مجلة Top Maths

2AS M TM

الجداء السلمي في المستوي

scalar product

المجلة تتضمن

- ✓ ملخص
- ✓ درس مفصل
- ✓ الجداء السلمي
- ✓ تطبيقات الجداء السلمي
- ✓ تمارين محلولة
- ✓ تمارين مقترحة

اعداد الاستاذ بوشناق يوسف

افريل 2020

Top Maths Tlemcen

بسم الله الرحمن الرحيم

السلام عليكم .....

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات

اضع بين ايديكم اخواني الاساتذة ابنائي الطلبة هذا العمل و المتمثل

في مجلة درس الجداء السلمي و تطبيقاته خاص بالسنة الثانية

المجلة تتضمن

»رَبِّ قَدْ آتَيْتَنِى مِنَ الْمُلْكِ وَعَلَّمْتَنِى مِنْ تَأْوِيلِ الأَحَادِيثِ فَاطِرَ السَّمَاوَاتِ

وَالأَرْضِ أَنْتَ وَلِيِّى فِى الدُّنْيَا وَالآخِرَةِ تَوَفَّنِى مُسْلِمًا وَأَلْحِقْنِى بِالصَّالِحِينَ«

لا تنسونا بالدعاء محبكم في الله الاستاذ بوشناق يوسف

الجداء السلمي

في

المستوي

الجداء السلمي في المستوي

ملخص الجداء السلمي

الجداء السلمي للشعاعين.

الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي الذي نرمز إليه بالرمز $\vec{u}.\vec{v}$ و المعرف بأحد أحد المساواتيات التالية:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$$

حيث $\vec{u}(x,y)$ و $\vec{v}(x',y')$ هذه العبارة تسمى العبارة التحليلية للجداء السلمي $\vec{u}\cdot\vec{v}$

مبرهنة:

القول أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان يعني أن $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

خواص الجداء السلمي.

من اجل كل ثلاث أشعة $\vec{u}$، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ و من أجل كل عدد حقيقيين λ و α لدينا:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$$

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$$

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$$

$$(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}.(\lambda\vec{v})=\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$$

$$(\lambda\vec{u})\cdot(\alpha\vec{v})=\lambda\alpha(\vec{u}\,\vec{v})$$

المتطابقات الشهيرة

- ✓ $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$
- ✓ $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$
- ✓ $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$

الشعاع الناظمي

إذا كانت $ax+by+c=0$ معادلة لمستقيم (D) فإن $\vec{u}(-b,a)$ شعاع توجيه له و منه الشعاع $\vec{n}(a,b)$ شعاع ناظمي للمستقيم (D)

معادلة الدائرة علم مركزها و نق

في معلم متعامد و متجانس معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(x_0,y_0)$ و نصف قطرها r $(r>0)$ هي: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

معادلة الدائرة علم قطرها

الدائرة التي قطرها $[AB]$ هي مجموعة النقط M حيث $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

المسافة بين نقة و مستقيم

في معلم متعامد و متجانس المسافة بين نقطة $A(x_0,y_0)$ و مستقيم (D) معادلته $ax+by+c=0$ هي:

$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

مبرهنة المتوسط

A و B نقطتان و I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$. من أجل كل نقطة M لدينا:

$$MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$$

مبرهنة الكاشي

إذا كان ABC مثلث فإن:

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos\widehat{A}$$ ،

$$AC^2=AB^2+BC^2-2AB.BC.\cos\widehat{B}$$

$$AB^2=AC^2+BC^2-2AC.BC.\cos\widehat{C}$$

قاعدة المساحة

ABC مثلث و S مساحته.لدينا العلاقات التالية:

$$S=\frac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{A}$$

$$=\frac{1}{2}AB.BC\sin\widehat{B}=\frac{1}{2}AC.BC.\sin\widehat{C}$$

قانون الجيوب

ABC مثلث حيث $AB=c$، $AC=b$ و $BC=a$. لدينا العلاقات التالية:

$$\frac{BC}{\sin\widehat{A}}=\frac{AC}{\sin\widehat{B}}=\frac{AB}{\sin\widehat{C}}$$

الجداء السلمي

الجداء السلمي لشعاعين

تعريف:

الجداء السلمي لشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي الذي نرمز إليه بالرمز $\vec{u}\cdot\vec{v}$ و المعرف بـ:

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ إذا كان $\vec{u}=\vec{0}$ أو $\vec{v}=\vec{0}$
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$ إذا كان $\vec{u}\neq\vec{0}$ و $\vec{v}\neq\vec{0}$

حالات خاصة

✓ إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا و كان لهما نفس الاتجاه فإن $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ لأن $\cos(\vec{u},\vec{v})=1$

✓ إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا و كانا اتجاهاهما متعاكسين فإن $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ لأن $\cos(\vec{u},\vec{v})=-1$

✓ نرمز إلى الجداء السلمي $\vec{u}\cdot\vec{u}$ بـ $\vec{u}^2$ و نسميه المربع السلمي للشعاع $\vec{u}$ و هكذا $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$ و بصفة خاصة

إذا كانت A و B نقطتين فإن $\overrightarrow{AB}^2=\|\overrightarrow{AB}\|^2=AB^2$

مبرهنة:

إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين فإن: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

العبارة التحليلية للجداء السلمي

مبرهنة:

إذا كانت، في معلم متعامد و متجانس، إذا كان $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ فإن: $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$

خلاصة

ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان غير معدومين من المستوي.الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي الذي نرمز إليه بالرمز $\vec{u}.\vec{v}$ و المعرف بأحد المساويات التالية:

✓ $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

✓ $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$

✓ $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$

✓ $\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\overline{OA}\times\overline{OH}$ حيث $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ و H المسقط العمودي لـ B على (OA).

✓ إذا كان $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ فإن $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$.

ملاحظة:

إذا كان $\vec{u}=\vec{0}$ أو $\vec{v}=\vec{0}$ أو $(\vec{u},\vec{v})=\frac{\pi}{2}+k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$ فإن $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

نتيجة:

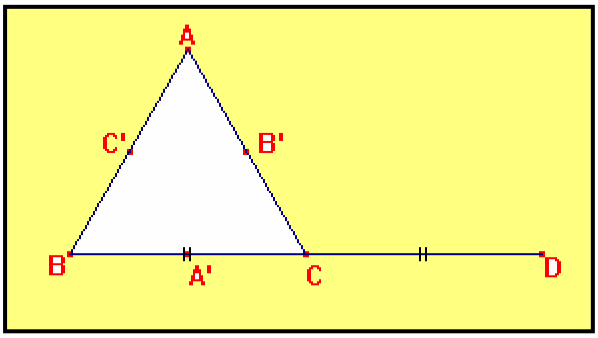
باستعمال التعريف الأول نستنتج أن: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$

تمرين الاول

ABC مثلث متقايس الأضلاع حيث $AB=AC=BC=3$ و لتكن النقط A'، B' و C' منتصفات القطع المستقيمة $[BC]$، $[AC]$ و $[AB]$ على الترتيب.

أحسب الجداءات السلمية الآتية: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$، $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}$، $\overrightarrow{CC'}\cdot\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{AB}$.

حـــل:



$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\cos\widehat{BAC}=3\times3\cos\frac{\pi}{3}=\frac{9}{2}$$

نعتبر النقطة D حيث $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CD}$ و منه $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CA}=CD\times CA\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=3\times3\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{9}{2}$

(CC') هو ارتفاع في المثلث ABC و منه $(CC')\perp(AB)$ و بالتالي فإن $\overrightarrow{CC'}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

نعلم أن $\overrightarrow{A'B'}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ و منه الشعاعان $\overrightarrow{A'B'}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطيا و اتجاهاهما متعاكسين و بالتالي فإن:

$$\overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{AB}=-A'B'\times AB=-\frac{3}{2}\times3=-\frac{9}{2}$$

التمرين الثاني

ABC مثلث حيث $AB=4$، $AC=5$ و $\widehat{CAB}=60^0$

احسب كلا من BC ، $\cos\widehat{ABC}$ و $\cos\widehat{BCA}$

الحل:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)=\frac{1}{2}\left(16+25-BC^2\right)$$

و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}=4\times5\times\frac{1}{2}$

إذن: $\frac{1}{2}\left(16+25-BC^2\right)=4\times5\times\frac{1}{2}$ ومنه $BC^2=21$ ومنه $BC=\sqrt{21}$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left(BA^2+BC^2-AC^2\right)=\frac{1}{2}(16+21-25)=6$

و $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=BA\times BC\times\cos\widehat{ABC}=4\times\sqrt{21}\times\cos\widehat{ABC}$

إذن: $6=4\times\sqrt{21}\times\cos\widehat{ABC}$ ومنه $\cos\widehat{ABC}=\frac{6}{4\sqrt{21}}=\frac{3}{2\sqrt{21}}$

وبنفس الطريقة نجد $\cos\widehat{BCA}=\frac{\sqrt{21}}{7}$

التمرين الثالث

في معلم متعمد و متجانس نعتبر النقط $A(2,0)$ ، $B(2,3)$ و $C(0,2)$

1) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

2) عين $\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ ثم استنتج قيسا للزاوية $\widehat{BAC}$.

الحل:

$\overrightarrow{AB}(0;3)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;2)$

1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=(-2)(0)+(2)(3)=6$

2) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$ ومنه $\cos\widehat{BAC}=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}=\frac{6}{3\times2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

نستنتج أن قيسا للزاوية $\widehat{BAC}$ هو $\frac{\pi}{4}$

تمرين الرابع

ABD و BCD مثلثان متقايسا الأضلاع حيث $BD=4$. احسب الجداءات السلمية التالية:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{DO}.\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB}$

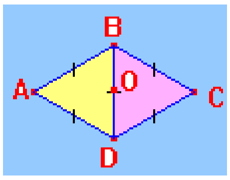
الحل :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=AB.AD.\cos\widehat{BAD}=4\times4\times\cos60^0=8$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=BA.BC.\cos\widehat{BAC}=4\times4\times\cos120^0=-8$

$\overrightarrow{DO}.\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}.\left(-\overrightarrow{DC}\right)=-\frac{1}{2}DB\times DC\times\cos\widehat{BDC}=-4$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DA}=-AD^2=-16$



تمرين الخامس

ABC مثلث متساوي الساقين و قائم في B و ACD مثلث متقايس الأضلاع .علما أن $AC=6$

1) احسب الجداءات السلمية التالية:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB}$

2) احسب DH حيث H هي المسقط العمودي لـ B على المستقيم (DC) .

3) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB}$ و استنتج قيمة $\cos\widehat{DCB}$

الحـل :

1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=AB^2=18$

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}=-6\times 6\times\frac{1}{2}=-18$

$\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DI}=DB\times DI$ حيث I المسقط العمودي لـ C على (DB)

$DI^2=AD^2-AI^2=36-9=27$ ومنه $DI=3\sqrt{3}$

$IB^2=AB^2-AI^2=18-9=9$ ومنه $IB=3$

$DB=DI+IB=3\sqrt{3}+3$

$\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB}=(DI+IB)\times DI=DI^2+IB.DI=\left(3\sqrt{3}\right)^2+9\sqrt{3}=27+9\sqrt{3}$.

2) $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DH}=DC\times DH$ ومنه $DC=\frac{\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB}}{DC}=\frac{27+9\sqrt{3}}{6}$

3) $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CH}=-CD\times CH=-CD.(DH-DC)=9\left(\sqrt{3}-1\right)$

$\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB}=CD\times CB\times\cos\widehat{DCB}$ ومنه $\frac{3\left(\sqrt{3}-1\right)}{4\sqrt{3}}=\frac{\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB}}{CD\times CB}=\cos\widehat{DCB}\times=$

الأشعة المتعامدة

تعريف:

القول أن الشعاعين غير المعدومين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان يعني أنه إذا كان: $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$
يكون المستقيمان (AB) و (AC) متعامدين.

ملاحظة:

نصطلح على أن الشعاع المعدوم عمودي على كل الأشعة.

مبرهنة:

القول أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان يعني أن $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

البرهان:

✓ إذا كان $\vec{u}=\vec{0}$ أو $\vec{v}=\vec{0}$ فمن الواضح أن: $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

✓ إذا كان $\vec{u}\neq\vec{0}$ و $\vec{v}\neq\vec{0}$ فالقول أن $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ يعني $\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=0$ أي $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ حيث k عدد صحيح

و هذا يدل على أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان.

نتيجة:

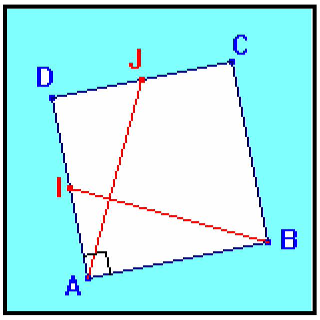
القول أن المستقيمين (AB) و (CD) متعامدان معناه $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$

تمرين السادس

$ABCD$ مربع. I و J هما منتصفا القطعتين المستقيمتين $[AD]$ و $[DC]$ على الترتيب.

برهن أن المستقيمين (AJ) و (BI) متعامدان.

حـــل:



طريقة:

لإثبات أن مستقيمين (AB) و (CD) متعامدان يمكن إثبات أن $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$

لنبين أن $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{BI}=0$. و من أجل ذلك نعتبر المعلم المتعامد و المتجانس $(A;B,D)$

لدينا: $A(0,0)$، $J\left(\frac{1}{2},1\right)$، $B(1,0)$ و $I\left(0,\frac{1}{2}\right)$ و منه $\overrightarrow{AJ}\left(\frac{1}{2},1\right)$ و $\overrightarrow{BI}\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ و

و هكذا: $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{BI}=\left(\frac{1}{2}\right)(-1)+(1)\left(\frac{1}{2}\right)=0$

قواعد الحساب

خواص الجداء السلمي

مبرهنة:

من اجل كل ثلاث أشعة $\vec{u}$، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ و من أجل كل عدد حقيقيين λ و α لدينا:

- ✓ $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
- ✓ $\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
- ✓ $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$
- ✓ $\left(\lambda\vec{u}\right)\cdot\vec{v}=\vec{u}.\left(\lambda\vec{v}\right)=\lambda\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$
- ✓ $\left(\lambda\vec{u}\right)\cdot\left(\alpha\vec{v}\right)=\lambda\alpha\left(\vec{u}.\vec{v}\right)$

البرهان:

نعتبر في معلم متعامد ومتجانس الأشعة $\vec{u}(x,y)$، $\vec{v}(x',y')$ و $\vec{w}(x'',y'')$

1. لدينا $\begin{cases}\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'\\ \vec{v}\cdot\vec{u}=x'x+y'y\end{cases}$ و بما أن $xx'=x'x$ و $yy'=y'y$ فإن $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
2. إحداثيات الشعاع $\vec{v}+\vec{w}$ هي $(x'+x'',y'+y'')$. لدينا إذن:
$$\begin{cases}\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=x\left(x'+x''\right)+y\left(y'+y''\right)=xx'+xx''+yy'+yy''\\ \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}=xx'+yy'+xx''+yy''=xx'+xx''+yy'+yy''\end{cases}$$ و منه $\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
3. إحداثيات الشعاع $\lambda\vec{u}$ هي $(\lambda x,\lambda y)$. لدينا إذن:
$$\left(\lambda\vec{u}\right)\cdot\vec{v}=(\lambda x)x'+(\lambda y)y'=\lambda(xx'+yy')=\lambda\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$$

2.2.المتطابقات الشهيرة

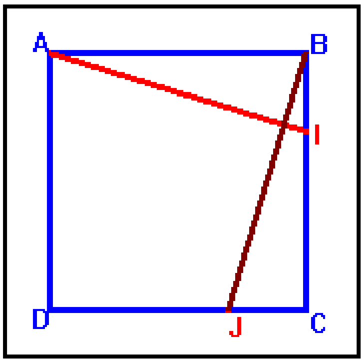
- $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$ أو $\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2=\left\|\vec{u}\right\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\left\|\vec{v}\right\|^2$
- $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$ أو $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2=\left\|\vec{u}\right\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\left\|\vec{v}\right\|^2$
- $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\vec{u}^2-\vec{v}^2$ أو $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\left\|\vec{u}\right\|^2-\left\|\vec{v}\right\|^2$

التمرين السابع

$ABCD$ مربع طول ضلعه a. I و J هما النقطتان المعرفتان بـ: $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$.

1. أحسب الجداءات السلمية التالية: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{CJ}$ ، $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CJ}$
2. بكتابة $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}$ و $\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CJ}$ أثبت أن $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BJ}=0$. ماذا تستنتج ؟
3. باختيار المعلم $\left(A;\frac{1}{a}\overrightarrow{AB},\frac{1}{a}\overrightarrow{AD}\right)$. أثبت أن $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BJ}=0$. ماذا تستنتج ؟

حـــل:



1) لدينا $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ ، $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{CJ}=0$ بينما

$$\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}^2=\frac{a^2}{3}$$

و $$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\left(-\overrightarrow{AB}\right)=-\frac{a^2}{3}$$

2) لدينا: $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BJ}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}\right).\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CJ}\right)$

ومنه $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{CJ}$

لدينا: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=0$ لأن $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{CJ}=0$ لأن $\overrightarrow{BI}\perp\overrightarrow{CJ}$

$\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BC}=BI\times BC$ لأن $\overrightarrow{BI}$ و $\overrightarrow{BC}$ مرتبطان خطيا و لهما نفس الاتجاه

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CJ}=-AB\times CJ$ لأن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CJ}$ مرتبطان خطيا و لهما اتجاهين متعاكسين

إذن $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BJ}=\left(BI\times BC\right)-\left(AB\times CJ\right)=\left(\frac{a}{4}\times a\right)-\left(a\times\frac{a}{4}\right)=\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}=0$ وبالتالي (AI) و (BJ) متعامدان

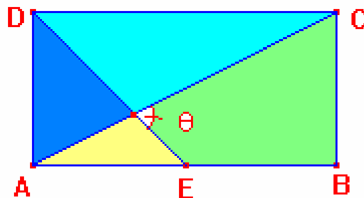
2) في المعلم $\left(A;\frac{1}{a}\overrightarrow{AB},\frac{1}{a}\overrightarrow{AD}\right)$ لدينا: $A(0;0)$ ، $B(a;0)$ ، $I\left(a;\frac{a}{4}\right)$ و $J\left(\frac{3a}{4};a\right)$

$\overrightarrow{AI}\left(a;\frac{a}{4}\right)$ و $\overrightarrow{BJ}\left(-\frac{a}{4};a\right)$. لدينا: $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BJ}=(a)\left(-\frac{a}{4}\right)+\left(\frac{a}{a}\right)(a)=0$ وبالتالي (AI) و (BJ) متعامدان

التمرين الثامن

$ABCD$ مستطيل حيث $AD=3$ و $AB=5$. E منتصف $[AB]$. (انظر الشكل المقابل)

1) احسب AC و DE.



2) عبر عن الشعاعين $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{DE}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$.

- احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DE}$.

3) استنتج قيمة الزاوية $\theta=(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{AC})$ بالدرجات بتقريب 0,01 .

الحل:

1) $AC=\sqrt{AD^2+DC^2}=\sqrt{34}$ و $DE=\sqrt{DA^2+AE^2}=\frac{\sqrt{61}}{2}$

2) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DE}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\right).\left(-\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)$$

ومنه $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DE}=-AD^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}AB^2=-9+\frac{25}{2}=\frac{7}{2}$

3) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DE}=AC\times DE\times\cos\left(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{AC}\right)$ ومنه $\cos\left(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DE}}{AC\times DE}=\frac{7}{\sqrt{34}\times\sqrt{61}}=\frac{7}{\sqrt{2074}}$

طريقة أخرى: في المعلم $\left(A;\frac{1}{5}\overrightarrow{AB},\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)$ لدينا: $A(0;0)$ ، $C(5;3)$ ، $D(0;3)$ و $E\left(\frac{5}{2};0\right)$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DE}=\left(5\times\frac{5}{2}\right)+(-3\times3)=\frac{25}{2}-9=\frac{7}{2}$$

$\cos\left(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{AC}\right)\simeq0{,}1537$ ، نستنتج أن قيمة الزاوية $\theta=\left(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{AC}\right)$ بالدرجات بتقريب 0,01 هي $81{,}15^0$ بالنقصان.

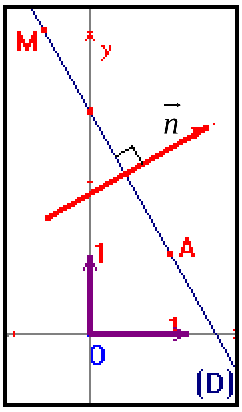
تطبيقات الجداء السلمي:

الشعاع الناظمي لمستقيم

تعريف:

القول أن الشعاع غير المعدوم $\vec{n}$ شعاع ناظمي لمستقيم (D) يعني أن $\vec{n}$ عمودي على شعاع توجيه لـ (D)

معادلة مستقيم علم شعاع ناظمي له و نقطة منه



$(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم متعامد و متجانس. $\vec{n}(a,b)$ شعاع غير معدوم و $A(x_0,y_0)$ نقطة من المستوي

و ليكن (D) المستقيم الذي يشمل A و $\vec{n}$ شعاع ناظمي له.

ا (D) هي إذن مجموعة النقط M من المستوي بحيث: $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$.

نفرض أن $M(x,y)$ فيكون لدينا $\overrightarrow{AM}(x-x_0,y-y_0)$

و بالتالي $M\in(D)$ معناه $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=a(x-x_0)+b(y-y_0)$

و معناه $ax+by-(ax_0+by_0)=0$

بوضع $c=-(ax_0+by_0)$ يكون $ax+by+c=0$

مبرهنة:

في معلم متعامد و متجانس يكون لكل مستقيم حيث الشعاع غير المعدوم $\vec{n}(a,b)$ شعاع ناظمي له معادلة من الشكل: $ax+by+c=0$ حيث c عدد حقيقي.

ملاحظة:

إذا كانت $ax+by+c=0$ معادلة لمستقيم (D) فإن $\vec{u}(-b,a)$ شعاع توجيه له و منه الشعاع $\vec{n}(a,b)$ شعاع ناظمي للمستقيم (D) لأن فعلا $\vec{n}$ و $\vec{u}$ متعامدان مادام $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$.

التمرين التاسع

$(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم متعامد و متجانس. نعتبر المثلث ABC حيث: $A(1,1)$، $B(-2,3)$ و $C(3,2)$.

أكتب معادلة للارتفاع المتعلق بالضلع $[BC]$

حـل التمرين:

ليكن (D) الارتفاع المتعلق بالضلع $[BC]$ في المثلث ABC. إذن (D) هو المستقيم الذي يشمل النقطة A و $\overrightarrow{BC}$ شعاع ناظمي له. و بما أن المركبات السلمية لـ $\overrightarrow{BC}$ هي $(5,-1)$ فإن معادلة (D) هي من الشكل:

$$5x-y+c=0$$

و بما أن النقطة A تنتمي إلى المستقيم (D) فإن: $5(1)-1+c=0$ و منه $c=-4$

إذن $5x-y-4=0$ هي معادلة للارتفاع المتعلق بالضلع $[BC]$.

التمرين العاشر:

$(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم متعامد و متجانس. نعتبر المثلث ABC حيث: $A(0,1)$، $B(3,0)$ و $C(2,3)$.

أكتب معادلة للارتفاع Δ المتعلق بالضلع $[BC]$

حل التمرين:

طريقة اولى

ليكن (D) الارتفاع المتعلق بالضلع $[BC]$ في المثلث ABC. إذن (D) هو المستقيم الذي يشمل النقطة A و $\overrightarrow{BC}$ شعاع ناظمي له. و بما أن المركبات السلمية لـ $\overrightarrow{BC}$ هي $(-1,3)$ فإن معادلة (D) هي من الشكل:

$$-x+3y+c=0$$

و بما أن النقطة A تنتمي إلى المستقيم (D) فإن: $-(0)+3(1)+c=0$ و منه $c=-3$

إذن $-x+3y-3=0$ هي معادلة للارتفاع المتعلق بالضلع $[BC]$.

طريقة ثانية

نفرض أن $M(x,y)$. $M\in\Delta$ معناه $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=0$ ومعناه $-x+3y-3=0$

معادلة دائرة

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

✓ **معادلة دائرة علم مركزها و نصف قطرها**

لتكن (C) الدائرة التي مركزها $\Omega(x_0,y_0)$ و نصف قطرها r $(r>0)$. (C) هي مجموعة النقط $M(x,y)$ حيث: $\Omega M=r$ أي $\Omega M^2=r^2$ و هذا يعني أن: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

مبرهنة:

في معلم متعامد و متجانس معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(x_0,y_0)$ و نصف قطرها r $(r>0)$ هي:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

مثال1:

معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(3,-1)$ و نصف قطرها 2 هي: $(x-3)^2+(y+1)^2=4$

مثال2:

المعادلة $x^2+y^2=1$ هي معادلة الدائرة التي مركزها $O(0,0)$ و نصف قطرها 1 "الدائرة المثلثية"

✓ **معادلة دائرة علم قطرها**

لتكن (C) الدائرة التي قطراها $[AB]$. (C) باستثناء A و B هي مجموعة النقط M بحيث يكون المثلث AMB قائما في M أي $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

لدينا كذلك $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ إذا كانت M منطبقة على A أو على B.

مبرهنة:

الدائرة التي قطرها $[AB]$ هي مجموعة النقط M حيث $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

تمرين الحادي عشر

$(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم متعامد و متجانس.

1. عين معادلة (C) الدائرة التي مركزها $\Omega(-2,1)$ و نصف قطرها $\sqrt{3}$.
2. عين معادلة (C') الدائرة التي قطرها $[AB]$ علما أن $A(-2,-1)$ و $B(-3,2)$.
3. بين أن مجموعة النقط $M(x,y)$ حيث $x^2+y^2-6x+4y+4=0$ دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.
4. هل (Γ) مجموعة النقط $M(x,y)$ حيث $x^2+y^2+2x-4y+8=0$ دائرة ؟

حل التمرين :

1. معادلة (C) هي $(x+2)^2+(y-1)^2=\sqrt{3}^2$ أي: $x^2+y^2+4x-2y+2=0$
2. $M(x,y)\in(C')$ يعني أن $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ أي: $(-2-x)(-3-x)+(-1-y)(2-y)=0$
   و منه معادلة (C') هي $x^2+y^2+5x-y+4=0$
3. لتكن (C_1) مجموعة النقط $M(x,y)$ التي تحقق $x^2+y^2-6x+4y+4=0$ $(*)$

لدينا $x^2-2x=(x-1)^2-1$ و $y^2+4y=(y+2)^2-2^2$ ومنه تكتب $(*)$ على الشكل:

$$(x-3)^2+(y+2)^2=9$$

إذن (C_1) هي الدائرة التي مركزها النقطة $\omega(3,-2)$ و نصف قطرها 3.

4. نكتب $x^2+y^2+2x-4y+8=0$ على الشكل $(x^2+2x)+(y^2-4y)+8=0$

و بما أن $x^2+2x=(x+1)^2-1$ و $y^2-4y=(y-2)^2-4$ يكون لدينا: $(x+1)^2+(y-2)^2=-3$

الطرف الأول للمساواة موجب بينما طرفها الثاني سالب و بالتالي لا توجد نقط $M(x,y)$ إحداثياها تحقق هذه المساواة.

المجموعة (Γ) هي إذن مجموعة خالية.

ملاحظة:

لكل دائرة معادلة من الشكل $x^2+y^2+ax+by+c=0$ لكن ليس كل معادلة من هذا الشكل معادلة لدائرة.

تمرين رقم 70 ص 303

لتكن النقط $A(1;3)$ ، $B(3;0)$ و $C(-5;-1)$.

1) بين أن المثلث ABC قائم.

2) عين معادلة للدائرة المحاطة بالمثلث ABC.

3) عين معادلة لمماس هذه الدائرة في A.

المسافة بين نقطة و مستقيم

تعريف:

المسافة بين نقطة A و مستقيم (D) هي المسافة AH بين A و النقطة H مسقطها العمودي على (D)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ نقطة $A(x_0,y_0)$ و مستقيما (D) معادلته $ax+by+c=0$ حيث $(a,b)\neq(0,0)$.

لتكن النقطة $H(x_1,y_1)$ المسقط العمودي للنقطة A على (D) وليكن $\vec{n}(a;b)$ الشعاع الناظمي للمستقيم (D)

لنحسب المسافة بين H و (D)

لدينا : $\overrightarrow{HA}.\vec{n}=HA\times\|\vec{n}\|\times\cos(\overrightarrow{HA}\,;\vec{n})$

بما أن : $\overrightarrow{HA}$ مرتبط خطيا مع $\vec{n}$ فإن : $\cos(\overrightarrow{HA}\,;\vec{n})=1$ أو $\cos(\overrightarrow{HA}\,;\vec{n})=-1$

إذن : $|\overrightarrow{HA}.\vec{n}|=HA\times\sqrt{a^2+b^2}$ ......(1)

من جهة أخرى لدينا :

$\overrightarrow{HA}.\vec{n}=a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)$ لأن $\overrightarrow{HA}(x_0-x_1;y_0-y_1)$ و $\vec{n}(a;b)$

أي : $\overrightarrow{HA}.\vec{n}=ax_0+by_0-(ax_1+by_1)$

و لدينا $H\in(D)$ معناه $ax_1+by_1+c=0$ ومعناه $ax_1+by_1=-c$

إذن : $|\overrightarrow{HA}.\vec{n}|=|ax_0+by_0+c|$ ......(2)

من (1) و (2) نستنتج أن : $HA\times\sqrt{a^2+b^2}=|ax_0+by_0+c|$ أي $HA=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

مبرهنة:

في معلم متعامد و متجانس المسافة بين نقطة $A(x_0,y_0)$ و مستقيم (D) معادلته $ax+by+c=0$ هي:

$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

التمرين الثاني عشر

احسب المسافة بين المستقيم $(d):2x-3y+2=0$ و بين نقطة $\omega(3,0)$

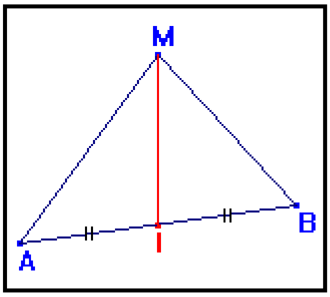
حل التمرين

في معلم متعامد و متجانس المسافة بين نقطة $\omega(3,0)$ و مستقيم (d) معادلته $2x-3y+2=0$ هي:

$$\frac{|2\times3-3\times0+2|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{8}{\sqrt{13}}\approx2,21$$

حساب أطوال و أقياس زوايا

مبرهنة المتوسط



A و B نقطتان. I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$. M نقطة كيفية من المستوي.

لدينا: $MA^2+MB^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$

و منه: $MA^2+MB^2=2\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)+\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{IB}^2$

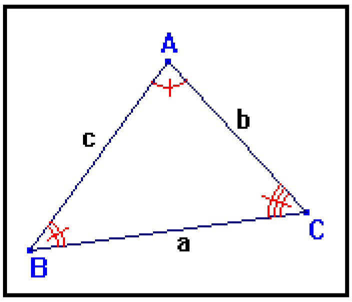
و بما أن: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ و $IA=IB=\frac{1}{2}AB$ أي $\overrightarrow{IA}^2=\overrightarrow{IB}^2=\frac{1}{4}AB^2$

فإن: $MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$

مبرهنة:

A و B نقطتان و I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$. من أجل كل نقطة M لدينا:

$$MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$$



العلاقات المترية في مثلث

ABC مثلث. نضع $AB=c$ ، $AC=b$ ، $BC=a$ ، $\widehat{BAC}=\widehat{A}$ ، $\widehat{CBA}=\widehat{B}$ ، $\widehat{ACB}=\widehat{C}$ و لتكن S مساحة المثلث ABC.

مبرهنة الكاشي

لدينا: $BC^2=\overrightarrow{BC}^2=\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)^2=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AB}^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$

و بما أن: $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=AC\times AB\cos\widehat{A}$ ، $\overrightarrow{AC}^2=b^2$ و $\overrightarrow{AB}^2=c^2$ فإن: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\widehat{A}$

و بإتباع نفس الطريقة نثبت أن $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\widehat{B}$ و $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\widehat{C}$

مبرهنة:

إذا كان ABC مثلث فإن:

✓ $BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos\widehat{A}$

✓ $AC^2=AB^2+BC^2-2AB.BC.\cos\widehat{B}$

✓ $AB^2=AC^2+BC^2-2AC.BC.\cos\widehat{C}$

قاعدة المساحة

مبرهنة: ABC مثلث و S مساحته.لدينا العلاقات التالية:

$$S=\frac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{A}=\frac{1}{2}AB.BC\sin\widehat{B}=\frac{1}{2}AC.BC.\sin\widehat{C}$$

قانون الجيوب

مبرهنة:

ABC مثلث حيث $AB=c$ ، $AC=b$ و $BC=a$. لدينا العلاقات التالية:

$$\frac{BC}{\sin\widehat{A}}=\frac{AC}{\sin\widehat{B}}=\frac{AB}{\sin\widehat{C}}$$

التمرين الثالث عشر

ABC مثلث حيث: $AB=5$، $AC=8$ و $BC=7$.

1. عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $MA^2+MC^2=38$
2. أحسب $\widehat{A}$ و عين قيمة مقربة إلى 0.1 لكل من $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$.
3. أحسب المسافة BH حيث H هي المسقط العمودي للنقطة B على (AC)

حـل التمرين:

1. لتكن النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AC]$. بتطبيق مبرهنة المتوسط يكون لدينا:

$MA^2+MC^2=2MI^2+\frac{1}{2}AC^2$. إذن القول أن M نقطة من (Γ) يعني أن: $2MI^2+\frac{1}{2}AC^2=38$

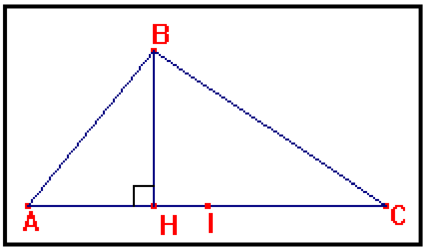
أي $2MI^2+32=38$ أو $MI^2=3$. و بالتالي فإن (Γ) هي الدائرة التي مركزها النقطة I و نصف قطرها $\sqrt{3}$.

2. بتطبيق مبرهنة الكاشي في المثلث ABC يكون لدينا: $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos\widehat{A}$

أي $49=64+25-2\times5\times8\times\cos\widehat{A}$ و منه $\cos\widehat{A}=\frac{1}{2}$. و بما أن $0<\widehat{A}<180^\circ$ فإن: $\widehat{A}=60^\circ$.

بتطبيق مبرهنة الكاشي و بعد الحساب نجد: $\cos\widehat{B}=\frac{1}{7}$ و باستعمال آلة حاسبة نقرأ: $\widehat{B}\approx81.2^\circ$.

نعلم أن $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^\circ$ و منه $\widehat{C}\approx38.8^\circ$.



3. لدينا من جهة $S=\frac{1}{2}AC\times BH$

و لدينا حسب قاعدة المساحة $S=\frac{1}{2}AB\times AC\sin\widehat{A}$

و منه $AH=AB\sin\widehat{A}$ إي $AH=5\times\frac{\sqrt{3}}{2}$ لأن $\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

التمرين الرابع عشر

ABC مثلث حيث: $BC=8$، $\widehat{B}=50^\circ$ و $\widehat{C}=70^\circ$.

1. أحسب $\widehat{A}$.
2. أحسب AB و AC ثم عين مدور كل منهما إلى 10^{-2}.

حـل التمرين :

1. من $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^\circ$ نجد $\widehat{A}=60^\circ$.
2. بتطبيق قانون الجيوب في المثلث ABC يكون لدينا: $\frac{BC}{\sin\widehat{A}}=\frac{AC}{\sin\widehat{B}}=\frac{AB}{\sin\widehat{C}}$

و منه $AB=\frac{BC\sin\widehat{C}}{\sin\widehat{A}}=\frac{8\sin70^\circ}{\sin60^\circ}$ و $AC=\frac{BC\sin\widehat{B}}{\sin\widehat{A}}=\frac{8\sin50^\circ}{\sin60^\circ}$

نجد هكذا باستعمال آلة حاسبة أن مدور AB إلى 10^{-2} هو 8.68 بينما مدور AC إلى 10^{-2} هو 7.08.

التمرين الخامس عشر

$ABCD$ مستطيل مركزه I. برهن أنه من أجل كل نقطة M من المستوي، $MA^2+MC^2=MB^2+MD^2$.

حـل التمرين:

I منتصف $[AC]$ ، بتطبيق مبرهنة المتوسط يكون لدينا: $MA^2+MC^2=2MI^2+\frac{1}{2}AC^2$

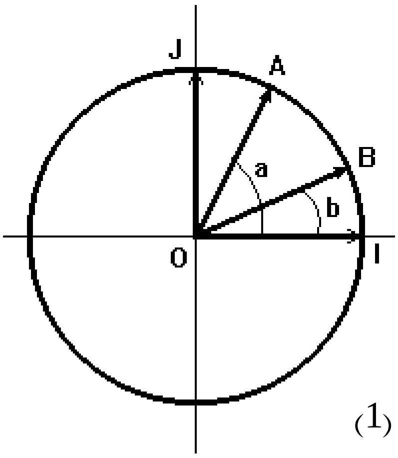
كما أن I منتصف $[BD]$ ، بتطبيق مبرهنة المتوسط يكون لدينا: $MB^2+MD^2=2MI^2+\frac{1}{2}BD^2$

و بما أن قطرا المستطيل متقايسين فإن $AC=BD$ فنستنتج أن: $2MI^2+\frac{1}{2}AC^2=2MI^2+\frac{1}{2}BD^2$

أي: $MA^2+MC^2=MB^2+MD^2$

دساتير الجمع

دساتير الجمع



حساب $\cos(a-b)$:

$(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم متعامد و متجانس للمستوي. نعتبر النقطتين A و B

من الدائرة المثلثية التي مركزها النقطة O بحيث:

$(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})=a$ و $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB})=b$

لنحسب الجداء السلمي : $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}$

$$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}=OB\times OA\times\cos(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA})=1\times1\times\cos(a-b)=\cos(a-b) \quad ....(1)$$

و من جهة أخرى لدينا : $\overrightarrow{OB}(\cos b;\sin b)$ و $\overrightarrow{OA}(\cos a;\sin a)$

إذن : $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}=\cos a\cos b+\sin a\sin b \quad .....(2)$

من (1) و (2) نستنتج أن : $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$

مثال : حساب $\cos\frac{\pi}{12}$

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

حساب $\cos(a+b)$:

$$\cos(a+b)=\cos(a-(-b))=\cos a\cos(-b)+\sin a\sin(-b)$$

ومنه $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

حساب $\sin(a-b)$:

$$\sin(a-b)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(a-b)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-a\right)+b\right)$$

ومنه $\sin(a-b)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cos b-\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\sin b$

ومنه $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$

حساب $\sin(a+b)$:

$$\sin(a+b)=\sin(a-(-b))=\sin a\cos(-b)-\cos a\sin(-b)$$

ومنه $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$

التمرين السادس عشر

تحقق أن $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}$ ثم أحسب القيم المضبوطة لـ $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

حل التمرين

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}$$

و منه : $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}$$

و منه : $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

التمرين السابع عشر

احسب $\cos 3x$ بدلالة $\cos x$ و $\sin 3x$ بدلالة $\sin x$

حل التمرين:

$$\cos 3x=\cos(2x+x)=\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x$$

ومنه $\cos 3x=(2\cos^2 x-1)\cos x-(2\cos x\sin x)\sin x$

ومنه $\cos 3x=2\cos^3 x-\cos x-2\cos x\sin^2 x$

ومنه $\cos 3x=2\cos^3 x-\cos x-2\cos x(1-\cos^2 x)$.إذن $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$

$$\sin 3x=\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x$$

ومنه $\sin 3x=2\sin x\cos x\cos x+(1-2\sin^2 x)\sin x$

ومنه $\sin 3x=2\sin x\cos^2 x+\sin x-2\sin^3 x$

ومنه $\sin 3x=2\sin x(1-\sin^2 x)+\sin x-2\sin^3 x$.إذن $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$

نتائج

1) $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$ و $\sin 2a=2\sin a\cos a$

2) $\cos 2a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$

التمرين الثامن عشر

1) أحسب القيم المضبوطة لـ $\cos\frac{\pi}{8}$ و $\sin\frac{\pi}{8}$

2) بين أن: $\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$ و $\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$

حل التمرين:

1) • $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ ومنه $\cos 2\frac{\pi}{8}=2\cos^2\frac{\pi}{8}-1$ ومنه $\frac{\sqrt{2}}{2}=2\cos^2\frac{\pi}{8}-1$ ومنه $\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

بما أن $0<\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{2}$ فإن $\cos\frac{\pi}{8}>0$ و بالتالي $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

• $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ ومنه $\cos 2\frac{\pi}{8}=1-2\sin^2\frac{\pi}{8}$ ومنه $1-\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sin^2\frac{\pi}{8}$ ومنه $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\sin^2\frac{\pi}{8}$

بما أن $0<\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{2}$ فإن $\sin\frac{\pi}{8}>0$ و بالتالي $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

2) $\cos 2a=2\cos^2 a-1$ ومنه $2\cos^2 a=1+\cos 2a$ ومنه $\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$

$\cos 2a=1-2\sin^2 a$ ومنه $2\sin^2 a=1-\cos 2a$ ومنه $\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$

التمرين التاسع عشر

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1) $\cos^2 x+2\sin x\cos x-\sin^2 x=0$ ، 2) $\sin 2x-2\sin^2 x=0$ ، 3) $\cos^2 x-\sin x\cos x=\frac{1}{2}$

حل التمرين:

1) $\cos^2 x+2\sin x\cos x-\sin^2 x=0$ تكافئ $\cos 2x+\sin 2x=0$

وتكافئ $\cos 2x=\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)$

وتكافئ $\left(x=-\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}\right)$ مع $k\in\mathbb{Z}$

2) $\sin 2x-2\sin^2 x=0$ تكافئ $2\sin x\cos x-2\sin^2 x=0$

و تكافئ $2\sin x(\cos x-\sin x)=0$

و تكافئ $(x=k\pi)$ أو $\left(x=\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$ مع $k\in\mathbb{Z}$

3) $\cos^2 x-\sin x\cos x=\frac{1}{2}$ تكافئ $2\cos^2 x-2\sin x\cos x-1=0$

وتكافئ $\cos 2x-\sin 2x=0$

وتكافئ $\cos 2x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=0$

وتكافئ $\left(x=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}\right)$ مع $k\in\mathbb{Z}$

التمرين العشرون

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية: 1) $\cos 2x-\cos x+1=0$ ، 2) $\sin 2x-\sqrt{3}\cos x=0$

حل التمرين:

1) $\cos 2x-\cos x+1=0$ تكافئ $2\cos^2 x-1-\cos x+1=0$

و تكافئ $\cos x\left(2\cos x-1\right)=0$

و تكافئ $\left(x=\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ أو $\left(x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)$ أو $\left(x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)$ مع $k\in\mathbb{Z}$

2) $\sin 2x-\sqrt{3}\cos x=0$ تكافئ $2\sin x\cos x-\sqrt{3}\cos x=0$

وتكافئ $\cos x\left(2\sin x-\sqrt{3}\right)=0$

وتكافئ $\left(x=\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ أو $\left(x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)$ أو $\left(x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)$ مع $k\in\mathbb{Z}$

حل المعادلات من الشكل : $a\cos x+b\sin x=c$ *<u>خاص بالرياضي</u>*

مثال:

نعتبر المعادلة $\cos x+\sqrt{3}\sin x=\sqrt{2}$

لدينا: $\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ومعناه $\cos\frac{\pi}{3}\cos x+\sin\frac{\pi}{3}\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ومعناه $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{4}$

ومعناه $\left(x=\frac{\pi}{12}+2k\pi\right)$ أو $\left(x=\frac{7\pi}{12}+2k\pi\right)$ مع $k\in\mathbb{Z}$

الحالة العامة:

نعتبر المعادلة $a\cos x+b\sin x=c$ ، نقسم طرفي المعادلة على $\sqrt{a^2+b^2}$ فنحصل على:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\ ....(1)$$

لدينا: $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$

نستنتج أنه توجد زاوية α حيث أن : $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

(1) تكافئ $\cos\alpha\cos x+\sin\alpha\sin x=C$ مع $C=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و تكافئ $\cos\left(x-\alpha\right)=C$

تمارين محلولة

تمارين محلولة

التمرين الواحد والعشرون

ABC مثلث حيث $AB=3$ ، $AC=2$ و $\widehat{A}=\frac{\pi}{3}$.

1. أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
2. باستعمال مبرهنة الكاشي أحسب الطول BC .
3. أحسب $\cos\left(\widehat{B}+\widehat{C}\right)$ ؛ استنتج أن $2\cos\widehat{B}\cos\widehat{C}=2\sin\widehat{B}\sin\widehat{C}-1$.

حل التمرين:

ABC مثلث حيث $AB=3$ ، $AC=2$ و $\widehat{A}=\frac{\pi}{3}$.

1. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC\cos\widehat{A}=6\times\frac{1}{2}=3$.
2. $BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC\cos\widehat{A}$ أي $BC^2=13-6=7$ معناه $BC=\sqrt{7}$.
3. $\widehat{B}+\widehat{C}=\pi-\widehat{A}=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$ ؛ $\cos\left(\widehat{B}+\widehat{C}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$.

$\cos\left(\widehat{B}+\widehat{C}\right)=\cos\widehat{B}\cos\widehat{C}-\sin\widehat{B}\sin\widehat{C}$ إذن $\cos\widehat{B}\cos\widehat{C}-\sin\widehat{B}\sin\widehat{C}=-\frac{1}{2}$ معناه

$2\cos\widehat{B}\cos\widehat{C}-2\sin\widehat{B}\sin\widehat{C}=-1$ أي $2\cos\widehat{B}\cos\widehat{C}=2\sin\widehat{B}\sin\widehat{C}-1$.

تمرين الثاني والعشرون

حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين التاليتين:

1) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. ، 2) $\sin(3x)=\cos(x+\pi)$.

حل التمرين:

$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ تعني أن $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{5\pi}{6}$ ومنه $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ أو $2x+\frac{\pi}{3}=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ أي

$x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ أو $x=-\frac{7\pi}{12}+k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

$\sin(3x)=\cos(x+\pi)$ تعني أن $\cos(\pi+x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)$ ومنه $\pi+x=\frac{\pi}{2}-3x+2k\pi$ أو $\pi+x=-\frac{\pi}{2}+3x+2k\pi$

وبالتالي: $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$ أو $x=\frac{3\pi}{4}+k\pi$

التمرين الثالث والعشرون

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. لتكن النقط $A(4;2)$ ، $B(2;-1)$ و $C(-1;1)$

1) احسب $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ ، $\|\overrightarrow{BA}\|$ و $\|\overrightarrow{BC}\|$.

2) استنتج طبيعة المثلث ABC .

حـــل التمرين

1) $A(4;2)$ ، $B(2;-1)$ و $C(-1;1)$.

$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix};\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}4-2\\2+1\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1-2\\1+1\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ ؛ $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=(-3)\times 2+(2\times 3)=0$ ؛

$\|\overrightarrow{BA}\|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$ ، $\|\overrightarrow{BC}\|=\sqrt{(-3)^2+2^2}=\sqrt{13}$

2) بما أن $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=0$ فإن $(BA)\perp(BC)$ ومنه المثلث ABC قائم في B . ولدينا $\|\overrightarrow{BA}\|=\|\overrightarrow{BC}\|$ ومنه ABC متساوي الساقين.

تمارين مقترحة

التمرين الرابع والعشرون

في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,I:J)$ نعتبر النقط $A(1;1)$ ، $B(3;4)$ ، $C(3-k;-1)$، حيث k عدد حقيقي.

1. عين العدد الحقيقي k حتى يكون المثلث ABC قائم في A .

برهن أن المثلث ABC متساوي الساقين قاعدته $[BC]$ من أجل قيمة k الموجودة في السؤال الأول.

التمرين الخامس والعشرون

لتكن النقط $A(1;3)$ ، $B(3;0)$ و $C(-5;-1)$.

1) بين أن المثلث ABC قائم.

2) عين معادلة للدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

3) عين معادلة لمماس هذه الدائرة في A .

(D) المستقيم الذي معادلته $2x-y-1=0$ و A النقطة التي إحداثيتيها $(1;2)$.

1) تحقق أن النقطة $H(t\ ;\ 2t-1)$ تنتمي إلى المستقيم (D) .

2) عين إحداثيتي النقطة H حتى يكون المستقيمين (D) و (AH) متعامدين.

3) عين معادلة للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A وعمودي على المستقيم (D)

نعتبر المجموعة $(E):x^2+y^2+4x-2y-35=0$

1) بين أن (E) دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

2) هل المستقيم $(D'):x+y+1=0$ مماس للدائرة (E) .

التمرين السادس والعشرون

$C;B;A$ ثلاث نقط من المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث :

$C(2;-1)$ $B(-3;4)$ $A(-2;-1)$

1/ أحسب : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

2/ أحسب : $\|\overrightarrow{AC}\|$ ، $\|\overrightarrow{AB}\|$ ، ثم استنتج $\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$.

3/ أكتب معادلة للدائرة (C) التي قطرها $[BC]$.

4/ أكتب معادلة للمستقيم (D) الذي يشمل A وعمودي على المستقيم الذي معادلته : $2x+3y-6=0$

التمرين السابع والعشرون

لتكن النقط $A(1;3)$ ، $B(3;0)$ و $C(-5;-1)$.

1) بين أن المثلث ABC قائم.

2) عين معادلة للدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

3) عين معادلة لمماس هذه الدائرة في A .

(D) المستقيم الذي معادلته $y=2x-1$ و A النقطة التي احداثييها $(1;2)$.

نرمز بـ H إلى المسقط العمودي للنقطة A على (D) .

1) ماذا يمكن القول عن الشعاع $\overrightarrow{AH}$ بالنسبة للمستقيم (D) ؟
2) عين إحداثيتي النقطة H.
3) احسب المسافة AH بطريقتين.
4) عين معادلة للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A وعمودي على المستقيم (D)

التمرين الثامن والعشرون

نفرض المستوي منسوب لمعلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ و لتكن (C) مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوي التي تحقق $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ ولنعتبر النقط $C;B;A$ المعرفة بـ

$$C(0, 2-\sqrt{3}); B(-3,2); A(0, 1+\sqrt{3})$$

1. أثبت أن (C) دائرة يطلب تعين مركزها ω و نصف قطرها r.
2. عين معادلة المستقيم (AB)
3. ليكن (Δ) المستقيم المار النقطة ω و عمودي على المستقيم (AB)
   - عين معادلة المستقيم (Δ)
   - بين أن (Δ) يقطع الدائرة (C) في النقطة C و النقطة D يطلب تعيين إحداثياتها.
4. أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ مستنتجا قيس الزاوية $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
5. ماهي طبيعة المثلث ABC ثم أحسب مساحته.
6. ليكن التحاكي h ذو المركز O و النسبة 2ـ عين معادلة الدائرة (C') صورة الدائرة (C) بواسطة التحويل h
7. أنشئ (C) و (C').

التمرين التاسع والعشرون

A و B نقطتان من المستوي و I منتصف $[AB]$

1) بين أن من أجل كل نقطة M من المستوي يكون: $MA^2-MB^2=2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{AB}$
2) نفرض أن $AB=1$. عين مجموعة النقط M من المستوي بحيث : $MA^2-MB^2=2$

التمرين الثلاثون

لتكن A و B نقطتان متمايزتان من المستوي و G مرجح $(A;3)$ و $(B;2)$ حيث $AB=5$.

1) أ) اكتب $\overrightarrow{AG}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$

ب) لتكن (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=10$

- بين أن $G\in(E)$ ـ برهن أن (E) هي المستقيم العمودي على (AB) في G.

2) حدد (F) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $MA^2+MB^2=7$

التمرين الواحد الثلاثون

A و B نقطتان متمايزتان من المستوي حيث $AB=2$. لتكن G مرجح $(A;3)$ و $(B;1)$

1) أنشئ G ثم احسب AG و GB
2) بين أنه من أجل كل نقطة M من المستوي : $3MA^2+MB^2=4MG^2+3$
3) عين المجموعة (E)، مجموعة النقط M من المستوي حيث $3MA^2+MB^2=4$
4) تحقق أن A تنتمي إلى (E)

التمرين الثاني الثلاثون

A و B نقطتان متمايزتان حيث $AB=2$. نريد أن نبحث عن المحل الهندسي (E) للنقط M حيث $\frac{MA}{MB}=3$

1) بين أن $M\in(E)$ يكافئ $MA^2-9MB^2=0$

2) لتكن G مرجح $(A;1)$ و $(B;3)$ و K مرجح $(A;1)$ و $(B;-3)$

- بين أن G و K تنتميان إلى (E) .

3) عبر عن MA^2-9MB^2 بدلالة $\overrightarrow{MG}$ و $\overrightarrow{MK}$.

4) استنتج طبيعة المحل الهندسي (E)

نرمز إلى المستوي بالرمز (P) و نعتبر في معلم متعامد و متجانس النقط $A(0;2)$ ، $B(-1;0)$ و $C(0;-3)$

نعتبر المجموعتين: $D=\{M\in(P)/MA^2-MB^2=k\}$ و $D'=\{M\in(P)/MA^2-2MB^2=k'\}$ حيث $(k,k')\in\mathbb{R}^2$

بين أن (D) و (D') مستقيمان متعامدان .

تم بفضل الله

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات

الأستاذ يوسف بوشناق

يتمنى لكم التوفيق

تجدون هذا الملف في صفحة

Top Maths