08) الجداء السلمي

1. الجداء السلمي

الجداء السلمي لشعاعين

تعريف الجداء السلمي لشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي الذي نرمز إليه بالرمز $\vec{u}\cdot\vec{v}$ والمعرف بـ:
إذا كان $\vec{u}=\vec{0}$ أو $\vec{v}=\vec{0}$ فإن $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.
إذا كان $\vec{u}\neq\vec{0}$ و $\vec{v}\neq\vec{0}$ فإن $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$.

حالات خاصة:
إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا وكان لهما نفس الاتجاه فإن $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$ لأن $\cos(\vec{u},\vec{v})=1$
إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا وكانا اتجاهاهما متعاكسين فإن $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$ لأن $\cos(\vec{u},\vec{v})=-1$
نرمز إلى الجداء السلمي $\vec{u}\cdot\vec{u}$ بـ $\vec{u}^2$ ونسميه المربع السلمي للشعاع $\vec{u}$ وهكذا $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$ وبصفة خاصة
إذا كانت A و B نقطتين فإن $\overrightarrow{AB}^2=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2=AB^2$

مبرهنة إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين فإن: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$

العبارة التحليلية للجداء السلمي

مبرهنة إذا كانت، في معلم متعامد ومتجانس، إحداثيات $\vec{u}$ هي (x,y) و كانت إحداثيات $\vec{v}$ هي (x',y') فإن: $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$

الأشعة المتعامدة

تعريف القول أن الشعاعين غير المعدومين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان يعني أنه إذا كان: $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$ يكون المستقيمان (AB) و (AC) متعامدين.
ملاحظة: نصطلح على أن الشعاع المعدوم عمودي على كل الأشعة.
مبرهنة القول أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان يعني أن $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

2. قواعد الحساب

خواص الجداء السلمي

مبرهنة من اجل كل ثلاث أشعة $\vec{u}$، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ومن أجل كل عدد حقيقي λ لدينا:

1) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
2) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
3) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$
4) $(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v}=\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$
5) $\vec{u}\cdot(\lambda\vec{v})=\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$

3. الجداء السلمي والإسقاط العمودي

المسقط العمودي لشعاع على محور أو شعاع

تعريف $\vec{v}$ شعاع حيث $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$. C' و D' المسقطان العموديان على الترتيب للنقطتين C و على محور $(O;\vec{u})$.
يسمى الشعاع $\overrightarrow{v'}=\overrightarrow{C'D'}$، المعرف بـ المسقط العمودي للشعاع $\vec{v}$ على المحور $(O;\vec{u})$ (أو على الشعاع $\vec{u}$)

الجداء السلمي و المسقط العمودي لشعاع

مبرهنة إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين حيث $\vec{u} \neq \vec{0}$ و كان $\overrightarrow{v'}$ المسقط العمودي للشعاع $\vec{v}$ على $\vec{u}$ فإن:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \overrightarrow{v'}$$

نتيجة إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ شعاعين غير معدومين و كانتا C' و D' المسقطان العموديان على الترتيب للنقطتين C و D على المستقيم (AB) فإن: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$

حالات خاصة

- إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطيا ومن نفس الاتجاه يكون: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \times CD$
- إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطيا وكانا اتجاهاهما متعاكسين يكون: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -AB \times CD$

A. تطبيقات الجداء السلمي

الشعاع الناظمي لمستقيم

تعريف القول أن الشعاع غير المعدوم $\vec{n}$ شعاع ناظمي لمستقيم (D) يعني أن $\vec{n}$ عمودي على شعاع توجيه لـ(D)

معادلة مستقيم علم شعاع ناظمي له ونقطة منه

$(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم متعامد ومتجانس. $\vec{n}(a,b)$ شعاع غير معدوم و $A(x_0,y_0)$ نقطة من المستوي وليكن (D) المستقيم الذي يشمل A و $\vec{n}$ شعاع ناظمي له. (D) هي إذن مجموعة النقط M من المستوي بحيث: $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$. إذا فرضنا $M(x,y)$ يكون لدينا $\overrightarrow{AM}(x-x_0;\ y-y_0)$

وبالتالي $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = a(x-x_0) + b(y-y_0)$

إذن تكون $M(x,y)$ نقطة من (D) إذا وفقط إذا كان $a(x-x_0) + b(y-y_0) = 0$

أي $ax + by - (ax_0 + by_0) = 0$ أو $ax + by + c = 0$ بوضع $c = -(ax_0 + by_0)$

مبرهنة في معلم متعامد و متجانس يكون لكل مستقيم حيث الشعاع غير المعدوم $\vec{n}(a,b)$ شعاع ناظمي له معادلة من الشكل: $ax + by + c = 0$ حيث c عدد حقيقي.

ملاحظة إذا كانت $ax + by + c = 0$ معادلة لمستقيم (D) فإن $\vec{u}(-b,a)$ شعاع توجيه له ومنه الشعاع $\vec{n}(a,b)$ شعاع ناظمي للمستقيم (D) لأن فعلا $\vec{n}$ و $\vec{u}$ متعامدان ماذام $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$.

معادلة دائرة

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

معادلة دائرة علم مركزها و نصف قطرها

لتكن (C) الدائرة التي مركزها $\Omega(x_0,y_0)$ ونصف قطرها r $(r > 0)$.

(C) هي مجموعة النقط $M(x,y)$ حيث: $\Omega M = r$ أي $\Omega M^2 = r^2$

و هذا يعني أن: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$

مبرهنة في معلم متعامد و متجانس معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(x_0,y_0)$ و نصف قطرها r $(r > 0)$ هي: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$

معادلة دائرة علم قطرها

لتكن (C) الدائرة التي قطراها $[AB]$. (C) باستثناء A و B هي مجموعة النقط M بحيث يكون المثلث AMB قائما في M أي $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

لدينا كذلك $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ إذا كانت M منطبقة على A أو على B.

الدائرة التي قطرها $[AB]$ هي مجموعة النقط M حيث $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

مبرهنة المتوسط

A و B نقطتان. I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ و M نقطة كيفية من المستوي.

$$MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2$$

$$= \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2$$

$$MA^2 + MB^2 = 2\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2$$

بما أن: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ و $IA = IB = \frac{1}{2}AB$

ف: $\overrightarrow{IA}^2 = \overrightarrow{IB}^2 = \frac{1}{4}AB^2$

فإن: $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$

مبرهنة A و B نقطتان و I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$. من أجل كل نقطة M لدينا:

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

العلاقات المترية في مثلث

ABC مثلث. نضع

$$AB = c \ ، \ AC = b \ ، \ BC = a \ ، \ \widehat{BAC} = \hat{A} \ ، \ \widehat{CBA} = \hat{B} \ ، \ \widehat{ACB} = \hat{C}$$

و لتكن S مساحة المثلث ABC.

مبرهنة الكاشي

لدينا: $$BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$$

و بما أن: $$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = AC \times AB \cos\hat{A}$$

$\overrightarrow{AC}^2 = b^2$ و $\overrightarrow{AB}^2 = c^2$

فإن: $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$

و بإتباع نفس الطريقة نثبت أن $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$ و $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$

مبرهنة ABC مثلث حيث $AB = c$، $AC = b$ و $BC = a$. لدينا العلاقات التالية:

1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$

2) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$

3) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$

قاعدة المساحة

مبرهنة ABC مثلث حيث

$AB = c$ ، $AC = b$ ، $BC = a$

و S مساحة المثلث ABC.

لدينا العلاقات التالية: $$S = \frac{1}{2}bc\sin\hat{A} = \frac{1}{2}ac\sin\hat{B} = \frac{1}{2}ab\sin\hat{C}$$

قانون الجيوب

مبرهنة ABC مثلث حيث

$AB = c$ ، $AC = b$ و $BC = a$.

لدينا العلاقات التالية:

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$$

138. تمرين رقم 01

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ تعطى النقط $A(2;0)$ ، $B(3;1)$ ، $C(-1;3)$ ، $D(1;2)$ والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $2x+y=0$

1- احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ، ما طبيعة المثلث ABC .

2- احسب الأطوال.

3- اكتب معادلة للدائرة (C) ذات المركز D والتي تشمل النقطة A ، تحقق أن النقطتان B و C تنتميان إلى (C) .

4- اكتب معادلة لمماس الدائرة (C) في النقطة A ، تحقق أن هذا المماس عمودي على (Δ) .

5- احسب المسافة بين النقطة (D) والمستقيم (Δ) ، ما هي وضعية المستقيم (Δ) بالنسبة للدائرة (C)

6- عين معادلة لصورة الدائرة (C) بالتحاكي h الذي مركزه B ونسبته -1.

7- A' ، C' صورتي A ، C بالتحاكي h على الترتيب، استنتج نوع المثلث $A'BC'$ ثم بين أن $S_{ABC}=S_{ABC'}$ (S ترمز للمساحة)

الحل

1- حساب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-3+3=0$$
$$=0$$

طبيعة المثلث ABC

بما أن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$ فإن المثلث ABC قائم في النقطة A .

2- حساب الأطوال DA ، DB ، DC

$$DA=\sqrt{1+4}$$
$$DA=\sqrt{5}$$
$$DB=\sqrt{4+1}$$
$$DB=\sqrt{5}$$
$$DC=\sqrt{1+4}$$
$$DC=\sqrt{5}$$

3- كتابة معادلة الدائرة (C)

بما أن $A\in(C)$ فإن

$$r=DA=\sqrt{5}$$
$$(x-x_0)^2(y-y_0)^2=r^2$$
$$(x-1)^2(y-2)^2=5$$

التحقق أن $B\in(C)$ ، $C\in(C)$

بما أن $r=DC=DB=\sqrt{5}$

أي $B\in(C)$ ، $C\in(C)$

4- كتابة معادلة المماس للدائرة (C) في A

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0$$
$$\begin{pmatrix}x-2\\y-0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=0$$
$$-x+2+2y=0$$
$$(T):\ -x+2y+2=0$$

- التحقق أن المماس عمودي على (Δ) .

يكون $(T)\perp(\Delta)$ إذا كان $\vec{n}_\Delta\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ ، $\vec{n}_T\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

$$\vec{n}_T.\vec{n}_\Delta=0$$
$$\vec{n}_T.\vec{n}_\Delta=-2+2=0$$

ومنه $(T)\perp(\Delta)$.

5- حساب $d(D;(\Delta))$

$$d(D;(\Delta))=\frac{|2+2|}{\sqrt{4+1}}=\frac{4\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}$$
$$d(D;(\Delta))=\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

وضعية (Δ) بالنسبة (C)

بما أن $r=\sqrt{5}$

$$d(D;(\Delta))=\frac{4\sqrt{5}}{5}<\sqrt{5}$$

إذن $d(D;(\Delta))<r$

ومنه (Δ) يقطع (C) في نقطتين.

6- معادلة (C') صورة (C) بالتحاكي h

صورة الدائرة (C) بالتحاكي h هي الدائرة (C')

$$\overrightarrow{BM'}=k\overrightarrow{BM}$$

فإن مركز الدائرة (C') هو صورة D بالتحاكي h أي D' حيث $\overrightarrow{BD'}=-1\overrightarrow{BD}$

$$D'(x';y')$$
$$\begin{pmatrix}x'-3\\y-1\end{pmatrix}=-1\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$$
$$x'-3=2$$
$$x'=5$$
$$y'-1=-1$$

$$y' = 0$$
$$D(5;0)$$
$$\left\|\overrightarrow{BD'}\right\| = |-1|\left\|\overrightarrow{BD}\right\|$$
$$BD' = BD = \sqrt{5}$$
$$(x-5)^2 + (y-0)^2 = 5$$

ج- استنتاج نوع المثلث $A'BC'$

$$h(A) = A'$$
$$h(C) = C'$$
$$h(B) = B$$

لأن B نقطة صامدة

صورة المثلث ABC هو المثلث $A'BC'$ بالتحاكي

وبما أن المثلث ABC قائم فإن المثلث $A'BC'$ قائم في A

البرهان أن $S_{ABC} = S'_{A'BC'}$.

$$S'_{A'BC'} = k^2 S_{ABC}$$
$$S'_{A'BC'} = (-1)^2 S_{ABC}$$

ومنه $S_{ABC} = S'_{A'BC'}$

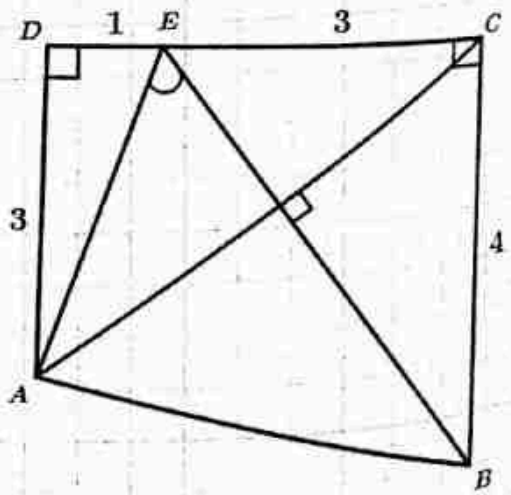
139. تمرين رقم 02

لتكن:

$ABCD$ شبه منحرف قائم في (C) و (D)

E نقطة $[DC]$ كما هو مبين في الشكل ، مع

$EC = 3$ ، $AD = 3$ ، $DE = 1$ ، $BC = 4$



1- أ- بين أن

$$(\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA}).(\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{ED}.\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CB}$$

ب- استنتج قيمة $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}$

ج- احسب قيمة EA ، EB ثم استنتج

$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EB}}\right)$

2- لتكن النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على (BC).

أ- بين أن $AB = \sqrt{17}$

ب- احسب $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CE}$ ثم استنتج أن (CA) عمودي على (BE).

الحل

1- أ- البرهان أن

$$(\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA}).(\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{ED}.\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CB}$$

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA}).(\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CB}) &= \overrightarrow{ED}.\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED}.\overrightarrow{CB} \\ &+ \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CB}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{CB} = 0$ لأن $(\overrightarrow{ED}) \perp (\overrightarrow{CB})$

$$\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{EC} = 0$$

ومنه:

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA}).(\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CB}) \\ = \overrightarrow{ED}.\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CB}\end{aligned}$$

ب- استنتاج قيمة $(\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB})$

علاقة شال

$$(\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{DA}).(\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}$$
$$(\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}) = \overrightarrow{ED}.\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CB}$$
$$\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{EC} = ED \times EC\cos(\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EC})$$
$$= 1 \times 3\cos(\pi) = 3(-1) = -3$$
$$\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CB} = DA \times CB\cos(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{CB})$$
$$= 3 \times 4\cos(0) = 12$$
$$\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{ED}.\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CB}$$
$$= -3 + 12$$
$$\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB} = 9$$

ج- حساب EA و EB واستنتاج $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EB}}\right)$

حساب EA

بما أن المثلث DAE قائم في D فإن

$$EA^2 = ED^2 + A^2$$
$$EA = \sqrt{ED^2 + DA^2} = \sqrt{1+9}$$
$$EA = \sqrt{10}$$

حساب EB

بما أن المثلث CBE قائم في C فإن

$$EB = \sqrt{EC^2 + CB^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

المثلث $\cos\left(\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}\right)$

$$\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB} = EA \times EB\cos(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EB}) = 9$$

$$\cos(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EB}) = \frac{9}{EA \times EB} = \frac{9}{5\sqrt{10}}$$

ومنه

$$\cos\left(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EB}\right) = \frac{9}{5\sqrt{10}}$$

2- أ- البرهان ان $AB = \sqrt{17}$

بما أن H هي المسقط العمودي لـ A على (BC) فإن المثلث HBA قائم في H والرباعي $CDAH$ مستطيل $DC = AH = 4$

فإن $AB^2 = BH^2 + HA^2$

$$AB = \sqrt{BH^2 + HA^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

ومنه $AB = \sqrt{17}$

ب- حساب $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CB} = CH \times CB\cos(0)$$

لأن H المسقط العمودي لـ A على (CB)

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 3 \times 4(1) = 12$$

- حساب $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CE}$

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CE} = CD \times CE\cos(0)$$
$$= 4 \times 3$$

لأن D هي المسقط العمودي لـ A على (CE)

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CE} = 12$$

- استنتاج ان $(CA) \perp (BE)$

حتى يكون $(CA) \perp (BE)$ يكفي أن نبرهن أن $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE} = 0$

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE} = \left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}\right).\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE}\right)$$
$$= \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CE}$$

$$\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{BC} = CD \times BC\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= 0$$

$$\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CE} = CD \times CE\cos(0) = 4 \times 3 = 12$$

$$\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC} = DA \times BC\cos(\pi)$$
$$= 3 \times 4(-1)$$
$$= -12$$

$$\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CE} = DA \times CE\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CE}$$
$$= 0 + 12 - 12 + 0 = 0$$

أي $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE} = 0$

ومنه $(CA) \perp (BE)$

تمرين رقم 03 .140

الواجب: الجداء السلمي السنة الثانية ثانوي - ر 01

ABC مثلث متقايس الأضلاع حيث: $AB = AC = BC = 3$ ولتكن النقط A'، B'، C' منتصفات القطع المستقيمة $[AB]$، $[AC]$، $[BC]$ على الترتيب.

- احسب الجداءات السلمية الآتية: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}$ ، $\overrightarrow{CC'}.\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{AB}$.

الحل

- حساب الجداءات السلمية

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC\cos(\widehat{BAC})$$
$$= 3 \times 3 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 9.\frac{1}{2}$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{9}{2}$$

- $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}$

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} = \left(-\overrightarrow{CB}\right).\left(\overrightarrow{CA}\right) = -\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}$$
$$= -\left[CB \times CA.\cos(\widehat{BCA})\right]$$
$$= -\left[3 \times 3 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = -\left[9 \times \frac{1}{2}\right]$$
$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} = -\frac{9}{2}$$

- $\overrightarrow{CC'}.\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{CC'}.\overrightarrow{AB} = CC'.AB.\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$CC' \times 3(0) = 0$$

لأن (CC') هو ارتفاع المثلث ABC أي $(AB) \perp (CC')$

- $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{A'B'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{A'B'} \parallel \overrightarrow{AB}$$
$$A'B' = \frac{3}{2}$$
$$\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}.3.\cos(\pi) = \frac{9}{2}(-1)$$
$$\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{AB} = -\frac{9}{2}$$

141. تمرين رقم 04

اليوتيوب: الجداء السلمي للسنة الثانية ثانوي رقم 02

$ABCD$ مربع طول ضلعه a ، I و J هما النقطتان المعرفتان بـ: $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$.

1- احسب الجداءات السلمية التالية: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{CJ}$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CJ}$.

2- بكتابة $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}$ و $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ}$

بين أن $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BJ} = 0$ ، ماذا تستنتج؟

الحل

1- حساب الجداءات السلمية

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = AB.BC\cos(\theta)$$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = -\left[BA.BC\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$
$$= -[a^2(0)] = 0$$

$\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{CJ}$.

$$\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{CJ} = 0$$

$\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BC} = \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right).\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BC}\right)^2$$
$$= \frac{1}{3}BC.BC.\cos(0)$$
$$= \frac{a^2}{3}$$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CJ}$.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{AB}.\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$$
$$= AB.\frac{1}{3}CD\cos(\pi) = \frac{a^2}{3}(-1)$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CJ} = -\frac{a^2}{3}$$

2- إثبات أن $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BJ} = 0$

$$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BJ} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}\right).\left(\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CJ}\right)$$
$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{CJ}$$
$$= 0 - \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{3}$$
$$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BJ} = 0$$

ومنه نستنتج أن المستقيمان (AI) و (BJ) متعامدان

142. تمرين رقم 05

اليوتيوب: الجداء السلمي للسنة الثانية ثانوي رقم 03

ABC مثلث قائم في A ، A' نقطة من القطعة المستقيمة $[AB]$ ، المستقيم المار من A' والموازي للمستقيم (AC) يقطع المستقيم (BC) في النقطة B'.

- قارن بين العددين $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB'}$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{A'C}$.

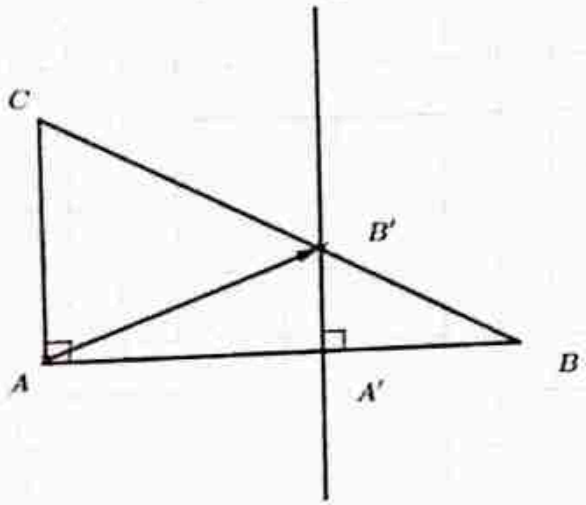
الحل

- المقارنة بين العددين $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB'}$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{A'C}$

$$\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{v'}$$

حيث $\vec{v'}$ هي المسقط العمودي للشعاع $\vec{v}$ على $\vec{u}$

$(\vec{u} \neq 0$ مع$)$



$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AA'} = AB.AA'\cos(\alpha)$$
$$= AB.AA'$$

المسقط العمودي لـ B' على (AB) هي A'.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{A'A}$$

A هي المسقط العمودي لـ (C) على (AB).

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{A'A} = AB.A'A\cos(\pi)$$
$$= -AB.A'A$$

ومنه نجد: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB'} = -\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{A'C}\right)$

143. تمرين رقم 06

اليوتيوب: الجداء السلمي للسنة الثانية ثانوي رقم 04

ABC مثلث متساوي الساقين حيث $AB = AC = 4$ و $BC = 5$ ولتكن H منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$.

1- احسب الجداءات السلمية التالية: $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ ، $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

2- لتكن K المسقط العمودي للنقطة B على (AC) ، احسب المسافة CK.

اليوتيوب: النجاح السلمي للسنة الثانية ثانوي رقم 05

$(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم متعامد ومتجانس.

1- عين معادلة (C) الدائرة التي مركزها $\Omega(-2;1)$ ونصف قطرها $\sqrt{3}$.

2- عين معادلة (C') الدائرة التي قطرها $[AB]$ علما أن $A(-2;-1)$ و $B(-3;2)$.

3- بين أن مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث $x^2+y^2-2x-3=0$ دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

- هل (Γ) مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث $x^2+y^2+2x-4y+8=0$ دائرة؟

الحل

1- تعيين معادلة الدائرة (C)

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

$$\Omega(x_0;y_0)=\Omega(-2;1)$$

$$(x-(-2))^2+(y-(1))^2=(\sqrt{3})^2$$

$$(x+2)^2+(y-1)^2=3$$

2- تعيين معادلة الدائرة (C')

ليكن I منتصف $[AB]$ هو مركز الدائرة (C')

$$r=\frac{AB}{2}$$

$$x_I=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{-2-3}{2}=-\frac{5}{2}$$

$$y_I=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{-1+2}{2}=\frac{1}{2}$$

$$I\left(-\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$$

$$AB=\sqrt{(-3+2)^2+(3)^2}=\sqrt{1+9}$$

$$=\sqrt{10}$$

ومنه $r=\frac{\sqrt{10}}{2}$

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2$$

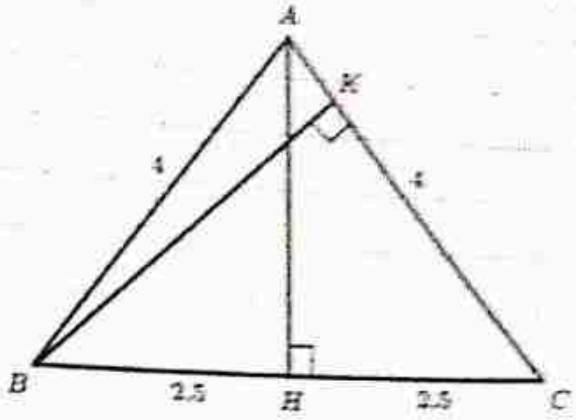
$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$$

3- البرهان أن $x^2+y^2-2x-3=0$

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

$$x^2+ax=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

الحل



1- حساب الجداءات السلمية

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CB}=\frac{5}{2}\times 5\times\cos(0)$$

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\frac{25}{2}$$

لأن المسقط العمودي لـ $\overrightarrow{CA}$ هو $\overrightarrow{CH}$ على $\overrightarrow{CB}$.

$\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{CB}$

$$\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{CB}=HA.CB.\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

لأن $\overrightarrow{CB}\perp\overrightarrow{HA}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{BC}=HB.BC.\cos(\pi)$$

$$=\frac{5}{2}.5(-1)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\frac{25}{2}$$

لأن المسقط العمودي لـ $\overrightarrow{AB}$ على $\overrightarrow{BC}$ هو $\overrightarrow{HB}$.

2- حساب المسافة CK

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CK}=CA.CK.\cos(0)$$

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CA}=CA.CK\ \ldots\ldots(1)$$

لأن المسقط العمودي لـ $\overrightarrow{CB}$ على $\overrightarrow{CA}$ هو $\overrightarrow{CK}$

ولدينا $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\frac{25}{2}$ أي:

$$CA.CK=\frac{25}{2}$$

$$CK=\frac{25}{2CA}=\frac{25}{2\times 4}=\frac{25}{8}$$

$$CK=\frac{25}{8}$$

$$y^2+by=\left(y+\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2+c=0$$

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2-c$$

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{4}-c$$

بالمطابقة مع $x^2+y^2-2x-3=0$ نجد

$$a=-2\ ،\ b=0\ ،\ c=3$$

$$\left(x-\frac{2}{2}\right)^2+(y-0)^2=\frac{2^2+0^2}{4}+3$$

$$(x-1)^2+(y-0)^2=4>0$$

ومنه مجموعة النقط هي دائرة نصف قطرها $r=\sqrt{4}=2$ ومركزها $\omega(1;0)$

- معرفة ان كانت (Γ) مجموعة النقط $M(x;y)$ دائرة

وجدنا سابقا

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{4}-c\ ...(*)$$

بالمطابقة مع $x^2+y^2+2x-4y+8=0$

نجد

$$a=2\ ،\ b=-4\ ،\ c=8$$

بالتعويض في عبارة $(*)$

$$(x+1)^2+(y-2)^2=-3<0$$

وهذا تناقض

ومنه مجموعة النقط (Γ) هي مجموعة خالية.

145. تمرين رقم 08

اليوتيوب: الحداء السلمي للسنة الثانية ثانوي رقم 06

- احسب المسافة بين النقطة $A(2;3)$ والمستقيم (D) ذو المعادلة $y=2x+1$.
- عين معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(-2;1)$ وتمس المستقيم (D) ذو المعادلة $x+y-2=0$
- لتكن (C') مجموعة النقط $M(x;y)$ والتي تحقق المعادلة $x^2+y^2-2x-6y-3=0$
- بين أن (C') دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.
- هل المستقيم (D') ذو المعادلة $3x+2y+4=0$ مماس للدائرة (C') ؟

الحل

- حساب $d(A;(D))$

لحساب المسافة بين A والمستقيم (D)

حيث $(D):\ ax+by+c=0$ ، $A(x_0;y_0)$

$$d(A;(D))=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$d(A;(D))=\frac{|-4+3-1|}{\sqrt{4+1}}=\frac{|-2|}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$d(A;(D))=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

- تعيين معادلة الدائرة (C)

تعيين معادلة دائرة بمركز ونصف قطر:

$$\Omega(-2;1)\ ،\ r=d(\Omega;(D))$$

$$d(\Omega;(D))=\frac{|-2+1-2|}{\sqrt{2}}=\frac{|-3|}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{2}}=r$$

معادلة الدائرة: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

$$(x+2)^2+(y-1)^2=\frac{9}{2}$$

وهي معادلة الدائرة (C).

- البرهان ان مجموعة النقط (C') هي دائرة

نعلم أن $x^2+y^2+ax+by+c=0$

تكافئ $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{4}-c$

$$k=\frac{a^2+b^2}{4}-c=\frac{4+36}{4}+3$$

$$=10+3>0$$

ومنه (C') دائرة نصف قطرها $r'=\sqrt{k}=\sqrt{13}$

$$(x-1)^2+(y-3)^2=13$$

ومنه (C') دائرة مركزها $\Omega'(1;3)$

- معرفة هل المستقيم (D') مماس للدائرة (C')

لمعرفة وضعية (D') بالنسبة إلى الدائرة (C') يجب أن نحسب $d(\Omega';(D'))$.

لدينا $r'=\sqrt{13}$ و $\Omega'(1;3)$

$$d(\Omega';(D'))=\frac{\left|ax_{\Omega'}+by_{\Omega'}+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{13}{\sqrt{13}}$$

$$=\sqrt{13}=r'$$

ومنه (D') يمس (C') في نقطة وحيدة

146. تمرين رقم 09

اليوتيوب: العداء العلمي للسنة الثانية ثانوي رقم 07

لتكن مجموعة النقط E حيث:

$$E: x^2+y^2-2x-8y-8=0$$

1- برهن أن المعادلة E هي معادلة دائرة (C)

يطلب تعيين إحداثيي مركزها Ω ونصف قطرها r.

2- عين إحداثيي النقطتين M و N نقطتا تقاطع الدائرة (C) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $x+2y+1=0$.

3- عين معادلة المماس (T) للدائرة (C) في النقطة M، ومعادلة المماس (T') للدائرة (C) في النقطة N.

4- عين نقطة التقاطع بين (T) و (T').

الحل

1- البرهان أن E هي معادلة دائرة (C)

لدينا $E: x^2+y^2-2x-8y-8=0$

ونعلم أن معادلة الدائرة من الشكل

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{4}-c$$

$$a=-2 \quad ، \quad b=-8 \quad ، \quad c=-8$$

$$k=\frac{a^2+b^2}{4}-c=\frac{4+64}{4}-(-8)$$

$$=\frac{68}{4}+\frac{32}{4}=\frac{100}{4}$$

$$=25>0$$

ومنه E دائرة نصف قطرها

$$r=\sqrt{k}=\sqrt{25}=5$$

ومركزها $\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$ اي $\Omega(1;4)$

2- تعيين إحداثيتي النقطتين M و N نقطتا تقاطع الدائرة (C) والمستقيم (Δ)

لدينا $(x-1)^2+(y-4)^2=25$ ... (1)

$$x+2y+1=0 \ \dots (2)$$

$$x=-2y-1$$

نعوض قيمة x في (1):

$$(-2y-1-1)^2+(y-4)^2=25$$

$$(-1)^2(2y+2)^2+(y-4)^2=25$$

$$(2y+2)^2+(y-4)^2=25$$

$$4y^2+4+8y+y^2+16-8y=25$$

$$5y^2=25-20$$

$$5y^2=5$$

$$y^2=1$$

$$\begin{cases} y_1=1 \\ y_2=-1 \end{cases}$$

نعوض y_1 و y_2 في (2):

$$x_1+2(1)+1=0$$

$$x_1+3=0$$

$$x_1=-3$$

$$M(-3;1)$$

$$x_2+2(-1)+1=0$$

$$x_2-1=0$$

$$x_2=1$$

$$N(1;-1)$$

3- تعيين معادلة المماس (T) في النقطتين M و N

$\Omega(1;4)$ و $M(-3;1)$ ، $N(1;-1)$

معادلة المماس (T) في النقطة M

$$ax+by+c=0$$

$$\overrightarrow{\Omega M}\begin{pmatrix}1+3\\4-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

$$4x+3y+c=0$$

بما أن $M\in(T)$

$$4(-3)+3(1)+c=0$$

$$-12+3+c=0$$

$$c=9$$

$$(T): 4x+3y+9=0$$

معادلة المماس (T') في النقطة N

$$ax+by+c=0$$

$$\overrightarrow{N\Omega}\begin{pmatrix}1-1\\4+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

$$(0)x+5y+c=0$$

$$5y+c=0$$

بما أن $N\in(T')$

$$-5+c=0$$

$$c=5$$

$$5y+5=0$$

$$5y=-5$$

$$y=-1$$

$$(T): y=-1$$

4- تعيين نقطة التقاطع (T) و (T')

نحل جملة المعادلتين:

$$\begin{cases} 4x+3y+9=0 \ \dots\dots (*) \\ y=-1 \end{cases}$$

بتعويض قيمة y في $(*)$

$$4x-3+9=0$$

$$4x=-6$$

$$x = -\frac{6}{4}$$
$$x = -\frac{3}{2}$$
$$(T) \cap (T') = \left\{\left(-\frac{3}{2}; -1\right)\right\}$$

147. تمرين رقم 10

الموضوع: انجاز السلمي للسنة الثانية ثانوي رقم 08

$(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم متعامد ومتجانس في المستوي.

نعتبر النقط $A(4;2)$ ، $B(1;5)$ و $C(-1;-1)$

1- احسب طويلة الأشعة التالية: $\|\overrightarrow{AB}\|$ ، $\|\overrightarrow{AC}\|$ و $\|\overrightarrow{BC}\|$.

2- احسب الجداءات السلمية التالية $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

3- احسب أقياس الزوايا التالية. $\widehat{BAC}$ و $\widehat{ACB}$.

4- H هي المسقط العمودي للنقطة A على القطعة $[BC]$

- احسب $\|\overrightarrow{CH}\|$ ثم استنتج $\|\overrightarrow{BH}\|$.

الحل

1- حساب طويلة الأشعة

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-4 \\ 5-2 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1-4 \\ -1-2 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -1-1 \\ -1-5 \end{pmatrix} = \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

- طويلة الشعاع $\overrightarrow{AB}$

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-3)^2 + (3)^2} = \sqrt{18}$$
$$\|\overrightarrow{AB}\| = 3\sqrt{2}$$

- طويلة الشعاع $\vec{C}$

$$AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-5)^2 + (3)^2} = \sqrt{25+9}$$
$$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{34}$$

- طويلة الشعاع $\overrightarrow{BC}$

$$BC = \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{4+36}$$
$$= \sqrt{40}$$
$$\|\overrightarrow{BC}\| = 2\sqrt{10}$$

2- حساب الجداءات السلمية

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix} = 15 - 9 = 6$$

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = (\overrightarrow{BC})(-\overrightarrow{AB}) = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$
$$= -6 + 18 = 12$$

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = (-\overrightarrow{AC}).(-\overrightarrow{BC}) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$
$$= 10 + 18$$
$$= 28$$

3- حساب اقياس الزوايا $\widehat{BAC}$ و $\widehat{ACB}$

حساب قيس الزاوية $\widehat{BAC}$

$$\widehat{BAC} = (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|.\cos(\widehat{BAC})$$
$$6 = 3\sqrt{2}.\sqrt{34}.\cos(\widehat{BAC})$$
$$\cos(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}) = \frac{6}{3\sqrt{2}.\sqrt{34}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{34}} = 0.24$$
$$\widehat{BAC} \approx 75.96$$

حساب قيس الزاوية $\widehat{ACB}$

$$\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{CA}\|.\|\overrightarrow{CB}\|.\cos(\widehat{ACB})$$
$$28 = \|\overrightarrow{AC}\|.\|\overrightarrow{BC}\|\cos(\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB})$$
$$28 = \sqrt{34} \times 2\sqrt{10}.\cos(\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB})$$
$$\cos(\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}) = \frac{28}{\sqrt{34} \times 2\sqrt{10}} = 0.759$$
$$\widehat{ACB} = 40.60$$

4- حساب $\|\overrightarrow{CH}\|$ واستنتاج $\|\overrightarrow{BH}\|$

$$\cos(\widehat{\ }) = \frac{CH}{AC}$$
$$\|\overrightarrow{CH}\| = CH = AC\cos(\hat{C}) = \sqrt{34} \times 0.759$$
$$CH = 4.42$$

استنتاج $\|\overrightarrow{BH}\|$

$$BC = BH + CH$$
$$BH = BC - CH$$
$$BH = 2\sqrt{10} - 4.42$$
$$BH = 1.9$$

148. تمرين رقم 11

اليوتيوب: الجداء السلمي للسنة الثانية ثانوي رقم 09

π مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ و $m \in \mathbb{R}$.

وليكن (γ_m) مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي التي تحقق $x^2+y^2-2mx-1=0$

1- بين أن من أجل كل $m \in \mathbb{R}$ فإن (γ_m) دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

2- بين أن جميع الدوائر (γ_m) تمر على نقطتين يطلب تعيينهما.

3- عين المجموعة التي تمسحها النقطة ω_m مركز الدائرة (γ_m) لما m يمسح $\mathbb{R}$.

4- عين المجموعتين (γ_0) ، (γ_1).

الحل

1- البرهان أن γ_m دائرة مهما كان $m \in \mathbb{R}$

$$x^2+y^2-2mx-1=0$$

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{4}-c$$

$$\left(x-\frac{2m}{2}\right)^2+(y-0)^2=\frac{4m^2+0}{4}+1$$

$$(x-m)^2+y^2=m^2+1>0$$

مهما كان $m \in \mathbb{R}$

ومنه (γ_m) دائرة نصف قطرها $r_m=\sqrt{m^2+1}$

ومركزها $\Omega_m(m;0)$

2- البرهان ان جميع الدوائر (γ_m) تمر على نقطتين مهما $m \in \mathbb{R}$

$$x^2+y^2-2mx-1=0$$

$$(x_0^2+y_0^2-1)-2mx_0=0$$

تنعدم هذه العبارة إذا وفقط إذا كان

$$\begin{cases} x^2+y^2-1=0 \\ -2x=0 \end{cases} \quad \text{و}$$

أي $x=0$

$$y_0^2-1=0$$

$$\begin{cases} y_1=1 \\ y_2=-1 \end{cases}$$

ومنه جميع الدوائر (γ_m) مهما $m \in \mathbb{R}$ تمر على نقطتين ثابتتين هما $M_1(0;1)$ و $M_2(0;-1)$

3- تعيين المجموعة التي تمسحها النقطة ω_m مركز الدائرة (γ_m) لما m يمسح $\mathbb{R}$

لدينا $\omega_m(m;0)$

m متغير و 0 ثابت

إذن مجموعة النقط التي يمسحها ω_m مركز الدائرة (γ_m) لما m يمسح $\mathbb{R}$ هي المستقيم $y=0$ (محور الفواصل)

4- تعيين المجموعتين (γ_0) ، (γ_1).

لدينا $(x-m)^2+y^2=m^2+1$

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \quad \ldots\ldots(\gamma_0) \\ (x-1)^2+y^2=2 \quad \ldots\ldots(\gamma_1) \end{cases}$$

$\Omega(1;0)$

$r=\sqrt{2}$

149. تمرين رقم 12

اليوتيوب: الجداء السلمي للسنة الثانية ثانوي رقم 10

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ولتكن (C_1) و (C_2) دائرتين معادلتيهما

$$(C_1): x^2+y^2=1$$

$$(C_2): (x-1)^2+y^2=1$$

1- ارسم (C_1) و (C_2)

2- عين $(C_2) \cap (C_1)$.

الحل

1- رسم (C_1) و (C_2)

$$(x-0)^2+(y-0)^2=r^2$$

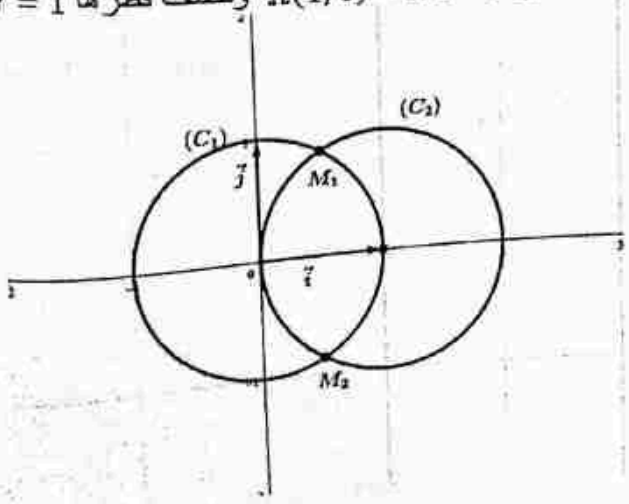
$$x^2+y^2=1$$

الدائرة (C_1) مركزها $O(0;0)$ ونصف قطرها $r=1$

$$(x-1)^2+y^2=1^2$$

$$(x-1)^2+y^2=1$$

الدائرة (C_2) مركزها $\Omega(1;0)$ ونصف قطرها $r=1$



$$x^2 + y^2 = 1$$
$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$
$$x^2 + y^2 = (x-1)^2 + y^2$$
$$x^2 = (x-1)^2$$
$$x^2 = x^2 + 1 - 2x$$
$$1 - 2x = 0$$
$$2x = 1$$
$$x = \frac{1}{2}$$

نعويض قيمة x في عبارة (C_1) نجد:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1$$
$$\frac{1}{4} + y^2 = 1$$
$$y^2 = 1 - \frac{1}{4}$$
$$y^2 = \frac{3}{4}$$
$$y_1 = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$y_2 = -\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

ومنه :

$$(C_1) \cap (C_2) = \left\{\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$$