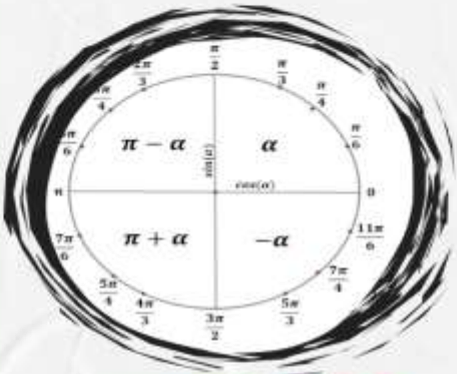
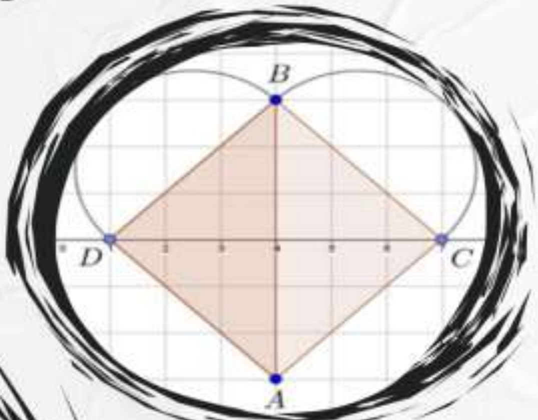
# الأعداد المركبة




## الشعب العلمية

زايدي علاء الدين





Bac2025

# تحتوي مجلة الأعداد المركبة على

1- ملخص شامل للمحور

2- سلسلة تمارين للتدرب

3- سلسلة تمارين مرفقة بحل نموذجي

4- سلسة الأعداد المركبة في البكالوريا من 2008 إلى 2024

# تمهيد حول إنشاء مجموعة الأعداد المركبة

في أوائل القرن السادس عشر ميلادي تمكن العالم الإيطالي دال فيرو من إيجاد صيغة عامة لحلول المعادلات من الدرجة الثالثة التي على الشكل $x^3+ax=b$ ليجد $x=\sqrt[3]{\dfrac{b-\sqrt{b^2+4a^3/27}}{2}}+\sqrt[3]{\dfrac{b+\sqrt{b^2+4a^3/27}}{2}}$

وبعد سنتين من هذا الاكتشاف قام العالم بومبيلي بتطبيق هذه الصيغة على المعادلة $x^3-15x=4$ ليجد :

$x=\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}$ وهذه الكتابة لا معنى لها لأننا لا نعلم ماذا يمثل العدد $\sqrt{-1}$ لان جذور الأعداد السالبة غير معرفة , ومن جهة أخرى لاحظ بومبيلي أن :

$$\left(2-\sqrt{-1}\right)^3=2-11\sqrt{-1} \quad \text{و} \quad \left(2+\sqrt{-1}\right)^3=2+11\sqrt{-1}$$

ليجد في الأخير أن $x=\sqrt[3]{\left(2-11\sqrt{-1}\right)^3}+\sqrt[3]{\left(2+11\sqrt{-1}\right)^3}=2-\sqrt{-1}+2+\sqrt{-1}=4$ و بالتعويض في المعادلة $x^3-15x=4$ وجد أن $x=4$ حلا لها .

وبدراسة أعمق استخلص أن مجموعة حلول المعادلة هي : $4,-2-\sqrt{3},-2+\sqrt{3}$

فوجد نفسه أما تساؤل كيف يمكن تبرير استعمال رموز تخيلية للتعبير عن حلول كلها حقيقية لهذه المعادلة البسيطة ؟

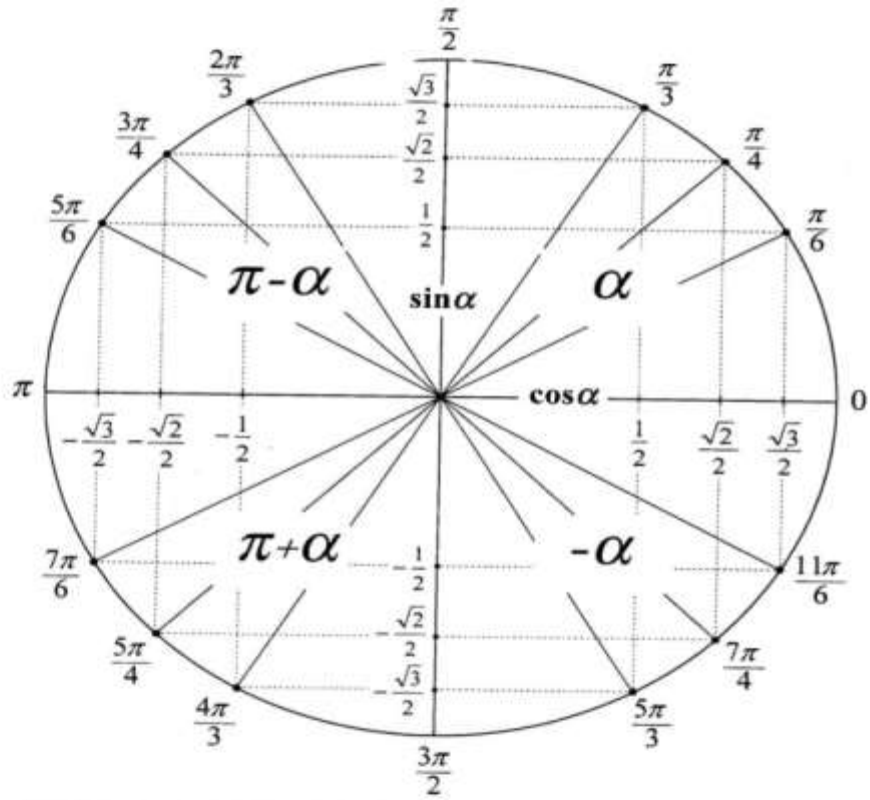
إذا تخيلنا أنه يوجد عدد $i$ مربعه $-1$ و إذا تعاملنا معه في الحساب و كأنه عدد حقيقي فإنه لكل عدد حقيقي سالب $\alpha \prec 0$ $\left(i\sqrt{-\alpha}\right)^2=i^2\left(\sqrt{-\alpha}\right)^2=-\left(-\alpha\right)=\alpha$

وهكذا نكون قد حللنا مشكلة جذور الأعداد السالبة ولكن إذا سمحنا لأنفسنا بتطبيق قواعد الحساب الاعتيادية على هذا العدد التخيلي فإننا سنخترع كما هائلا من الاعداد مثل : $2i,3+\sqrt{3}i$

خلاصة القول نسمي عددا مركبا كل عدد $z$ يكتب على الشكل $z=x+iy$ حيث $y\in\mathbb{R}$ و $x\in\mathbb{R}$ و $i^2=-1$
هكذا تم إنشاء مجموعة الأعداد المركبة التي نرمز لها بالرمز $\mathbb{C}$ و العمليات الأساسية من جمع و طرح و قسمة ينتج عنها عددا مركبا من نفس الشكل .

# محور الأعداد المركبة

## الدائــرة المثلثية




$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
$= 1 - 2\sin^2\alpha$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$

$2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$

## علاقات مثلثية مهمة

$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$

$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$

$\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$

$\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$

# ملخص محور الأعداد المركبة والتحويلات النقطية للأستاذ زايدي علاء الدين

## الأعداد المركبة :

- العدد المركب يرمز له بـــ $z$ حيث $z = x + iy$.
- العدد الحقيقي $x$ يسمى الجزء الحقيقي للعدد المركب $z$ ويرمز له بالرمز $\operatorname{Re} z$.
- العدد الحقيقي $y$ يسمى الجزء التخيلي للعدد المركب $z$ ويرمز له بالرمز $\operatorname{Im}(z)$.
- يكون عددان مركبان $z$ و $z'$ متساويان إذا وفقط إذا كان لهما نفس الجزء الحقيقي ونفس الجزء التخيلي.
- نسمي $M$ صورة العدد المركب $z$ والشعاع $\overrightarrow{OM}$ هو كذلك صورة للعدد المركب $z$
- العدد المركب $x - iy$ يسمى مرافق العدد المركب $z$ ونرمز له بالرمز $\overline{z}$. للحصول على مرافق عدد مركب $z$ نغير اشارة الجزء التخيلي.
- خواص مرافق عدد مركب.

$$\overline{\overline{z}} = z$$
$$z + \overline{z} = 2\operatorname{Re}(z)$$
$$z - \overline{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$$
$$z\overline{z} = \left[\operatorname{Re}(z)\right]^2 + \left[\operatorname{Im}(z)\right]^2$$

- النقطة $M'(x, y')$ نظيرة $M(x, y)$ بالنسبة لحامل محور الفواصل. صورة العدد المركب $z' = x - iy$
- نسمي طويلة العدد المركب $z$ حيث $z = x + iy$ بالعدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له بالرمز $|z|$ حيث $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- إذا كان $z = x + iy$ فإن $|z|^2 = x^2 + y^2$.
- التفسير الهندسي لطويلة عدد مركب هي طويلة الشعاع $\overrightarrow{OM}$ أي $|z| = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$
- خواص طويلة عدد مركب: من أجل كل عددين مركبين $z$ و $z'$ لدينا

$$|\overline{z}| = |z| \qquad |-z| = |z|$$
$$|z.z'| = |z||z'| \qquad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \text{ مع } z' \neq 0$$
$$|z^n| = |z|^n \qquad |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

- **عمدة عدد مركب :** نسمي عمدة العدد المركب $z$ ونرمز $\arg(z)$ كل قيس بالراديان للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.
- كل عدد مركب غير معدوم $z$ له عدد غير منته من العمدة لأن اذا كانت $\theta$ عمدة لـــ $z$ فإن $\theta + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$ عمدة لـــ $z$ كذلك.
- $A$ و $B$ نقطتان لاحقتاهما على الترتيب $z_A$ و $z_B$ لدينا $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}$ أي $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} = \arg(z_A) - \arg(z_B)$
- إذا كان $z \in \mathbb{R}_+^*$ فإن $\arg(z) = 2\pi + 2k\pi$.
- إذا كان $z \in \mathbb{R}_-^*$ فإن $\arg(z) = \pi + 2k\pi$.
- إذا كان $z$ عدد مركب تخيلي موجب فإن $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$
- إذا كان $z$ عدد مركب تخيلي سالب فإن $\arg(z) = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$

## طريقة لحساب عمدة عدد مركب غير معدوم

في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ تعلم النقطة $M$ باحداثياتديكارتية $(x,y)$ أو باحداثيات قطبية $(r,\theta)$ مع $OM=r$ و $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM})=\theta$ ولدينا $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ اذن $\begin{cases} \cos\theta=\dfrac{x}{r} \\ \sin\theta=\dfrac{y}{r} \end{cases}$

- جدول النسب المثلثية للأقياس الشهيرة

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\theta$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |
| $\cos\theta$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |

- **خواص عمدة عدد مركب غير معدوم**

$$\arg(zz)=\arg(z)+\arg(z')$$
$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')$$
$$n\in\mathbb{N}\quad \arg(z^n)=n\arg(z)$$

- **الشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم**

$z$ عدد مركب غير معدوم العدد $z$ يكتب على الشكل $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ حيث $r=\left|z\right|$

و $\theta=\arg(z)$ هذا الشكل يسمى بالشكل المثلثي لـ $z$ .

- **الشكل الأسي لعدد مركب غير معدوم**

العدد المركب $z$ غير المعدوم الذي طويلته $r$ و $\theta$ عمدة له يكتب $z=re^{i\theta}$ هذه الكتابة تسمى الشكل الأسي لعدد مركب غير معدوم. حيث $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

- $\overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta'}\quad \dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}=e^{i(\theta-\theta')}\quad e^{i(\theta+\theta')}=e^{i\theta}.e^{i\theta'}$

- **دستور موافر:** $z$ عدد مركب طويلته $r$ و $\theta$ عمدة له .من أجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم لدينا: $\left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}$

- **تحويل عدد مركب من الشكل المثلثي أو الأسي إلى الشكل الجبري**

$e^{i0}=1$ و بصفة عامة $e^{i2k\pi}=1$ ......... $e^{i\pi}=-1$ و بصفة عامة $e^{i(2k+1)\pi}=-1$

$e^{i\frac{\pi}{2}}=i$ و بصفة عامة $e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}=i$ ......... $e^{-i\frac{\pi}{2}}=-i$ و بصفة عامة $e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}=-i$

- كل قيس من الشكل $\frac{\pi}{n}$ صورته في الربع الأول . حيث $n$ عدد طبيعي أكبر أو يساوي $2$
- كل قيس من الشكل $\frac{(n-1)\pi}{n}$ صورته في الربع الثاني. حيث $n$ عدد طبيعي أكبر أو يساوي $2$
- كل قيس من الشكل $\frac{(n+1)\pi}{n}$ صورته في الربعالثالث .حيث $n$ عدد طبيعي أكبر أو يساوي $2$
- كل قيس من الشكل $-\frac{\pi}{n}$ صورته في الربعالرابع . حيث $n$ عدد طبيعي أكبر أو يساوي $2$
- للتحويل الى الشكل المثلثي يمكن أن نحتاج إلى دساتير التحويل

$\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ و $\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ بالإضافة إلى القوانين المستنتجة الخاصة بكل ربع, حيث الربع الثاني $\theta = \pi - \alpha$ , و الربع الثالث $\theta = \pi + \alpha$ , و الربع الرابع $\theta = -\alpha$

- من خواص الشكل الأسي أن : $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$ و $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$
- نتيجة : إذا كانت العمليات على الأعداد المركبة هي الضرب و القسمة و الرفع إلى الأس من المستحسن الاعتماد على الشكل الأسي لاستنتاج الطويلة و العمدة .
- تعين الأعداد الطبيعية $n$ بحيث $z^n$ عدد مركب خاص

$z^n$ عدد حقيقي موجب يعني أن $n\theta = k\pi$ .

$z^n$ عدد حقيقي موجب يعني أن $n\theta = 2k\pi$ .

$z^n$ عدد حقيقي سالب يعني أن $n\theta = (2k+1)\pi$ .

$z^n$ عدد تخيلي صرف يعني أن $n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ .

$z^n$ عدد تخيلي صرف و $Im(z^n) > 0$ يعني أن $n\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ .

$z^n$ عدد تخيلي صرف و $Im(z^n) < 0$ يعني أن $n\theta = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi$ .

## الجذران التربيعيان لعدد مركب:

$\omega$ و $z$ عددان مركبان حيث: $z = x + iy$ و $\omega = a + ib$

$z$ جذر تربيعي لـ $\omega$ يعني أن: $\boxed{z^2 = \omega}$ أي أن: $(x+iy)^2 = a + ib$ ومنه: $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \\ 2xy = b \end{cases}$ بحل هذه الجملة نجد

الجذرين التربيعيين $z_1$ و $z_2$ للعدد $\omega$

**ملاحظة:** كل عدد مركب يقبل جذرين تربيعيين متناظرين أي: $z_1 = -z_2$

## حل في $\mathbb{C}$ معادلة من الدرجة الثانية:

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة: $az^2 + bz + c = 0 \quad ...(1)$ حيث $a$، $b$، $c$ أعداد حقيقية و $a \neq 0$

العدد المركب $\Delta = b^2 - 4ac$ يسمى مميز المعادلة $(1)$

| المميز $\Delta$ | $\Delta > 0$ | $\Delta = 0$ | $\Delta < 0$ |
|---|---|---|---|
| الحلول | $\begin{cases} z_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ z_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$ | $z_1 = z_2 = -\dfrac{b}{2a}$ | $\begin{cases} z_1 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \\ z_2 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \end{cases}$ |

## الأعداد المركبة و الهندسة

- نسمي $M$ صورة العدد المركب $z$ والشعاع $\overrightarrow{OM}$ هو كذلك صورة للعدد المركب $z$.
- لاحقة الشعاع $\overrightarrow{OA}$ هي $z_A$ ولاحقة الشعاع $\overrightarrow{OB}$ هي $z_B$ ولاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي $z_B - z_A$.
- $|z_A| = OA$ , $|z_B| = OB$ , $|z_B - z_A| = AB$.
- $\left|\dfrac{z_A}{z_B}\right| = \dfrac{OA}{OB}$ , $\left|\dfrac{z_c - z_A}{z_B - z_A}\right| = \dfrac{AC}{AB}$.
- $\arg(z_A) = \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}$
- $\arg(z_B - z_A) = \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AB}$
- $\arg(\dfrac{z_B}{z_A}) = \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$
- $\arg(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}) = \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$

## توظيف الأعداد المركبة في حل المسائل الهندسية :

### 1- الدائرة :

- إذا كان $|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = r$ نستنتج أن النقط $A, B, C, D$ تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها $O$ و نصف قطرها $r$
- إذا كان $|z_A - z_\omega| = |z_B - z_\omega| = |z_C - z_\omega| = |z_D - z_\omega| = r$ نستنتج أن النقط $A, B, C, D$ تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها $\omega$ و نصف قطرها $r$

### 2- الإستقامية :

- إذا كان $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = k; k \in \mathbb{R}$ بحيث $A \neq B$ نستنتج أن النقط $A, B, C, D$ على استقامية.
- إذا كان $\dfrac{z_B}{z_A} = k; k \in \mathbb{R}$ بحيث $A \neq O$ نستنتج أن النقط $A, B, O$ على استقامية.

### 3- توازي شعاعين أو مستقيمين :

- إذا كان $\dfrac{z_D - z_B}{z_C - z_A} = k; k \in \mathbb{R}^*$ بحيث $A \neq C$ و $D \neq B$ نستنتج أن $\overrightarrow{BD} // \overrightarrow{AC}$ لأن $z_D - z_B = k\ \ z_C - z_A$ وهذا يعني أن $\overrightarrow{BD} // \overrightarrow{AC}$ .

### 4- تعامد شعاعين أو مستقيمين :

- إذا كان $\dfrac{z_D - z_B}{z_C - z_A} = iy; y \in \mathbb{R}^*$ بحيث $A \neq C$ و $D \neq B$ نستنتج أن $\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{AC}$ لأن $\arg\left(\dfrac{z_D - z_B}{z_C - z_A}\right) = \arg\ \ iy$ وهذا يعني أن $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD} = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ .
- إذا كان $\dfrac{z_B}{z_A} = iy; y \in \mathbb{R}^*$ بحيث $A \neq O$ و $O \neq B$ نستنتج أن $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$

## 5- طبيعة المثلث :

- إذا كان $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm i$ بحيث $A \neq C$ و $A \neq B$ فإن المثلث $ABC$ قائم في $A$ ومتساوي الساقين .

التعليل : لأن $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = |\pm i|$ و $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg\ \pm i$ أي أن : $\frac{AC}{AB} = 1 \Rightarrow AC = AB$ و

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

- إذا كان $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = iy; y \in \mathbb{R}^* - \ \pm 1$ بحيث $A \neq C$ و $A \neq B$ فإن المثلث $ABC$ قائم في $A$

التعليل : لأن $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg\ iy$ أي أن $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

- إذا كان $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$ بحيث $A \neq C$ و $A \neq B$ فإن المثلث $ABC$ متقايس الأضلاع .

لأن $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1$ و $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ أي أن : $\frac{AC}{AB} = 1 \Rightarrow AC = AB$ و $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ .

- إذا كان $|z_B - z_A| = |z_C - z_A| = |z_C - z_B|$ فإن المثلث $ABC$ متقايس الأضلاع .

التعليل : لأن $AB = AC = BC$

- إذا كان $|z_B - z_A| = |z_C - z_A|$ فإن المثلث $ABC$ متساوي الساقين

التعليل : لأن $AB = AC$ .

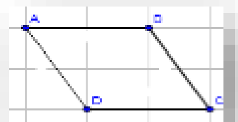
- ملاحظة : يمكن التعرف على طبيعة المثلث دون اللجوء إلى الأعداد المركبة وذلك بحساب أطوال أضلاعه.

## 6- طبيعة الرباعي :

- متوازي الأضلاع : لإثبات أن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع يكفي أن نثبت أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ أي أن $z_B - z_A = z_C - z_D$ أو نثبت أن قطراه متناصفان أي أن : $\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$

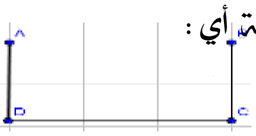
- المعين : لإثبات أن الرباعي $ABCD$ معين يكفي أن نثبت انه متوازي أضلاع به ضلعان متعاقبان متقايسان أي أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ و $AB = BC$ بمعنى $z_B - z_A = z_C - z_D$ و $|z_B - z_A| = |z_C - z_B|$

أو نثبت أن قطراه متناصفان و متعامدان أي أن : $\frac{z_B + z_D}{2} = \frac{z_A + z_C}{2}$ و $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$ و التعامد يمكن إثباته إما بالأعداد المركبة أو بالجداء السلمي .



أو نثبت أن $|z_B - z_A| = |z_C - z_B| = |z_D - z_C| = |z_A - z_D|$

- المستطيل : : لإثبات أن الرباعي $ABCD$ مستطيل يكفي أن نثبت انه متوازي أضلاع به زاوية قائمة أي :



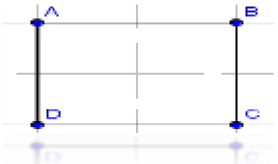
$z_B - z_A = z_C - z_D$ و $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$ و التعامد يمكن إثباته إما بالأعداد المركبة أو بالجداء السلمي .

و يمكن أيضا ان نبين أن قطراه متناصفان و متقايسان أي أن : $\frac{z_B + z_D}{2} = \frac{z_A + z_C}{2}$ و $|z_D - z_B| = |z_C - z_A|$

- المربع : لإثبات أن الرباعي $ABCD$ مربع يكفي أن نثبت أنه معين به زاوية قائمة أي أن $z_B - z_A = z_C - z_D$ و $|z_B - z_A| = |z_C - z_B|$ و $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$

أو نثبت أن قطراه متناصفان و متقايسان و متعامدان أي أن : $\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$ و $|z_D - z_B| = |z_C - z_A|$ و $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$

أو نثبت أن كل أضلاعه متقايسة و به زاوية قائمة .




## التحويلات النقطية :

**1-** الصيغة المركبة للإنسحاب ذي الشعاع $\vec{v}$ **تكتب كمايلي** $z' = z + z_{\vec{v}}$ **حيث** $z_{\vec{v}}$ **لاحقة الشعاع** $\vec{v}$

**2-** الصيغة المركبة للتحاكي ذي المركز $\omega$ **والنسبة** $k$ **تكتب** $z' - z_\omega = k(z - z_\omega)$ **أي أن** $z' = kz + (1-k)z_\omega$

**3-** الصيغة المركبة للتناظر ذي المركز $\omega$ **تكتب** $z' - z_\omega = -(z - z_\omega)$ **أي أن** $z' = -z + 2z_\omega$

**4-** الصيغة المركبة للدوران ذي المركز $\omega$ **والزاوية** $\theta$ **تكتب** $z' - z_\omega = e^{i\theta}(z - z_\omega)$ **أي أن**

$z' = e^{i\theta}z + (1 - e^{i\theta})z_\omega$

**5-** الصيغة المركبة للتشابه المباشر ذي المركز $\omega$ **والنسبة** $k$ **والزاوية** $\theta$ **تكتب** $z' - z_\omega = ke^{i\theta}(z - z_\omega)$ **أي أن**

$z' = ke^{i\theta}z + (1 - ke^{i\theta})z_\omega$

- **ملاحظة : التحويلات النقطية ذات المركز لها نفس الشكل بحيث** $z' - z_\omega = \alpha(z - z_\omega)$ **أي أن**

$z' = \alpha z + (1 - \alpha)z_\omega$

## التعرف على تحويل نقطي مع عناصره المميزة :

$f$ تحويل نقطي من المستوي المركب, التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M$ لاحقتها $z$ النقطة $M'$ ذات اللاحقة $z'$ حيث $z' = \alpha z + \beta$ حيث $\alpha \neq 0$ و $\beta \in \mathbb{C}$

- إذا كان $\alpha = 1$ فإن $f$ انسحاب لاحقة شعاعه $\beta$
- إذا كان $\alpha = -1$ فإن $f$ تناظر مركزي لاحقة مركزه $\frac{\beta}{2}$
- إذا كان $\alpha \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ فإن $f$ تحاك نسبته $\alpha$ لاحقة مركزه $z_\omega = \frac{\beta}{1-\alpha}$
- **إذا كان** $\alpha \in \mathbb{C}$ و $|\alpha| = 1$ فإن $f$ دوران زاويته $\arg(\alpha)$ و لاحقة مركزه $z_\omega = \frac{\beta}{1-\alpha}$
- **إذا كان** $\alpha \in \mathbb{C}$ و $|\alpha| \neq 1$ فإن $f$ تشابه مباشر نسبته $|\alpha|$ و زاويته $\arg(\alpha)$ و لاحقة مركزه $z_\omega = \frac{\beta}{1-\alpha}$

## تعين تحويل يحول نقطتين :

$A, B, A', B'$ أربع نقاط متمايزة من المستوي لتعين التحويل النقطي $f$ الذي يحول $A$ إلى $A'$ ويحول $B$ إلى $B'$ نحل جملة المعادلتين التاليتين $\begin{cases} z_{A'} = \alpha z_A + \beta \\ z_{B'} = \alpha z_B + \beta \end{cases}$ فنجد $\alpha = \frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}$ ثم نحسب $\beta$ وذلك بتعويض $\alpha$ بما يساويها في إحدى المعادلتين السابقتين ثم نعين العناصر المميزة لهذا التحويل .

## تعين العناصر المميزة لتحويل علم مركزه و يحول نقطة:

$A$ و $A'$ نقطتان متمايزتان من المستوي لتعين نسبة التحاكي أو زاوية الدوران أو نسبة و زاوية التشابه المباشر الذي مركزه $\omega$ و يحول $A$ إلى $A'$ نحسب $\alpha$ كمايلي $\alpha = \frac{z_{A'} - z_\omega}{z_A - z_\omega}$ ومن ثم نعين العناصر المميزة.

## الاستنتاج من علاقة أن نقطة هي صورة نقطة أخرى بتحويل :

$B, A, \omega$ ثلاث نقاط متمايزة من المستوي

إذا كان $\alpha = \dfrac{z_B - z_\omega}{z_A - z_\omega}$ فلدينا $z_B - z_\omega = \alpha \ \ z_A - z_\omega$ أي أن $B$ صورة $A$ بالتحويل الذي مركزه $\omega$

## تركيب التحويلات :

- تركيب عدة انسحابات هو انسحاب شعاعه مجموع الأشعة
- مركب تحاكيات لها نفس المركز هو تحاك له نفس المركز ونسبته جداء النسب.
- مركب دورانات لها نفس المركز هو دوران له نفس المركز و زاويته مجموع الزوايا
- مركب تشابهات مباشرة لها نفس المركز هو تشابه مباشر له نفس المركز و نسبته جداء النسب و زاويته مجموع الزوايا .
- إذا اختلفت مراكز التحويلات نستعمل صيغها المركبة و نتبع نفس طريقة تركيب الدوال .

## صورة شكل هندسي بتحويل :

$M$ نقطة إحداثياتها $x, y$ و $M'$ نقطة إحداثياتها $x', y'$ حيث $M'$ صورة $M$ بتحويل ما

لتعين صورة شكل هندسي بهذا التحويل نتبع المراحل التالية :

- نعين العبارة التحليلية لهذا التحويل
- نحسب $x$ و $y$ بدلالة $x'$ و $y'$
- نعوض $x$ و $y$ بدلالة $x'$ و $y'$ في معادلة الشكل الهندسي فنحصل على معادلة لصورة هذا الشكل .

## مجموعات النقط :

**1-** مجموعة النقط $M$ من المستوي حيث $|az - z_A| = |z_\omega|$ حيث $a$ و $z_\omega$ عددان مركبان معلومان .

- إذا كان $a = 1$ مجموعة النقط هي الدائرة التي مركزها النقطة $A$ ونصف قطرها $r = |z_\omega|$
- إذا كان $a \neq 1$ مجموعة النقط هي الدائرة التي مركزها النقطة $E$ لاحقتها $\dfrac{z_A}{a}$ ونصف قطرها $r = |z_\omega|$

**2-** مجموعة النقط $M$ من المستوي حيث $|z - z_A| = |kz - z_B|$ حيث $k \in \mathbb{C}$ و $z_A \neq z_B$

- إذا كان $k = 0$ مجموعة النقط هي الدائرة التي مركزها النقطة $A$ ونصف قطرها $r = |z_B|$
- إذا كان $k = 1$ مجموعة النقط هي المستقيم المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$
- إذا كان $k = -1$ مجموعة النقط هي المستقيم المحوري للقطعة المستقيمة $[AB']$ حيث $B'$ لاحقتها $-z_B$
- إذا كان $k \in \mathbb{C}$ و $|k| = 1$ مجموعة النقط هي المستقيم المحوري للقطعة المستقيمة $[AB']$ حيث $B'$ نقطة لاحقتها $\dfrac{z_B}{k}$
- إذا كان $k \in \mathbb{C}$ و $|k| \neq 1$ مجموعة النقط هي دائرة قطرها $[G_1G_2]$ حيث $G_1$ مرجح الجملة المثقلة $A,1 \ , \ E,-k$ و

$G_2$ مرجح الجملة المثقلة $A,1 \ , \ E,k$ و $E$ نقطة لاحقتها $\dfrac{z_B}{k}$

**3-** مجموعة النقط $M$ من المستوي حيث $z - z_A \ \ \overline{z - z_A} = |z_\omega|$ حيث $z_\omega$ عدد مركب معلوم.

- مجموعة النقط هي الدائرة التي مركزها النقطة $A$ ونصف قطرها $r = |z_\omega|$

**4-** مجموعة النقط $M$ من المستوي حيث $\arg\left(\dfrac{z - z_B}{z - z_A}\right) = \theta$

- إذا كان $\theta = 0 + 2k\pi$ مجموعة النقط هي المستقيم $AB$ بإستثناء القطعة المستقيمة $[AB]$
- إذا كان $\theta = \pi + 2k\pi$ مجموعة النقط هي القطعة المستقيمة $[AB]$ بإستثناء النقطتين $A$ و $B$

- إذا كان $\theta = 0 + k\pi$ مجموعة النقط هي المستقيم $AB$ بإستثناء النقطتين $A$ و $B$
- إذا كان $\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ مجموعة النقط هي نصف دائرة قطرها $\left[AB\right]$ تمسح القوس $BA$ في الإتجاه المباشر بإستثناء النقطتين $A$ و $B$
- إذا كان $\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ مجموعة النقط هي نصف دائرة قطرها $\left[AB\right]$ تمسح القوس $AB$ في الإتجاه المباشر بإستثناء النقطتين $A$ و $B$
- إذا كان $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ مجموعة النقط هي دائرة قطرها $\left[AB\right]$ بإستثناء النقطتين $A$ و $B$

**5- مجموعة النقط $M$ من المستوي حيث** $L = \frac{z - z_B}{z - z_A}$

- إذا كان $L$ حقيقي مجموعة النقط هي المستقيم $AB$ بإستثناء النقطة $A$.
- إذا كان $L$ حقيقي موجب مجموعة النقط هي المستقيم $AB$ بإستثناء القطعة $\left[AB\right]$
- إذا كان $L$ حقيقي سالب مجموعة النقط هي القطعة المستقيمة $\left[AB\right]$ بإستثناء النقطة $A$.
- إذا كان $L$ تخيلي مجموعة النقط هي دائرة قطرها $\left[AB\right]$ بإستثناء النقطة $A$.
- إذا كان $L$ تخيلي موجب مجموعة النقط هي نصف دائرة قطرها $\left[AB\right]$ بإستثناء النقطة $A$. فوق المستقيم
- إذا كان $L$ تخيلي سالب مجموعة النقط هي نصف دائرة قطرها $\left[AB\right]$ بإستثناء النقطة $A$. تحت المستقيم.

**6- مجموعة النقط $M$ من المستوي حيث** $\arg\left(kz - z_A\right) = \theta + 2k\pi$ حيث $\theta$ زاوية معلومة و $k \in \mathbb{C}^*$

- إذا كان $k = 1$ مجموعة النقط هي نصف المستقيم $\left[AM\right)$ بإستثناء النقطة $A$ لاحقتها $z_A$ حيث $\left(\vec{i}, \overrightarrow{AM}\right) = \theta + 2k\pi$ و النقطة ذات الاحداثيات $\left(x_A + \cos\theta, y_A + \sin\theta\right)$ تنتمي له.
- إذا كان $k = -1$ مجموعة النقط هي نصف المستقيم $\left[A'M\right)$ بإستثناء النقطة $A'$ لاحقتها $-z_A$ حيث $\left(\vec{i}, \overrightarrow{A'M}\right) = \theta - \pi + 2k\pi$ و النقطة ذات الاحداثيات $\left(-x_A + \cos\theta, -y_A + \sin\theta\right)$ تنتمي له.
- إذا كان $k \in \mathbb{C} - \left\{-1, 1\right\}$ مجموعة النقط هي نصف المستقيم $\left[A'M\right)$ بإستثناء النقطة $A'$ لاحقتها $\frac{z_A}{k}$ حيث $\left(\vec{i}, \overrightarrow{A'M}\right) = \theta - q + 2k\pi$ و $\arg\left(k\right) = q + 2k\pi$ و النقطة ذات الاحداثيات $\left(x_{A'} + \cos\theta, y_{A'} + \sin\theta\right)$ تنتمي له.

**7- مجموعة النقط $M$ من المستوي حيث** $\arg\left(kz - z_A\right) = \theta + k\pi$ حيث $\theta$ زاوية معلومة و $k \in \mathbb{C}^*$

- إذا كان $k = 1$ مجموعة النقط هي المستقيم $\left(AM\right)$ بإستثناء النقطة $A$ لاحقتها $z_A$ حيث $\left(\vec{i}, \overrightarrow{AM}\right) = \theta$ و النقطة ذات الاحداثيات $\left(x_A + \cos\theta, y_A + \sin\theta\right)$ تنتمي له.
- إذا كان $k = -1$ مجموعة النقط هي المستقيم $A'M$ باستثناء النقطة $A'$ لاحقتها $-z_A$ حيث $\left(\vec{i}, \overrightarrow{A'M}\right) = \theta - \pi + 2k\pi$ و النقطة ذات الاحداثيات $\left(-x_A + \cos\theta, -y_A + \sin\theta\right)$ تنتمي له.
- إذا كان $k \in \mathbb{C} - \left\{-1, 1\right\}$ مجموعة النقط هي المستقيم $A'M$ باستثناء النقطة $A'$ لاحقتها $\frac{z_A}{k}$ حيث $\left(\vec{i}, \overrightarrow{A'M}\right) = \theta - q + 2k\pi$ و $\arg\left(k\right) = q + 2k\pi$ و النقطة ذات الاحداثيات $\left(x_{A'} + \cos\theta, y_{A'} + \sin\theta\right)$ تنتمي له.

**8- مجموعة النقط $M$ من المستوي حيث** $\arg\left(z - z_A\right) = \arg\left(\overline{z - z_A}\right)$

- مجموعة النقط هي المستقيم الموازي لحامل محور الفواصل و المار بالنقطة $A$ باستثناء النقطة $A$ حيث $(\vec{i},\overrightarrow{AM}) = 0 + 2k\pi$ .

**9-** مجموعة النقط $M$ من المستوي حيث $\arg(z - z_A) = \arg(kz - z_B)$

- إذا كان $k = 1$ مجموعة النقط هي القطعة المستقيمة $[AB]$ بإستثناء النقطتين $A$ و $B$
- إذا كان $k = -1$ مجموعة النقط هي القطعة المستقيمة $[AB']$ بإستثناء النقطتين $A$ و $B'$ لاحقتها $-z_B$
- إذا كان $k = i$ مجموعة النقط هي نصف دائرة قطرها $[AB']$ تمسح القوس $AB'$ في الاتجاه المباشر بإستثناء النقطتين $A$ و $B'$ لاحقتها $-iz_B$
- 
- إذا كان $k = i$ مجموعة النقط هي نصف دائرة قطرها $[AB']$ تمسح القوس $B'A$ في الاتجاه المباشر بإستثناء النقطتين $A$ و $B'$ لاحقتها $iz_B$.

**10-** مجموعة النقط $M$ من المستوي حيث $z = z_A + ke^{i\theta}$ حيث $\theta$ زاوية متغيرة و $k$ عدد حقيقي معلوم

- إذا كان $k > 0$ مجموعة النقط هي الدائرة التي مركزها النقطة $A$ و نصف قطرها $k$
- إذا كان $k < 0$ مجموعة النقط هي الدائرة التي مركزها النقطة $A$ و نصف قطرها $|k|$

**11-** مجموعة النقط $M$ من المستوي حيث $z = z_A + ke^{i\theta}$ حيث $\theta$ زاوية معلومة و $k$ عدد حقيقي متغير

- إذا كان $k$ يمسح $\mathbb{R}_+^*$ مجموعة النقط هي نصف المستقيم $[AM)$ باستثناء النقطة $A$ لاحقتها $z_A$ حيث $(\vec{i},\overrightarrow{AM}) = \theta + 2k\pi$ و النقطة ذات الاحداثيات $(x_A + \cos\theta, y_A + \sin\theta)$ تنتمي له.
- إذا كان $k$ يمسح $\mathbb{R}_-^*$ مجموعة النقط هي نصف المستقيم $[AM)$ باستثناء النقطة $A$ لاحقتها $z_A$ حيث $(\vec{i},\overrightarrow{AM}) = \theta + \pi + 2k\pi$ و النقطة ذات الاحداثيات $(x_A + \cos(\theta + \pi), y_A + \sin(\theta + \pi))$ تنتمي له.
- إذا كان $k$ يمسح $\mathbb{R}^*$ مجموعة النقط هي المستقيم $(AM)$ باستثناء النقطة $A$ لاحقتها $z_A$ حيث $(\vec{i},\overrightarrow{AM}) = \theta + 2k\pi$ و النقطة ذات الاحداثيات $(x_A + \cos\theta, y_A + \sin\theta)$ تنتمي له.

**12-** $G$ و $H$ نقطتان من المستوي و $\vec{U}$ شعاع

- مجموعة النقط من المستوي التي تحقق $MG = MH$ هي محور القطعة $[GH]$
- مجموعة النقط من المستوي التي تحقق $\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{MH} = 0$ هي الدائرة ذات القطر $[GH]$
- مجموعة النقط من المستوي التي تحقق $\overrightarrow{MG}.\vec{U} = 0$ هي المستقيم الذي يشمل النقطة $G$ و يعامد $\vec{U}$ .

**ليكن $G$ مرجح الجملة** مرجح الجملة المثقلة $\{(A,\alpha), (B,\beta), (C,\gamma)\}$ لدينا

$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG}$ و منه

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = (\alpha + \beta + \gamma)MG^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2 + \gamma GC^2$$

# السلسلة الشاملة رقم01 للتحكم في محور الأعداد المركبة

**التمرين الأول :** أكتب الأعداد المركبة التالية على شكلها الجبري

$$z_4=(1+i)(1-2i)\quad,\quad z_3=(1+\sqrt{3}i)^2\quad,\quad z_2=\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}\quad,\quad z_1=\frac{1+3i}{1-2i}$$

**التمرين الثاني :** أكتب الأعداد المركبة التالية على شكلها المثلثي ثم الأسي

$$z_6=-1446,\ z_5=2025,\ z_4=\sqrt{6}+i\sqrt{2}\ ,z_3=-1+\sqrt{3}i\ ,\ z_2=-2\sqrt{3}-2i\ ,\ z_1=1-i$$

$$z_8=-2026i\quad,\quad z_7=1446i$$

**التمرين الثالث :** أكتب الأعداد المركبة التالية على شكلها الجبري

$$,\ z_8=6e^{\pi i}\ ,z_7=5e^{2\pi i}\ ,\ z_6=\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i},\ z_5=3e^{-\frac{5\pi}{6}i},\ z_4=2e^{-\frac{\pi}{3}i}\ ,z_3=4e^{\frac{2\pi}{3}i}\ ,\ z_2=3e^{\frac{5\pi}{4}i}\ ,\ z_1=2e^{\frac{\pi}{6}i}$$

$$z_{10}=3e^{-\frac{\pi}{2}i}\ ,z_9=5e^{\frac{\pi}{2}i}$$

**التمرين الرابع :** أكتب الأعداد المركبة التالية على شكلها المثلثي ثم الأسي

$$,\ z_4=2(-\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})\ ,z_3=-2e^{\frac{\pi}{6}i}\ ,\ z_2=-2(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3})\ ,\ z_1=-2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$$

$$z_6=-2ie^{\frac{\pi}{6}i}\ ,z_5=2(\sin\frac{\pi}{3}+i\cos\frac{\pi}{3})$$

**التمرين الخامس :** نعتبر العددين المركبين $z_2=2-2\sqrt{3}i\ ,\ z_1=1-i$

1- أحسب طويلة وعمدة الأعداد التالية : $z_1, z_2, \overline{z_1}, \frac{1}{z_2}, Z=\frac{z_1}{z_2}, L=z_1\times z_2,$

2- أحسب مايلي $(z_1)^{1446}, (\frac{z_1}{\sqrt{2}})^{2026}, (\frac{z_2}{4})^{2975}$

3- أكتب كل من $Z=\frac{z_1}{z_2}, L=z_1\times z_2,$ على الشكل الجبري ثم استنتج قيم مضبوطة لكل :من

$$\cos\frac{\pi}{12},\sin\frac{\pi}{12},\cos\frac{-7\pi}{12},\sin\frac{-7\pi}{12},\cos\frac{5\pi}{12},\sin\frac{5\pi}{12},\cos\frac{13\pi}{12},\sin\frac{13\pi}{12}$$

**التمرين السادس :** حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلات التالية

$$z^2-(2\sin\theta)z+1=0\quad,z^2-2\sqrt{3}z+4=0\quad,\quad z^2+z+1=0\quad,\quad z^2+4z+5=0$$

$$(z-3+2i)(z^2+6z+10)=0\quad,z=\frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}\quad,z.\bar{z}-5\bar{z}-5(1+3i)z=0\quad,z^2-(4\cos\theta)z+4=0$$

**التمرين السابع :** جد الجذران التربيعيان لـ :

$(2-2\sqrt{3})^2=16-8\sqrt{3}$ بحيث $z=-16\sqrt{3}-16i\ ,\ 8-6i\quad,\quad -9\quad,\quad 3-4i\quad,\quad -8+6i$

# السلسلة الشاملة 02 مرفقة بتصحيح نموذجي

**التمرين الأول :**

1/ حل في مجموعة الأعداد المركبة $C$ : $(z-\sqrt{3})(z^2-\sqrt{3}\,z+1)=0$ .

2/ المستوي المركب منسوب إلى معلم $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ ، لتكن $A$ ، $B$ و $C$ نقط لواحقها على الترتيب:

$z_A=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ ، $z_B=\sqrt{3}$ ، $z_C=\overline{z_A}$ .

أثبت أن $z_A^{1962}-z_C^{1446}=0$ ثم عين قيم العد الطبيعي $n$ بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقي موجب

3) أكتب العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الأسي ثم استنتج طبيعة المثلث $ABC$ .

5) عين مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ بحيث يكون $\frac{z-z_A}{z-z_C}$ تخيليا صرفا ؛ ( $z\neq z_C$ ).

**التمرين الثاني**

1) حل، في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $(z-i\sqrt{3})(z^2+-2z+4)=0$.

2) المستوي المركّب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقطة $A$ ، $B$ و $C$ التي لواحقها على الترتيب $z_A=1+i\sqrt{3}$ ، $z_B=1-i\sqrt{3}$ ، $z_C=i\sqrt{3}$ :

أ) أكتب على الشكل الأسي $z_A$ ، $z_B$ ، $z_C$ ثم أحسب العدد $\left(\frac{z_A}{2}\right)^{1962}+\left(\frac{z_B}{2}\right)^{2025}+\left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{2024}$

ب) أكتب على الشكل الأسي العدد $L=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ ثم حدد طبيعة المثلث $ABC$.

3) لتكن $G$ مرجح الجملة $(A,1);(B,\alpha);(C,1)$ حيث $\alpha\neq-2$ عيين قيمة $\alpha$ حتى تنتمي النقطة $G$ إلى المتو سط المتعلق بالضلع $[BC]$ في المثلث $ABC$.

حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $\left|iz+\sqrt{3}-i\right|=\left|\overline{z}+i\sqrt{3}\right|$

**التمرين الثالث :** المستوي المركّب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر في مايلي النقط $A$ ، $B$ و $C$ التي لواحقها $z_A=4-3i$ ، $z_B=4+3i$ و $z_C=7$ على الترتيب عين الاقتراح الصحيح مع التعليل من بين الاقتراحات التالية :

1) المعادلة $z^3-15z^2+81z-175=0$ للمتغير المركّب $z$ حيث $z_0=7$ حلا لها تقبل ثلاث حلول هي:

أ) $S=\{7,4-3i,4+3i\}$ ب) $S=\{7,-4-3i,-4+3i\}$ ج) $S=\{-7,4-3i,4+3i\}$

2) العدد $\left(\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right)^{2024}$ يساوي:

أ) $1$ ب) $i$ ج) $-1$ .

3) لدينا $z_A-z_C=i(z_B-z_C)$ المثلث $ABC$

أ) قائم في $C$ ب) قائم في $C$ و متساوي الساقين ج) متساوي الساقين .

4) $(T)$ مجموعة النقط $M$، ذات اللاحقة $z$، من المستوي المركّب حيث يكون $\frac{z-z_B}{z-z_C}$ تخيليًا صرفا جزؤه التخيلي موجب.هي :

أ)المستقيم $(AB)$   ب) دائرة قطرها $[AB]$   ج) هي نصف دائرة قطرها $[BC]$ باستثناء النقطتين $B$ و $C$

**التمرين الرابع :**

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+10=0$ .

استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة ذات المجهول $z$ حيث: $(\bar{z}+2)^2-6(\bar{z}+2)+10=0$

2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، النقط $A$ ، $B$، $C$، $D$ لاحقاتها

$z_A=3-i$ و $z_B=3+i$ و $z_C=1+i$ و و $z_D=1-i$

عين الكتابة المركبة للدوران $r$ الذي مركزه $A$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

3) $E$ النقطة التي لاحقتها $z_E=7-3i$ و $F$ صورتها بالدوران $r$ ؛ تحقق أن لاحقة $F$ هي $z_F=5+3i$

عين لاحقة النقطة $H$ صورة $F$ بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AE}$

4) مثل النقاط $A$ ، $B$، $E$، $F$ و $H$ وعين بدقة طبيعة الرباعي $AEHF$

5) عين المجموعة $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ حيث : $z=1-i+ke^{-i\frac{\pi}{4}}$ وذلك عندما $k$ يمسح $\mathbb{R}^*$

ثم عين المجموعة $(E)$ مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ حيث : $|z-1-i|=|z-1+i|$

**التمرين الخامس:**

1) نعتبر كثير الحدود $P(z)$ للمتغير المركّب $z$ المعرف بـ $P(z)=z^3-15z^2+81z-175$ .

أ) أحسب $P(7)$ ثمّ حلل $P(z)$ إلى جداء عاملين.

ب) حل، في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$، المعادلة $P(z)=0$ .

2) المستوي المركّب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. نعتبر النقط $A$ ، $B$ و $C$ التي لواحقها $z_A=4-3i$ ، $z_B=4+3i$ و $z_C=7$ على الترتيب.

أ) علم النقط $A$ ، $B$ و $C$.

ب) تحقق أنّ $z_A-z_C=i(z_B-z_C)$.

ج) ما طبيعة المثلث $ABC$ ؟

3) ليكن $R$ الدّوران الذي مركزه النقطة $\Omega(4)$ و يحوّل النقطة $C$ إلى النقطة $B$ .

أ) أكتب العبارة المركّبة للدّوران $R$.

ب) أوجد $z_D$ لاحقة النقطة $D$ صورة النقطة $B$ بالدّوران $R$، ثمّ علمها.

ج) ما طبيعة الرّباعي $ACBD$ ؟

4) لتكن $(\Psi)$ مجموعة النقط $M$، ذات اللاحقة $z$، من المستوي المركّب حيث $\frac{z-z_B}{z-z_C}$ تخيليًا موجب.

أ) حدّد طبيعة $(\Psi)$.

ب) أنشئ $(\Gamma)$ صورة $(\Psi)$ بالدّوران $R$.

**التمرين السادس:** المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$

1) لتكن النقطة $M'$ ذات اللاحقة $z'$ صورة النقطة $M$ ذات اللاحقة $z$ بالدوران $R$ للذي مركزه $\Omega$ ذات اللاحقة $z_w$ وزاويته $\theta$ بحيث $\Omega M=\Omega M'$ و $(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'})=\theta+2k\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$ .

أ-عين طويلة وعمدة العدد المركب $\dfrac{z'-z_\Omega}{z-z_\Omega}$

ب- أكتب $z'$ بدلالة $z$ و $\theta$ و $z_w$ .

2) حل، في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$، المعادلة $z^2-4\sqrt{3}z+16=0$

3) نعتبر النقط $A$ ، $B$ التي لواحقها $z_A=2\sqrt{3}-2i$ ، $z_B=2\sqrt{3}+2i$ على الترتيب.

أ- أكتب $z_A$ و $z_B$ على الشكل الأسي

ب- بين أن المثلث $OAB$ متقايس الأضلاع

4) لتكن النقطة $C$ ذات اللاحقة $z_C=-8i$ والنقطة $D$ صورة $C$ بالدوران الذي مركزه $O$ وزاويته $\dfrac{2\pi}{3}$

أ) علم النقط $A$، $B$، $C$ و$D$ .

ب) تحقق أن لاحقة النقطة $D$ هي $z_D=4\sqrt{3}+4i$

ت) بين أن النقطة $D$ صورة النقطة $B$ بالتحاكي الذي مركزه $O$ ثم بين أن المثلث $OAD$ قائم في $A$

**التمرين السابع:**

1) عيّن العددين المركبين $a$ و $b$ علما أن: $\begin{cases}\bar{a}-\bar{b}=1+3i\\ a+ib=-1+3i\end{cases}$ .

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. نعتبر النقطتين $A$ و $B$ لاحقتاهما على الترتيب: $a=3+i$ و $b=2+4i$، ونفرض الإنسحاب $T$ الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ .

أ) عيّن لاحقة النقطة $C$ صورة $O$ بالإنسحاب $T$ .

ب) أحسب العدد $\dfrac{z_c-z_A}{z_B}$، ثمّ أكتبه على الشكل الأسي.

- ماذا تستنتج بالنسبة للقطعتين $[AC]$ و $[OB]$ ؟.

ج) إستنتج ممّا سبق طبيعة الرباعي $OABC$، ثمّ عيّن لاحقة $E$ مركز تناظر الرباعي $OABC$ .

3) نعتبر التشابه المباشر $S$ الذي مركزه $O$ و يحول $B$ إلى $C$ :

أ) أعط الكتابة المركّبة للتشابه المباشر $S$ .

ب) ماهي صورة النقطة $A$ بالتشابه $S$ ؟.

ج) نضع: $S^4=S\circ S\circ S\circ S$

- أعط الكتابة المركّبة للتحويل $S^4$، وماطبيعة هذا التحويل ؟.

**التمرين الثامن**

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ : $(z-i)(z^2+2z+2)=0$

2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. النقط $A$، $B$، $C$ و $D$ لواحقها: $z_A=i$ ، $z_B=2$ ، $z_C=-1-i$ ، $z_D=1-2i$ على الترتيب.

أ) تحقق أن النقطة $D$ مرجح الجملة $\{(A;1);(B;-1);(C;-1)\}$ .

ب) أكتب العدد $\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_C}$ على الشكل الأسي، ثم فسّر النتيجة هندسيا . برّر طبيعة الرباعي $ABCD$ .

ج) أكتب العدد المركب $-4+4i$ على الشكل الأسي ، ثم أحسب $(-4+4i)^{2024}$ .

3) من أجل كل نقطة $M(z)$ من المستوي تختلف عن $B$ ، نرفق النقطة $M'(z')$ حيث : $z' = \dfrac{iz-4+2i}{z-2}$ .

أ) تحقق أن : $z' - i = \dfrac{-4+4i}{z-2}$ .

ب) بين أن : $AM' \times BM = 4\sqrt{2}$ و $(\vec{u};\overrightarrow{AM'}) + (\vec{u};\overrightarrow{BM}) = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$ .

4) $(\Gamma)$ هي مجموعة النقط $M$ من المستوي بحيث: $\arg(z'-i) = \dfrac{\pi}{4}$ .

ـ تحقق أن النقطة $E$ ذات اللاحقة $z_E = 2+i$ تنتمي إلى $(\Gamma)$ ، ثم عين طبيعة المجموعة $(\Gamma)$ .

# حل السلسلة الشاملة رقم 02

## تصحيح التمرين الأول :

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $C$ : $(z-\sqrt{3})(z^2-\sqrt{3}z+1)=0$ يكافئ $z-\sqrt{3}=0$ او $z^2-\sqrt{3}z+1=0$ أي ان $z=\sqrt{3}$ و نحسب المميز للمعادلة الثانية $\Delta=-1$ للمعادلة حلين هما $z' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ و $z'' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$ مجموعة الحلول هي $S=\left\{\sqrt{3}\ ;\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\ ;\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right\}$

2) المستوي المركب منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، لتكن $A$، $B$ و $C$ نقط لواحقها على الترتيب:

$z_A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$ ، $z_B=\sqrt{3}$ ، $z_C=\overline{z_A}$ .

اثبات أن $z_A^{1962}-z_C^{1446}=0$ نكتب العددان على الشكل الأسي $z_A=e^{-i\frac{\pi}{6}}$ و $z_C=e^{i\frac{\pi}{6}}$ ومنه $z_A^{1962}=\left(e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^{1962}$ و

منه $z_A^{1962}=e^{-327\pi i}=\cos(-327\pi)+i\sin(-327\pi)=-1$

و $z_C^{1446}=\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{1446}$ ومنه $z_C^{1446}=e^{241\pi i}=\cos(241\pi)+i\sin(241\pi)=-1$ ومنه $-1+1=0$

تعيين قيم العدد الطبيعي $n$ بحيث يكون $\left(\dfrac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقي موجب

لدينا مما سبق و حسب دستور موفر $\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)^n=\left(e^{-\frac{\pi}{3}i}\right)^n=e^{-\frac{n\pi}{3}i}=\cos\left(\dfrac{-\pi n}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{-n\pi}{3}\right)=\cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)-i\sin\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)$

يكون عددا حقيقيا موجب يعني ان $\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)=1$ و $\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)=0$ أي ان $\left(\frac{n\pi}{3}\right)=2\pi k$ و $k$ عدد طبيعي ومنه نجد $n=6k$ و $k$ عدد طبيعي

3) كتابة العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الأسي لدينا

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}{\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}=\frac{i}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}=\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{\frac{\pi}{6}i}}=e^{-\frac{\pi}{3}i}$$

استنتاج طبيعة المثلث $ABC$ بما أن $\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{3}+2\pi k\ :\ k\in\mathbb{Z}$ فإن المثلث $ABC$ متقايس الأضلاع.

5) تعين مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ بحيث يكون $\frac{z-z_A}{z-z_C}$ تخيليا صرفا $(z\neq z_C)$

يعني أن $\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_C}\right)=\frac{\pi}{2}+\pi k\ :k\in\mathbb{Z}$ وهذا يعني أن $(\overrightarrow{MC};\overrightarrow{MA})=\frac{\pi}{2}+\pi k$ ومنه $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}=0$ ومنه مجموعة النقط $M$ هي الدائرة ذات القطر $[AC]$.

## حل التمرين الثاني:

1) حل، في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة $(z-i\sqrt{3})(z^2+-2z+4)=0$.

المستوي المركب منسوب إلى لدينا $P(z)=0$ يكافئ $(z-i\sqrt{3})(z^2+-2z+4)=0$ يكافئ

$$\begin{cases} z-i\sqrt{3} &=0...............(1)\\ z^2+-2z+4 &=0....(2)\end{cases}$$

من المعادلة $(1)$ نجد أن $z=i\sqrt{3}$.

المعادلة $(2)$ من الدرجة الثانية، نحلها با ستخدام المميز $\Delta$ حيث $\Delta=-12=12i^2$ ، إذن فهي تقبل حلين مترافقين هما $z_1=\frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}=1-i\sqrt{3}$ و $z_2=\frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}=1+i\sqrt{3}$ ، و عليه مجموعة حلول المعادلة $P(z)=0$ هي $S=\{i\sqrt{3},1+i\sqrt{3},1-i\sqrt{3}\}$.

أ) كتابة على الشكل الأسي $z_A$ , $z_B$ , $z_C$ ثم أحسب العدد $\left(\frac{z_A}{2}\right)^{1962}+\left(\frac{z_B}{2}\right)^{2025}+\left(\frac{z_C}{3}\right)^{2024}$

$$z_A=1+i\sqrt{3}=2e^{i\frac{\pi}{3}}\quad z_B=1-i\sqrt{3}=2e^{-i\frac{\pi}{3}}\quad z_C=i\sqrt{3}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

- حساب العدد $\left(\frac{z_A}{2}\right)^{2022}+\left(\frac{z_B}{2}\right)^{2973}+\left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1444}$

$$\left(\frac{z_A}{2}\right)^{1962}+\left(\frac{z_B}{2}\right)^{2025}+\left(\frac{z_C}{3}\right)^{2024}=\left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}\right)^{1962}+\left(\frac{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2}\right)^{2025}+\left(\frac{\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{3}}\right)^{2024}$$

$$\left(e^{i\frac{1962\pi}{3}}\right)+\left(e^{-i\frac{2025\pi}{3}}\right)+\left(e^{i\frac{2024\pi}{2}}\right)=e^{i654\pi}+e^{-i675\pi}+e^{i1012\pi}=e^{i2\pi}+e^{i\pi}+e^{i2\pi}=2-1=1$$

ب) كتابة على الشكل الأسي العدد $L=\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ ثم تحديد طبيعة المثلث $ABC$.

$$L=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}}=\frac{1}{i2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{6}i=\frac{\sqrt{3}}{6}e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

لدينا $\left|\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=|L|=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ أي أن $AC\neq BC$، كذلك لدينا $\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\arg(L)=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$، ومنه $\left((\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\right)=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$، وعليه يكون المثلث $ABC$ قائم في $A$.

ب) لدينا $z_D=iz_B+4-4i$ ومنه $z_D=7$.

3) لتكن $G$ مرجح الجملة $(A,1);(B,\alpha);(C,1)$ حيث $\alpha\neq-2$ عيين قيمة $\alpha$ حتى تنتمي النقطة $G$ إلى المتو سط المتعلق بالضلع $[BC]$ في المثلث $ABC$.

لاحقة النقطة $G$ هي $z_G=\dfrac{z_A+\alpha z_B+z_C}{\alpha+2}=\dfrac{1+\alpha+i\ \ 2-\alpha\ \ \sqrt{3}}{\alpha+2}$ لتكن النقطة $D$ منتصف الضلع $[BC]$ إذن $z_D=\dfrac{z_B+z_C}{2}=\dfrac{1}{2}$

حتى تنتمي النقطة $G$ إلى المتوسط المتعلق بالضلع $[BC]$ في المثلث $ABC$، يجب أن يكون العدد $K=\dfrac{z_G-z_A}{z_G-z_D}$ حقيقيا بحتا وحتي يكون كذلك $\bar{K}=K$ تكافئ $\alpha^2+\alpha-2=0$ تكافئ $\alpha=-2$ مرفوض أو $\alpha=1$

4) تحد يد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $\left|iz+\sqrt{3}-i\right|=\left|\bar{z}+i\sqrt{3}\right|$ تكافئ $\left|i(z-i\sqrt{3}-1)\right|=\left|\bar{z}-(-i\sqrt{3})\right|$ تكافئ $|i|\left|(z-i\sqrt{3}-1)\right|=\left|\bar{z}-(-i\sqrt{3})\right|$ تكافئ $\left|z-(i\sqrt{3}+1)\right|=\left|\bar{z}-(-i\sqrt{3})\right|$ تكافئ $\left|z-z_A\right|=\left|\bar{z}-\bar{z}_c\right|$ تكافئ $\left|z-z_A\right|=\left|\overline{z-z_C}\right|$ تكافئ $\left|z-z_A\right|=\left|z-z_C\right|$ تكافئ $AM=CM$ ومنه مجموعة النقط $M(z)$ هي المستقيم المحوري للقطعة $[AC]$

## حل التمرين الثالث :

### إختيار من متعدد

1) لدينا $P(7)=0$، باستخدام خوارزمية القسمة الإقليدية نجد أن $P(z)=(z-7)(z^2-8z+25)$.

ب) لدينا $P(z)=0$ يكافئ $(z-7)(z^2-8z+25)=0$ يكافئ $\begin{cases}z-7=0..............(1)\\ z^2-8z+25=0....(2)\end{cases}$

من المعادلة $(1)$ نجد أن $z=7$.

المعادلة $(2)$ من الدرجة الثانية، نحلها با ستخدام المميز $\Delta$ حيث $\Delta=-36$، إذن فهي تقبل حلين مترافقين هما $z_1=\dfrac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}=4-3i$ و $z_2=\dfrac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}=4+3i$، وعليه مجموعة حلول المعادلة $P(z)=0$ هي $S=\{7,4-3i,4+3i\}$. الاقتراح-أ

2) العدد $\left(\dfrac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right)^{2024}=i^{2024}=\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{2024}=e^{i\frac{2024\pi}{2}}=e^{i1012\pi}=e^{i2\pi}=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$ الاقتراح-ج

3) المثلث $ABC$ قائم في $C$ ومتقايس الساقين. الاقتراح-ب

لدينا $z_A - z_C = i\left(z_B - z_C\right)$ ومنه $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = i$ ، كذلك لدينا $\left|\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right| = |i| = 1$ أي أن $AC = BC$ ، كذلك لدينا $\arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$ ، ومنه $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$ ، ، وعليه يكون المثلث $ABC$ قائم في $C$ ومتقايس الساقين.

4) العدد $\frac{z - z_B}{z - z_C}$ تخيلي صرف جزؤه التخيلي موجب يعني أن $\arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ أي أن $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ، و عليه $(\Psi)$ هي نصف دائرة قطرها $\left[BC\right]$ باستثناء النقطتين $B$ و $C$ والزاوية $MBC$ موجهة في الاتجاه الموجب. الاقتراح-ج.

## حل التمرين الرابع :

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 6z + 10 = 0$ نحسب المميز $\Delta = -4$ للمعادلة حلين هما $z' = 3 - i$ و $z'' = 3 + i$

استنتاج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة ذات المجهول $z$ حيث: $(\overline{z} + 2)^2 - 6(\overline{z} + 2) + 10 = 0$ مما سبق نجد أن للمعادلة تكافئ $\overline{z} + 2 = 3 - i$ او $\overline{z} + 2 = 3 + i$ أي ان $\overline{z} = 1 - i$ او $\overline{z} = 1 + i$ ومنه $z = 1 + i$ او $z = 1 - i$ هما حلى المعادلة الأخيرة

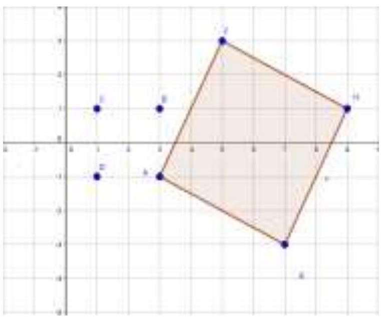
2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، النقط $A$ ، $B$ ، $C$ ، $D$ لاحقاتها

$z_A = 3 - i$ و $z_B = 3 + i$ و $z_C = 1 + i$ و $z_D = 1 - i$

تعيين الكتابة المركبة للدوران $r$ الذي مركزه $A$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ هي : $z' - z_A = i\ \ z - z_A$ أي $z' - 3 + i = i\ (z - 3 + i)$ ومنه $z' = iz + 2 - 4i$

3) $E$ النقطة التي لاحقتها $z_E = 7 - 3i$ و $F$ صورتها بالدوران $r$ التحقق أن لاحقة $F$ هي $z_F = 5 + 3i$ لدينا $z_F = iz_E + 2 - 4i = i\ (7 - 3i)\ + 2 - 4i = 7i + 3 + 2 - 4i = 5 + 3i$ محققة

تعيين لاحقة النقطة $H$ صورة $F$ بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AE}$ أي $z_H - z_F = z_E - z_A$ و منه $z_H = z_F + z_E - z_A = 5 + 3i + 7 - 3i - 3 + i = 9 + i$.



4) تمثيل النقاط $A$ ، $B$ ، $E$ ، $F$ و $H$

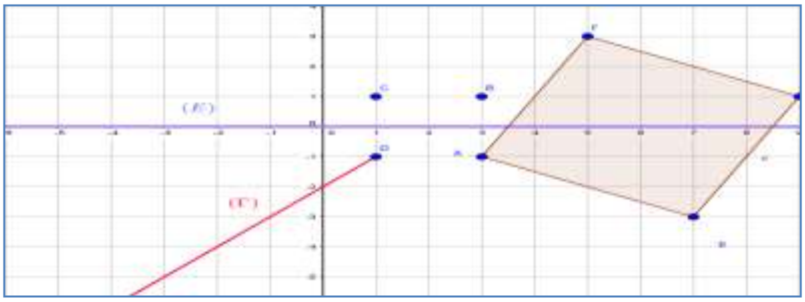
تعيين بدقة طبيعة الرباعي $AEHF$ متوازي أضلاع فيه زاوية قائمة و فيه ضلعان متجاورتان متقايسان فهو مربع .

4) تعيين المجموعة $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ حيث :

$z = 1 - i + ke^{-i\frac{\pi}{4}}$ وذلك عندما $k$ يمسح $\mathbb{R}^*$ لدينا $z = 1 - i + ke^{-i\frac{\pi}{4}}$ يعني أن $z - (1 - i) = ke^{-\frac{\pi}{4}i}$ أي ان $\arg\left[z - (1 - i)\right] = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ وهذا يعني

$\left(\overrightarrow{0I};\overrightarrow{DM}\right)\ = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ و $k$ عدد صحيح مجموعة النقط هي نصف مستقيم $\left[DM\right.$ والذي معامل توجيهه $-1$ ( أي موازي للمنصف الثاني ذي المعادلة $y = -x$ )

تعيين المجموعة $(E)$ مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ حيث : $|z-1-i|=|z-1+i|$ تكافئ $CM=DM$ مجموعة النقط هي محور القطعة المستقيمة $[CD]$ .



**تصحيح التمرين الخامس:**

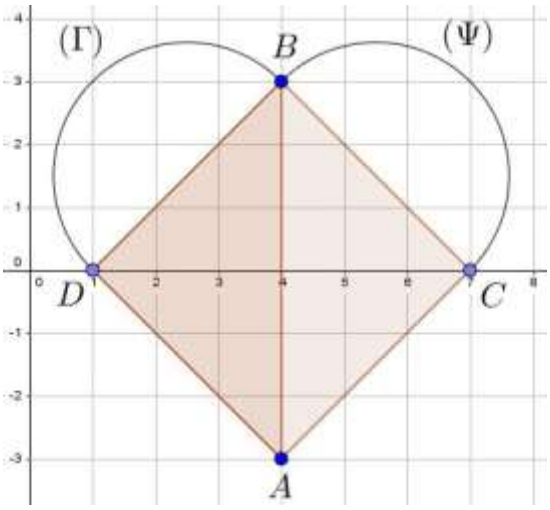
1) أ) لدينا $P(7)=0$ ، باستخدام خوارزمية القسمة الإقليدية نجد أن $P(z)=(z-7)(z^2-8z+25)$ .

ت) لدينا $P(z)=0$ يكافئ $(z-7)(z^2-8z+25)=0$ يكافئ $\begin{cases} z-7=0..............(1) \\ z^2-8z+25=0....(2) \end{cases}$

من المعادلة $(1)$ نجد أن $z=7$ .

المعادلة $(2)$ من الدرجة الثانية، نحلها باستخدام المميز $\Delta$ حيث $\Delta=-36$ ، إذن فهي تقبل حلين مترافقين هما $z_1=\dfrac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}=4-3i$ و $z_2=\dfrac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}=4+3i$ ، وعليه مجموعة حلول المعادلة $P(z)=0$ هي $S=\{7,4-3i,4+3i\}$ .

2) أ) التعليم موضح في الرسم المرفق.




ب) لدينا من جهة $z_A-z_C=-3-3i$ و من جهة أخرى $-i(z_B-z_C)=-3-3i$ إذن $z_A-z_C=-i(z_B-z_C)$ .

ج) لدينا $z_A-z_C=i(z_B-z_C)$ ومنه $\dfrac{z_A-z_C}{z_B-z_C}=i$ ، كذلك لدينا $\left|\dfrac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right|=|i|=1$ أي أن $AC=BC$

، كذلك لدينا $\arg\left(\dfrac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right)=\arg(i)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$ ، ومنه $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$ ،،

وعليه يكون المثلث $ABC$ قائم في $C$ ومتقايس الساقين.

3) أ) العبارة المركّبة للدّوران $R$ من الشكل $z'=az+b$ .

لدينا $\begin{cases} z_\Omega = az_\Omega + b \ldots.(1) \\ z_B = az_C + b \ldots.(2) \end{cases}$ ، بطرح المعادلة $(1)$ من المعادلة $(2)$ نحصل على $z_B - z_\Omega = a(z_C - z_\Omega)$ ومنه $a = i$

إذن $b = 4 - 4i$ ، وعليه العبارة المركبة للدوران $R$ هي $z' = iz + 4 - 4i$.

ت) لدينا $z_D = iz_B + 4 - 4i$ ومنه $z_D = 1$.

ج) المثلث $ABC$ قائم في $C$ ومتقايس الساقين و $z_D - z_B = z_A - z_C$ أي $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CA}$ إذن الرباعي $ACBD$ مربع.

أ) العدد $\dfrac{z - z_B}{z - z_C}$ تخيلي صرف جزؤه التخيلي موجب يعني أن $\arg\left(\dfrac{z - z_B}{z - z_C}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ أي أن

$\left(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MB}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ ، وعليه $(\Psi)$ هي نصف دائرة قطرها $[BC]$ باستثناء النقطتين $B$ و $C$ والزاوية $MBC$ موجهة في الاتجاه الموجب.

## حل التمرين السادس:

1) أ- بما أن $\Omega M = \Omega M'$ فإن $|z' - z_\Omega| = |z - z_\Omega|$ ومنه $\left|\dfrac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega}\right| = 1$

كذلك $\arg\left(\dfrac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega}\right) = \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta + 2k\pi$

ب- لدينا $\left|\dfrac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega}\right| e^{i\theta} = \dfrac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega}$ ومنه $\dfrac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega} = e^{i\theta}$ ومنه $z' = e^{i\theta}z + \left(1 - e^{i\theta}\right)z_\Omega$

2) أ) المعادلة من الدرجة الثانية، نحلها باستخدام المميز $\Delta$ حيث $\Delta = -16 = 16i^2$ ، إذن فهي تقبل حلين مترافقين هما $z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = 2\sqrt{3} - 2i$ و $z_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = 2\sqrt{3} + 2i$ ، وعليه مجموعة حلول المعادلة هي $S = \left\{2\sqrt{3} - 2i, 2\sqrt{3} + 2i\right\}$

3) أ) لدينا $|z_1| = |z_2| = 4$ ومنه الشكل الأسي للعدد $z_A$ هو $z_A = 4e^{\frac{\pi}{6}i}$ وبما أن $z_A = \overline{z_B}$ فإن $z_B = 4e^{-\frac{\pi}{6}i}$ .

ب) لدينا $\dfrac{z_A - z_O}{z_B - z_0} = e^{\frac{\pi}{3}i}$ وعليه يكون المثلث $OAB$ متقايس الأضلاع.

4) أ) التمثيل موضح في الرسم.

ب) لدينا $z_D = e^{\frac{2\pi}{3}i} z_C = 4\sqrt{3} + 4i$

ج) لدينا $z_D = e^{\frac{2\pi}{3}i} z_C = 4\sqrt{3} + 4i = 2z_B$ ومنه النقطة $D$ صورة النقطة $B$ بالتحاكي الذي $O$ مركزه ونسبته $2$

د) لدينا $\dfrac{z_O - z_A}{z_D - z_A} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} e^{-\frac{\pi}{2}i}$ وهو عدد تخيلي صرف وعليه يكون المثلث $OAD$ قائم في $A$ .

## حل التمرين السابع:

1) تعيين العددين المركبين $a$ و $b$ لدينا الجملة: $\begin{cases}\bar{a}-\bar{b}=1+3i\\ a+ib=-1+3i\end{cases}$ ، أي: $\begin{cases}a-b=1-3i\ldots\ldots(1)\\ a+ib=-1+3i\ldots\ldots(2)\end{cases}$ بالطرح نجد:

$-b-ib=2-6i$ ، أي:

$b(-1-i)=2-6i$ ، أي: $b=\frac{2-6i}{-1-i}$ ، ومنه: $b=2+4i$ . و بالتعويض نجد: $a=3+i$ .

2) أ) تعيين لاحقة $C$ صورة $O$ بالإنسحاب $T$ بما أن $C$ صورة $O$ بالإنسحاب $T$ فإن: $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$ ، ومنه: $z_C=z_B-z_A$ ، أي: $z_C=-1+3i$ .

ب) حساب العدد $\frac{z_C-z_A}{z_B}$ ، ثم كتابته على الشكل الأسي

لدينا: $\frac{z_C-z_A}{z_B}=\frac{-1+3i-3-i}{2+4i}=\frac{-4+2i}{2+4i}=i$ ، أي: $\frac{z_C-z_A}{z_B}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$ .

إذن: $\left|\frac{z_C-z_A}{z_B}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ، ومنه: $AC=OB$ و $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ .

إذن القطعتان $[AC]$ و $[OB]$ متقايستان و متعامدتان.

ج) إستنتاج مما سبق طبيعة الرباعي $OABC$ و تعيين لاحقة النقطة $E$:

بما أن $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$ فإن الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع، وبما أن $[AC]$، $[OB]$ متقايستان و متعامدتان فسيكون الرباعي $OABC$ مربع.

$E$ هي مركز تناظر الرباعي $OABC$، أي: هي منتصف القطرين، ومنه: $z_E=\frac{z_O+z_B}{2}=1+2i$ .

3) أ) الكتابة المركبة للتشابه $S$

لدينا: $S$ مركزه $O$ و يحول $B$ إلى $C$ أي: $z'-z_O=ke^{i\theta}(z-z_O)$ ، أي: $z'=ke^{i\theta}z$ ، ومنه:

$z_C=ke^{i\theta}z_B$ ، أي: $\frac{z_C}{z_B}=ke^{i\theta}$ .

نحسب $\frac{z_C}{z_B}$ : $\frac{z_C}{z_B}=\frac{-1+3i}{2+4i}=\left(\frac{-1+3i}{2+4i}\right)\left(\frac{2-4i}{2-4i}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ .

لدينا: $\begin{cases}\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \arg\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\frac{\pi}{4}+2k\pi\end{cases}$ ، إذن عبارة التشابه $S$ هي: $z'=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z$ أو $z'=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)z$ .

ب) صورة $A$ بالتشابه $S$

لدينا: $z'=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)z$ ، أي: $z'=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)z_A$ ، أي: $z'=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)(3+i)$ ، ومنه: $z'=1+2i$ .

إذن : $E$ هي صورة $A$ بالتشابه $S$ .

ج) العبارة المركبة للتحويل $S^4$ ، و طبيعته

لدينا : $S^4 = S \circ S \circ S \circ S$ ، أي أن $S^4$ هو تشابه مباشر نسبته : $k = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$ ، وزاويته : $\theta = 4 \times \frac{\pi}{4} = \pi$ . و مركزه : $O$

## حل التمرين الثامن

) لدينا $(z-i)(z^2+2z+2)=0 \quad ...(\text{⅄})$ يكافئ $\begin{cases} z-i=0 \,; z=i \\ z^2+2z+2=0 \quad ...(\blacklozenge) \end{cases}$

حلول المعادلة $(\blacklozenge)$ : $\Delta = -4 = (2i)^2$ ومنه $z_1 = \frac{-2+2i}{2} = -1+i$ و $z_2 = \overline{z_1} = -1-i$

الخلاصة: حلول المعادلة $(\text{⅄})$ ، $S = \{i \,; -1-\mathrm{i} \,; -1+\mathrm{i}\}$

2) أ) التحقق أن $D$ مرجح $\{(A,1);(B,-1);(C,-1)\}$ : يكفي التحقق أن $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} = \vec{0}$ أي

$z_{\overrightarrow{DA}} - z_{\overrightarrow{DB}} - z_{\overrightarrow{DC}} = 0$

لدينا، $z_{\overrightarrow{DA}} - z_{\overrightarrow{DB}} - z_{\overrightarrow{DC}} = z_A - z_D - (z_B - z_D) - (z_C - z_D) = z_A - z_B - z_C - z_D = i - 2 + 1 + i - 1 + 2i = 0$

الخلاصة: $D$ مرجح الجملة $\{(A,1);(B,-1);(C,-1)\}$

ب) كتابة العدد $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_C}$ على الشكل الأسي:

$$\frac{z_D - z_A}{z_B - z_C} = \frac{1-2i-i}{2+1+i} = \frac{1-3i}{3+i} = \frac{-i(i+3)}{3+i} = -i = e^{-\frac{\pi}{2}i}$$

التفسير الهندسي: طبيعة الرباعي $ABDC$ :

$\left|\frac{z_D - z_A}{z_B - z_C}\right| = 1$ يكافئ $AD = BC$

$\arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_C}\right) = -\frac{\pi}{2}$ يكافئ $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{AD}) = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \ / k \in \mathbb{R}$

بما أن $AD = BC$ و $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$
فإن الرباعي $ABDC$ مربع لأن
قطريه متساويين و متعامدين

ج) كتابة العدد $-4+4i$ على الشكل الأسي و حساب $(-4+4i)^{2024}$

الشكل الاسي لـ $-4+4i$ : لدينا ، $|-4+4i| = |-4(1-i)| = |-4||1-i| = 4\sqrt{2}$

لتكن $\theta$ عمدة لـ $-4+4i$ ومنه $\begin{cases} \cos\theta = \frac{-4}{4\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ ومنه نجد، $\theta = \frac{3\pi}{4}$ $\boxed{-4+4i = 4\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}}$

- حساب $(-4+4i)^{2024}$ : $(-4+4i)^{2024} = \left(4\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}\right)^{2024} = \left(4\sqrt{2}\right)^{2024} e^{\frac{6072\pi}{4}i} = \left(4\sqrt{2}\right)^{2024} e^{1518\pi i} = \left(4\sqrt{2}\right)^{2024} = (4)^{2530}$

3) أ) حساب $z' - i$ :.

$$z' - i = \frac{iz - 4 + 2i}{z-2} - i = \frac{iz - 4 + 2i - i(z-2)}{z-2} = \frac{iz - 4 + 2i + iz + 2i}{z-2} = \frac{-4+4i}{z-2}$$

ب) -

لدينا، $z' - i = \frac{-4+4i}{z-2}$ ، أي : $|z' - z_A| = \frac{|-4+4i|}{|z - z_B|}$ ، ومنه : $AM' = \frac{4\sqrt{2}}{BM}$ أي : $AM' \times BM = 4\sqrt{2}$

ومن جهة أخرى نجد : $\arg(z'-i)=\arg\left(\frac{-4+4i}{z-2}\right)$ ، ومنه : $\arg(z'-z_A)=\arg\left(\frac{-4+4i}{z-z_B}\right)$ ، أي :

$\arg(z'-z_A)=\arg(-4+4i)-\arg(z-z_B)$ ، ومنه : $\arg(z'-z_A)+\arg(z-z_B)=\arg(-4+4i)$ ،

أي : $(\vec{u};\overrightarrow{AM'})+(\vec{u};\overrightarrow{BM})=\frac{3\pi}{4}+2\pi k \quad / k\in\mathbb{R}$ .

**4) أ) التحقق أن $E$ تنتمي إلى $(\Gamma)$ :**

لدينا، $z'-i=\frac{-4+4i}{z_E-2}=\frac{-4+4i}{2+i-2}=\frac{-4+4i}{i}=4+4i$

ومنه $\arg(z'-i)=\arg(4+4i)=\arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$

**الخلاصة:**
النقطة $E$ تنتمي إلى المجموعة $(\Gamma)$

**ب) تعيين طبيعة المجموعة $(\Gamma)$ :**

$\arg(z'-i)=\frac{\pi}{4}$ **يكافئ** $(\vec{u};\overrightarrow{AM'})=\frac{\pi}{4}$ **ولدينا،** $(\vec{u};\overrightarrow{AM'})=\frac{3\pi}{4}-(\vec{u};\overrightarrow{BM})$ **ومنه** $\frac{3\pi}{4}-(\vec{u};\overrightarrow{BM})=\frac{\pi}{4}$

**ومنه** $(\vec{u};\overrightarrow{BM})=\frac{\pi}{2}$ **ومنه : مجموعة النقط** $M$ **من المستوي هي : نصف المستقيم المفتوح** $(BE]$ **الذي رؤسه** $B$ **و الموجه بالشعاع** $\vec{w}$ **حيث** $(\vec{u};\vec{w})=\frac{\pi}{2}$ .

# السلسلة الشاملة رقم3 الأعداد المركبة في البكالوريا

# أولا شعبة علوم تجريبية

**التمرين01**: بكالوريا شعبة علوم 2008 ـ الموضوع الأول

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة: $z^2-(1+2i)z-1+i=0$ .

نرمز للحلين بـ $z_1$ و $z_2$ حيث $|z_1|<|z_2|$ . بيّن أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي.

2) المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

لتكن $A$، $B$ و $C$ نقط من المستوي لواحقها على الترتيب: $1$، $z_1$ و $z_2$ . ليكن $z$ العدد المركّب حيث: $z=\frac{z_2-1}{z_1-1}$ .

أـ إنطلاقا من التعريف $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ و من الخاصية $e^{i(\theta_1+\theta_2)}=e^{i\theta_1}\times e^{i\theta_2}$.

برهن أن: $e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}$ و أن: $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ حيث $\theta$، $\theta_1$ و $\theta_2$ أعداد حقيقية.

بـ ـ أكتب $z$ على الشكل الأسّي.

جـ ـ أكتب $z$ على الشكل المثلثي و استنتج أن $C$ هي صورة $B$ بتشابه مباشر مركزه $A$، يطلب تعيين نسبته و زاويته .

**التمرين02**: بكالوريا شعبة علوم 2008 ـ الموضوع الثاني

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة ذات المجهول $z$ التالية: $z^2+iz-2-6i=0$ .

2) نعتبر في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقطتين $A$ و $B$ اللتين لاحقتاهما $z_A$ و $z_B$ على الترتيب حيث: $z_A=2+i$ و $z_B=-2-2i$ .

عيّن $z_\omega$ لاحقة النقطة $\omega$ مركز الدائرة $(\Gamma)$ ذات القطر $[AB]$ .

3) لتكن $C$ النقطة ذات اللاحقة $z_C$ حيث: $z_C=\frac{4-i}{1+i}$ .

أكتب $z_C$ على الشكل الجبري ثم أثبت أن النقطة $C$ تنتمي إلى الدائرة $(\Gamma)$.

4) أـ برهن أن عبارة التشابه المباشر الذي مركزه $M_0(z_0)$ و نسبته $k$ ($k>0$) و زاويته $\theta$ و الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي: $z'-z_0=ke^{i\theta}(z-z_0)$

بـ ـ **تطبيق**: عيّن الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل $S$ المعرّف بـ: $z'+\frac{1}{2}i=2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z+\frac{1}{2}i\right)$ .

**التمرين03**: بكالوريا شعبة علوم 2009 ـ الموضوع الأول

$P(z)$ كثير حدود حيث: $P(z)=(z-1-i)(z^2-2z+4)$ و $z$ عدد مركب .

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $P(z)=0$ .

2) نضع: $z_1=1+i$ ، $z_2=1-i\sqrt{3}$.

أـ أكتب $z_1$ و $z_2$ على الشكل الأسي.

بـ ـ أكتب $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسي.

جـ ـ إستنتج القيمة المضبوطة لكل من $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ .

3) أـ $n$ عدد طبيعي ، عيّن قيم $n$ بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقيا.

بـ- أحسب قيمة العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}$.

**التمرين04:** بكالوريا شعبة علوم 2009 ـ الموضوع الثاني ـ

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2z+4=0$ .

2) نسمي $z_1$ و $z_2$ حلي هذه المعادلة.

أ- أكتب العددين $z_1$ و $z_2$ على الشكل الأسي.

بـ- $A$، $B$ و $C$ هي النقط من المستوي التي لواحقها على الترتيب : $z_A=1-i\sqrt{3}$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_C=\frac{1}{2}(5+i\sqrt{3})$

أحسب الأطوال $AB$، $AC$ و $BC$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث $ABC$.

جـ- جد الطويلة و عمدة للعدد المركب $z$ حيث : $z=\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$ .

د- أحسب $z^3$ ، $z^6$ ثم استنتج أن $z^{3k}$ عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي $k$.

**التمرين05:** بكالوريا شعبة علوم 2010 ـ الموضوع الأول ـ

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقطتين $A$ و $B$ لاحقتيهما على الترتيب : $z_A=1+i$ و $z_B=3i$

1) أكتب كلا من $z_A$ و $z_B$ على الشكل الأسي.

2) ليكن $S$ التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة $M$ لاحقتها $z$ النقطة $M'$ لاحقتها $z'$ بحيث : $z'=2iz+6+3i$ .

أ- عيَن العناصر المميزة للتشابه المباشر .

بـ- عيَن $z_C$ لا حقة النقطة $C$ صورة النقطة $A$ بالتشابه المباشر $S$ .

جـ- استنتج طبيعة المثلث $ABC$ .

3) لتكن النقطة $D$ مرجح الجملة $\{(A,2);(B,-2);(C,2)\}$.

أ- عيَن $z_D$ لا حقة النقطة $D$ .

بـ- عيَن مع التبرير طبيعة الرباعي $ABCD$ .

4) لتكن $M$ نقطة من المستوي تختلف عن $B$ و عن $D$ لاحقتها $z$ و لتكن $(\Delta)$ مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ التي يكون من أجلها $\frac{z_B-z}{z_D-z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

أ- تحقق أن النقطة $E$ ذات اللاحقة $z_E=6+3i$ تنتمي إلى $(\Delta)$.

بـ- أعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركب $\frac{z_B-z}{z_D-z}$ . عيّن حينئذ المجموعة $(\Delta)$.

**التمرين06:** بكالوريا شعبة علوم 2010 ـ الموضوع الثاني ـ

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+18=0$ ، ثم أكتب الحلين على الشكل الأسّي .

2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط $A$، $B$، $C$ و $D$ لواحقها على الترتيب :

$z_A=3+3i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-z_A$ و $z_D=-z_B$.

أ- بيَن أن النقط $A$، $B$، $C$ و $D$ تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز $O$.

بـ- عيَن زاوية للدوران $R$ الذي مركزه $O$ و يحول النقطة $A$ إلى $B$ .

جـ- بيَن أن النقط $A$، $O$ و $C$ في استقامية و كذلك النقط $B$، $O$ و $D$ .

د - إستنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

**التمرين07:** بكالوريا شعبة علوم 2011 ـ الموضوع الأول ـ

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، النقط $A$، $B$ و $C$ لواحقها على الترتيب :

$z_A=-i$ ، $z_B=2+3i$ و $z_C=-4+i$

1) أ- أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ .

ب- عيّن طويلة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ و عمدة له ، ثم استنتج طبيعة المثلث $ABC$ .

2) نعتبر التحويل النقطي $T$ في المستوي الذي يرفق بكل نقطة $M$ لاحقتها $z$ ، النقطة $M'$ ذات الاحقة $z'$ بحيث :

$z' = iz - 1 - i$

أ- عيّن طبيعة التحويل $T$ محددا عناصره المميزة.

ب- ما هي صورة النقطة $B$ بالتحويل $T$ .

3) لتكن $D$ ذات اللاحقة $z_D = -6 + 2i$

أ- بيّن أن النقط $A$ ، $C$ و $D$ في استقامية.

ب- عيّن نسبة التحاكي $h$ الذي مركزه $A$ و يحول النقطة $C$ إلى $D$ .

جـ- عيّن العناصر المميزة للتشابه المباشر $S$ الذي مركزه $A$ و يحول $B$ إلى $D$ .

**التمرين 08**: بكالوريا شعبة علوم 2011 ـ الموضوع الثاني

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط $A$ ، $B$ و $C$ لواحقها على الترتيب :

$z_A = 3 - 2i$ ، $z_B = 3 + 2i$ و $z_C = 4i$

1) أ- علم النقط $A$ ، $B$ و $C$ .

ب- ما هي طبيعة الرباعي $OABC$ ؟ علل إجابتك .

جـ- عيّن لاحقة النقطة $\Omega$ مركز الرباعي $OABC$.

2) عيّن ثم أنشئ $(E)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 12$

3) أ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 6z + 13 = 0$ .

نسمي $z_0$ ، $z_1$ حلي هذه المعادلة .

ب- لتكن $M$ نقطة من المستوي لاحقتها العدد المركب $z$.

- عيّن مجموعة النقطة $M$ من المستوي التي تحقق : $|z - z_0| = |z - z_1|$

**التمرين 09**: بكالوريا شعبة علوم 2012 ـ الموضوع الأول

1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ : $z = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ . (حيث $z \neq 2 - 3i$)

- حل في $\mathbb{C}$ هذه المعادلة .

2) ينسب المستوي المركب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ . $A$ ، $B$ نقطتان لاحقتاهما على الترتيب : $z_A$ و $z_B$ حيث :

$z_A = 1 + i\sqrt{5}$ و $z_B = 1 - i\sqrt{5}$

- تحقق أن $A$ و $B$ تنتميان إلى دائرة مركزها $O$ يطلب تعيين نصف قطرها.

3) نرفق بكل نقطة $M$ من المستوي لاحقتها $z$ ، ($z \neq 2 - 3i$) النقطة $M'$ لاحقتها $z'$ حيث : $z' = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$

النقط $C$ ، $D$ ، $E$ لواحقها على الترتيب : $z_C = -2i$ ، $z_D = 2 - 3i$ و $z_E = 3i$ و $(\Delta)$ محور القطعة $[CD]$ .

أ- عبر عن المسافة $OM'$ بدلالة المسافتين $CM$ و $DM$ .

ب- إستنتج أنه من أجل كل نقطة $M$ من $(\Delta)$ فإن النقطة $M'$ تنتمي إلى دائرة $(\gamma)$ يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها

تحقق أن $E$ تنتمي إلى $(\gamma)$ .

**التمرين 10**: بكالوريا شعبة علوم 2012 ـ الموضوع الثاني

1) $P(z)$ كثير حدود للمتغير المركب $z$ حيث : $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$

أ- تحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$ .

ب- حدد العددين الحقيقيين $\alpha$ و $\beta$ بحيث من أجل كل عدد مركب $z$ : $P(z) = (z-6)(z^2 + \alpha z + \beta)$ .

جـ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة $P(z)=0$ .

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ . $A$، $B$ و $C$ نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب :

$$z_A=6 \quad ، \quad z_B=3+i\sqrt{3} \quad و \quad z_C=3-i\sqrt{3}$$

أ- أكتب كلا من $z_A$، $z_B$ و $z_C$ على الشكل الأسّي.

ب- أكتب العدد المركب $\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}$ على الشكل الجبري، ثم على الشكل الأسي.

جـ- إستنتج طبيعة المثلث $ABC$ .

3) ليكن $S$ التشابه المباشر الذي مركزه $C$، نسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$

أ- جد الكتابة المركبة للتشابه $S$.

ب- عيّن $z_{A'}$ لاحقة النقطة $A'$ صورة النقطة $A$ بالتشابه $S$ .

جـ- بيّن أن النقط $A$، $B$ و $A'$ في إستقامية.

**التمرين 11: بكالوريا شعبة علوم 2013 - الموضوع الأول**

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة $(I)$ ذات المجهول $z$ التالية :

$z^2-(4\cos\alpha)z+4=0 \quad .... \quad (I)$ حيث $\alpha$ وسيط حقيقي.

2) من أجل $\alpha=\frac{\pi}{3}$، نرمز إلى حلي المعادلة $(I)$ بـ $z_1$ و $z_2$ . بيّن أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013}=1$ .

3) نعتبر في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط $A$، $B$ و $C$ التي لواحقها على الترتيب :

$z_A=1+i\sqrt{3}$ ، $z_B=1-i\sqrt{3}$ و $z_C=4+i\sqrt{3}$ .

أ- أنشئ النقط $A$، $B$ و $C$ .

ب- أكتب على الشكل الجبري العدد المركّب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$، ثم استنتج أن $C$ هي صورة $B$ بالتشابه المباشر $S$ الذي مركزه $A$ و يطلب تعيين نسبته و زاويته.

جـ- عيّن لاحقة النقطة $G$ مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1),(C;2)\}$، ثم أنشئ $G$.

د- أحسب $z_D$ لاحقة النقطة $D$ بحيث يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع .

**التمرين 12: بكالوريا شعبة علوم 2013 - الموضوع الثاني**

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $(E)$ ذات المجهول $z$ الآتية : $(E) \quad .... \quad z^2+4z+13=0$

1) تحقق أن العدد المركّب $-2-3i$ حل للمعادلة $(E)$، ثم جد الحل الآخر.

2) $A$ و $B$ نقطتان من المستوي المركّب لاحقتاهما $z_A=-2-3i$ و $z_B=i$ على الترتيب.

$S$ التشابه المباشر الذي مركزه $A$، نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ و الذي يحوّل كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى النقطة $M'(z')$ .

أ- بيّن أن : $z'=\frac{1}{2}iz-\frac{7}{2}-2i$ .

ب- أحسب $z_C$ لاحقة النقطة $C$، علما أن $C$ هي صورة $B$ بالتشابه $S$ .

3) لتكن النقطة $D$ حيث : $2\vec{AD}+\vec{AB}=\vec{O}$ .

أ- بيّن أن $D$ مرجح النقطتين $A$ و $B$ المرفقتين بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما .

ب- أحسب $z_D$ لاحقة النقطة $D$ .

جـ- بيّن أن $\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}=i$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث $ACD$ .

**التمرين 13: بكالوريا شعبة علوم 2014 - الموضوع الأول**

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ التالية : $z^2-6\sqrt{2}z+36=0$

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

لتكن النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$ لواحقها على الترتيب :

$z_A=3\sqrt{2}(1+i)$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=6\sqrt{2}$ و $z_D=\dfrac{z_C}{2}$ .

أ ـ أكتب $z_A$ ، $z_B$ و $(1+i)z_A$ على الشكل الأسّي.

بـ ـ أحسب $\left(\dfrac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$ .

جـ ـ بيّن أن النقط $O$ ، $A$ ، $B$ و $C$ تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها $D$ ، يطلب تعيين نصف قطرها .

د ـ أحسب $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$ ثم جد قيسا للزاوية $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$ . ماهي طبيعة الرباعي $OACB$ ؟

3) ليكن $R$ الدوران الذي مركزه $O$ و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$

أ ـ أكتب العبارة المركّبة للدوران $R$ .

بـ ـ عيّن لاحقة النقطة $C'$ صورة $C$ بالدوران $R$ ثم تحقق أن النقط $A$ ، $C$ و $C'$ في إستقامية .

جـ ـ عيّن لاحقة النقطة $A'$ صورة $A$ بالدوران $R$ ثم حدّد صورة الرباعي $OACB$ بالدوران $R$ .

**التمرين14:** بكالوريا شعبة علوم **2014** ـ الموضوع الثاني ـ

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ التالية : $(z-i)(z^2-2z+5)=0$

2) في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ (وحدة الطول $1cm$ )

تعطى النقط $A$ ، $B$ و $C$ لواحقها على الترتيب : $z_A=i$ ، $z_B=1+2i$ ، $z_C=1-2i$ .

أ ـ أنشئ النقط $A$ ، $B$ و $C$ .

بـ ـ جد $z_H$ لاحقة النقطة $H$ المسقط العمودي للنقطة $A$ على $(BC)$ .

جـ ـ أحسب مساحة المثلث $ABC$ .

3) ليكن $S$ التشابه المباشر الذي مركزه $A$ و نسبته $\dfrac{1}{2}$ و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$

أ ـ عيّن الكتابة المركّبة للتشابه $S$ .

بـ ـ بيّن أن مساحة صورة المثلث $ABC$ بالتشابه $S$ تساوي $\dfrac{1}{2}cm^2$ .

4) $M$ نقطة لاحقتها $z$ ، عيّن مجموعة النقط $M$ حيث : $|z|=|iz+1+2i|$ .

**التمرين15:** بكالوريا شعبة علوم **2015** ـ الموضوع الأول ـ

**I)** عيّن العددين المركبين $\alpha$ و $\beta$ حيث : $\begin{cases}2\alpha-\beta=-3\\ 2\overline{\alpha}+\overline{\beta}=-3-2i\sqrt{3}\end{cases}$ مع $\overline{\alpha}$ مرافق $\alpha$ و $\overline{\beta}$ مرافق $\beta$ .

**II)** المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ . $A$ ، $B$ و $C$ النقط التي لواحقها على الترتيب :

$z_A=-\dfrac{3}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_A=z_Ce^{i\frac{\pi}{3}}$ .

1) أ ـ أكتب $z_A$ و $z_C$ على الشكل الأسّي ثم عيّن قيم العدد الطبيعي $n$ بحيث يكون $\left(\dfrac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا .

بـ ـ تحقق أن العدد المركب $\left(\dfrac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}-\left(\dfrac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962}+2\left(\dfrac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015}$ حقيقي .

2) $D$ النقطة ذات اللاحقة $z_D=1+i$ .

أ ـ حدّد النسبة و زاوية للتشابه $S$ الذي مركزه $O$ و يحول $D$ إلى $A$ .

بـ ـ أكتب $\dfrac{z_A}{z_D}$ على الشكل الجبري ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من : $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ .

3) عيّن مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ التي تحقق : $z=k(1+i)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$ حيث $k$ يمسح $\mathbb{R}^+$.

**التمرين16:** بكالوريا شعبة علوم 2015 ـ الموضوع الثاني ـ

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط $A$ ، $B$ و $C$ التي لواحقها على الترتيب : $z_A$ ، $z_B$ و $z_C$ حيث :

$z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_B = -\overline{z_A}$ ، $z_C = -(z_A + z_B)$ .

1) أ ـ أكتب كلا من العددين المركّبين $z_B$ و $z_C$ على الشكل الأسّي.

ب ـ استنتج أن النقط $A$ ، $B$ و $C$ تنتمي إلى دائرة $(\gamma)$ يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

جـ ـ أنشىء الدائرة $(\gamma)$ و النقط $A$ ، $B$ و $C$.

2) أ ـ تحقق أن : $\dfrac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

ب ـ استنتج أن المثلث $ABC$ متقايس الأضلاع و أن النقطة $O$ مركز ثقل هذا المثلث .

جـ ـ عيّن و أنشىء $(E)$ مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ حيث : $|z| = |z-\sqrt{3}-i|$ .

3) أ ـ عيّن زاوية للدوران $r$ الذي مركزه $O$ و يحوّل $C$ إلى $A$ .

ب ـ أثبت أن صورة $(E)$ بالدوران $r$ هي محور القطعة $[OB]$ .

**التمرين17:** بكالوريا شعبة علوم 2016 سلطان الدورة الأولى ـ الموضوع الأول ـ

المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ . من أجل كل نقطة $M$ من المستوي لاحقتها العدد المركب $z$ حيث $(z \neq 1)$ نرفق النقطة $M'$ لاحقتها العدد المركب $z'$ حيث : $z' = \dfrac{z-2}{z-1}$ .

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ : $z' = z$ .

2) النقطتان $A$ و $B$ لاحقتاهما $z_1$ و $z_2$ على الترتيب حيث : $z_1 = 1-i$ ، $z_2 = \overline{z_1}$ .

أ ـ أكتب $\dfrac{z_2}{z_1}$ على الشكل الأسّي .

ب ـ بيّن أن النقطة $B$ صورة النقطة $A$ بالدوران $R$ الذي مركزه المبدأ $O$ ، يطلب تعيين زاوية له .

3) نضع : $z' \neq z$ . نعتبر النقطتين $C$ و $D$ لاحقتيهما 2 و 1 على الترتيب .

عيّن $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ حيث $M'$ تنتمي إلى محور التراتيب ثم أنشئ $(\Gamma)$ .

4) $h$ التحاكي الذي مركزه المبدأ $O$ و نسبته 2 .

أ ـ عيّن طبيعة التحويل النقطي $S = h \circ R$ و عناصره المميزة .

ب ـ أكتب العبارة المركبة للتحويل $S$ .

جـ ـ عيّن ثم أنشئ المجموعة $(\Gamma')$ صورة $(\Gamma)$ بالتحويل $S$ .

**التمرين18:** بكالوريا شعبة علوم 2016 سلطان الدورة الأولى ـ الموضوع الثاني ـ

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ التالية : $\left(z-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)(z^2+\sqrt{3}z+1)=0$

2) المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

$A$ ، $B$ و $C$ ثلاث نقط من المستوي لواحقها على الترتيب : $z_A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ ، $z_B = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ و $z_C = \overline{z_B}$ .

أ ـ أكتب $z_A$ ، $z_B$ و $z_C$ على الشكل الأسّي .

ب ـ بيّن أنه يوجد تشابه مباشر $S$ مركزه $B$ و يحوّل النقطة $C$ إلى النقطة $A$ يطلب تعيين عناصره المميزة .

3) أ ـ عيّن لاحقة النقطة $D$ حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع ، ثم حدّد بدقة طبيعته .

ب ـ عيّن $(E)$ مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ و التي تحقق : $|z-z_A| = |\overline{z}-z_B|$ .

جـ- عيّن $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ والتي تحقق : $z=z_B+\sqrt{3}e^{i\theta}$ عندما $\theta$ يتغيّر على ،ثم تحقق أن $A\in(\Gamma)$

**التمرين19: بكالوريا شعبة علوم 2016 سلطان الدورة الثانية-الموضوع الأول-**

1) نضع من أجل كل عدد مركب $z$ : $P(z)=z^3-24\sqrt{3}$

أ- تحقق أن: $P(2\sqrt{3})=0$ .

ب- جد العددين الحقيقيين $a$ و $b$ بحيث من أجل كل عدد مركب $z$ : $P(z)=(z-2\sqrt{3})(z^2+az+b)$ .

جـ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة $P(z)=0$ .

2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ . $A$، $B$ و $C$ نقط من المستوي لواحقها على الترتيب :

$$z_A=-\sqrt{3}+3i \quad ، \quad z_B=-\sqrt{3}-3i \quad و \quad z_C=2\sqrt{3}$$

أ- أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ .

ب- بيّن أنه يوجد دوران $R$ مركزه $A$ و يحوّل النقطة $B$ إلى النقطة $C$ ، يطلب تعيين زاويته .

جـ- استنتج طبيعة المثلث $ABC$ .

د- عيّن $z_D$ لاحقة النقطة $D$ صورة النقطة $C$ بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ ، ثم حدّد بدقة طبيعة الرباعي $ABDC$ .

3) عيّن $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة غير المعدومة $z$ بحيث : $\arg\left(\dfrac{z}{\bar{z}}\right)=2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

**التمرين20: بكالوريا شعبة علوم 2016 سلطان الدورة الثانية-الموضوع الثاني-**

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ التالية : $2\bar{z}^3+3\bar{z}^2-3\bar{z}+5=0$ .... $(E)$

يشير الرمز $\bar{z}$ إلى مرافق العدد المركب $z$ .

1) أ- أثبت أن المعادلة $(E)$ تكافئ المعادلة : $(2\bar{z}+5)(\bar{z}^2-\bar{z}+1)=0$ .

ب- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $(E)$ .

2) في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط $A$، $B$، $C$ و $D$ التي لواحقها على الترتيب :

$$z_A=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ، \quad z_B=\overline{z_A} \quad ، \quad z_C=-1 \quad ، \quad z_D=-\frac{5}{2}$$

أ- أكتب كلا من العددين $z_A$ و $z_B$ على الشكل الأسّي .

ب- أنشئ النقط $A$، $B$، $C$ و $D$ .

جـ- أثبت أن : $z_B-z_C=z_B(z_A-z_C)$ .

د- إستنتج طبيعة المثلث $ABC$ .

3) ليكن $S$ التشابه المباشر الذي مركزه $C$ و نسبته $2$ و زاويته $\dfrac{\pi}{3}$ و لتكن $F$ صورة $A$ بالتحويل $S$ .

أنشئ النقطة $F$ ثم حدّد طبيعة المثلث $AFC$ .

4) عيّن طبيعة المجموعة $(\gamma)$ للنقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ حيث : $z+1=kz_B$ . لما يتغيّر $k$ في المجموعة $\mathbb{R}_+$ .

**التمرين21: بكالوريا شعبة علوم 2017 -الموضوع الأول-**

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z+2)(z^2-4z+8)=0$ .

II) المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ .

نعتبر النقط $A$، $B$ و $C$ التي لاحقاتها : $z_A=2-2i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=-2$

1) أكتب كلا من العددين $z_A$ و $z_B$ على الشكل الأسّي .

2) عيّن $z_D$ لاحقة النقطة $D$ حتى تكون النقطة $B$ مركز ثقل المثلث $ACD$ .

3) $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ ( $M$ تختلف عن $A$ و $B$ ) بحيث :. $\arg\left(\dfrac{z_B-z}{z_A-z}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

تحقق أن مبدأ المعلم $O$ هو نقطة من $(\Gamma)$ ثم عيّن طبيعة المجموعة $(\Gamma)$ و أنشئها .

4) ليكن $h$ التحاكي الذي مركزه النقطة $C$ و نسبته $2$ ، $(\Gamma')$ صورة $(\Gamma)$ بالتحاكي $h$ .
عيّن طبيعة المجموعة $(\Gamma')$ مع تحديد عناصرها المميزة .

**التمرين22:** بكالوريا شعبة علوم 2017 ـ الموضوع الثاني

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ .

أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة مما يلي :

1) مجموعة حلول المعادلة $\left(\frac{z+1-i}{z-i}\right)^2=1$ في المجموعة $\mathbb{C}$ هي : $S=\left\{-\frac{1}{2}+i\right\}$ .

2) من أجل كل عدد مركب $z$ ، $(z+2)(\bar{z}+2)=|z+2|^2$ .

3) من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n}=1$ .

4) $S$ التشابه المباشر الذي مركزه النقطة $\Omega$ ذات اللاحقة $1$ و نسبته $3$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ .
صورة الدائرة $(C)$ ذات المركز $\omega(0;1)$ و نصف القطر $3$ بالتشابه $S$ هي الدائرة $(C')$ ذات المركز $\omega'(-2;-3)$ و نصف القطر $9$.

5) من أجل كل عدد حقيقي : إذا كان $z=(\sin\alpha+i\cos\alpha)\times(\cos\alpha-i\sin\alpha)$ فإن : $\arg(z)=\frac{\pi}{2}-2\alpha+2k\pi$
حيث $k$ عدد صحيح .

**التمرين23:** بكالوريا شعبة علوم 2017 سلطان الدورة الإستثنائية الموضوع الأول

**I)** حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z-2)(z^2+2z+4)=0$ .

**II)** المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ حيث : $\|\vec{u}\|=2cm$ .

نعتبر النقط $A$ ، $B$ و $C$ التي لاحقاتها : $z_A=2$ ، $z_B=-1+i\sqrt{3}$ و $z_C=\overline{z_B}$

1) أ ـ أكتب $z_B$ على الشكل الأسّي ، ثم استنتج الشكل الأسي للعدد المركّب $z_C$ .
ب ـ عيّن مركز و نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث $ABC$ ، ثم أنشئ النقط $A$ ، $B$ و $C$ .

2) ليكن $S$ التشابه المباشر الذي مركزه النقطة $O$ و نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{2\pi}{3}$ و لتكن $F$ صورة $A$ بالتحويل $S$ .
أ ـ أكتب العبارة المركّبة للتشابه $S$ ثم عيّن لاحقة كل $A'$ ، $B'$ و $C'$ من صور النقط $A$ ، $B$ و $C$ على الترتيب بالتشابه $S$ ، ثم
أنشئ في المعلم السابق النقط $A'$ ، $B'$ و $C'$ .
ب ـ أحسب بالسنتمتر المربع مساحة المثلث $A'B'C'$ .

**التمرين24:** بكالوريا شعبة علوم 2017 سلطان الدورة الإستثنائية الموضوع الثاني

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ .

نعتبر النقط $A$ ، $B$ و $C$ التي لاحقاتها على الترتيب : $z_A=-3-2i$ ، $z_B=1+i$ و $z_C=4-3i$

1) عيّن النسبة و زاوية للتشابه $S$ المباشر ذي المركز $A$ و الذي يحوّل النقطة $B$ إلى النقطة $C$ .

2) أكتب على الشكل الأسّي العدد المركب $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث $ABC$ .

3) نرمز بـ $G$ إلى مركز ثقل المثلث $ABC$ و بـ $I$ إلى منتصف القطعة $[AC]$ .
عيّن كلا من $z_G$ و $z_I$ لاحقتي النقطتين $G$ و $I$ ، ثم بيّن أن النقط $B$ ، $G$ و $I$ في إستقامية.

4) نعتبر النقطة $D$ نظيرة النقطة $B$ بالنسب إلى $I$ . حدّد بدقة طبيعة الرباعي $ABCD$ .

5) نعتبر $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي التي تحقق : $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\|=5\sqrt{2}$ .
أ ـ تحقق أن النقطة $C$ تنتمي إلى $(\Gamma)$ .

بـ- عيّن طبيعة المجموعة $(\Gamma)$ ثم أنشئها .

**التمرين25**: بكالوريا شعبة علوم 2018 ـ الموضوع الأول

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ التالية : $z^2-\sqrt{3}z+1=0$

2) المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

$A$ ، $B$ و $C$ ثلاث نقط من المستوي لواحقها على الترتيب : $z_A=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ و $z_C=\overline{z_B}$ .

أكتب $z_A$ و $z_B$ على الشكل الأسّي ثم عيّن قيم العدد الطبيعي $n$ بحيث يكون : $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

3) أ- تحقق أن : $\frac{z_B}{z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ و حدّد طبيعة المثلث $OBC$ .

بـ- إستنتج أن : $B$ هي صورة $C$ بدوران $r$ يطلب تعيين عناصره المميّزة .

4) نسمّي $(\gamma)$ مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ التي تحقق : $|z|=\left|\bar{z}-\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right|$ .

عيّن طبيعة المجموعة $(\gamma)$ ثم عيّن صورتها بالدوران $r$ .

**التمرين26**: بكالوريا شعبة علوم 2018 ـ الموضوع الثاني

**I)** حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(\bar{z}-4+i)(z^2-4z+5)=0$ . (يرمز $\bar{z}$ لمرافق العدد $z$)

**II)** في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط $A$ ، $B$ و $C$ لواحقها على الترتيب :

$z_A=2+i$ ، $z_B=4+i$ و $z_C=\overline{z_A}$ .

1) تحقق أن : $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=i$ ثم عيّن قيم العدد الطبيعي $n$ بحيث يكون $\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)^n$ تخيليا صرفا .

2) $D$ نقطة من المستوي لاحقتها $z_D$ حيث :
$$\begin{cases}|z_D-z_A|=|z_B-z_A|\\ \arg\left(\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

بيّن أن المثلث $ABD$ متقايس الأضلاع و أحسب $z_D$.

3) أحسب $z_G$ لاحقة النقطة $G$ مركز ثقل المثلث $ABD$ ثم عيّن نسبة و زاوية التشابه المباشر الذي مركزه $A$ و يحول $G$ إلى $D$ .

4) عيّن $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ ( $M$ تختلف عن $C$ ) بحيث : $\arg\left(\frac{z_G-z}{z_C-z}\right)=\pi+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ .

**التمرين27**: بكالوريا شعبة علوم 2019 ـ الموضوع الأول

**I)** حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z-i)(z^2-4z+5)=0$ .

**II)** نعتبر في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، النقط $A$ ، $B$ و $C$ التي لاحقاتها : $i$ ، $2-i$ و $2+i$ على الترتيب .

1) أكتب العدد المركّب $\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}$ على الشكل الأسي ، ثم استنتج طبيعة المثلث $ABC$ .

2) من أجل كل عدد مركب $z$ يختلف عن $2+i$ نضع : $f(z)=\frac{iz-1-2i}{2z-4-2i}$ .

أ- عيّن المجموعة $(E)$ للنقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ و التي تحقق $|f(z)|=\frac{1}{2}$ .

بـ- بيّن أن العدد $[f(i)]^{1440}$ حقيقي موجب .

3) نعتبر الدوران $r$ الذي مركزه النقطة $C$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ .

أ- عيّن لاحقة النقطة $D$ صورة النقطة $B$ بالدوران $r$ و بيّن أن النقط $D$ ، $A$ و $C$ في إستقامية .

ب- استنتج أن النقطة $D$ هي صورة النقطة $A$ بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيين عناصره المميزة .

**التمرين28:** بكالوريا شعبة علوم 2019 -الموضوع الثاني-

المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ .

نعتبر النقط $A$ ، $B$ و $C$ التي لاحقاتها $z_A$ ، $z_B$ و $z_C$ على الترتيب حيث : $z_A=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=-2z_A$ .

1) أ- أكتب العدد المركّب $z_A$ على الشكل الأسي .

ب- أحسب العدد $\left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}+\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}$ .

2) أ- $T$ الإنسحاب الذي يحول $A$ إلى $C$ ، عيّن $z_D$ لاحقة النقطة $D$ صورة النقطة $B$ بالإنسحاب $T$ .

ب- استنتج طبيعة الرباعي $ABDC$ .

3) أكتب العدد المركب $z_C-z_A$ على الشكل الأسي .

4) جد قيم العدد الطبيعي $n$ التي يكون من أجلها العدد المركب $\left(\frac{-6\sqrt{2}}{z_C-z_A}\right)^n$ عددا حقيقيا .

5) لتكن $M$ نقطة كيفية من المستوي لاحقتها $z$ حيث تختلف عن $A$ و تختلف عن $C$ .

عيّن $(E)$ مجموعة النقط $M$ التي يكون من أجلها $\frac{z_A-z}{z_C-z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما .

**التمرين29:** بكالوريا شعبة علوم 2023 -الموضوع الثاني-

عيّن الإقتراح الصحيح الوحيد من بين الإقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية مع التبرير :

1) حلا المعادلة $8z^2-4z+1=0$ ذات المجهول $z$ في $\mathbb{C}$ هما :

أ) $-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$ و $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$　　ب) $-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$ و $-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$　　جـ) $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$ و $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$

2) الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{1+\sqrt{3}+i}{1-i}$ هو :

أ) $\frac{\sqrt{3}}{2}+i\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$　　ب) $\frac{\sqrt{3}}{2}-i\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$　　جـ) $\frac{\sqrt{3}}{2}+i\left(\frac{-2+\sqrt{3}}{2}\right)$

3) الجذران التربيعيان للعدد المركب $-8+6i$ هما :

أ) $-1-3i$ و $1+3i$　　ب) $1-3i$ و $1+3i$　　جـ) $-3-i$ و $3+i$

4) الشكل المثلثي للعدد المركب $\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$ هو :

أ) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$　　ب) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$　　جـ) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$

**التمرين30:** بكالوريا شعبة علوم 2024 -الموضوع الأول-

**I)** حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ الآتية : $(z-1+2\sqrt{3})\left[z^2-2(1-\sqrt{3})z+5-2\sqrt{3}\right]=0$ .

**II)** في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، نعتبر النقط $A$ ، $B$ و $C$ التي لاحقاتها على الترتيب : $z_A$ ، $z_B$ و $z_C$

حيث : $z_A=1-\sqrt{3}+i$ ، $z_B=1-2\sqrt{3}$ و $z_C=\overline{z_A}$ .

1) أكتب كلا من $z_A-1$ ، $z_C-1$ و $z_B$ على الشكل المثلثي .

2) جد لاحقة النقطة $D$ مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;-1),(C;1)\}$ .

3) بيّن أن الرباعي $ABCD$ معيّن.

**التمرين31:** بكالوريا شعبة علوم **2024** ـ الموضوع الثاني ـ

عيّن الإقتراح الصحيح الوحيد من بين الإقتراحات الثلاثة مع التبرير في كل حالة مما يلي :

1) $z$ عدد مركب مرافقه $\bar{z}$ . مرافق العدد المركب $z+i$ هو :

أ) $\bar{z}-i$ . ب) $\bar{z}+i$ . جـ) $z-i$ .

2) العدد المركب $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2024}$ يساوي :

أ) $1$. ب) $i$. جـ) $-1$.

3) $z$ عدد مركب حيث $z=2(1+i\sqrt{3})$ .

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ ، نضع : $S_n=\ln|z|+\ln|z|^2+...+\ln|z|^n$ ، لدينا :

أ) $S_n=(n+1)^2\ln 2$ . ب) $S_n=n(n+1)\ln 2$ . جـ) $S_n=2\left(\dfrac{1-(2\ln 2)^n}{1-2\ln 2}\right)\ln 2$ .

4) $z$ عدد مركب حيث : $z=\sin\dfrac{\pi}{8}+i\cos\dfrac{\pi}{8}$ . الشكل المثلثي للعدد المركب $z$ هو :

أ) $z=-\cos\dfrac{\pi}{8}+i\sin\dfrac{\pi}{8}$ . ب) $z=\cos\dfrac{\pi}{8}+i\sin\dfrac{\pi}{8}$ . جـ) $z=\cos\dfrac{3\pi}{8}+i\sin\dfrac{3\pi}{8}$ .

# ثانيا شعبة تقني رياضي

**التمرين 01:** بكالوريا شعبة تقني رياضي **2008** ـ الموضوع الأول ـ

لتكن في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $(*)$ المعرفة كمايلي :

$$(*)\ \ ...........\ \ z^3+(2-4i)z^2-(6+9i)z+9(-1+i)=0$$

1) بيّن أن $z_0=3i$ هو حل للمعادلة $(*)$ .

2) حل ، في $\mathbb{C}$ ، المعادلة $(*)$ ثم أكتب حلولها $z_0$ ، $z_1$ و $z_2$ على الشكل الأسي ، حيث $|z_1|<|z_2|$ .

3) لتكن $A$ ، $B$ و $C$ صور الحلول $z_0$ ، $z_1$ و $z_2$ على الترتيب في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ .

عيّن النقطة $G$ مرجح الجملة $\{(A,1);(B,1);(C,-1)\}$ .

4) عيّن المجموعة $(E)$ للنقط $M$ حيث : $AM^2+BM^2-CM^2=-13$ .

بيّن أن النقطة $A$ تنتمي إلى المجموعة $(E)$ ، ثم أنشئ $(E)$ .

5) تحقق أن النقط $O$ ، $B$ و $G$ في إستقامية ثم عيّن صورة المجموعة $(E)$ بالتحاكي الذي مركزه النقطة $O$ و يحول $B$ إلى $G$ محددا عناصره المميزة .

**التمرين 02:** بكالوريا شعبة تقني رياضي **2008** ـ الموضوع الثاني ـ

$r$ عدد حقيقي موجب تماما و $\theta$ عدد حقيقي كيفي .

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ :

$$z^2-2i\left(r\cos\frac{\theta}{2}\right)z-r^2=0$$

أكتب الحلين على الشكل الأسي .

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقطتين $A$ و $B$ صورتي الحلين .

عيّن $\theta$ حتى يكون المثلث $OAB$ متقايس الأضلاع .

**التمرين 03:** بكالوريا شعبة تقني رياضي **2009** ـ الموضوع الأول ـ

1) أ ـ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ : $z^2-2z+2=0$ .

بـ ـ إستنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة ذات المجهول $z$ : $(\bar{z}+3)^2-2(\bar{z}+3)+2=0$ ، حيث $\bar{z}$ مرافق $z$ .

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ .

النقط $A$، $B$ و $M$ لواحقها $(1-i)$ ، $(1+i)$ و $z$ على الترتيب.

أ- عيّن $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي حيث : $z=1-i+ke^{i\frac{5\pi}{4}}$ عندما $k$ يمسح $\mathbb{R}^+$ .

بـ- عيّن $(E)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي حيث : $|z-1+i|=|z-1-i|$.

**التمرين 04**: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2009 ـ الموضوع الثاني

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ : $z^2-6z+18=0$ .

2) ليكن العدد المركب $z_1$ حيث : $z_1=3-3i$ .

أ- أكتب $z_1$ على الشكل الأسي .

بـ- أحسب طويلة العدد $z_3$ و عمدة له حيث : $z_1\times z_3=6\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ . استنتج قيمتي $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$ .

3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط $A$، $B$ و $C$ لواحقها $3+3i$ ، $3-3i$ و $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}$ على الترتيب.

أ- عيّن قيم العدد الحقيقي $\alpha$ حتى تقبل الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,-1);(C,\alpha)\}$ مرجحا نرمز له بـ $G_\alpha$ .

بـ- عيّن مجموعة النقط $G_\alpha$ لما يتغير $\alpha$ في $\mathbb{R}^*$ .

**التمرين 05**: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2010 ـ الموضوع الأول

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ : $(z-3+2i)(z^2+6z+10)=0$ .

2) علم في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط $A$، $C$، $D$ و $I$ لواحقها $z_A=3-2i$ ، $z_C=-3+i$ و $z_D=-3-i$ و $z_I=1$ على الترتيب.

3) $z$ عدد مركب يحقق الجملة : $\begin{cases}\arg(z-3+2i)=\arg(z-1)+\frac{\pi}{2}\\ |z-3+2i|=|z-1|\end{cases}$ .

أ- بيّن أن الجملة تكافئ : $\frac{z-3+2i}{z-1}=i$ ، ثم عيّن قيمة $z$ .

بـ- $B$ النقطة التي لاحقتها $z_B=3$ ، تحقق أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ . ما هي طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟

جـ- لتكن $J$ النقطة التي لاحقتها $z_J$ حيث : $z_J=1-2i$ .

أكتب على الشكل الأسي العدد المركب $z$ حيث : $z=\frac{z_A-z_J}{z_B-z_J}$ .

تحقق أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{JI}$ . ما هي طبيعة الرباعي $ABIJ$ ؟

**التمرين 06**: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2010 ـ الموضوع الثاني

1) أ- أكتب على الشكل الأسي العدد المركب $a$ حيث : $a=-2+2i\sqrt{3}$ .

بـ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ : $z^2=-2+2i\sqrt{3}$ .

2) يُنسب المستوي إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ .

$A$، $B$ و $C$ النقط التي لواحقها $z_A=-2$ ، $z_B=-1-\sqrt{3}i$ و $z_C=1+\sqrt{3}i$ على الترتيب.

أ- أحسب طويلة العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ و عمدة له .

بـ- استنتج طبيعة المثلث $ABC$ .

3) لتكن $(E)$ مجموعة النقط ذات اللاحقة $z$ حيث $\arg(\bar{z}+2)=\frac{\pi}{3}$ .

أ- تحقق أن $B$ تنتمي إلى $(E)$ .

بـ- عيّن المجموعة $(E)$ .

**التمرين 07**: بكالوريا شعبة تقني رياضي **2011** ـ الموضوع الأول ـ

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E)$ .... $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$ .

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E)$ ، ثم أكتب حلولها على الشكل المثلثي .

2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ .

$A$ ، $B$ و $C$ النقط التي لواحقها $z_A=2i$ ، $z_B=\sqrt{3}+i$ و $z_C=\sqrt{3}-i$ على الترتيب .

نضع : $L=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ .

أـ أكتب $L$ على الشكل الأسي .

بـ ـ أثبت أن $z_A-z_B=L(z_C-z_B)$ ، ثم استنتج أن $A$ صورة $C$ بتحويل نقطي يطلب تعيينه و تحديد عناصره المميزة .

جـ ـ استنتج نوع المثلث $ABC$ ثم أحسب مساحته .

**التمرين 08**: بكالوريا شعبة تقني رياضي **2011** ـ الموضوع الثاني ـ

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ .

$L$ العدد المركب المعرّف كما يلي : $L=\frac{-4\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{5+3i}$ .

1) أـ أكتب على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي .

بـ ـ بيّن أن $L^{12}+1=0$ ، ثم أحسب : $(-4\sqrt{2}+i\sqrt{2})^{12}+(5+3i)^{12}$ .

جـ ـ $n$ عدد طبيعي فردي و $p$ عدد طبيعي زوجي . أثبت أن : $L^{4n}+L^{4p}=0$ .

2) أـ النقطتان $A$ و $B$ لاحقتاهما على الترتيب : $z_A=5+3i$ و $z_B=5-3i$ .

عيّن اللاحقة $z_{A'}$ للنقطة $A'$ صورة النقطة $A$ بالتشابه المباشر الذي مركزه النقطة $B$ و نسبته $\sqrt{2}$ و زاويته $\frac{3\pi}{4}$ .

بـ ـ عيّن $z_G$ لاحقة النقطة $G$ مركز ثقل المثلث $ABA'$ .

**التمرين 09**: بكالوريا شعبة تقني رياضي **2012** ـ الموضوع الأول ـ

1) عيّن العددين المركبين $z_1$ و $z_2$ بحيث : $\begin{cases}2z_1+3z_2=9-2i\\3z_1-z_2=8+8i\end{cases}$ .

2) نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط $A$ ، $B$ و $\Omega$ التي لواحقها على الترتيب :

$z_A=3+2i$ ، $z_B=-3$ و $z_\Omega=1-2i$ .

أـ أثبت أن : $z_B-z_\Omega=i(z_A-z_\Omega)$ .

بـ ـ عيّن طبيعة المثلث $\Omega AB$ .

3) $h$ التحاكي الذي مركزه النقطة $A$ و نسبته $2$ .

أـ عيّن الكتابة المركبة للتحاكي $h$ .

بـ ـ عيّن $z_C$ لاحقة النقطة $C$ صورة النقطة $\Omega$ بالتحاكي $h$ .

جـ ـ عيّن $z_D$ لاحقة النقطة $D$ مرجح الجملة $\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$ .

د ـ بيّن أن $ABCD$ مربع .

4) $(E)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=4\sqrt{5}$ .

أـ تحقق أن النقطة $B$ تنتمي إلى المجموعة $(E)$ ، ثم عيّن طبيعة $(E)$ و عناصرها المميزة .

بـ ـ أنشئ المجموعة $(E)$ .

**التمرين 10**: بكالوريا شعبة تقني رياضي **2012** ـ الموضوع الثاني ـ

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ : $(z^2+2z+4)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$ .

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ .

$A$ ، $B$ ، $C$ و $D$ النقط التي لواحقها على الترتيب : $z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=\sqrt{3}-i$ ، $z_C=-1-\sqrt{3}i$ و $z_D=-1+\sqrt{3}i$ .

أـ أكتب كلا من $z_A$ ، $z_B$ ، $z_C$ و $z_D$ على الشكل الأسي .

بـ- تحقق أن : $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_C} = i$ ، ثم استنتج أن المستقيمين $(AC)$ و $(BD)$ متعامدان .

3) $z_n$ العدد المركب الذي طويلته $\frac{1}{2^n}$ و $n\frac{2\pi}{3}$ عمدة له حيث $n$ عدد طبيعي .

$L_n$ العدد المركب المعرّف بـ : $L_n = z_D \times z_n$ .

أ- أكتب كلا من $L_0$ و $L_1$ على الشكل الجبري .

بـ- $(u_n)$ المتتالية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ بـ : $u_n = |L_n|$ .

- أثبت أن المتتالية $(u_n)$ هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

- $M_0$ ، $M_1$ ، ...... ، $M_n$ صور الأعداد المركبة $L_0$ ، $L_1$ ، ...... ، $L_n$ على الترتيب .

أحسب ، بدلالة $n$ ، المجموع $S_n$ حيث : $S_n = \|\overrightarrow{OM_1}\| + \|\overrightarrow{OM_2}\| + .......... + \|\overrightarrow{OM_n}\|$

- جد نهاية $S_n$ لما يؤول $n$ إلى $+\infty$

**التمرين 11**: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2013 ـ الموضوع الأول

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ : $2z^2 + 6z + 17 = 0$ .

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

$A$ ، $B$ و $C$ النقط التي لواحقها على الترتيب : $z_A = -4$ ، $z_B = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$ و $z_C = -\frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$ .

أحسب الطويلة و عمدة للعدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث $ABC$ .

3) أ- عيّن $z_D$ و $z_E$ لاحقتي النقطتين $D$ و $E$ على الترتيب حتى يكون الرباعي $BCDE$ مربعا مركزه $A$ .

بـ- عيّن $(\Gamma_1)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي حيث : $\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}\| = 10\sqrt{2}$ .

4) $(\Gamma_2)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي ، ذات اللاحقة $z$ حيث : $\arg(z+4) = \frac{\pi}{4}$

تحقق أن النقطة $B$ تنتمي إلى $(\Gamma_2)$ ، ثم عيّن المجموعة $(\Gamma_2)$ .

**التمرين 12**: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2013 سلطان الموضوع الثاني

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ : $(z + 5 - i\sqrt{3})(z^2 + 2z + 4) = 0$ .

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

$A$ ، $B$ و $C$ النقط التي لواحقها على الترتيب : $z_A = -1 - i\sqrt{3}$ ، $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ و $z_C = -5 + i\sqrt{3}$ .

$S$ التشابه المباشر الذي يحول $A$ إلى $C$ و يحول $O$ إلى $B$ .

- جد العبارة المركبة للتشابه $S$ ، ثم عيّن العناصر المميزة له .

3) أ- عيّن $z_D$ لاحقة النقطة $D$ مرجح الجملة $\{(A,2); (B,-1); (C,1)\}$ .

بـ- أكتب العدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_D - z_A}$ على الشكل الأسي ، ثم استنتج طبيعة المثلث $ABD$ .

جـ- عيّن المجموعة $(\Gamma)$ للنقط $M$ من المستوي حيث : $\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\|$ .

**التمرين 13**: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2014 ـ الموضوع الأول

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ : $(z - i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$ .

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

$A$ ، $B$ و $C$ النقط التي لواحقها على الترتيب : $z_1 = \sqrt{3} + i$ ، $z_2 = \sqrt{3} - i$ و $z_3 = i$ .

أ- أكتب العدد $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الأسي .

بـ- هل توجد قيم للعدد الطبيعي $n$ يكون من أجلها العدد المركب $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ تخيليا صرفا ؟ برّر إجابتك .

3) أ- عيّن العبارة المركبة للتشابه $S$ الذي مركزه $A$ و يحول $B$ إلى $C$ ، محددا نسبته و زاويته .
ب- استنتج طبيعة المثلث $ABC$ .

4) أ- عيّن العناصر المميزة لـ $(E)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ و التي تحقق : $|z-z_1|^2+|z-z_2|^2=5$
ب- عيّن $(E')$ مجموعة النقط $M$ من المستوي التي لاحقتها $z$ حيث : $|z-z_1|=|z-z_3|$.

**التمرين 14: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2014 - الموضوع الثاني**

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقطة $A$ ذات اللاحقة $z_0=1+i$ .

1) أ- عيّن ثم أنشئ $(\gamma)$ مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث : $z=z_0+2e^{i\theta}$ و $\theta$ يمسح $\mathbb{R}$ .
ب- عيّن ثم أنشئ $(\gamma')$ مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث : $z=z_0+ke^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$ و $k$ يمسح $\mathbb{R}^+$ .
جـ- عيّن إحداثيات نقطة تقاطع $(\gamma)$ و $(\gamma')$.

2) نسمي $B$ النقطة التي لاحقتها $z_1$ حيث : $z_1=z_0+2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$ .
أ- عيّن الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{z_1-z_0}{z_0}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث $OAB$ .
ب- عيّن $z_2$ لاحقة النقطة $C$ صورة النقطة $B$ بالدوران الذي مركزه $A$ و زاويته $-\frac{\pi}{2}$ .
جـ- عيّن العددين $\alpha$ و $\beta$ بحيث تكون النقطة $O$ مرجحا للجملة $\{(A,\alpha);(C,\beta)\}$ و $\alpha+\beta=\sqrt{2}$ .
د- عيّن ثم أنشئ $(E)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي حيث : $((1+\sqrt{2})\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC})=0$ .

**التمرين 15: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2015 - الموضوع الأول**

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقطتين $A$ و $B$ اللتين لاحقتيهما على الترتيب $z_A$ و $z_B$ حيث : $z_A=-1-i$ و $z_B=3+3i$ .

1) أ- أكتب $z_A$ و $z_B$ على الشكل الأسي .
ب- $n$ عدد طبيعي ، عيّن قيم $n$ بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_A}{\sqrt{2}}\right)^n$ حقيقيا .
جـ- $z$ عدد مركب حيث $\frac{z}{z_A}=4e^{i\frac{\pi}{12}}$ ، أحسب طويلة العدد $z$ و عمدة له ، ثم أكتب $\frac{z}{z_A}$ على الشكل الجبري .
د- استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$ .

2) أ- أحسب $z_C$ لاحقة النقطة $C$ صورة النقطة $B$ بالدوران الذي مركزه $A$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث $ABC$ .
ب- أحسب $z_D$ لاحقة النقطة $D$ مرجح الجملة $\{(A,-1);(B,1);(C,1)\}$ ، ثم بيّن أن $ABDC$ مربع .

**التمرين 16: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2015 - الموضوع الثاني**

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ : $z^2-4(\sin\theta)z+4=0$ .... $(I)$ ، حيث $\theta$ وسيط حقيقي .

2) من أجل $\theta=\frac{\pi}{3}$ نرمز إلى حلي المعادلة $(I)$ بـ $z_1$ و $z_2$ . أكتب $z_1$ و $z_2$ على الشكل الأسي .

3) نعتبر في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط $A$ ، $B$ و $C$ التي لواحقها على الترتيب :
$z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=\sqrt{3}-i$ و $z_C=3\sqrt{3}+i$ .
أ- أكتب العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الجبري ، ثم على الشكل الأسي . استنتج طبيعة المثلث $ABC$ .
ب- استنتج النقطة $C$ هي صورة النقطة $B$ بالتشابه المباشر $S$ الذي مركزه $A$ يطلب تعيين نسبته و زاوية له .
جـ- عيّن $z_D$ لاحقة النقطة $D$ صورة النقطة $B$ بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$ ، ثم حدد طبيعة الرباعي $ABDC$ .

4) أ- عيّن $(\Gamma_1)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ حيث : $\frac{z-z_C}{z-z_B}$ تخيلي صرف مع $z \neq z_B$ .

بـ- عيّن $(\Gamma_2)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ حيث : $\frac{z-z_C}{z-z_B}$ حقيقيا مع $z \neq z_B$ .

**التمرين 17**: بكالوريا شعبة تقني رياضي **2016** - الموضوع الأول-

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ : $9z^2-6\sqrt{3}z+4=0$.

2) في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، لتكن النقطتين $A$ و $B$ لاحقتاهما على الترتيب :

$z_A=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}i$ و $z_B=\overline{z_A}$ .

أ- أكتب كلا من $z_A$ و $z_B$ على الشكل الأسي .

بـ- بيّن أن : $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2016}+\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{1437}=0$ .

جـ- عيّن قيم العدد الطبيعي $n$ بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{n}$ عددا حقيقيا .

3) $f$ التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M$ لاحقتها $z$ النقطة $M'$ لاحقتها $z'$ حيث : $z'=\left(\frac{z_A}{z_B}\right)z$ .

أ- عيّن طبيعة التحويل النقطي $f$ و عناصره المميزة .

بـ- أحسب $z_C$ لاحقة النقطة $C$ صورة النقطة $A$ بالتحويل $f$ .

جـ- عيّن $z_D$ لاحقة النقطة $D$ حتى تكون $O$ مركز ثقل الرباعي $ABCD$ .

**التمرين 18**: بكالوريا شعبة تقني رياضي **2016** - الموضوع الثاني-

1) أ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ : $(2z-\sqrt{2})(z^2-2\sqrt{2}z+4)=0$ .

بـ- أكتب الحلول على الشكل الأسي .

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ .

$A$ ، $B$ و $C$ النقط التي لواحقها على الترتيب : $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $b=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ و $c=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ .

أ- علم النقط $A$ ، $B$ و $C$ في المعلم السابق .

بـ- نعتبر النقطة $D$ صورة النقطة $C$ بالتشابه المباشر $S$ الذي مركزه $A$ و نسبته $3$ و زاوية $\pi$ .

و النقطة $E$ صورة النقطة $C$ بالدوران $R$ الذي مركزه $O$ و زاوية $-\frac{\pi}{2}$ .

- أحسب اللاحقتين $d$ و $e$ للنقطتين $D$ و $E$ على الترتيب .

3) نضع : $z=\frac{d-b}{e-b}$ .

أ- أكتب العدد $z$ على الشكل المثلثي .

بـ- نعتبر النقطة $I$ منتصف القطعة $[DE]$ ، $F$ نظيرة النقطة $B$ بالنسبة للنقطة $I$ . ما طبيعة الرباعي $BDFE$ ؟

**التمرين 19**: بكالوريا شعبة تقني رياضي **2017** - الموضوع الأول-

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ .

نعتبر النقط $A$ ، $B$ و $C$ التي لواحقها على الترتيب : $z_A=-1$ ، $z_B=2+i$ و $z_C=-i$ .

1) أكتب العدد المركب $\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$ على الشكل الأسي ، ثم استنتج طبيعة المثلث $ABC$ .

2) عيّن العبارة المركبة للتشابه المباشر $S$ الذي مركزه $C$ و يحول $B$ إلى $A$ .

3) نعتبر النقطة $D$ نظيرة $B$ بالنسبة إلى $C$ و النقطة $E$ صورة النقطة $D$ بالتشابه $S$.

أ- عيّن $z_D$ لاحقة النقطة $D$ ، ثم تحقق أن : $z_E=1-2i$ حيث $z_E$ لاحقة النقطة $E$ .

بـ- حدّد طبيعة الرباعي $ADEB$ .

4) $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ . ( $M$ تختلف عن $A$ و $B$ )

حيث : $\arg(z-z_A)-\arg(z-z_B)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$ .

تحقق أن النقطة $C$ تنتمي إلى $(\Gamma)$ ، ثم حدّد طبيعة المجموعة $(\Gamma)$ و أنشئها .

**التمرين 20**: بكالوريا شعبة تقني رياضي **2017** ـ الموضوع الثاني ـ

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ .

نعتبر النقط $A$، $B$، $C$ و $D$ التي لواحقها على الترتيب : $z_A=1+i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=\frac{1}{2}(1-i)$ و $z_D=\overline{z_C}$ .

1) أكتب $z_A$ و $z_C$ على الشكل الأسي ، ثم استنتج الشكل الأسي لكل من $z_B$ و $z_D$ .

بـ- عين قيم العدد الطبيعي $n$ التي تحقق : $(z_A)^n=(z_B)^n$ .

2) أ- جد نسبة و مركز التحاكي $h$ الذي يحول $D$ إلى $A$ و يحول $C$ إلى $B$ .

بـ- أحسب طويلة العدد المركب $\frac{z_C-z_B}{z_D-z_A}$ ثم استنتج طبيعة الرباعي $ADCB$ .

3) أحسب $z_G$ لاحقة النقطة $G$ مرجح الجملة $\{(A,2);(B,2);(C,-1);(D,-1)\}$ ،

4) لتكن $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي بحيث : $\left\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\right\|=\sqrt{5}$ .

بيّن أن النقطة $A$ تنتمي إلى $(\Gamma)$ ، ثم حدّد طبيعة المجموعة $(\Gamma)$ و عناصرها المميزة و أنشئها .

**التمرين 21**: بكالوريا شعبة تقني رياضي **2017** ـ الدورة الإستدراكية ـ الموضوع الأول ـ

**I)** حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ : $(z-4)(z^2-2z+4)=0$ .

**II)** المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ .

نعتبر النقط $A$، $B$ و $C$ التي لواحقها على الترتيب : $z_A=4$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_C=1-i\sqrt{3}$ .

1) أكتب العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الأسي ، ثم استنتج طبيعة المثلث $ABC$ .

2) أ- عيّن لاحقة النقطة $D$ صورة النقطة $B$ بالدوران $R$ الذي مركزه $O$ و زاويته $\frac{2\pi}{3}$ .

بـ- عيّن طبيعة الرباعي $ABDC$ .

3) من أجل كل عدد طبيعي $n$ نضع : $z_n=(z_A)^n+(z_B)^n$

أ- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $z_n=2^{n+1}\times\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ .

بـ- نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $t_n=z_{6n}$

عبّر عن $t_n$ بدلالة $n$ ثم أحسب $P_n$ بدلالة $n$ حيث : $P_n=t_0\times t_1\times t_2\times......\times t_n$ .

**التمرين 22**: بكالوريا شعبة تقني رياضي **2017** ـ الدورة الإستدراكية ـ الموضوع الثاني ـ

**I)** حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ : $(z+1-\sqrt{3})(z^2+2z+4)=0$ .

**II)** المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ .

نعتبر النقط $A$، $B$ و $C$ التي لواحقها على الترتيب : $z_A=-1+\sqrt{3}$ ، $z_B=-1-i\sqrt{3}$ و $z_C=\overline{z_B}$ .

1) بيّن أن $z_B-z_A=i(z_C-z_A)$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث $ABC$ و أحسب مساحته .

2) أ- أكتب على الشكل الجبري العدد $L$ حيث : $L=\frac{z_C-z_A}{z_C}$ .

بـ- بيّن أن : $L=\frac{\sqrt{6}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ ، ثم استنتج القيمة المضبوطة لـ $\cos\frac{\pi}{12}$ .

3) نعتبر التحويل النقطي $S$ الذي يحول النقطة $M$ ذات اللاحقة $z$ إلى النقطة $M'$ ذات اللاحقة $z'$ و المعرّف بـ :

. $z' = (z - z_B)L + z_B$

- بيّن أن $S$ تشابه مباشر يطلب تحديد عناصره المميزة .

4) لتكن النقط $A'$ ، $B'$ و $C'$ صور النقط $A$ ، $B$ و $C$ على الترتيب بالتحويل $S \circ S$ .

- أحسب مساحة المثلث $A'B'C'$ .

**التمرين 23**: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2018 ـ الموضوع الأول

**I)** حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ : $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$ .

**II)** المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ .

لتكن النقطتين $A$ و $B$ لاحقتاهما: $z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ و $z_B = \overline{z_A}$ .

1) أكتب على الشكل الأسي كلا من العددين المركبين $z_A$ و $\frac{1}{z_B}$ ، ثم بيّن أن العدد $\left(\frac{2}{z_B}\right)^{2018}$ تخيلي صرف .

2) لتكن النقطة $C$ صورة النقطة $B$ بالتحاكي $h$ الذي مركزه $\omega$ ذات اللاحقة $z_\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و نسبته $-3$ .

- بيّن أن لاحقة النقطة $C$ هي : $z_C = -\sqrt{2} + i3\sqrt{2}$ .

3) عيّن لاحقة النقطة $D$ صورة النقطة $B$ بالدوران $R$ الذي مركزه $O$ و زاويته $-\frac{\pi}{2}$ .

4) أ ـ بيّن أن $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = -i$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث $ACD$ .

ب ـ جد لاحقة النقطة $E$ بحيث يكون الرباعي $ACED$ مربعا .

**التمرين 24**: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2018 ـ الموضوع الثاني

**I)** أ ـ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ : $4z^2 - 2z + 1 = 0$ .... $(E)$ .

ب ـ أكتب العددان $\frac{1}{z_1}$ و $\frac{1}{z_2}$ على الشكل الأسي، حيث $z_1$ و $z_2$ حلا المعادلة $(E)$ .

**II)** المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ .

نعتبر النقط $A$ ، $B$ و $C$ التي لواحقها على الترتيب : $z_A = 4$ ، $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_C = 1 - i\sqrt{3}$ .

1) أحسب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ ، ثم حدّد طبيعة المثلث $ABC$ .

ب ـ استنتج أن $B$ هي صورة $C$ بدوران مركزه $A$ يطلب تعيين زاويته .

2) جد لاحقة النقطة $D$ صورة النقطة $A$ بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CB}$ و استنتج بدقة طبيعة الرباعي $ACBD$ .

3) حدّد طبيعة $(\gamma)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ التي تحقق : $\left|iz + \sqrt{3} - i\right| = \left|z - 1 + i\sqrt{3}\right|$ .

4) بيّن أن النقطة $G$ مركز الدائرة المحيطة بالمثلث $ABC$ تنتتمي إلى $(\gamma)$ .

**التمرين 25**: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2019 ـ الموضوع الأول

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ .

$A$ ، $B$ و $C$ النقط التي لواحقها على الترتيب : $z_A = 1 + i$ ، $z_B = 2 + i$ و $z_C = \frac{3}{2} + i\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

$(\Gamma)$ الدائرة التي مركزها $A$ و نصف قطرها 1 .

1) أ ـ تحقق أن النقطة $C$ من الدائرة $(\Gamma)$ .

ب ـ عيّن قيسا بالراديان للزاوية $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ ، ثم استنتج أن $C$ صورة $B$ بالدوران $r$ الذي مركزه $A$ يُطلب تعيين زاويته .

2) $S$ التشابه المباشر الذي يحول النقطة $M$ ذات اللاحقة $z$ إلى النقطة $M'$ ذات اللاحقة $z'$ حيث : $z' = (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3} - i\sqrt{3}$

أ ـ حدّد العناصر المميزة للتشابه $S$ .

ب ـ عيّن $z_D$ لاحقة $D$ صورة $B$ بالتشابه $S$ .

3) ما هي نسبة التحاكي $h$ الذي مركزه $A$ حيث : $S=h\circ r$ ؟ استنتج أن النقط $A$، $C$ و $D$ في إستقامية.

4) $(E)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$، حيث : $z=z_A+ke^{i\frac{\pi}{3}}$ مع $k\in\mathbb{R}_+^*$.
تحقق أن النقطة $C$ تنتمي إلى $(E)$، ثم حدّد طبيعة المجموعة $(E)$.

**التمرين 26**: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2019 ـ الموضوع الثاني

**I)** أ ـ تحقق أن : $(2-2\sqrt{3})^2=16-8\sqrt{3}$.

ب ـ أكتب على الشكل الجبري الجذرين التربيعيين $L_1$ و $L_2$ للعدد المركَب $z$ حيث : $z=-16\sqrt{3}-16i$.

**II)** المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط $A$، $B$ و $C$ التي لواحقها على الترتيب : $z_A=4e^{i\frac{\pi}{3}}+4e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ، $z_B=\frac{1}{2}iz_A$ و $z_C=-\frac{1}{4}z_A$ .

1) أكتب $z_A$ على الشكل الجبري، ثم بين أن : $z_A=4\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$.

2) استنتج القيمتين المضبوطتين للعددين الحقيقين $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

3) $S$ التشابه المباشر الذي يحول $A$ إلى $B$ و $B$ إلى $C$.
لتكن $M'$ النقطة ذات اللاحقة $z'$ صورة النقطة $M$ ذات اللاحقة $z$ بالتشابه $S$.

أ ـ بيّن أن : $z'=\frac{1}{2}iz$.

ب ـ حدّد العناصر المميّزة للتشابه $S$.

4) $G$ النقطة ذات اللاحقة $z_G$ مرجح الجملة $\{(A;2),(B;-2),(C;4)\}$.

أ ـ بيّن أن : $z_G=2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

ب ـ $(E)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$، حيث : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=2\sqrt{2}$.
حدّد طبيعة المجموعة $(E)$ و عناصرها المميّزة، ثم أحسب محيط $(E')$ صورة $(E)$ بالتشابه $S$.

# ثالثا شعبة رياضيات

**التمرين 01**: بكالوريا شعبة رياضيات 2008 ـ الموضوع الأول

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقطتين $A$ و $B$ اللتين لاحقتيهما $\sqrt{3}-i$ و $\sqrt{3}+3i$ على الترتيب.

1) أكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر $S$ الذي مركزه $O$ و يحول $A$ إلى $B$، ثم عيّن زاويته و نسبته.

2) نعرف متتالية النقط من المستوي المركب كما يلي : $A_0=A$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$، $A_{n+1}=S(A_n)$.
نرمز إلى لاحقة $A_n$ بالرمز $z_n$.

أ ـ أنشئ في المستوي المركب النقط : $A_0$، $A_1$ و $A_2$.

ب ـ برهن أن : $z_n=2(\sqrt{3})^n e^{i\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$.

جـ ـ عيّن مجموعة الأعداد الطبيعية $n$ التي تنتمي من أجلها النقطة $A_n$ إلى المستقيم $(OA_1)$.

3) نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة كما يلي : $u_0=A_0A_1$ و $u_n=A_nA_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي $n$.

أ ـ بيّن أن المتتالية $(u_n)$ هندسية يُطلب تحديد حدها الأول $u_0$ و أساسها $q$.

ب ـ استنتج عبارة $u_n$ بدلالة $n$.

جـ ـ أحسب بدلالة المجموع $S_n$ حيث : $S_n=u_0+u_1+u_2+....+u_n$، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

**التمرين02:** بكالوريا شعبة رياضيات 2008 ـ الموضوع الثاني ـ

نعتبر في مجموعة المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود $P(z)$ المعرف كما يلي : $P(z)=2z^4-2iz^3-z^2-2iz+2$ .

1) بيّن انه إذا كان $\alpha$ جذرا لـ $P(z)$ فإن $\frac{1}{\alpha}$ جذرا له أيضا .

2) تحقق أن : $1+i$ جذر لكثير الحدود $P(z)$ .

3) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$ ، ثم أكتب الحلول على الشكل الأسي .

4) في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$ و التي لواحقها على الترتيب : $1+i$ ، $-1+i$ ، $-\frac{m}{2}-\frac{m}{2}i$ و $\frac{m}{2}-\frac{m}{2}i$ حيث $m$ عدد حقيقي .

عيّن $m$ حتى يكون الرباعي $ABCD$ مربعا .

**التمرين03:** بكالوريا شعبة رياضيات 2009 ـ الموضوع الثاني ـ

نرفق بكل عدد مركب $z$ يختلف عن $1$ العدد المركب $f(z)$ حيث : $f(z)=\frac{z-i}{z-1}$

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(45+45i)f(z)=23+45i-2z$ .

2) لتكن $M$ صورة العدد المركب $z$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ .

أ ـ عيّن مجموعة النقط $M$ من المستوي بحيث يكون $f(z)$ حقيقيا سالبا تماما .

بـ ـ أحسب العدد المركب $z_0$ بحيث : $|f(z_0)|=1$ و $\arg(f(z_0))=\frac{3\pi}{2}$ .

3) في المستوي المركب نعتبر النقط $A$ ، $B$ و $C$ صور الاعداد المركبة $1$ ، $i$ و $z_0$ على الترتيب .

أ ـ ما نوع المثلث $ABC$ ؟

بـ ـ عيّن النقطة $D$ نظيرة $C$ بالنسبة إلى المستقيم $(AB)$ و استنتج طبيعة الرباعي $ACBD$ .

**التمرين04:** بكالوريا شعبة رياضيات 2010 ـ الموضوع الأول ـ

نعتبر في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E)$ ... $z^3-3z^2+3z-9=0$

1) أ ـ تحقق أن $3$ حل للمعادلة $(E)$ ، ثم عيّن الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ و $c$ بحيث يكون من أجل كل عدد مركب $z$ فإن :

$z^3-3z^2+3z-9=(z-3)(az^2+bz+c)$ .

بـ ـ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E)$ .

2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ . النقط $A$ ، $B$ و $C$ صور الأعداد $z_A=3$ ، $z_B=\sqrt{3}i$ ، $z_C=-\sqrt{3}i$ .

بيّن أن المثلث $ABC$ متقايس الاضلاع

3) $D$ النقطة التي لاحقتها $z_D=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ و $E$ صورتها بالدوران الذي مركزه $O$ وزاويته $\frac{\pi}{3}$ .

عيّن $z_E$ لاحقة النقطة $E$ .

4) $F$ النقطة التي لاحقتها $z_F=1-\sqrt{3}i$ .

5) أ ـ أحسب $\frac{z_F}{z_E}$ و استنتج أن المستقيمين $(OE)$ و $(OF)$ متعامدان

بـ ـ عيّن $z_G$ لاحقة النقطة $G$ بحيث يكون $OEGF$ مربعا .

**التمرين05:** بكالوريا شعبة رياضيات 2010 ـ الموضوع الثاني ـ

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ .

1) نسمي $A$ ، $B$ ، $I$ النقط التي لاحقتاها على الترتيب : $z_A=1-4i$ ، $z_B=-1-2i$ ، $z_I=1-2i$

أ ـ علم النقط $A$ ، $B$ ، $I$ .

بـ ـ أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $z=\frac{z_I-z_A}{z_I-z_B}$

جـ ـ ما نوع المثلث $IAB$ ؟

د- $C$ صورة $I$ بالتحاكي الذي مركزه $A$ و نسبته $2$ . أحسب اللاحقة $z_C$ للنقطة $C$ .

هـ- $D$ مرجح $\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$ . أحسب اللاحقة $z_D$ للنقطة $D$

و- بيّن أن $ABCD$ مربع .

2) عيّن و أنشئ $(\Gamma_1)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي حيث : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|$

3) عيّن و أنشئ $(\Gamma_2)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي حيث : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=1$ .

## التمرين 06: بكالوريا شعبة رياضيات 2011 ـ الموضوع الأول

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ .

$C$ ، $B$ ، $A$ ثلاث نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب : $z_A=1-i$ ، $z_B=-1+i$ ، $z_C=\sqrt{3}(1+i)$

1) أكتب على الشكل الأسي الأعداد المركبة : $z_A$ ، $z_B$ و $z_C$ .

2) أ- أحسب الطويلة و عمدة للعدد المركب $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ ، ثم فسر النتائج المحصل عليها .

ب- حدّد طبيعة المثلث $ABC$ .

3) عيّن لاحقة النقطة $D$ بحيث يكون الرباعي $ACBD$ معيّنا.

4) $T$ التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M$ من المستوي لاحقتها $z$ النقطة $M'$ ذات اللاحقة $z'$ حيث :

$z'=(-1+i)z+1-3i$ .

أ- عيّن طبيعة التحويل $T$ و عناصره المميزة .

ب- استنتج طبيعة التحويل $ToT$ و عناصره المميزة .

## التمرين 07: بكالوريا شعبة رياضيات 2011 ـ الموضوع الثاني

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية :

1) أ- الشكل المثلثي للعدد المركب $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ هو $-\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$ .

ب- $a^{2011}+\bar{a}=0$ حيث : $\bar{a}$ مرافق $a$ .

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ .

أ- التحويل الذي كتابته المركبة : $z'=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z$ دوران زاويته $-\frac{\pi}{4}$ و مركزه مبدأ المعلم .

ب- مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ حيث : $\arg(z-i)=-\frac{\pi}{4}$ هي المستقيم $(\Delta)$ الذي يشمل النقطة $A$ ذات اللاحقة $i$ و شعاع توجيهه $\vec{u}$ لاحقته $1+i$ .

## التمرين 08: بكالوريا شعبة رياضيات 2012 ـ الموضوع الأول

1) حل في مجموعة الأعداد المركب $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ التالية : $z^2-\sqrt{2}z+1=0$

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ .

$C$ ، $B$ ، $A$ نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب : $z_A=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=z_A+z_B$ .

أ- أكتب على الشكل الأسي الأعداد المركبة : $z_A$ ، $z_B$ و $\frac{z_A}{z_B}$ .

ب- عيّن لاحقة $A'$ ، $B'$ و $C'$ صور النقط $A$ ، $B$ و $C$ على التوالي بالدوران الذي مركزه $O$ و زاويته $\frac{\pi}{4}$ .

جـ- بيّن أن الرباعي $OA'C'B'$ مربع .

3) نسمي $(\Delta)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ حيث : $|z-z_A|=|z-z_B|$ .

أ- بيّن أن $(\Delta)$ هو محور الفواصل .

بـ- بيّن أن حلي المعادلة : $\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)^2=i$ عددان حقيقيان . (لا يُطلب حساب الحلين)

**التمرين09: بكالوريا شعبة رياضيات 2012 ـ الموضوع الثاني ـ**

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ التالية : $(z^2+4)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$

2) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط $A$، $B$، $C$ و $D$ التي لواحقها على الترتيب :

$z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-2i$ و $z_D=\overline{z_C}$

بيّن أن النقط $A$، $B$، $C$ و $D$ تنتمي إلى دائرة $(\gamma)$ يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها ، ثم أنشئ النقط $A$، $B$، $C$ و $D$ .

3) نرمز بـ $z_E$ إلى لاحقة النقطة $E$ نظيرة النقطة $B$ بالنسبة إلى المبدأ $O$ .

أ- بيّن أن : $\frac{z_A-z_C}{z_E-z_C}=e^{(-\frac{\pi}{3})i}$ .

بـ- بيّن أن النقطة $A$ هي صورة النقطة $E$ بدوران $R$ مركزه $C$ يطلب تعيين زاويته .

جـ- استنتج طبيعة المثلث $AEC$ .

د- $H$ هو التحاكي الذي مركزه $O$ و نسبته $2$ .

عيّن طبيعة التحويل $H\circ R$ و عناصره المميزة ، ثم استنتج صورة الدائرة $(\gamma)$ بالتحويل $H\circ R$ .

**التمرين10: بكالوريا شعبة رياضيات 2013 ـ الموضوع الأول ـ**

I) $a$ و $b$ عددان موجبان تماما . نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ .

النقط $A$، $B$، $C$ و $E$ التي لاحقاتها : $z_A=ae^{i\frac{3\pi}{4}}$ ، $z_B=-a\sqrt{2}$ ، $z_C=\overline{z_A}$ و $z_E=be^{\frac{3\pi}{2}i}$ على الترتيب .

1) أ- أكتب على الشكل الأسي العدد المركب $\frac{z_A-z_B}{z_A}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث $OAB$ .

بـ- حدّد طبيعة الرباعي $OABC$ ، ثم استنتج مساحته .

2) التشابه المباشر $S$ ذو المركز $O$ و النسبة $\frac{b}{a}$ و الزاوية $\frac{3\pi}{4}$ ، يحول كل نقطة $M(z)$ إلى النقطة $M'(z')$ .

أ- أكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر $S$ ، ثم تحقق أن : $S(A)=E$ .

بـ- بيّن أن مساحة الرباعي $OEFG$ هي $b^2$ (مقدرة بوحدة المساحة) حيث : $S(B)=F$ و $S(C)=G$ .

3) أ- أحسب بدلالة $a$ و $b$ العبارة : $|z_C|^2+|z_E|^2-2|z_C\times z_E|\cos\left[\arg\left(\frac{z_C}{z_E}\right)\right]$ .

بـ- استنتج $CE^2$ بدلالة $a$ و $b$ .

II) $n$ عدد طبيعي . $M_n$ نقطة من المستوي تختلف عن $O$ ، لاحقتها $z_n$ .

نضع : $M_0=A$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $M_{n+1}=S(M_n)$ .

نعتبر المتتاليتين $(u_n)$ و $(v_n)$ المعرفتين ، من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، بـ : $u_n=|z_n|$ و $v_n=\arg(z_n)$ .

1) أكتب العدد المركب $\frac{z_{n+1}}{z_n}$ على الشكل الأسي بدلالة $a$ و $b$ .

2) نفرض أن : $a<b$ و $\arg\left(\frac{z_{n+1}}{z_n}\right)\in]-\pi;\pi]$ .

بيّن أن المتتالية $(u_n)$ هندسية و المتتالية $(v_n)$ حسابية يُطلب تعيين أساس وحساب الحد الأول لكل منهما .

3) أحسب بدلالة $a$، $b$ و $n$ المجموع $T_n$ حيث : $T_n=a+b+\frac{b^2}{a}+\frac{b^3}{a^2}+....+\frac{b^n}{a^{n-1}}$ . ثم $\lim_{n\to+\infty}T_n$ .

4) عيّن قيم الأعداد الطبيعية $n$ التي تكون من أجلها النقط $O$، $A$ و $M_n$ في استقامية .

**التمرين11:** بكالوريا شعبة رياضيات 2013 ـ الموضوع الثاني

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $z^2+z+1=0$ .

2) نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، النقط $A$ ، $B$ و $M$ ذات اللاحقات : $z_A=-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z$ على الترتيب .

أـ أكتب $z_A$ على الشكل الأسي .

بـ ـ عيّن مجموعة النقط $M$ من المستوي ، حيث : $\arg\left[(z-z_A)^2\right]=\arg(z_A)-\arg(z_B)$ .

3) أـ التحويل النقطي $r$ ، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ ، حيث : $z'=z_A.z+z_B\sqrt{3}$ .

ما طبيعة التحويل $r$ ؟ عيّن عناصره المميزة .

بـ ـ عيّن نسبة و مركز التحاكي $h$ ، يرفق بكل نقطة $M(z)$ إلى النقطة $M'(z')$ ، حيث : $z'=-2z+3i$

جـ ـ نضع : $S=h\circ r$ . عيّن طبيعة التحويل $S$ مبرزا عناصره المميزة ، ثم تحقق أن عبارته المركبة هي :

$z'=2e^{\frac{\pi}{3}i}(z-i)+i$ .

4) نعتبر النقطة $\Omega$ ذات اللاحقة $i$ و النقط $C$ ، $D$ و $E$ حيث : $S(O)=C$ ، $S(C)=D$ و $S(D)=E$ .

بيّن أن النقط $O$ ، $\Omega$ و $E$ في استقامية .

5) أـ عيّن $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M(z)$ حيث $z=2e^{i\theta}+e^{\frac{\pi}{2}i}$ مع $\theta\in\mathbb{R}$ .

بـ ـ عيّن $(\Gamma')$ صورة $(\Gamma)$ بالتحويل $S$ .

**التمرين12:** بكالوريا شعبة رياضيات 2014 ـ الموضوع الأول

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $(z-1-2i)(z^2-2(1+\sqrt{3})z+5+2\sqrt{3})=0$

2) $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$ نقط من المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ لاحقاتها على الترتيب :

$z_A=1+2i$ ، $z_B=1+\sqrt{3}+i$ ، $z_C=1+\sqrt{3}-i$ و $z_D=1-2i$ .

أـ بيّن أن : $AB=CD$ و $(AD)$ يوازي $(BC)$ .

بـ ـ تحقق أن : $\frac{z_A+z_C}{2}\neq\frac{z_B+z_D}{2}$ و استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$ .

3) أـ بيّن أن : $\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ استنتج أن $D$ صورة $A$ بتشابه مباشر مركزه $B$ يطلب تعيين نسبته و زاويته .

بـ ـ بيّن أن المثلث $ADB$ قائم و أن النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$ تنتمي لدائرة يطلب تحديد مركزها و نصف قطرها .

جـ ـ إستنتج إنشاء للرباعي $ABCD$ .

**التمرين13:** بكالوريا شعبة رياضيات 2014 ـ الموضوع الثاني

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ . $A$ و $B$ النقطتان اللتان لاحقتاهما على الترتيب : $a=-2+6i$ و $b=-1+2i$ .

1) أكتب العدد المركب $1+i$ على الشكل الأسي .

2) $S$ التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M$ لاحقتها $z$ النقطة $M'$ لاحقتها $z'$ حيث : $z'=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z+2$ .

أـ $D$ النقطة ذات اللاحقة $d$ حيث : $d=2i$ ، جد لاحقة النقطة $D'$ صورة $D$ بالتحويل $S$ ، ماذا تستنتج ؟

بـ ـ بيّن أن : $z'-d=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z-d)$ و استنتج طبيعة و عناصر التحويل $S$ .

3) $(\Delta)$ المستقيم ذو المعادلة : $3x+5y=11$ .

أـ تحقق أن النقطة $M_0(-3;4)$ تنتمي إلى $(\Delta)$ ، ثم عيّن نقط $(\Delta)$ التي إحداثياتها أعداد صحيحة .

بـ ـ $M_0'$ صورة $M_0$ بالتحويل $S$ ، بيّن أن المستقيمين $(BM_0')$ و $(BA)$ متعامدان .

4) $x$ و $y$ عددان صحيحان من المجال $[-5;5]$ . عيّن مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي بحيث يكون المستقيمان $(BA)$ و $(BM')$ متعامدان ، حيث $M'$ هي صورة $M$ بالتحويل $S$ .

**التمرين 14:** بكالوريا شعبة رياضيات 2015 ـ الموضوع الأول

ينسب المستوي إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقط $A$، $B$، $C$، $H$ و $I$ لاحقاتها على الترتيب :

$z_A=i$ ، $z_B=-2+i$ ، $z_C=-3$ ، $z_H=-3+4i$ و $z_I=-1-i$.

1) أ ـ علم النقط $A$، $B$، $C$، $H$ و $I$ .

ب ـ عيّن النسبة و زاوية للتشابه المباشر الذي مركزه $B$ و يحول النقطة $A$ إلى النقطة $C$ .

2) عيّن $z_G$ لاحقة النقطة $G$ مركز ثقل المثلث $ABC$ .

3) أ ـ أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\dfrac{z_B-z_C}{z_H-z_A}$

ب ـ استنتج أن المستقيمين $(AH)$ و $(BC)$ متعامدان .

جـ ـ بيّن أن $H$ هي نقطة تلاقي إرتفاعات المثلث $ABC$ .

4) بيّن أن النقط $G$ ، $H$ و $I$ في استقامية .

5) $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ حيث : $z+1+i=\sqrt{5}e^{i\theta}$ مع $\theta\in\mathbb{R}$.

أ ـ بيّن أن النقطة $A$ تنتمي إلى المجموعة $(\Gamma)$ .

ب ـ عيّن طبيعة المجموعة $(\Gamma)$ مع تحديد عناصرها المميزة .

جـ ـ أنشئ المجموعة $(\Gamma)$ .

د ـ تحقق أن النقطتين $B$ و $C$ تنتميان إلى المجموعة $(\Gamma)$ .

**التمرين 15:** بكالوريا شعبة رياضيات 2015 ـ الموضوع الثاني

1) حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ التالية : $z^2-2(1-\sqrt{3})z+8=0$ .

(لاحظ أن : $(1+\sqrt{3})^2=4+2\sqrt{3}$)

2) المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ .

$A$ و $B$ نقطتان من المستوي ، لاحقتاهما على الترتيب : $z_A=(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})$ و $z_B=\overline{z_A}$ .

أ ـ بيّن أن : $\dfrac{z_B}{z_A}=e^{\frac{-7\pi}{6}i}$ .

ب ـ استنتج عمدة للعدد المركب $z_A$.

جـ ـ استنتج القيمة المضبوطة لكل من العددين $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

3) أ ـ حل ، في مجموعة الأعداد الصحيحة ، المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية : $7x-2y=1$ .

ب ـ بيّن أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة ، حلا للمعادلة $7x-24y=12$ فإن $x$ يكون مضاعفا للعدد 12.

جـ ـ استنتج كل الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة حلول للمعادلة $7x-24y=12$.

د ـ عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي $n$ التي يكون من أجلها العدد $(z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا تماما.

**التمرين 16:** بكالوريا شعبة رياضيات 2016 ـ الموضوع الأول

1) حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-4z+5=0$.

ب ـ استنتج حلول المعادلة ذات المجهول $z$ الأتية : $\left(z+1+i(1-\sqrt{3})\right)^2-4z+1-4i(1-\sqrt{3})=0$

2) $\theta$ عدد حقيقي حيث : $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$ و $z_0$ عدد مركب طويلته 1 و $\theta$ عمدة له .

أ ـ أكتب العدد المركب $1+i\sqrt{3}$ على الشكل الأسي .

ب ـ عيّن $\theta$ علما أن : $\dfrac{z_0(1+i\sqrt{3})}{\overline{z_0}}=2e^{i\frac{\pi}{2}}$ . ( $\overline{z_0}$ مرافق العدد المركب $z_0$ )

جـ ـ $n$ عدد طبيعي . من أجل قيمة $\theta$ المتحصل عليها أكتب العدد المركب $\left[\dfrac{z_0(1+i\sqrt{3})}{2}\right]^n$ على الشكل المثلثي .

د ـ عيّن قيم العدد الطبيعي $n$ التي من أجلها يكون $\left[\frac{z_0(1+i\sqrt{3})}{2}\right]^n$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

3) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط $A$، $B$ و $C$ التي لاحقاتها على الترتيب $z_A$، $z_B$ و $z_C$ حيث : $z_A=2-i$ ، $z_B=2+i$ و $z_C=1+i\sqrt{3}$ .

أ ـ عيّن $z_D$ لاحقة النقطة $D$ مرجح الجملة $\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$.

بـ ـ استنتج أن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع .

جـ ـ $E$ النقطة من المستوي المركب ذات اللاحقة $z_E$ حيث : $\begin{cases}\arg(z_E-z_A)-\arg(z_E-z_B)=\frac{\pi}{2}\\ \left|\frac{z_E-z_A}{z_E-z_B}\right|=2\end{cases}$

- بيّن أن : $z_E=\frac{14}{5}+\frac{3}{5}i$ .

- بيّن أن النقطة $A$ هي صورة النقطة $B$ بتشابه مباشر يطلب تعيين عناصره المميزة .

4) $M$ نقطة من المستوي المركب لاحقتها $z$ ، $I$ منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$.

أ ـ عيّن $z_I$ لاحقة النقطة $I$ .

بـ ـ $\alpha$ عدد حقيقي. نسمي $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي المركب التي تحقق : $z-z_I=e^{i\alpha}$

- تحقق ان النقطة $E$ تنتمي للمجموعة $(\Gamma)$.

- عيّن طبيعة المجموعة $(\Gamma)$ و عناصرها المميزة عندما يتغيّر $\alpha$ في $\mathbb{R}$.

**التمرين 17: بكالوريا شعبة رياضيات 2016 ـ الموضوع الثاني**

I) 1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2z+2=0$

2) جد العددين المركبين $z_1$ و $z_2$ حيث : $\begin{cases}2z_1-3z_2=5i\sqrt{2}\\ z_1+3z_2=-2i\sqrt{2}\end{cases}$

II) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

النقط $A$، $B$، $C$، $D$ و $H$ لاحقاتها على الترتيب : $z_A=i\sqrt{2}$ ، $z_B=-i\sqrt{2}$ ، $z_C=1+i$ ، $z_D=1-i$ و $z_H=\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}$

حيث $E$ النقطة التي تحقق : $\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{DO}$ .

1) أكتب $z_H$ على الشكل الأسي و استنتج نوع المثلث $BEC$ .

2) $S$ تحويل نقطي في المستوي يرفق بكل نقطة $M$ لاحقتها $z$ النقطة $M'$ لاحقتها $z'$ حيث : $z'=z_A.z+z_B$ .

أ ـ ما هي طبيعة التحويل $S$ ؟ و ما هي عناصره المميزة ؟

بـ ـ أحسب مساحة الدائرة $(\gamma)$ التي مركزها $C$ و نصف قطرها $CD$.

جـ ـ عيّن $(\gamma')$ صورة $(\gamma)$ بالتحويل $S$ و استنتج مساحتها.

3) عيّن $(\delta)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي ( $M$ تختلف عن $B$ و $C$ ) ذات اللاحقة $z$ التي يكون من أجلها العدد $\frac{z_B-z}{z_C-z}$ حقيقيا سالبا.

**التمرين 18: بكالوريا شعبة رياضيات 2017 ـ الموضوع الأول**

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ : $(z-2+2i)(z^2-2\sqrt{2}z+8)=0$

2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ .

نعتبر النقط $A$، $B$ و $C$ التي لاحقاتها : $z_A=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=2(1-i)$ .

أ ـ أكتب كلا من $z_A$ ، $z_B$ و $z_C$ على الشكل الأسي، ثم استنتج أن النقط $A$، $B$ و $C$ تنتمي لدائرة $(\Omega)$ يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

بـ- عيّن قيم العدد الطبيعي $n$ التي من أجلها يكون العدد المركب $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ تخيليا صرفا.

جـ- نسمي $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ حيث $z=z_C-k\left(\frac{z_A}{z_B}\right)$ مع $k$ يمسح $\mathbb{R}_+$ .

تحقق أن النقطة $C$ تنتمي إلى $(\Gamma)$ ، ثم عيّن و أنشئ $(\Gamma)$ .

3) $r$ الدوران الذي مركزه $O$ و زاويته $\frac{2\pi}{3}$ و $h$ التحاكي الذي مركزه $O$ و نسبته $-2$ .

عيّن طبيعة التحويل $h\circ r$ و عناصره المميزة ، ثم استنتج صورة الدائرة $(\Omega)$ بالتحويل $h\circ r$ .

**التمرين19: بكالوريا شعبة رياضيات 2017 ـ الموضوع الثاني**

I) أكتب العدد $\left(\frac{5}{2}+i\right)^2$ على الشكل الجبري ، ثم استنتج الجذرين التربيعيين للعدد المركب : $\frac{21}{4}+5i$ .

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم متعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ .

نعتبر النقط $A$، $B$، $C$ و $I$ ذات اللواحق : $z_A=\frac{3}{2}+\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ ، $z_B=-\frac{3}{2}i$ و $z_C=-\overline{z_A}$ و $z_I=i$ .

1) أكتب كلا من $z_A$ و $z_C$ على الشكل الجبري .

2) أكتب العدد المركب $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$ الشكل الأسي مستنتجا طبيعة المثلث $ABC$ .

3) ليكن $S$ التشابه المباشر الذي مركزه $B$ و يحول $A$ إلى $I$ .

أ- أكتب العبارة المركبة للتشابه $S$ ، ثم عيّن نسبته و زاويته .

بـ- نعرّف من أجل كل عدد طبيعي $n$ حيث $n\geq 2$ ، التحويل النقطي $T_n$ كمايلي: $T_n=\underbrace{S\circ S\circ .....\circ S}_{n\ fois}$

عيّن قيم العدد الطبيعي $n$ حتى يكون $T_n$ تحاكيا ، عيّن عندئذ عناصره المميزة .

**التمرين20: بكالوريا شعبة رياضيات 2017 ـ الدورة الإستدراكية ـ الموضوع الأول**

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ : $2z^2-10z+\frac{29}{2}=0$

II) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ .

نعتبر النقط $A$، $B$، $C$ و $D$ التي لاحقاتها : $z_A=\frac{3}{2}+\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_B=\frac{3}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$ ، $z_C=-\overline{z_A}$ و $z_D=i$ .

1) أ- أكتب كلا من $z_A$ ، $z_B$ على الشكل الجبري ، ثم علم $A$، $B$، $C$ و $D$ في المعلم السابق .

بـ- أكتب العدد المركب $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$ على الشكل الأسي ثم استنتج طبيعة المثلث $ABC$ .

2) جد لاحقة النقطة $E$ نظيرة $B$ بالنسبة للنقطة $D$ ، ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCE$ .

3) أكتب العبارة المركبة للتشابه $S$ الذي مركزه $B$ الذي يحوّل $A$ إلى $D$ ثم حدد نسبته و زاويته .

4) نعرف متتالية النقط $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ كما يلي : $A_0=A$ و $A_{n+1}=S(A_n)$ . ( $z_n$ لاحقة النقطة $A_n$ )

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $z_n-z_B=5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}e^{i\frac{\pi}{4}(n+1)}$

بـ- عيّن قيم $n$ الطبيعية حتى تنتمي النقط $A_n$ إلى المستقيم $(AB)$

**التمرين21: بكالوريا شعبة رياضيات 2017 ـ الدورة الإستدراكية ـ الموضوع الثاني**

I) نعتبر في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2(1-\sin\alpha)z+2(1-\sin\alpha)=0\ ....\ (E)$ . حيث $\alpha$ عدد حقيقي .

(نرمز بـ : $z_1$ و $z_2$ إلى حلي المعادلة $(E)$ )

1) عيّن الحلين $z_1$ و $z_2$ بدلالة $\alpha$ .

2) نضع : $\alpha = \frac{\pi}{6}$ . بيّن أن : $z_1^{2017} + z_2^{2017} = 1$ .

**II)** المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ .

نعتبر النقط $A$، $B$ و $C$ التي لاحقاتها : $z_A = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = 2z_A$ .

1) عيّن قيم العدد الطبيعي $n$ التي يكون من أجلها $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ عددا حقيقيا موجبا .

2) ليكن التحويل النقطي $S$ الذي يرفق بكل نقطة $M$ ذات اللاحقة $z$ النقطة $M'$ ذات اللاحقة $z'$ و المعرّف بـ :
$z' = (1+z_A)z + 2z_B$ .
عيّن طبيعة التحويل $S$ ، ثم حدّد عناصره المميزة .

3) $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ ذات الاحقة $z$ حيث : $\arg(\bar{z} - z_B) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ و $k \in \mathbb{Z}$ .
تحقق ان النقطة $C$ تنتمي إلى $(\Gamma)$ ، ثم حدّد طبيعة المجموعة $(\Gamma)$ و أنشئها.

**التمرين 22**: بكالوريا شعبة رياضيات 2018 ـ الموضوع الأول

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، $\theta$ عدد حقيقي من المجال $]-\pi;\pi]$ .

**I)** حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ : $(z^2 - 2z + 2)(z^2 - 2(\sin\theta)z + 1) = 0$

**II)** $A$، $B$، $C$ و $D$ نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب :

$z_A = -\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i}$ ، $z_B = 1 - i$ ، $z_C = \sin\theta + i\cos\theta$ و $z_D = \overline{z_C}$ ( $\overline{z_C}$ يرمز إلى مرافق $z_C$ )

1) أكتب الأعداد $z_A$ ، $z_B$ ، $z_C$ و $z_D = \overline{z_C}$ على الشكل الأسي .

2) $E$ نقطة من المستوي لاحقتها $z_E$ حيث : $z_E = \frac{z_A}{z_B}$ .
بيّن أن النقط $C$، $D$ و $E$ تنتمي الى دائرة واحدة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

3) ليكن $S$ التشابه المباشر الذي مركزه النقطة $A$ و زاويته $\frac{\pi}{4}$ و نسبته $(2\sqrt{2} - 2)$ .
عيّن قيمة $\theta$ حتى تكون النقطة $B$ صورة النقطة $C$ بالتشابه المباشر $S$ .

4) نضع : $\theta = \frac{-3\pi}{4}$ . عيّن قيم العدد الطبيعي $n$ و التي من أجلها يكون العدد $(z_D)^n$ تخيليا صرفا.

**التمرين 23**: بكالوريا شعبة رياضيات 2018 ـ الموضوع الثاني

1) $m$ عدد حقيقي ، نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ التالية : $(E)$ .... $z^2 + (m+1)z + (2m-1) = 0$
عيّن قيم العدد الحقيقي $m$ التي من أجلها تقبل المعادلة $(E)$ حليّن مركبين غير حقيقيين .

2) نضع : $m = 3$ . حل المعادلة $(E)$ .

3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط $A$، $B$، $C$ و $E$ التي لاحقاتها :
$z_A = -2 + i$ ، $z_B = -2 - i$ ، $z_C = \alpha$ و $z_E = \sqrt{3}$ حيث $\alpha$ عدد حقيقي و $\alpha > -2$ .
بيّن أن قيمة $\alpha$ التي من أجلها يكون المثلث $ABC$ متقايس الأضلاع هي $(-2 + \sqrt{3})$
نضع في كل مايأتي: $z_C = -2 + \sqrt{3}$ .

4) أكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_E}{z_A - z_B}$ على الشكل الأسي ثم استنتج أن :
أ ـ المستقيمان $(AB)$ و $(EC)$ متعامدان .
بـ ـ النقط $A$، $B$ و $E$ تنتمي إلى نفس الدائرة $(\gamma)$ و تعيين مركزها و نصف قطرها.

5) ليكن $r$ الدوران الذي يحول النقطة $B$ إلى $C$ و يحول $C$ إلى $A$ ، عبارته المركبة هي: $z' = az + \left(\frac{\sqrt{3} - 6}{2}\right) + i\left(\frac{2\sqrt{3} - 1}{2}\right)$
.

أ ـ أحسب العدد المركب $a$ ، ثم استنتج زاوية الدوران $r$ .

بـ ـ تحقق أن النقطة $G$ مركز ثقل المثلث $ABC$ هي مركز الدوران $r$ .

**التمرين 24:** بكالوريا شعبة رياضيات 2019 ـ الموضوع الأول

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ . نعتبر النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$ حيث :

$z_A=1+i\sqrt{2}$ ، $z_B=i$ ، $z_C=\overline{z_A}$ ، $z_D=\overline{z_B}$ و $z_E=1$ .

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ : $(z^2+1)(z^2-2z+3)=0$ .

2) أ ـ أحسب كلا من $|z_A-1|$ ، $|z_B-1|$ و $|z_C-z_E|$ ثم تحقق أن النقط الأربعة $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$ تنتمي إلى نفس الدائرة التي يطلب تعيين مركزها و طول نصف قطرها.

بـ ـ بيّن أن : $z_B-z_E=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(z_A-z_E)$ ، ثم استنتج أن $B$ هي صورة $A$ بتحويل نقطي يطلب تعيين عناصره المميزة .

ـ ما طبيعة المثلث $ABE$ ؟

3) عيّن لاحقتي الشعاعين $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{AE}$ محددا طبيعة الرباعي $ABDE$ .

4) $\vec{w_1}$ و $\vec{w_2}$ شعاعان من المستوي لاحقاتهما على الترتيب $z_1$ و $z_2$ .

أ ـ برهن أن : ( $\vec{w_1}$ و $\vec{w_2}$ متعامدان ) يكافئ ( $z_1.\overline{z_2}+\overline{z_1}.z_2=0$ ) .

بـ ـ عيّن مجموعة النقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ حيث : $(z-z_A)(\overline{z}-\overline{z_D})+(z-z_B)(\overline{z}-\overline{z_C})=0$

**التمرين 25:** بكالوريا شعبة رياضيات 2019 ـ الموضوع الثاني

1) نضع من أجل كل عدد مركب $z$ ، $P(z)=z^4-6z^3+29z^2-24z+100$

أ ـ بيّن أنه من أجل كل عدد مركب $z$ : $\overline{P(z)}=P(\overline{z})$ ، ثم استنتج أنه إذا كان $z$ حلا للمعادلة $P(z)=0$ فإن $\overline{z}$ حلا لها .

بـ ـ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$ علما أنها تقبل حلا تخيليا صرفا.

2) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، النقط $A$ ، $B$ ، $M$ و $M'$ التي لاحقاتها على الترتيب : $2i$ ، $3-4i$ ، $z$ و $z'$ حيث : $z'=\frac{-iz+4+3i}{z-2i}$ مع $z\neq 2i$ .

و لتكن $I$ مرجح الجملة $\{(A;2),(B;1)\}$ و $J$ مرجح الجملة $\{(A;-2),(B;1)\}$ .

أ ـ عيّن اللاحقتين $z_I$ و $z_J$ للنقطتين $I$ و $J$ على الترتيب .

بـ ـ لتكن $(E)$ مجموعة النقط $M(z)$ التي يكون من أجلها $|z'|=2$ .

بيّن أن ( النقطة $M$ من $(E)$ ) يكافئ ( $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{JM}=0$ ) ، ثم عيّن $(E)$ و أنشئها.

جـ ـ لتكن $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M(z)$ التي يكون من أجلها $\arg(z')=2k\pi$ حيث $k$ عدد صحيح .

تحقق أن النقطة $D$ ذات اللاحقة $\frac{9}{2}-\frac{5}{2}i$ تنتمي إلى $(\Gamma)$ ، ثم عيّن وأنشئ $(\Gamma)$ .

3) عيّن الشكل الجبري لـلاحقة النقطة $G$ تقاطع المجموعتين $(E)$ و $(\Gamma)$ .

**التمرين 26:** بكالوريا شعبة رياضيات 2023 ـ الموضوع الثاني

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ : $(\overline{z}-1+i\sqrt{3})(z^2-2\sqrt{2}z+4)=0$

2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ .

نعتبر النقط $A$ ، $B$ و $C$ التي لاحقاتها $z_A$ ، $z_B$ و $z_C$ على الترتيب حيث : $z_A=\sqrt{2}(1+i)$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=1+i\sqrt{3}$ .

أ ـ أكتب $z_A$ ، $z_B$ و $z_C$ على الشكل المثلثي .

بـ ـ استنتج أن النقط $A$ ، $B$ و $C$ التي تنتمي إلى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

3) نضع : $K=\frac{z_C}{2z_A}$ .

أ ـ أحسب طويلة العدد المركب $K$ و عمدة له ثم أكتبه على الشكل الجبري .

بـ- استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$ .

4) $n$ عدد طبيعي ، نضع : $L_n = z_A{}^n + z_B{}^n$ .

بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، العدد المركب $L_n$ حقيقي .

**التمرين27: بكالوريا شعبة رياضيات 2024 ـ الموضوع الأول**

**I)** أ ـ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ الآتية : $(z-8+6i)(z^2-2z+4)=0$ .

بـ- جد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $8-6i$ .

**II)** في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، نعتبر النقط $A$ ، $B$ و $C$ التي لاحقاتها على الترتيب : $z_A$ ، $z_B$ و $z_C$

حيث : $z_A = 1+i\sqrt{3}$ ، $z_B = iz_A$ و $z_C = -z_A$ .

4) تحقق أن : $z_A - z_B = i(z_C - z_B)$ ثم بيّن أن المثلث $ABC$ قائم و متساوي الساقين .

5) أ ـ أكتب كلا من $z_A$ ، $z_B$ و $z_C$ على الشكل المثلثي .

بـ- استنتج أن النقط $A$ ، $B$ و $C$ التي تنتمي إلى نفس الدائرة ، يُطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

6) النقطة $D$ هي نظيرة $B$ بالنسبة إلى مبدأ المعلم .

بيّن أن الرباعي $ABCD$ مربع.

**التمرين28: بكالوريا شعبة رياضيات 2024 ـ الموضوع الثاني**

**I)** حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ الآتية : $(z^2+2i)(z^2-2\sqrt{3}z+6)=0$ .

**II)** في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، نعتبر النقط $A$ ، $B$ و $C$ التي لاحقاتها على الترتيب : $z_A$ ، $z_B$ و $z_C$

حيث : $z_A = 1-i$ ، $z_B = -z_A$ و $z_C = \sqrt{3}(1+i)$ .

1) أكتب كلا من $z_A$ ، $z_B$ و $z_C$ على الشكل المثلثي .

2) أكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الجبري ثم المثلثي و بيّن أن المثلث $ABC$ متقايس الأضلاع .

3) أ ـ عيّن لاحقة النقطة $G$ مركز الدائرة المحيطة بالمثلث $ABC$ ثم أحسب نصف قطرها .

بـ- النقطة $D$ هي نظيرة $C$ بالنسبة إلى مبدأ المعلم .

بيّن أن الرباعي $ABCD$ معيّن .

**الأستاذ زايدي علاء الدين "**

**يتنمني لكم التوفيق و النجاح في امتحان شهادة البكالوريا**

@LILOUU_ZD_PROF_MATH

ALADIN MATH

TEACHER