n)$ .ماذا تستنتج؟

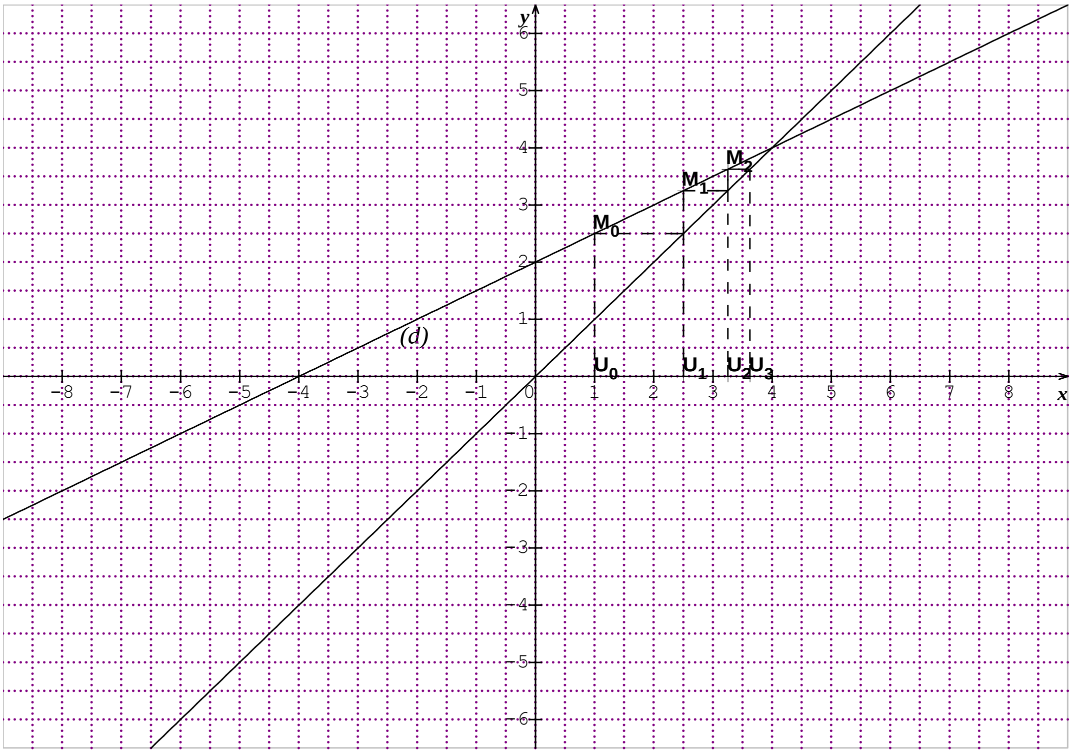
د)احسب المجموع $S_n$ بدلالة $n$ : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$ ثم $\lim\limits_{x\to+\infty} S_n$ .

الحل:

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حيث $u_0 = 1$ و $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$

1) ا) إنشاء $(\Delta)$ و $(d)$

ب)تمثيل بيانيا $u_3, u_2, u_1, u_0$ على حامل محور الفواصل و بدون حساب.




ج)المتتالية $(u_n)$ متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ . $(u_n)$ متقاربة و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$

2) ا) $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0 = -3$

ب) $n \in \mathbb{N}$ : $v_n = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n$ و $u_n = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4$

ج) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$ لأن $-1 < q < 1$ نستنتج أن المتتالية $(v_n)$ متقاربة.

$S_n = (v_0 + v_1 + \cdots v_{n-1}) + 4n$

د) $S_n = -3\dfrac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} + 4n$ و منه $S_n = 6\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right] + 4n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

## التمرين التاسع

$(u_n)$ متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

1 ـ أ) أرسم في معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ ، المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y = x$ و المنحني $(d)$ الممثل

للدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\frac{1}{3}x+2$ .

ب) باستعمال الرسم السابق ، مثل على حامل محور الفواصل و بدون حساب الحدود : $u_0$ ، $u_1$ ، $u_2$ و $u_3$ .

2ـ نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $v_n=u_n-3$

أ) أثبت أن المتتالية $(v_n)$ هندسية ، يطلب تعين أساسها و حدها الأول .

ب) أكتب $(v_n)$ بدلالة $n$ ، ثم استنتج عبارة $(u_n)$ بدلالة $n$ .

ج) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ .

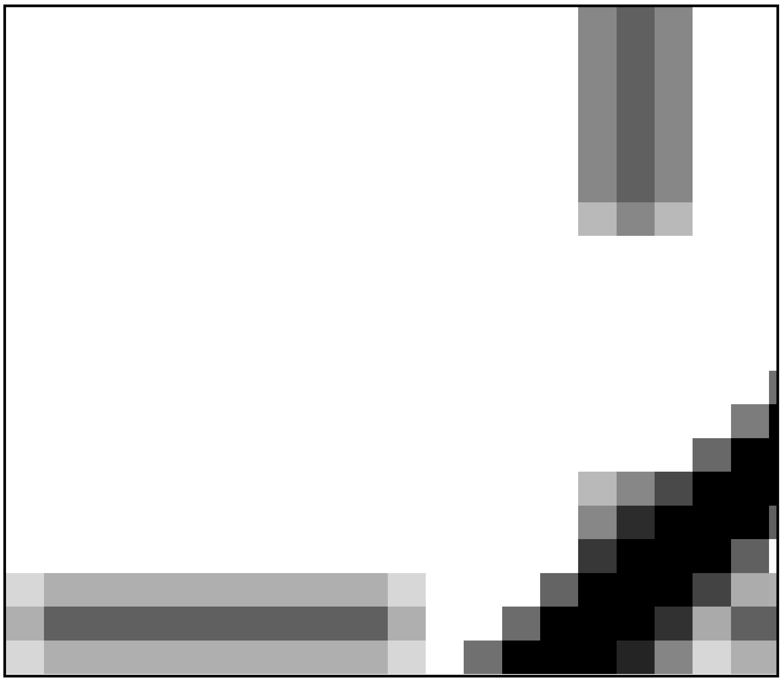
3ـ أـ أحسب المجموع $S_n$ بدلالة $n$ حيث : $S_n=v_0+v_1+v_2+........+v_n$

ب- استنتج المجموع $S_n'$ بدلالة $n$ حيث : $S_n'=u_0+u_1+u_2+........+u_n$

حل التمرين

$(u_n)$ متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2$

2ـ أ) رسم $(d)$ و $(\Delta)$ .



ب) تمثيل الحدود $u_0$ ، $u_1$ ، $u_2$ و $u_3$ .

2ـ نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $v_n=u_n-3$

أ) اثبات أن المتتالية $(v_n)$ هندسية.

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي $n$:

$$v_{n+1}=u_{n+1}-3=\frac{1}{3}u_n+2-3=\frac{1}{3}u_n-1=\frac{1}{3}(u_n-3)=\frac{1}{3}v_n$$

ومنه $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0=-2$ .

ب) كتابة $(v_n)$ بدلالة $n$ ، ثم استنتاج عبارة $(u_n)$ بدلالة $n$ .

$v_n = -2\left(\frac{1}{3}\right)^n$ و $u_n = v_n + 3 = -2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$

ج) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\underbrace{-2\left(\frac{1}{3}\right)^n}_{0} + 3\right] = 3$ .

4 ـ أ ـ حساب المجموع $S_n$ بدلالة $n$ :

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots\dots\dots + v_n$$

$$S_n = -2\left[\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}\right] = 3\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1\right]$$

بـ استنتاج المجموع $S_n'$ بدلالة $n$ :

$$S_n' = u_0 + u_1 + u_2 + \dots\dots\dots + u_n$$

$$S_n' = (v_0+3) + (v_1+3) + (v_2+3) + \dots\dots\dots + (v_n+3)$$

$$S_n' = [v_0 + v_1 + v_2 + \dots\dots\dots + v_n] + \left(\underbrace{3+3+3+\dots.+3}_{n+1 \text{ مرة}}\right)$$

$$S_n' = 3\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1\right] + 3(n+1)$$

$$S_n' = 3\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + 3n$$

## التمرين العاشر

قاعة سينما منظمة على شكل صفوف بحيث عدد الكراسي في الصف الأول 5 و عدد الكراسي في الصف الثاني يزيد عن عدد الكراسي في الصف الأول بـ3 وعدد الكراسي في الصف الثالث يزيد عن الصف الثاني بـ3 وهكذا...

1ـ احسب عدد الكراسي في الصف الثاني ثم في الصف الثالث

2ـ عبر بدلالة **n** عن عدد الكراسي في الصف ذي الرتبة **n**

3ـ ماهو عدد الصفوف في هذه القاعة إذا علمت أن عدد الكراسي داخل القاعة هو 153

## حل

عدد الكراسي في الصف الأول 5 , يزيد عدد الكراسي في الصف الثاني بـ3 و في الصف الثالث يزيد عدد الكراسي عن الصف الثاني بـ3 وهكذا , نلاحظ أن هناك متتالية $(U_n)$ حسابية حدها الأول $U_1 = 5$ و أساسها $r=3$

1ـ عدد الكراسي في الصف الثاني والثالث:

$U_2 = U_1 + r$ ; $U_2 = 5 + 3 = 8$

$U_3 = U_2 + r$ ; $U_3 = 8 + 3 = 11$

2ـ عدد الكراسي في الصف ذي الرتبة $n$ :

$U_n = U_1 + (n-1)r$ ; $U_n = 2 + 3n$

3ـ عدد الصفوف علما أن عدد الكراسي في القاعة 153:

$$U_1 + U_2 + \cdots + U_n = 153$$

$$\frac{n}{2}(U_1 + U_n) = 153$$

$$3n+7n-306=0$$

عدد الصفوف $n_1=9$ ; $n_2 = -11.3$ مرفوضة

ـلطانتم بفضل اللّه

الحمد للّه الذي بنعمته تتم الصالحات

ـلطانالأستاذ يوسف بوشناق

ـلطانيتمنى لكم التوفيق

تجدون هذا الملف في صفحة

Top Maths