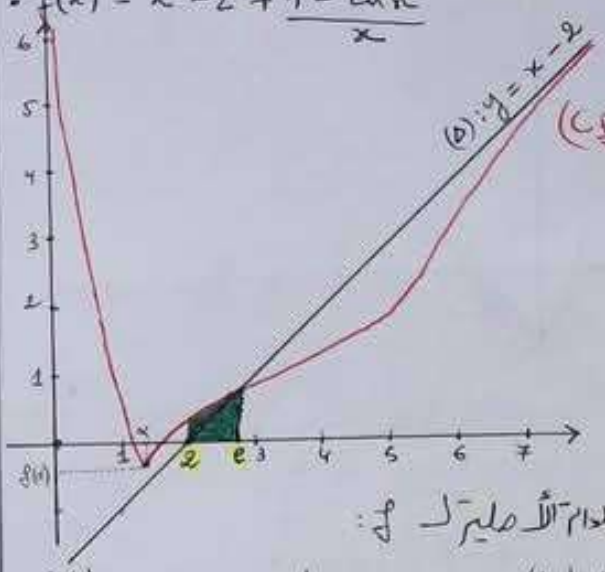
تطبيقات محلولة حول حساب التكاملات والمساحات

الأستاذ: بوريدان عبدالنور

تطبيق 1:

- $f(x) = x - 2 + \dfrac{1 - \ln x}{x}$



1 الدالة الأصلية لـ f:

$f(x) = x - 2 + \dfrac{1 - \ln x}{x} = x - 2 + (1 - \ln x)\times\dfrac{1}{x}$

وهي من الشكل: $f(x) = ax + b + u' \times u$

إذن: $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + \dfrac{1}{2}(1 - \ln x)^2 + C$

لأن: $\left(u.u' = \dfrac{1}{2}u^2 + C\right)$

2- حساب مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (Cf) ومحور الفواصل والمستقيمين: $x = e$ و $x = 2$

- في الحالة العامة $S = \int_a^b |f(x)|\,dx$

إذن: بما أن (Cf) يقع فوق محور الفواصل في المجال: $[2;e]$ إذن المساحة تكتب:

$$S = \int_2^e f(x)\,dx = \int_2^e \left(x - 2 + \frac{1 - \ln x}{x}\right)dx$$

$$= F(x)\Big|_2^e = F(e) - F(2)$$

إذن:

$$S = \left[\frac{1}{2}e^2 - 2e + \frac{1}{2}(1 - \ln e)\right] - \left[\frac{1}{2}(2)^2 - 2(2) + \frac{1}{2}(1 - \ln(2))\right]$$

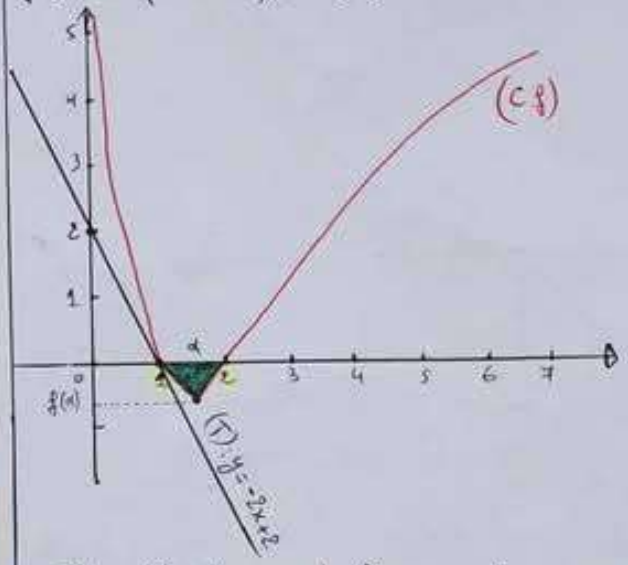
$$= \frac{1}{2}e^2 - 2e + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 2 + 4 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(2)$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - 2e + 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(2)$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - 2e + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln(1) = \frac{1}{2}\left(e^2 - 4e + 3 + \ln(2)\right)$$

تطبيق 2:

$f(x) = (2x - 4)\ln(x)$.



1- أثبت أن: $F(x) = (x^2 - 4x)\ln x - \frac{1}{2}x^2 + 4x$ دالة أصلية لـ $f(x)$

$F'(x) = f(x)$ معناه $f(x)$ دالة أصلية لـ $F(x)$.

$$F'(x) = (2x - 4)\ln x + (x^2 - 4x)\left(\frac{1}{x}\right) - x + 4$$

$$= (2x - 4)\ln x + x - 4 - x + 4 = (2x - 4)\ln x = f(x)$$

2- حساب مساحة الحيز $A(x)$ المحصور بين (Cf) و $y = 0$ و المستقيمين $x = 1$ و $x = 2$

- في المجال $[1;2]$، (Cf) يقع تحت محور الفواصل.

معناه: $A(x) = \int_a^b |f(x)|\,dx$.

$$= \int_1^2 -f(x)\,dx = -\int_1^2 f(x)\,dx$$

$$= -\left(F(x)\right)\Big|_1^2 = -\left[F(2) - F(1)\right]$$

$$= -F(2) + F(1)$$

$$= -\left[(2^2 - 4(2))\ln(2) - \frac{1}{2}(2)^2 + 4(2)\right] + \left[(1^2 - 4(1))\ln(1) - \frac{1}{2}(1)^2 + 4(1)\right]$$

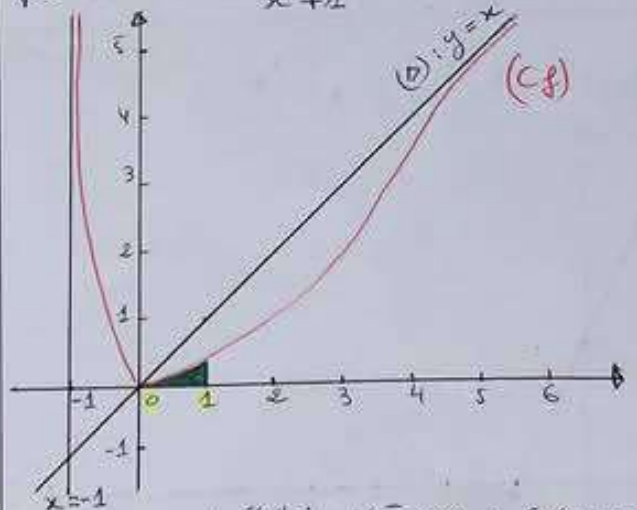
$$= 4\ln(2) - 6 - \frac{1}{2} + 4$$

$$= 4\ln(2) - \frac{5}{2} \simeq 0{,}27$$

الأستاذ: بوريدان عبدالنور

تطبيق 3

$f(x) = x - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$



- حساب مساحة الحيز "S" المحصور بين المنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين $x=0$ و $x=1$

1- نحسب أولا الدالة الأصلية لـ $f(x)$:

$f(x) = x - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$

$f(x) = x - \ln(x+1) \times \frac{1}{x+1}$

$f(x) = ax + u \times u'$ وهي من الشكل:

إذن: $\boxed{F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\left(\ln(x+1)\right)^2 + C}$

لأن: $\int u' \times u = \frac{1}{2}u^2$

2- حساب S مساحة الحيز بما أن (C_f) فوق محور الفواصل في المجال $[0,1]$:

إذن: $S = \int_a^b |f(x)|\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

$= \int_0^1 f(x)\,dx = F(x)\Big|_0^1$

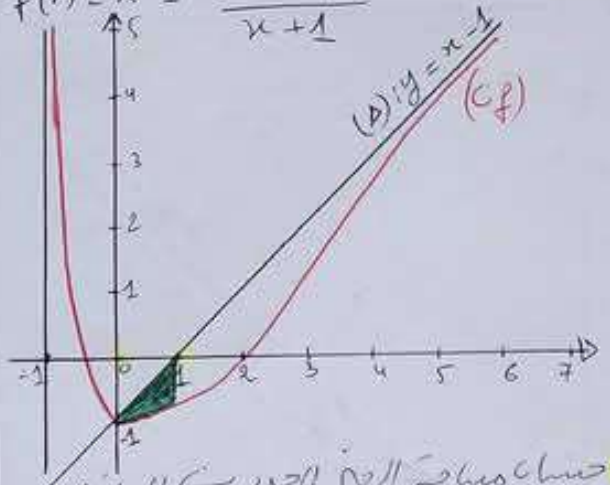
$= F(1) - F(0)$

$= \left[\frac{1}{2}(1)^2 - \frac{1}{2}\left(\ln(1+1)\right)^2\right] - \left[\frac{1}{2}(0)^2 - \frac{1}{2}\left(\ln(0+1)\right)^2\right]$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\ln(2)\right)^2 \simeq 0,26$

تطبيق 4:

$f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$



- حساب مساحة الحيز المحدد بين المنحنى (C_f) و $(\Delta): y = x-1$ والمستقيمين $x=0$ و $x=1$ أي:

$S = \int_a^b [g - f(x)]\,dx$:(Cf) فوق (Δ) لأن

$S = \int_0^1 (x-1) - \left(x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)dx$

$S = \int_0^1 x - 1 - x + 1 + \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,dx$

$S = \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,dx$.

$S = \int_0^1 \ln(x+1) \times \frac{1}{x+1}\,dx$

من الشكل: $\int u \times u' = \frac{1}{2}u^2$

إذن: $S = \left[\frac{1}{2}\left(\ln(x+1)\right)^2\Big|_0^1\right]$

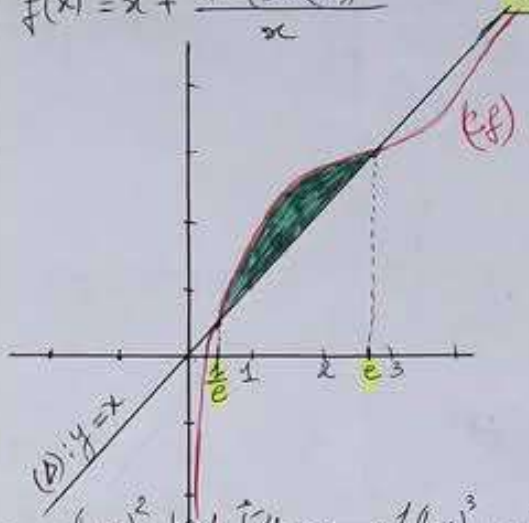
$= \frac{1}{2}\left[\left(\ln(1+1)\right)^2 - \left(\ln(0+1)\right)^2\right]$.

$= \frac{1}{2}\left(\ln(2)\right)^2 \simeq 0,24$

الأستاذ:
بوزيداوي عبد النور

تطبيق 5:

$f(x) = x + \frac{1-(\ln(x))^2}{x}$



1- إثبات أن: $x \mapsto \frac{(\ln x)^2}{x}$ دالة أصلية لـ $x \mapsto \frac{1}{3}(\ln x)^3$ على $]0;+\infty[$

معناه نثبت أن:

$\left[\frac{1}{3}(\ln x)^3\right]' = \frac{(\ln x)^2}{x}$.

$\left[\frac{1}{3}(\ln x)^3\right]' = \frac{1}{3} \times 3 \cdot \frac{1}{x} \cdot (\ln x)^2 = \frac{(\ln x)^2}{x}$.

2- استنتاج الدالة الأصلية $F(x)$ لـ $f(x)$:

لدينا: $f(x) = x + \frac{1-(\ln(x))^2}{x}$

أي: $f(x) = x + \frac{1}{x} - \frac{(\ln x)^2}{x}$

إذن: $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \ln(x) - \frac{1}{3}(\ln x)^3$

3- حساب العدد A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات $y = x$ و $x = \frac{1}{e}$ و $x = e$

$A = \int_a^b (f(x) - y)\,dx$ ((Δ) تحت C_f)

2,

$A = \int_{1/e}^{e} \left(x + \frac{1-(\ln x)^2}{x} - x\right) dx$

$A = \int_{1/e}^{e} \left(\frac{1}{x} - \frac{(\ln x)^2}{x}\right) dx$

$A = \ln x \Big|_{1/e}^{e} - \frac{1}{3}(\ln x)^3 \Big|_{1/e}^{e}$

$A = \ln x \Big|_{e^{-1}}^{e} - \frac{1}{3}(\ln x)^3 \Big|_{e^{-1}}^{e}$

$A = 1 - (-1) - \frac{1}{3}(1-(-1)) = 2 - \frac{1}{3}(2)$.

$= \frac{6-2}{3} = \frac{4}{3}$.

تطبيق 6:

- و دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$g(x) = 1 + xe^{-x}$.

- نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كالتالي:

$h(x) = (x+1)e^{-x}$

1- حساب $h'(x)$ واستنتاج دراسة إشارة $g(x)$

$h'(x) = -xe^{-x}$

- دالة أصلية لـ $g(x)$:

$g(x) = 1 + xe^{-x}$

$g(x) = 1 - (-xe^{-x})$ (الأسباب: لدينا ... وبالتعويض)

$g(x) = 1 - h'(x)$

إذن: الدالة $G(x)$ الأصلية لـ $g(x)$:

$G(x) = x - h(x)$.

$G(x) = x - (x+1)e^{-x} + C$.

2- حساب مساحة الحيز المحصور بين:

المنحنى (C) والمستقيمات $y=1$ و $x=0$ و $x=1$ ($y=1$ يقع فوق C_g)

$S = \int_a^b [g(x) - y]\,dx$.

$S = \int_0^1 [1 - h'(x) - 1]\,dx$

$S = \int_0^1 -h'(x)\,dx = -h(x)\Big|_0^1$

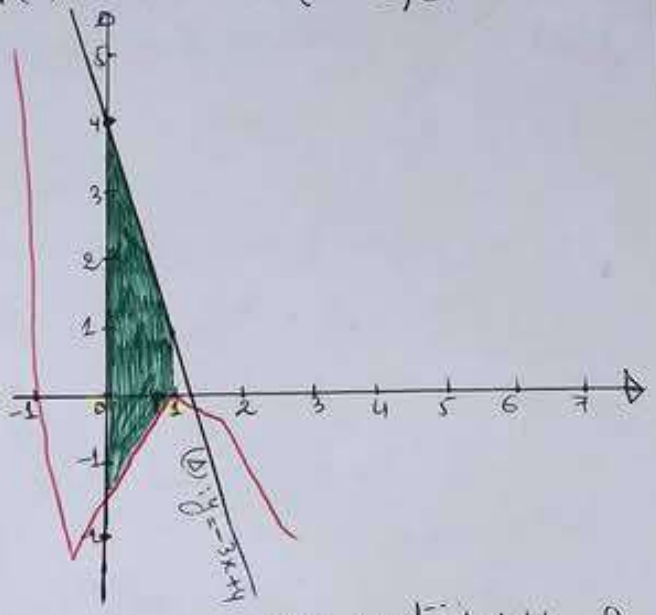
$S = -h(1) + h(0)$

$= -(2e^{-1}) + (e^0) = -2e^{-1} + 1$

$\approx 0{,}26$.

تطبيق 7:

$f(x) = -3x + 4 + (x^2 - 2)e^{-x+1}$



- h و H الدالتان العرفتان بـ:

$h(x) = (-x^2 + 2)e^{-x+1}$

و $H(x) = (ax^2 + bx)e^{-x+1}$

1- إيجاد a و b حتى تكون H دالة أصلية لـ h

معناه: $H'(x) = h(x)$

أي: $H'(x) = (2ax + b)(e^{-x+1}) + (-e^{-x+1})(ax^2 + bx)$

$= (2ax + b - ax^2 - bx)e^{-x+1}$

$= [-ax^2 + (2a - b)x + b]e^{-x+1}$ ... (1)

$= (-x^2 + 2)e^{-x+1}$ ... (2)

بالمطابقة نجد:

$\begin{cases} -a = -1 \Rightarrow a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$

إذن: $H(x) = (x^2 + 2x)e^{-x+1}$

2- حساب $\int_0^1 [-3x + 4 - f(x)]\,dx$ وتفسير النتيجة هندسياً:

$\int_0^1 [-3x + 4 - [-3x + 4 + (x^2 - 2)e^{-x+1}]]\,dx$

$= \int_0^1 -(x^2 + 2)e^{-x+1}\,dx$

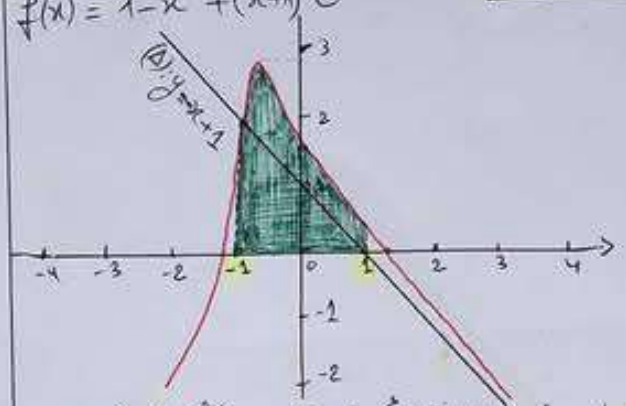
$= \int_0^1 (-x^2 + 2)e^{-x+1}\,dx = \int_0^1 h(x)\,dx$

$= H(x)\Big|_0^1 = H(1) - H(0) = 3e^0 - 0e^1 = 3$

- قيمة هذا التكامل تمثل مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و (Δ) والمستقيمين $x = 0$ و $x = 1$

تطبيق 8:

$f(x) = 1 - x + (x+1)e^{-2x}$.



1- إيجاد الدالة الأصلية لـ: $x \mapsto (x+1)e^{-2x}$

باستعمال التكامل بالتجزئة:

نضع: $u(x) = (x+1)$ و $v'(x) = e^{-2x}$

أي: $u(x) = x+1 \longrightarrow u'(x) = 1$.

$v'(x) = e^{-2x} \longrightarrow v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$

$\int (x+1)e^{-2x} = -\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x} - \int -\frac{1}{2}e^{-2x}\,dx$

$= -\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx + c$

$= -\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) + c$

$= -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + c$

$= -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{3}{4}e^{-2x} + c$

2- مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و $y = 0$ والمستقيمين $x = -1$ و $x = 1$:

$S = \int_a^b |f(x)|\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

$= \int_{-1}^1 [1 - x + (x+1)e^{-2x}]\,dx$

$= \int_{-1}^1 (1-x)\,dx + \int_{-1}^1 (x+1)e^{-2x}\,dx$

$= x - \frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^1 + \left(-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{3}{4}e^{-2x}\right)\Big|_{-1}^1$

$= 1 - \frac{1}{2}(1) - \left(-1 + \frac{1}{2}(1)\right) - \frac{1}{2}(1)e^{-2} - \frac{3}{4}e^{-2}$

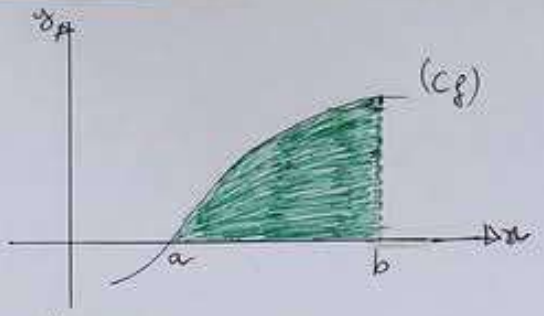
$-\left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{3}{4}e^2\right)$.

$= 1 - e^2 - \frac{3}{4}e^{-2} + \frac{3}{4}e^2$

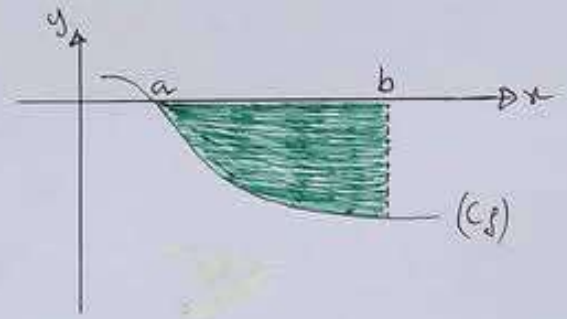
$= -\frac{7}{4}e^{-2} + \frac{3}{4}e^2 + 1$

الأستاذ: لوريدان عبد النور.

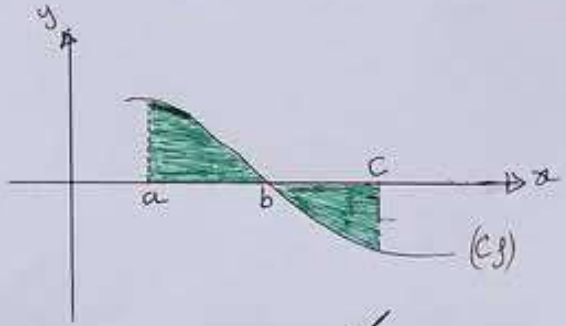
- حساب حيز المستوى "S" -



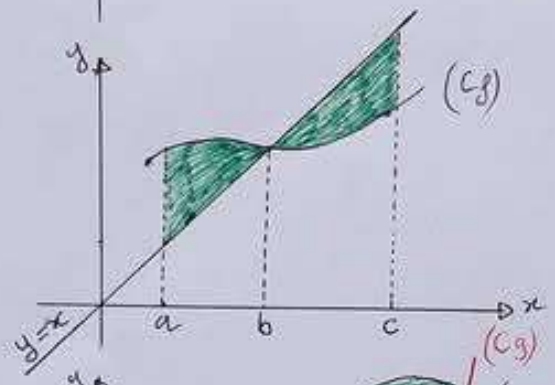
$$S = \int_a^b f(x)\,dx .$$



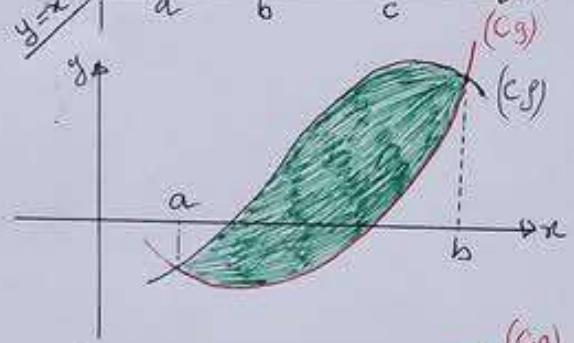
$$S = \int_a^b -f(x)\,dx .$$



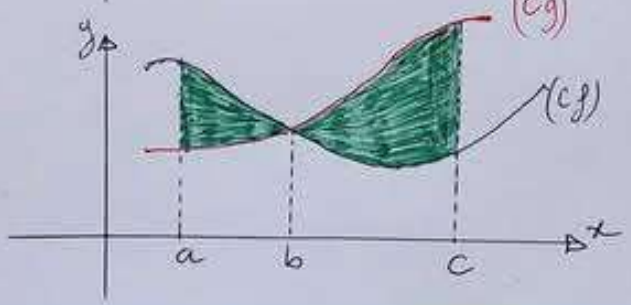
$$S = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c -f(x)\,dx$$



$$S = \int_a^b [f(x)-x]\,dx + \int_b^c [x-f(x)]\,dx$$



$$S = \int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx .$$



$$S = \int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx + \int_b^c [g(x)-f(x)]\,dx$$

الأستاذ: بوزيدان عبد النور