اختبار في مادة: الرياضيات **المدة: 3سا و30د**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ $u_1 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_{n+1} = \frac{4n}{n+1}u_n$.

1- احسب الحدين u_2 و u_3، ثم بيّن أنّ المتتالية (u_n) ليست حسابية وليست هندسية.

2- بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_n > 0$، استنتج أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

3- (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $v_n = \frac{n}{4^n}u_n + 3$.

أ) أثبت أنّ (v_n) متتالية ثابتة، استنتج أنّ $v_n = 4$.

ب) أثبت أنّ $u_n = \frac{4^n}{n}$، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ وادرس تقاربها. (يمكن وضع $t = n\ln 4$)

4- من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع: $P_n = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n$ و $S_n = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \ldots + \frac{1}{u_n}$.

بيّن أنّ $P_n = \frac{2^{n(n+1)}}{n!}$، ثم برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم فإنّ: $S_n = \frac{1}{9}\left(4 - \frac{3n+4}{4^n}\right)$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على ثلاث كريات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 1 وأربع كريات سوداء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 2 ، 2 وأربع كريات خضراء تحمل الأرقام 2 ، 3 ، 3 ، 3. (لا نفرق بينها عند اللّمس)

نسحب من هذا الكيس كريتين في آن واحد بطريقة عشوائية.

1- نسمي الحادثة A: "سحب كريتين من لونين مختلفين"، والحادثة C: "سحب كريتين تحملان نفس الرقم".

بيّن أنّ $p(A) = \frac{8}{11}$ و $p(C) = \frac{3}{11}$، ثم احسب $p(A \cap C)$، $p(A \cup C)$ و $p_{\overline{C}}(A)$.

2- نسمي a و b ترقيم الكريتين المسحوبتين، وX المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب الجمع $a+b$ عند سحب كريتين رقميهما مختلف، والجداء $a \times b$ عند سحب كريتين تحملان نفس الرقم.

أ) برّر أنّ مجموعة قيم X هي $\{1;3;4;5;9\}$، ثم بيّن أنّ $p(X=1) = \frac{6}{55}$ و $p(X=4) = \frac{18}{55}$.

ب) عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر X، ثم احسب $p(X \leq E(X))$، حيث $E(X)$ هو الأمل الرياضياتي.

3- نرمي زهرة نرد مكعبة ومتوازنة أوجهها مرقّمة بـ 1 ، 1 ، 2 ، 2 ، 3 ، 3. إذا ظهر الوجه الذي يحمل رقما زوجيا (P) نضيف كرية بيضاء إلى الكيس، وإذا ظهر الوجه الذي يحمل رقما فرديا (I) نضيف إلى الكيس أربع كريات من لونين مختلفين: الأسود والأخضر، بعد ذلك نسحب كرية من الكيس. نسمي (B) سحب كرية بيضاء.

أ) أنشئ شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية، باستعمال الرموز (P)، (I)، (B) و $(\overline{B})$ فقط.

ب) بيّن أنّ $p(B) = \frac{11}{45}$، واحسب احتمال ظهور الوجه ذي الرقم الزوجي علما أنّ الكرية المسحوبة بيضاء.

جـ) ما هو عدد الكريات السوداء المضافة سابقا إذا علمت أنّ احتمال سحب كرية سوداء (N) هو $\frac{1}{3}$؟

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-4z+8=0$. اكتب الحلين على الشكل الأسي.

2- المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ حيث الوحدة $1cm$.

لتكن النقطتان A و B لاحقتاهما $z_A=2+2i$ و $z_B=2-2i$، ولتكن I منتصف القطعة [AB].

أ) بيّن أنّ $(z_A-z_B)^{99}+i(z_A\times z_B)^{66}=0$.

ب) اكتب على الشكل الأسي العدد المركب $\frac{z_A}{z_B}$ ثم استنتج طبيعة المثلث OAB.

3- أ) عيّن ثم أنشئ المجموعة (E_1) للنقط $M(z)$ من المستوي حيث $|z-z_A|=|\bar{z}-z_A|$.

ب) عيّن ثم أنشئ المجموعة (E_2) للنقط $M(z)$ من المستوي حيث $z-z_I=|z_A-z_I|e^{\theta i}$. θ يمسح $\mathbb{R}$.

4- T تحويل نقطي من المستوي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث: $z'=2iz+4-8i$.

أ) عيّن طبيعة التحويل T وعناصره المميزة.

ب) عيّن A' و B' صورتي النقطتين A و B بواسطة التحويل T.

ج) عيّن ثم أنشئ المجموعتين (E_1') و(E_2') صورتي المجموعتين (E_1) و(E_2) بواسطة التحويل T.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x+1+e^{-x-1}$

وليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)

1- أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$، وبيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

ب) بيّن أنّ $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y=x+1$. ادرس وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة لـ (Δ).

2- أ) احسب $f'(x)$، ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة f واستنتج إشارة $f(x)$.

ب) اكتب معادلة لـ (Δ') مماس المنحني $(\mathscr{C})$ عند النقطة ذات الفاصلة المعدومة.

3- أ) احسب $f(-3)$، ثم ارسم المستقيم المقارب (Δ)، والمنحني $(\mathscr{C})$.

ب) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود وعدد حلول المعادلة $1-me^{x+1}=0$

4- n عدد طبيعي غير معدوم. نعتبر $\mathscr{A}(n)$ مساحة الحيّز من المستوي المحدّد بالمنحني $(\mathscr{C})$، المستقيم (Δ) والمستقيمين اللّذين معادلتاهما: $x=-1+\ln(n+1)$ و $x=-1+\ln n$.

أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $\mathscr{A}(n)=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)u.a$.

ب) نضع: $S_n=\mathscr{A}(1)+\mathscr{A}(2)+\ldots+\mathscr{A}(n)$. احسب بـ cm^2 المجموع S_n، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

5- M نقطة من $(\mathscr{C})$ فاصلتها a، و N نقطة تقاطع المماس لـ$(\mathscr{C})$ عند M مع المستقيم (Δ).

أ) بيّن أنّ معادلة المماس لـ$(\mathscr{C})$ عند M هي: $y=(1-e^{-a-1})x+1+e^{-a-1}(a+1)$.

ب) M' و N' المسقطان العموديان لـ M و N على حامل محور الفواصل. بيّن أنّ $N(a+1;a+2)$، واستنتج أنّ $M'N'=1$، ثم اشرح كيفية رسم المماس (Δ') بطريقة بسيطة، وارسمه في المعلم السابق.

6- أ) بيّن أنّ الدالة f والدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=\ln[f(x)]$ لهما نفس اتّجاه التغيّر.

ب) بيّن أنّ $g(x)=-x-1+\ln[1+(x+1)e^{x+1}]$، واستنتج أنّ منحني g يقبل مستقيما مقاربا مائلا.

انتهى الموضوع الأول

تصحيح البكالوريا التجريبي 2024

تمرين 1: الموضوع 1 عبد المطلب

1) $u_2 = 8$ و $u_3 = \frac{64}{3}$.

$u_3 - u_2 \neq u_2 - u_1$ و $\frac{u_3}{u_2} \neq \frac{u_2}{u_1}$

ومنه: (u_n) ليست حسابية ولا هندسية

2) $n=1$: $u_1 = 4$ ومنه: $u_1 > 0$ (محققة)

نفرض أن $u_n > 0$ ونبرهن صحة $u_{n+1} > 0$

لدينا: $u_n > 0$ ، $\left(\frac{4n}{n+1}\right) \times u_n > 0$ ومنه: $u_{n+1} > 0$

من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n > 0$.

ب) $u_{n+1} - u_n = \frac{4n}{n+1} u_n - u_n = \frac{3n-1}{n+1} u_n > 0$

لأن من أجل $n > 0$ ؛ $3n - 1 > 0$ ومنه (u_n) متزايدة

3) $v_{n+1} = \frac{n+1}{4^{n+1}} u_{n+1} + 3 = \frac{n+1}{4^{n+1}} \left(\frac{4n}{n+1}\right) u_n + 3$

$v_{n+1} = \frac{4n}{4^{n+1}} u_n + 3 = \frac{n}{4^n} u_n + 3 = v_n$

ومنه: (v_n) ثابتة

$v_n = v_1 = \frac{u_1}{4} + 3 = 4$: v_n قيمة

ب) $v_n = \frac{(v_n - 3) 4^n}{n}$ ومنه $u_n = \frac{4^n}{n}$ يعني: $v_n = \frac{n}{4^n} u_n + 3$

$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{e^{n \ln 4}}{n} = \lim_{t \to +\infty} \ln 4 \times \frac{e^t}{t} = +\infty$

ومنه: (u_n) متباعدة.

4) $P_n = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n = \frac{4^1}{1} \times \frac{4^2}{2} \times \dots \times \frac{4^n}{n}$

$P_n = \frac{4^{1+2+\dots+n}}{1 \times 2 \times \dots \times n} = \frac{4^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n!} = \frac{e^{n(n+1)}}{n!}$

$S_n = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} = \frac{1}{9}\left(4 - \frac{3n+4}{4^n}\right)$

$n=1$: $S_1 = \frac{1}{9}\left(4 - \frac{7}{4}\right) = \frac{1}{4} = \frac{1}{u_1}$ (محققة)

نفرض صحة S_n ونبرهن صحة S_{n+1} أي

$S_{n+1} = \frac{1}{9}\left(4 - \frac{3n+7}{4^{n+1}}\right)$

$S_{n+1} = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} = S_n + \frac{1}{u_{n+1}}$

$S_{n+1} = \frac{1}{9}\left(4 - \frac{3n+4}{4^n}\right) + \frac{n+1}{4^{n+1}} = \frac{1}{9}\left(4 - \frac{4(3n+4)}{4^{n+1}} + \frac{9(n+1)}{4^{n+1}}\right)$

$S_{n+1} = \frac{1}{9}\left(4 - \frac{12n+16-9n-9}{4^{n+1}}\right) = \frac{1}{9}\left(4 - \frac{3n+7}{4^{n+1}}\right)$

ومنه: من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ S_n صحيحة (محققة)

تمرين 2:

1) $P(A) = \frac{C_3^1 \times C_8^1 + C_4^1 \times C_4^1}{C_{11}^2} = \frac{8}{11}$

$P(C) = \frac{2C_4^2 + C_3^2}{C_{11}^2} = \frac{3}{11}$

$P(A \cap C) = \frac{C_3^1 \times C_1^1 + C_3^1 \times C_1^1}{C_{11}^2} = \frac{6}{55}$

$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \frac{49}{55}$

$P_{\bar{C}}(A) = \frac{P(A \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{P(A) - P(A \cap C)}{P(\bar{C})} = \frac{17}{20}$

2) $P(X=1) = \frac{C_4^2}{C_{11}^2} = \frac{6}{55}$ $P(X=3) = \frac{C_4^1 \times C_4^1}{C_{11}^2} = \frac{16}{55}$

$P(X=5) = \frac{C_4^1 \times C_3^1}{C_{11}^2} = \frac{12}{55}$ $P(X=9) = \frac{C_3^2}{C_{11}^2} = \frac{3}{55}$

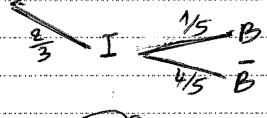
$P(X=4) = \frac{C_4^2 + C_4^1 \times C_3^1}{C_{11}^2} = \frac{18}{55}$

x_i	1	3	4	5	9
$P(X=x_i)$	$\frac{6}{55}$	$\frac{16}{55}$	$\frac{18}{55}$	$\frac{12}{55}$	$\frac{3}{55}$

$E(X) = \frac{6}{55} + \frac{48}{55} + \frac{72}{55} + \frac{60}{55} + \frac{27}{55} = \frac{213}{55} \simeq 3{,}87$

$P(X \leq 3{,}87) = P(X=1) + P(X=3) = 0{,}4$

3) ب) $P(B) = P(P \cap B) + P(I \cap B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{5}$



$P(B) = \frac{11}{45}$

$P_B(P) = \frac{P(P \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{11}{45}} = \frac{5}{11}$

$P(N) = P(P \cap N) + P(I \cap N) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{4+x}{15}\right)$ (⇒

$x=1$ ومنه: $\frac{1}{9} + \frac{2}{3}\left(\frac{4+x}{15}\right) = \frac{1}{3}$

عدد الكريات السوداء المضافة هو 1

تمرين 3:

1) $\Delta = -16 = 16i^2$ ، $z^2 - 4z + 8 = 0$

حلان مترافقين $\begin{cases} z_1 = 2 - 2i = 2\sqrt{2}\, e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} \\ z_2 = 2 + 2i = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \end{cases}$

2) $\left(z_A - z_B\right)^{99} + i\left(z_A \times z_B\right)^{66} = (4i)^{99} + i\, 8^{66}$

$= 4^{99} \times i^{99} + i\left(2^3\right)^{66} = \left(2^2\right)^{99} \times i \times \left(i^2\right)^{49} + 2^{198} i$

$= -2^{198} i + 2^{198} i = 0$

ب) $\frac{z_A}{z_B} = \frac{2\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}\, e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\left|\frac{z_A}{z_B}\right| = \frac{OA}{OB} = 1$ و $\arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = \left(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OA}\right) = \frac{\pi}{2}$

ومنه المثلث OAB متساوي الساقين وقائم في O

3) $|z - z_A| = |\bar{z} - \bar{z}_B|$ يعني: $|z - z_A| = |\bar{z} - z_A|$

$|z - z_A| = |z - z_B|$: يعني $|z - z_A| = |\overline{z - z_B}|$

(E_1) : $AM = BM$ هي محور القطعة $[AB]$

ب) $|z - z_I| = AI$ يعني $z - z_I = |z_A - z_I| e^{i0}$

(E_2) : $IM = AI$ هي دائرة مركزها I و $r = AI$

4) T : $z' = 2e^{i\frac{\pi}{2}} z + 4 - 8i$

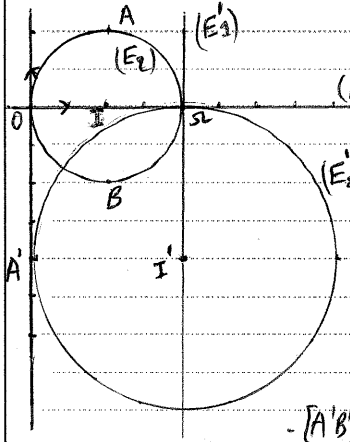
T تشابه مباشر نسبته 2 ، زاويته $\frac{\pi}{2}$

ومركزه Ω لاحقته $w = \frac{4-8i}{1-2i} = 4$ أي $\Omega(4;0)$

ب) $z_{A'} = 2i z_A + 4 - 8i = -4i$ ومنه $A'(0;-4)$

$z_{B'} = 2i z_B + 4 - 8i = 8 - 4i$ ومنه: $B'(8;-4)$

ج)



(E_1') هي محور $[A'B']$

أو منتصف $[A'B']$

(E_2') هي الدائرة التي

مركزها I' منتصف $[AB']$

ونصف قطرها $r' = I'A'$

أو صورة الدائرة التي قطرها

$[AB]$ هي الدائرة التي قطرها $[A'B']$.

تمرين 4 :

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty} e^{-x-1} = 0$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (-x-1)\left(-1 + \frac{e^{-x-1}}{-x-1}\right) = +\infty$ ($e^{-x-1} \to +\infty$)

ب) $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x - 1) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x-1} = 0$

ومنه: (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ $(\mathcal{C})$ بجوار $+\infty$

و $(f(x) - x - 1) > 0$ ومنه $(\mathcal{C})$ أعلى (Δ).

2) $f'(x) = 1 - e^{-x-1}$

يمكن كتابة $f'(x)$ على الشكل: $1 - \frac{1}{e^{x+1}}$

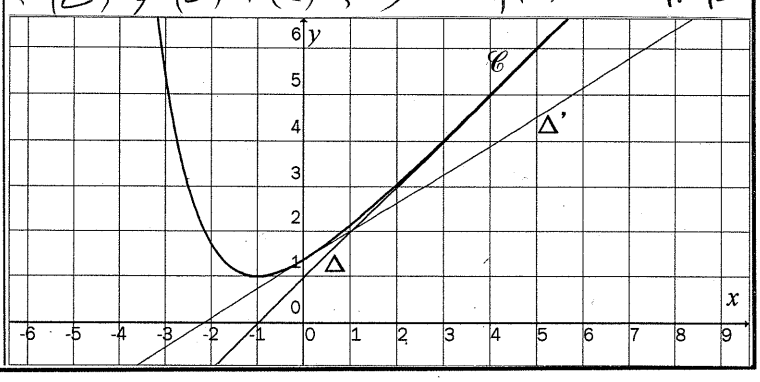
$f'(x) = \frac{e^{x+1} - 1}{e^{x+1}}$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

من جدول التغيرات: $f(x) > 0$.

ب) $y = f'(0)(x-0) + f(0) = (1 - e^{-1})x + 1 + e^{-1}$

3) $f(-3) \simeq 5,4$ رسم $(\mathcal{C})$ ، (Δ) و (Δ') :



ب) $e^{-x-1} = m$ يعني $1 - m e^{x+1} = 0$

$x + 1 + e^{-x-1} = x + m + 1$ أي $f(x) = x + m + 1$

ج) حلول هذه المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع $(\mathcal{C})$ مع المستقيمات الموازية لـ (Δ) : (ميلها 1)

$m + 1 \leq 1$ أي $m \leq 0$ لا يوجد حلول

$1 < m + 1 < 1 + e^{-1}$ أي $0 < m < e^{-1}$ حل وحيد موجب

$m + 1 > 1 + e^{-1}$ أي $m > e^{-1}$ حل وحيد سالب

$m + 1 = 1 + e^{-1}$ أي $m = e^{-1}$ حل وحيد معدوم

4) $A(n) = \int_{-1+\ln n}^{-1+\ln(n+1)} (f(x) - x - 1)\,dx = \int_{-1+\ln n}^{-1+\ln(n+1)} e^{-x-1}\,dx$

$A(n) = \left[-e^{-x-1}\right]_{-1+\ln n}^{-1+\ln(n+1)} = -e^{-\ln(n+1)} + e^{-\ln n}$

ومنه: $A(n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

ب) $S_n = A(1) + A(2) + \dots + A(n)$

$S_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$ ua

$S_n = \left(4 - \frac{4}{n+1}\right)$ cm²

$\lim_{n\to+\infty} S_n = 4$ cm²

$S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

5) $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

$y = (1 - e^{-a-1})(x-a) + a + 1 + e^{-a-1}$

$y = (1 - e^{-a-1})x + 1 + (a+1)e^{-a-1}$

ب) $(1 - e^{-a-1})x + 1 + (a+1)e^{-a-1} = x + 1$

$-e^{-a-1}x + e^{-a-1}(a+1) = 0$

ومنه: $x = a + 1$ و $y = a + 2$ أي $N(a+1; a+2)$

$M'(a;0)$ و $N'(a+1;0)$

إذن: $M'N' = \sqrt{(a+1-a)^2 + 0^2} = 1$

(Δ') المماس لـ $(\mathcal{C})$ عند $x_0 = 0$ يقطع (Δ) عند $N(1;2)$

6) $g(x) = \ln[f(x)]$ ومنه: $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$

بما أن $f(x) > 0$ ومنه g و f لهما نفس اتجاه التغير

ب) $g(x) = \ln(x + 1 + e^{-x-1}) = \ln\left[e^{-x-1}\left(e^{x+1}(x+1) + 1\right)\right]$

$g(x) = \ln e^{-x-1} + \ln\left(e^{x+1}(x+1) + 1\right)$

$g(x) = -x - 1 + \ln\left(1 + (x+1)e^{x+1}\right)$

$\lim_{x\to-\infty} (f(x) + x + 1) = \lim_{x\to-\infty} \ln\left(1 + (x+1)e^{x+1}\right) = 0$

لأن $\lim_{x\to-\infty} (x+1)e^{x+1} = 0$ ($\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$)

منحنى g يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y = -x - 1$ بجوار $-\infty$.

"عبد الباطن"

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

I- 1- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $\left(z-\sqrt{3}\right)\left(z^2+4\sqrt{3}\,z+21\right)=0$

2- لتكن z_1 ، z_2 و z_3 حلول المعادلة السابقة، بيّن أنّ: $\left(\dfrac{z_1+z_2+z_3}{3\sqrt{3}\,i}\right)^{1445}=i$.

II- في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. لتكن النقط A ، B و C من هذا المستوي التي لواحقها على الترتيب: $z_A=\sqrt{3}$ ، $z_B=-2\sqrt{3}-3i$ و $z_C=-2\sqrt{3}+3i$.

1- بيّن أنّ لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي ABCD متوازي الأضلاع هي $z_D=\sqrt{3}+6i$.

2- أ) بيّن أنّ $\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، استنتج طبيعة المثلث ABC والرباعي ABCD ثم مثّلهما.

ب) اكتب معادلة الدائرة (Γ) المحيطة بالمثلث ABC ثم مثّلها.

ج) بيّن أنّ النقطة C هي صورة النقطة A بالدوران r ، يطلب تعيين مركزه وزاويته.

3- أ) عيّن العدد الحقيقي α حتى تكون النقطة D مرجحا للجملة: $\{(A,\alpha);(B,-1);(C,1)\}$.

ب) عيّن ومثّل (Γ') مجموعة النقط M من المستوي بحيث: $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\right\|$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1- f ، g و h الدوال العددية المعرّفة على المجال $]\,1\,;+\infty\,[$ بـ:

$f(x)=\dfrac{-3-\ln x}{x}$ ، $g(x)=(2x-3)e^x$ و $h(x)=\sqrt{4x-3}$.

بيّن أنّ: $f'(1)=h'(1)=2$ ، وأنّ: $g'(1)=e$.

2- يحتوي كيس على 8 كرات لا نفرق بينها عند اللمس. 4 كرات كل منها تحمل الحرف f ، 3 كرات كل منها تحمل الحرف g ، وكرة واحدة تحمل الحرف h. نسحب من هذا الكيس عشوائيا وفي آن واحد 3 كرات. نرمز بـ k جمع الدوال المكتوبة على الكرات المسحوبة، كَمِثال عند سحب 3 كرات كلها تحمل الحرف f نضع $k=3f$.

ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث كرات العدد $k'(1)$.

أ) برّر أنّ مجموعة قيم X هي $\{6\,;\,e+4\,;\,2e+2\,;\,3e\}$، ثم بيّن أنّ $p(X=6)=\dfrac{5}{28}$.

ب) عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X، ثم احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$.

3- نسحب الآن من هذا الكيس عشوائيا على التوالي 3 كرات بحيث نعيد في كل مرة الكرة المسحوبة إلى الكيس. احسب احتمال سحب 3 كرات مختلفة مثنى مثنى.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0 = 0$ ، $u_1 = \frac{1}{3}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $9u_{n+2} = 6u_{n+1} - u_n$.

1- احسب الحد u_2، ثم بيّن أنّ المتتالية (u_n) ليست حسابية وليست هندسية.

2- (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 3u_{n+1} - u_n$.

أثبت أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$، ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n.

3- (w_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = \frac{u_n}{v_n}$.

أ) أثبت أنّ (w_n) متتالية حسابية أساسها 1، ثم اكتب عبارة w_n بدلالة n.

ب) أثبت أنّ $u_n = \frac{n}{3^n}$، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ وادرس تقاربها. (يمكن وضع $t = n\ln 3$)

4- من أجل كل عدد طبيعي نضع: $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ: $S_n = \frac{1}{4}\left(3 - \frac{2n+3}{3^n}\right)$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I- f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = x(2-\ln x)^2$.

ليكن $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$، ثم بوضع $\ln x = t$، بيّن أنّ $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x) = \lim\limits_{t\to-\infty}\left(t^2e^t - 4te^t + 4e^t\right) = 0$.

2- **أ)** أثبت أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$، فإنّ $f'(x) = \ln x(-2+\ln x)$.

ب) ادرس إشارة $f'(x)$ على المجال $]0;+\infty[$، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f.

ج) بيّن أنّ $(\mathscr{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف A، ثم اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني $(\mathscr{C}_f)$ عند A.

3- **أ)** احسب $f(15)$، ثم ارسم المنحني $(\mathscr{C}_f)$ والمماس (Δ). الوحدة $1cm$.

ب) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود وعدد حلول المعادلة $f(x)+m=0$.

II- g الدالة المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = 2x(2-\ln x)$، وليكن $(\mathscr{C}_g)$ تمثيلها البياني.

1- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$، وبيّن أنّ: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} g(x) = 0$.

2- أثبت أنّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$، فإنّ $g'(x) = 2-2\ln x$، ثم شكّل جدول تغيرات g.

3- **أ)** أثبت أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$، فإنّ $f(x) - g(x) = x\,f'(x)$.

ب) ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة للمنحني $(\mathscr{C}_g)$ مع تحديد نقاط تقاطعهما.

ج) احسب $g(10)$، ثم ارسم المنحني $(\mathscr{C}_g)$ في نفس المعلم السابق.

4- **أ)** باستعمال التكامل بالتجزئة، بيّن أنّ: $\int_1^{e^2}\left(f(x)-g(x)\right)dx = -4 - \int_1^{e^2} f(x)\,dx$. استعن بـ **II- 3- أ)**.

ب) باستعمال التكامل بالتجزئة، بيّن أنّ: $\int_1^{e^2} g(x)\,dx = \frac{e^4-5}{2}$، استنتج أنّ: $\int_1^{e^2} f(x)\,dx = \frac{e^4-13}{4}$.

ج) استنتج مساحة الحيّز المستوي المحدّد بـ $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ والمستقيمين اللّذين معادلتاهما: $x=1$ و $x=e^2$.

انتهى الموضوع الثاني

تصحيح البكالوريا التجريبي 2024م

الموضوع 2 عبد المطلب

تمرين 1 :

(1 - I $z - \sqrt{3} = 0$ أي $(z_1 = \sqrt{3})$

$z^2 + 4\sqrt{3}z + 21 = 0$ $\Delta = -36 = 36i^2$

$z_2 = -2\sqrt{3} - 3i$ و $z_3 = -2\sqrt{3} + 3i$

(2 $\left(\frac{z_1 + z_2 + z_3}{3\sqrt{3}i}\right)^{1445} = \left(\frac{-3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}i}\right)^{1445} =$

$\left(\frac{-1}{i}\right)^{1445} = i^{1445} = i \times (i^2)^{722} = i$

(1 - II ABCD متوازي الأضلاع

$z_B - z_A = z_C - z_D$ أي $\vec{AB} = \vec{DC}$

$z_D = z_A + z_C - z_B = \sqrt{3} + 6i$

(P (2 $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{6i}{3\sqrt{3} + 3i}$

$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{\pi}{3}}$

$\arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = (\vec{BA}; \vec{BC}) = \frac{\pi}{3}$

$\left|\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right| = 1$ أي $BC = BA$

ومنه المثلث ABC متقايس الأضلاع.

ب) G مركز ثقل ABC : $z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = -\sqrt{3}$

مركز الدائرة (Γ) هو G حيث $G(-\sqrt{3}; 0)$ ونصف قطرها $r = GA = 2\sqrt{3}$ معادلة (Γ)

$(x + \sqrt{3})^2 + y^2 = 12$

(ج $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ يعني $z_C - z_B = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_A - z_B)$

منه C صورة A بالدوران r مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{3}$

(P (3 $z_D = \frac{\alpha z_A - z_B + z_C}{\alpha}$ $(\alpha \neq 0)$

$\alpha = 1$ أي $\alpha(\sqrt{3} + 6i) = \alpha\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 3i - 2\sqrt{3} + 3i$

ب) $\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MC} - \vec{MD}\|$

$\|\vec{MD} + \vec{DA} - \vec{MD} - \vec{DB} + \vec{MD} + \vec{DC}\| = \|\vec{DM} + \vec{MC}\|$

$\|\vec{MD} + \vec{DA} - \vec{DB} + \vec{DC}\| = \|\vec{DC}\|$

$MD = DC$ أي $M \in (\Gamma')$ هي دائرة مركزها D ونصف قطرها $r = DC$.

تمرين 2 :

(1 $f'(1) = 2$: أي $f'(x) = \frac{2 + \ln x}{x^2}$

$g'(1) = e$; أي $g'(x) = (2x - 1)e^x$

$h'(1) = 2$: أي $h'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x - 3}}$

(P (2 $3f'(1) = 6$ أي $k'(1) = 6$: أي $X = 6$

$3g'(1) = 3e$ أي $k'(1) = 3e$: أي $X = 3e$

$2f'(1) + g'(1) = e + 4$ أي $k'(1) = e + 4$: أي $X = e + 4$

$2f'(1) + h'(1) = 6$ أي $k'(1) = 6$: أي $X = 6$

$2g'(1) + f'(1) = 2e + 2$ أي $k'(1) = 2e + 2$: أي $X = 2e + 2$

$2g'(1) + h'(1) = 2e + 2$ أي $k'(1) = 2e + 2$: أي $X = 2e + 2$

$f'(1) + g'(1) + h'(1) = e + 4$ أي $k'(1) = e + 4$: أي $X = e + 4$

إذن قيم X هي : $\{6 ; e+4 ; 2e+2 ; 3e\}$

$P(X = 6) = \frac{C_4^3 + C_4^2 \times C_1^1}{C_8^3} = \frac{5}{28}$

ب) $P(X = e+4) = \frac{C_4^2 \times C_3^1 + C_4^1 \times C_3^1 \times C_1^1}{C_8^3} = \frac{15}{28}$

$P(X = 2e+2) = \frac{C_3^2 \times C_4^1 + C_3^2 \times C_1^1}{C_8^3} = \frac{15}{56}$

$P(X = 3e) = \frac{C_3^3}{C_8^3} = \frac{1}{56}$

x_i	6	$e+4$	$2e+2$	$3e$
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$

$E(X) = \frac{30}{28} + \frac{15(e+4)}{28} + \frac{15(2e+2)}{56} + \frac{3e}{56}$

$E(X) = \frac{9e + 30}{8}$

(3 $p = 6\left(\frac{4^1 \times 3^1 \times 1^1}{8^3}\right) = \frac{9}{64}$

$hgf - \bar{h}fg - g\bar{h}f - gf\bar{h} - f\bar{h}g - fg\bar{h}$

تمرين 3 :

(1 $9u_2 = 6u_1 - u_0$: أي $u_2 = \frac{2}{9}$

$u_0 + u_2 \neq 2u_1$ (الوسط الحسابي)

$u_0 \times u_2 \neq u_1^2$ (الوسط الهندسي)

(2 $v_{n+1} = 3u_{n+2} - u_{n+1} = 3\left(\frac{6u_{n+1} - u_n}{9}\right) - u_{n+1}$

$v_{n+1} = \frac{3u_{n+1} - u_n}{3} = \frac{1}{3}v_n$

$v_0 = 2$ و $\frac{1}{3}$ أساسها متتالية هندسية (v_n) : أي

$v_n = v_0 \cdot q^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

(P (3 $w_{n+1} - w_n = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} - \frac{u_n}{v_n} = \frac{v_n + u_n}{\frac{v_n}{3}} - \frac{u_n}{v_n}$

$w_{n+1} - w_n = \frac{v_n + u_n}{v_n} - \frac{u_n}{v_n} = 1 + \frac{u_n}{v_n} - \frac{u_n}{v_n} = 1$

$w_0 = 0$ و 1 أساسها متتالية حسابية (w_n) : أي

ب) الحلول $f(x)=-m$ عبارة عن فواصل تقاطع (C_f) مع المستقيمات الأفقية $y=-m$:

$-m<0$ أي $m>0$: لا يوجد حلول

$-m=0$ أي $m=0$: حل مضاعف $(x=e^2)$

$0<-m<4$ أي $-4<m<0$: 3 حلول

$-m=4$ أي $m=-4$: حلان أحدهما مضاعف

$-m>4$ أي $m<-4$: حل وحيد.

II-1) $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ لأن: $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

$\lim_{x\overset{>}{\to}0} g(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}0}(4x-2x\ln x)=0$

2) $g'(x)=2(2-\ln x)-\frac{1}{x}(2x)=2-2\ln x$

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	↗	$2e$	↘	$-\infty$

3 أ) $f(x)-g(x)=x(2-\ln x)^2-2x(2-\ln x)$

$=(2-\ln x)(x(2-\ln x)-2x)=(-2+\ln x)(x\ln x)$

ومنه: $f(x)-g(x)=x f'(x)$

ب) إشارة $(f(x)-g(x))$ من إشارة $f'(x)$

$0 \quad + \quad 1 \quad - \quad e^2 \quad +$

$x\in]1;e^2[$: (C_f) أسفل (C_g)

$x\in]0;1[\cup]e^2;+\infty[$: (C_f) أعلى (C_g).

(C_f) يقطع (C_g) عند $(1;4)$ و $(e^2;0)$.

4 أ) $\int_1^{e^2}(f(x)-g(x))\,dx=\int_1^{e^2}x f'(x)\,dx$

$\begin{cases}u'(x)=1\\ v(x)=f(x)\end{cases}$ $\begin{cases}u(x)=x\\ v'(x)=f'(x)\end{cases}$

$\int_1^{e^2}(f(x)-g(x))\,dx=[x f(x)]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}f(x)\,dx$

ومنه: $\int_1^{e^2}(f(x)-g(x))\,dx=-4-\int_1^{e^2}f(x)\,dx$

ب) $\int_1^{e^2}g(x)\,dx=\int_1^{e^2}2x(2-\ln x)\,dx$

$\begin{cases}u'(x)=\frac{-1}{x}\\ v(x)=x^2\end{cases}$ $\begin{cases}u(x)=2-\ln x\\ v'(x)=2x\end{cases}$

$\int_1^{e^2}g(x)\,dx=[x^2(2-\ln x)]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}-x\,dx$

$\int_1^{e^2}g(x)\,dx=\left[x^2(2-\ln x)+\frac{x^2}{2}\right]_1^{e^2}$

$\int_1^{e^2}g(x)\,dx=\frac{e^4-5}{2}$

$\int_1^{e^2}f(x)\,dx-\int_1^{e^2}g(x)\,dx=-4-\int_1^{e^2}f(x)\,dx$

$\int_1^{e^2}f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_1^{e^2}g(x)\,dx-2=\frac{e^4-13}{4}$

جـ) $A=\int_1^{e^2}(g(x)-f(x))\,dx=\frac{e^4+3}{4}$ u.a

"عبد المطلب" $A\simeq 14,4$ u.a

ومنه: $W_n=W_0+nr$ ، $(W_n=n)$

ب) $W_n=\frac{U_n}{V_n}$ بمعنى: $U_n=W_n\cdot V_n$

$U_n=n\left(\frac{1}{3}\right)^n$ ، ومنه: $U_n=\frac{n}{3^n}$

$\lim_{n\to+\infty}U_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{3^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{e^{n\ln3}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\ln3}\left(\frac{t}{e^t}\right)=0$

ومنه: (U_n) متقاربة.

4) $S_n=U_0+U_1+\dots+U_n=\frac{1}{4}\left(3-\frac{2n+3}{3^n}\right)$

$n=0$: $S_0=\frac{1}{4}\left(3-\frac{3}{1}\right)=0=U_0$ (محققة)

نفرض أن $S_n=\frac{1}{4}\left(3-\frac{2n+3}{3^n}\right)$ ونبرهن: $S_{n+1}=\frac{1}{4}\left(3-\frac{2n+5}{3^{n+1}}\right)$

$S_{n+1}=U_0+U_1+\dots+U_n+U_{n+1}=S_n+U_{n+1}$

$S_{n+1}=\frac{1}{4}\left(3-\frac{2n+3}{3^n}\right)+\frac{n+1}{3^{n+1}}=\frac{1}{4}\left(3-\frac{3(2n+3)}{3^{n+1}}+\frac{4(n+1)}{3^{n+1}}\right)$

$S_{n+1}=\frac{1}{4}\left(3-\frac{6n+9-4n-4}{3^{n+1}}\right)=\frac{1}{4}\left(3-\frac{2n+5}{3^{n+1}}\right)$

(محققة) ومنه: من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ S_n صحيحة.

تمرين 4:

I-1) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

$\lim_{x\overset{>}{\to}0}f(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\left(x(\ln x)^2-4x\ln x+4x\right)=\lim_{t\to-\infty}\left(t^2e^t-4te^t+4e^t\right)=0$

2 أ) $f'(x)=(2-\ln x)^2+2\left(\frac{-1}{x}\right)(2-\ln x)x$

$f'(x)=4+(\ln x)^2-4\ln x-2(2-\ln x)=(\ln x)^2-2\ln x$

$f'(x)=\ln x(\ln x-2)$

ب) إشارة $f'(x)$:

$0 \quad + \quad 1 \quad - \quad e^2 \quad +$

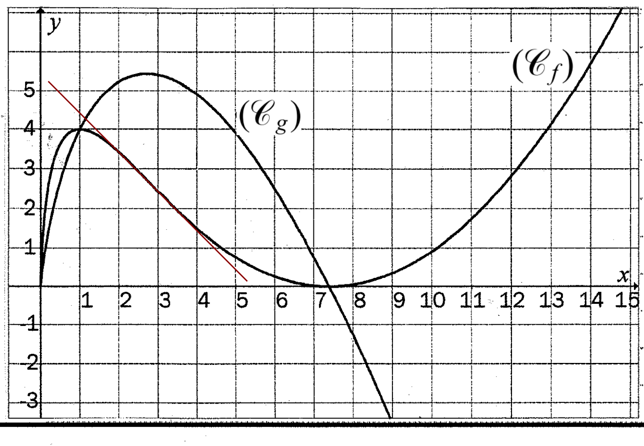
x	0		1		e^2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

جـ) $f''(x)=\frac{1}{x}(-2+\ln x)+\frac{1}{x}\ln x=\left(\frac{-2+2\ln x}{x}\right)$

$f''(x)=0$ لما $x=e$: $-\ e\ +$ ، $A(e;e)$

(Δ): $y=f'(e)(x-e)+f(e)=-x+2e$

3 أ)



$f(15)\simeq 7,5$

$g(10)\simeq -6$