ثانوية: ....باتنة .
ميدان التعلم: هندسة
الوحدة التعلمية الزوايا الموجهة وحساب المثلثات
المحتوى المعرفي _ الزوايا الموجهة لشعاعين و اقياس الزوايا الموجهة

مذكرة سير حصة رقم 01.

الأستاذ:بن حولة عثمـــــان
المــادة: رياضيــات
المـدة: 02 ساعة
المستوى 2 ع ت .

الكفاءات القبلية:
- مفاهيـــــم أولية حول الدوال الدائرة المثلثية .

الكفاءات المستهدفة:- التعرف على زاوية موجهة لشعاعين .

توجيهات و تعاليق من المنهاج:
- مفاهيـــــم أولية حول الدوال الدائرة المثلثية و **اقياس الزوايا التحويل من الرديان الى الدرجة والعكس .**

مراحل الحصة	سيــر الحصـــة	المـدة

مناقشة النشاط رقم01 ص210 :

التحويل من الدرجة الى الراديان و من الراديان الى الدرجة باستعمال التناسبية $180^0 \to \pi rad$

القيس بالدرجة	15^0	22.5^0	36^0	105^0	120^0	67.5^0	75^0	52.5^0	105^0	142.5^0
القيس بالراديان	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{24}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{19\pi}{24}$

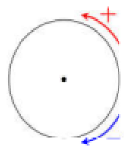
مرحلة الإنطلاق (الإستعداد)

20 دقيقة

زاوية موجهة لشعاعين غير معدومين

تمهيد:

- يوجه المستوي توجيها مباشرا(او توجيها موجبا) و يسمى الاتجاه الآخر الاتجاه غير المباشر (او



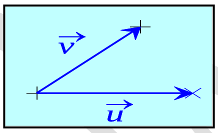
الاتجاه السالب)

- اصطلاحا نختار الاتجاه المباشر الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة

15 دقيقة

- في المستوي الموجه نسمي دائرة مثلثية كل دائرة موجهة في الاتجاه المباشر و التي نصف قطرها 1

تعريف: في المستوي الموجه ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين غير معدومين . الثنائية $(\vec{u};\vec{v})$ تسمى زاوية موجهة للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$



25 دقيقة

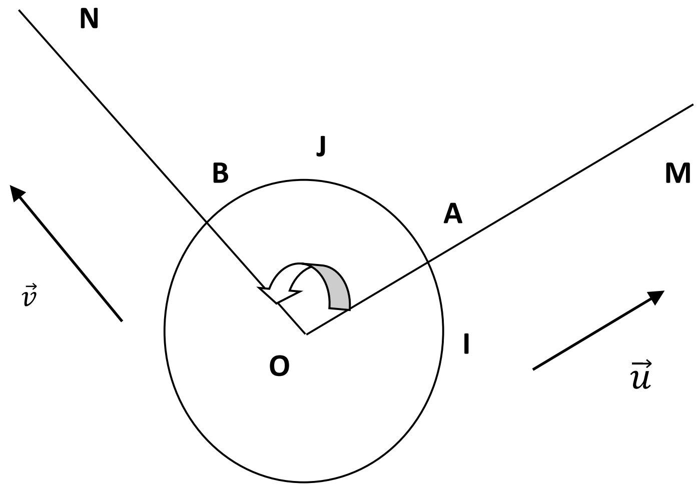
قيس زاوية موجهة لشعاعين في المستوي الموجه :

ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين غير معدومين.

مرحلة التكوين (البنــاء)

مرحلة الإستثمار) التحصيل(

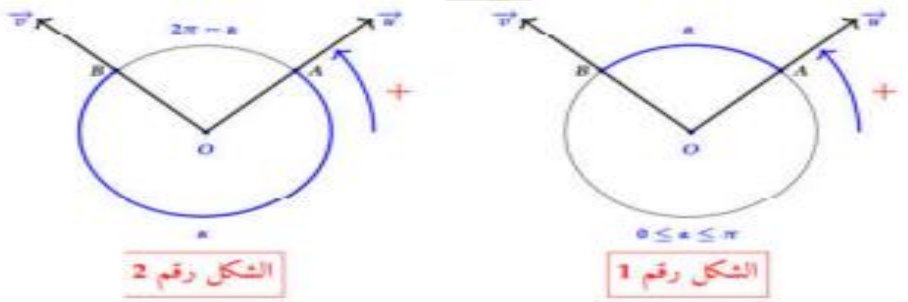
(C) هي الدائرة المثلثية التي مركزها O و لتكن M و N نقطتين من المستوي حيث $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{ON}=\vec{v}$. المستقيم (OM) يقطع (C) في A و المستقيم (ON) يقطع (C) في B .قيس الزاوية الموجهة $(\vec{u};\vec{v})$ بالراديان هو كذلك قيس للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON})$ بالراديان.



تعريف: في المستوي الموجه ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين غير معدومين. اذا كان x قيسا للزاوية الموجهة $(\vec{u};\vec{v})$ فان كل الاعداد من الشكل $x+2\pi k$ هي اقياس ايضا للزاوية $(\vec{u};\vec{v})$حيث $k\in Z$

تعبير : نقبل التجاوز في التعبير الذي نعبر به على الزاوية الموجهة وقيس لها نفس الوقت و نقول للزاوية $(\vec{u};\vec{v})$ تساوي x

خاصية: من بين اقياس الزاوية الموجهة $(\vec{u};\vec{v})$يوجد قيس وحيد ينتمي الى المجال $]-\pi;\pi]$ يسمى القيس الرئيسي للزاوية الموجهة



القيمة المطلقة للقيس الرئيسي للزاوية $(\vec{u},\vec{v})$ يساوي القيس بالراديان للزاوية الهندسية المشكلة بـ: $\vec{u}$ و $\vec{v}$

في الشكل الأول القيس الرئيسي هو α أما في الشكل الثاني القيس الرئيسي هو $\alpha-2\pi$. كون $\pi<\alpha<2\pi$ نحصل $-\pi<\alpha-2\pi<0$. إذن في الحالتين القيس الرئيسي ينتمي إلى $]-\pi;\pi]$

في الشكل الأول قيس الزاوية الهندسية $\widehat{AOB}$ هو α الذي هو القيس الرئيسي لـ $(\vec{u},\vec{v})$ أما في الشكل الثاني قيس $\widehat{AOB}$ هو $2\pi-\alpha$. لكن $|\alpha-2\pi|=2\pi-\alpha$ و $(\alpha-2\pi)$ هوالقيس الرئيسي للزاوية $(\vec{u};\vec{v})$

نتائج:_1)القيس الرئيسي للزاوية المعدومة $(\vec{u};\vec{v})$ هو 0

2) القيس الرئيسي للزاوية المستقيمة $(\vec{u};\overrightarrow{-u})$ هو π

3) القيس الرئيسي للزاوية القائمة المباشرة هو $\frac{\pi}{2}$

4)القيس الرئيسي للزاوية القائمة غيرالمباشرة هو $\frac{-\pi}{2}$

5)اذا كان x هو القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{u};\vec{v})$ فان $|x|$ هو قيس الزاوية الهندسية المكونة من $\vec{u}$ و $\vec{v}$

تعيين القيس الرئيسي للزاوية الموجهة

طريقة: إذا كان عدد حقيقي α قيس لزاوية موجهة $(\vec{u},\vec{v})$ فإنه يوجد عدد صحيح وحيد k حيث :

وحيد k حيث :

$-\pi < \alpha + 2k\pi \le \pi$ يكفي إيجاد k إنطلاقا من هذا الحصر لإيجاد القيس الرئيسي لزاوية موجهة

مـــثـال - 1 -

لنعطي القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{u},\vec{v})$ حيث : $(\vec{u},\vec{v}) = \frac{65\pi}{3}\text{rad}$

فإن : $x = \frac{65\pi}{3} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$ و $-\pi < x \le \pi$

ومنه $-\pi < \frac{65\pi}{3} + 2k\pi \le \pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

$$-1 < \frac{65}{3} + 2k \le 1$$

$$-\frac{68}{6} = -11.33 < k \le -\frac{62}{6} = -10.33$$

إذن $k = -11$. وبالتالي $x = \frac{65\pi}{3} - 22\pi = -\frac{\pi}{3}$

طريقة 2 :

$$\frac{65\pi}{3} = \frac{66\pi - \pi}{3}$$
$$= 22\pi - \frac{\pi}{4}$$
$$= 2(11)\pi - \frac{\pi}{3}$$

تمرين 1☹ الحل موجود في الكتاب ص 213)

اوجد القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{u};\vec{v})$ التي قيسها α في كل حالة :

1) $\alpha = 2007rad$ 2) $\alpha = -\frac{189\pi}{4}$ 3) $\alpha = \frac{65\pi}{8}$

تمرين 27 ص288 (واجب منزلي)

علاقة شال:

مبرهنة:من اجل كل ثلاثة اشعة غير معدومة: $\vec{u};\vec{v};\vec{w}$ لدينا: $(\vec{u};\vec{v})+(\vec{v};\vec{w})=(\vec{u};\vec{w})$

نتائج:

من اجل كل شعاعين غير معدومين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ لدينا:

1) $(\vec{v};\vec{u}) = -(\vec{u};\vec{v})$

2) $(\vec{u};-\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v}) + \pi$

3) $(\overrightarrow{-u};\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v}) + \pi$

4) $(-\vec{u};-\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v})$

مثال :

علما أن $(\vec{u},\vec{v}) = -\frac{\pi}{3}$ نحسب :

$$1)\left(\vec{v},\vec{u}\right)=-\left(\vec{u},\vec{v}\right)=-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}$$

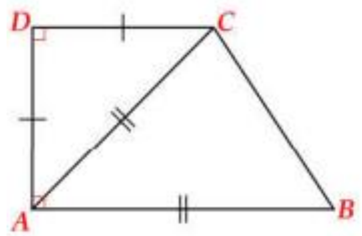
$$2)\left(-\vec{u},-\vec{v}\right)=\left(\vec{u},\vec{v}\right)=-\frac{\pi}{3}$$

$$3)\left(-\vec{u},\vec{v}\right)=\left(\vec{u},\vec{v}\right)+\pi=-\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{2\pi}{3}\text{ ،}$$

$$4)\left(2\vec{v},-\vec{u}\right)=\left(\vec{v},\vec{u}\right)+\pi=-\left(\vec{u},\vec{v}\right)+\pi=\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{4\pi}{3}$$

حل تمرين 29 صفحة 229 :

تعيين القيس الرئيسي لزوايا الموجهة :



1) $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$:

لدينا : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})=\frac{\pi}{2}$ و $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=\frac{\pi}{4}$

إذن $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{4}$

وبالتالي : $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})+(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\pi-\frac{\pi}{4}$

وبما أنّ : $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})=(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$

فإن : $2(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})=\frac{3\pi}{4}$ ومنه : $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})=\frac{3\pi}{8}$

2) $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC})$: لدينا $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC})=-\frac{\pi}{4}$.

3) $(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BA})$: لدينا $(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BA})=\pi$.

4) $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AD})$: لدينا $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AD})=(-\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DA})=(-\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})+\pi=\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{3\pi}{2}=2\pi-\frac{\pi}{2}$

إذن $-\frac{\pi}{2}$ هو القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AD})$.

المراجع: الكتاب المدرسي ،المنهاج ،لتوزيع السنوي ، التدرج ، الوثيقة المرفقة.

ثانوية: ....باتنة

ميدان التعلم: هندسة

الوحدة التعليمية: الزوايا الموجهة وحساب المثلثات

المحتوى المعرفي: _ خواص الزوايا الموجهة

مذكرة سير حصة رقم 02.

الأستاذ: بن حولة عثمـــان

المـادة: رياضيـات

المـدة: 02 ساعة

المستوى 2 ع ت .

الكفاءات القبلية: إ الدائرة المثلثية و العلاقات المثلثية .

الكفاءات المستهدفة:- استعمل خواص الزوايا الموجهة لاثبات تقايس الزوايا .

توجيهات و تعاليق من المنهاج:

- مفاهيـــــم أولية حول الدوال الدائرة المثلثية .

مراحل الحصة	سير الحصـــة	المـدة

مرحلة الإنطلاق (الإستعداد)

نشاط مقترح :

(C) دائرة مثلثية مرفقة بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$. A و B نقطتين من الدائرة (C) حيث : $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})=\frac{17\pi}{4}$. و $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB})=\frac{-39\pi}{4}$.

1- علم النقطتين A و B ماذا تلاحظ ؟

2- ماهي العلاقة بين قيسي الزاويتين $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})$ و $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB})$.

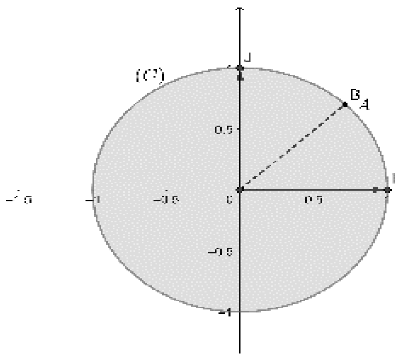
مناقشة النشاط :

1- تعليم النقطتين :

20 دقيقة

لدينا $\frac{\pi}{4}+4\pi=\frac{16\pi+\pi}{4}=\frac{17\pi}{4}=(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})$.

$$(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB})=\frac{-39\pi}{4}=\frac{-40\pi+\pi}{4}=-10\pi+\frac{\pi}{4}$$



15 دقيقة

المرحلة التكوين (البناء)

الملاحظة : نلاحظ أن النقطة A و منطبقة على النقطة B .

العلاقة بين قيسي الزاويتين $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})$ و $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB})$. هما قيسين لنفس الزاوية أو قيسين لزاويتين متقايستين حيث :

25 دقيقة

$$(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})-(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB})=\frac{17\pi}{4}-\frac{-39\pi}{4}=\frac{17\pi+39\pi}{4}=\frac{56\pi}{4}=14\pi=2*7\pi$$

مرحلة الإستثمار (التحصيل)

خواص الزوايا الموجهة

1.الزوايا الموجهة المتقايسة:

خاصية: $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{u}'$ و $\vec{v}'$ أشعة غير معدومة من المستوي . ليكن α قيسا للزاوية الموجهة $(\vec{u};\vec{v})$ و α' قيسا للزاوية الموجهة $(\vec{u}';\vec{v}')$. تكون الزاويتان $(\vec{u};\vec{v})$ و $(\vec{u}';\vec{v}')$ متقايستان إذا وفقط وفقط إذا وجد عدد صحيح k بحيث : $\alpha'=\alpha+2k\pi$

ملاحظات: 1) $\alpha'=\alpha+2k\pi$ معناه $\alpha'-\alpha$ مضاعف لـ 2π

2) اذا كان $\alpha'=\alpha+2k\pi$ نقول ان α و α' قيسان لنفس الزاوية او قيسان لزاويتين متقايستين

مثال تطبيقي:

- هل العددان $\frac{-5\pi}{4}$ و $\frac{11\pi}{4}$ قيسان لنفس الزاوية ؟

لدينا $\frac{11\pi}{4} - \frac{-5\pi}{4} = \frac{11\pi + 5\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} = 4\pi = 2 * 2\pi$

ومنه العددان $\frac{-5\pi}{4}$ و $\frac{11\pi}{4}$ قيسان لنفس الزاوية

- هل $\frac{9\pi}{2}$ و $\frac{11\pi}{2}$ قيسان لنفس الزاوية ؟

$$\frac{11\pi}{2} - \frac{9\pi}{2} = \frac{11\pi - 9\pi}{2} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

ومنه العددان $\frac{9\pi}{2}$ و $\frac{11\pi}{2}$ ليس قيسان لنفس الزاوية .

2- الزاوية الموجهة و الارتباط الخطي لشعاعين

خاصية: $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان غير معدومين من المستوي.يكون الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا اذا وفقط اذا كان $(\vec{u};\vec{v}) = 2k\pi$ او $(\vec{u};\vec{v}) = \pi + 2k\pi$ حيث k عدد صحيح

ملاحظة: - اذا كان $(\vec{u};\vec{v}) = 2k\pi$ يكون للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ نفس الاتجاه

- اذا كان $(\vec{u};\vec{v}) = \pi + 2k\pi$ يكون للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ اتجاهين متعاكسين

خاصية 02): $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان غير معدومين من المستوي . ليكن k و k' عددين حقيقيين غير معدومين

- إذا كان k و k' من نفس الإشارة فإن $(k\vec{u}, k'\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$

إذا كان k و k' من إشارتين مختلفتين فإن $(k\vec{u}, k'\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$

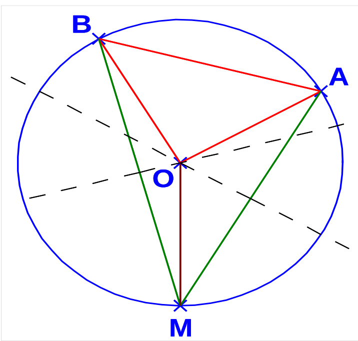
مثال : لتكن $(\vec{u};\vec{v})$ زاوية موجهة قيسها $\frac{\pi}{2}$

لدينا $(\vec{v};-\vec{u}) = (\vec{v};\vec{u}) + \pi = -(\vec{u};\vec{v}) + = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}$.

لدينا $(2\vec{u};\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v}) = \frac{\pi}{2}$.

3 - الزاوية المحيطية

(C) دائرة مثلثية مركزها O . A، B و M ثلاث نقط متمايزة مثنى مثنى من الدائرة (C).الزاوية الموجهة $(\vec{MA}, \vec{MB})$ تسمى زاوية محيطية



مبرهنة : إذا كانت A، B و M ثلاث نقط متمايزة مثنى مثنى من دائرة مثلثية (C) مركزها O وإذا كان α قيسا للزاوية الموجهة $(\vec{OA}, \vec{OB})$. فإن $\frac{\alpha}{2}$ قيس للزاوية $(\vec{MA}, \vec{MB})$.

البرهان : المثلث (OAM) متساوي الساقين ، فإن الزاويتين $(\vec{AO}, \vec{AM})$ و $(\vec{MO}, \vec{MA})$ متناظرتان بالنسبة إلى محور القطعة $[AM]$ ومنه $(\vec{AO}, \vec{AM}) = -(\vec{MO}, \vec{MA})$ ومنه $(\vec{AO}, \vec{AM}) = (\vec{MA}, \vec{MO})$....(1).

المثلث (OBM) متساوي الساقين ، فإن الزاويتين $(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BO})$ و $(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MO})$ متناظرتان بالنسبة إلى محور القطعة $[BM]$ ومنه $(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BO})=-(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MO})$ و منه $(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BO})=(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MB})$ ....(2).

من (1) و (2) نستنتج $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO})+(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MB})=(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AM})+(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BO})$ أي

$(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})=(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AM})+(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BO})$ و منه $2(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})=(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AM})+(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BO})+(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})$

$$2(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})=(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AM})+(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BO})+(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})=(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{MA})+(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})+(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{OB})$$

$2(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})=(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{MB})+(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ ومنه $\frac{\alpha}{2}$ قيس للزاوية $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})$

تمرين تطبيقي :

1- بين أن x و y هما قيسان لنفس الزاوية حيث : $x=\frac{19\pi}{4}$ و $y=\frac{-5\pi}{4}$.

2- عين القيس الرئيسي للزاوية التي قيسها $\frac{2012\pi}{3}$.

3- في المستوي الموجه لدينا $(\vec{u},\vec{v})=\frac{\pi}{3}$

- عين قيس لكل زاوية من الزوايا الموجهة التالية :
  - $(\vec{v},\vec{u})$ ، • $(3\vec{v},2\vec{u})$ • $(-\vec{v},-\vec{u})$
  - $(2\vec{v},-3\vec{u})$ ، • $(-\vec{u},-\vec{v})$

4- لتكن A و B نقطتين من الدائرة المثلثية (C) حيث : $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})=\frac{\pi}{6}$ و $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB})=\frac{3\pi}{4}$.

- عين قيس الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$.

5- ليكن $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC})=\pi+2K\pi$ و $(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{D'C'})=\frac{\pi}{2}+2K\pi$.

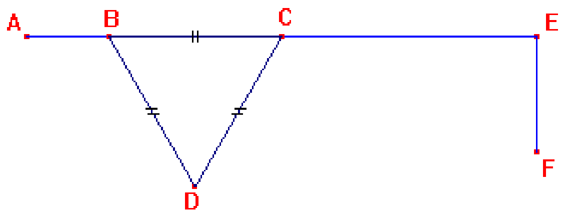
- ماذا يمكن القول عن المستقيمين (AB) و (DC) المستقيمين $(A'B')$ و $(D'C')$.

تمرين 18 ص 228 : نعتبر النقط A ، B ، C و E في استقامية BCD مثلث متقايس الأضلاع .المستقيم (EF) يعامد (AE) .

عين قيسا للزوايا الموجهة التالية

1) $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD})$ 2) $(\overrightarrow{CE};\overrightarrow{CD})$

3) $(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{EF})$ 4) $(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{EF})$



الحل :

1) $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD})=(-\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD})=(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})+(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD})=\pi+(\pi-\frac{\pi}{3})=\frac{5\pi}{3}$

2) $(\overrightarrow{CE};\overrightarrow{CD})=\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$

3) $(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{EF})=(-\overrightarrow{EC},\overrightarrow{EF})=\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}$

4) $(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{EF})=(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BE})+(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{EF})=(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BE})+(-\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EF})=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{6}$

ثانوية: ....باتنة	مذكرة سير حصة رقم 03	الأستاذ:بن حولة عثمـــــان
ميدان التعلم: هندسة		المــادة: رياضيــات
الوحدة التعلمية الزوايا الموجهة وحساب المثلثات		المـدة: 02 ساعة
المحتوى المعرفي :_ حســاب المثلثات		المستوى 2 ع ت .

الكفاءات القبلية: مفاهيم أولية حول الدائرة المثلثية جيب وجيب تمام .

الكفاءات المستهدفة:- تعيين قيم بعض الزوايا الشهيرة ،حساب جيب تمام وجيب زاوية موجهة بشعاعين .

توجيهات و تعاليق من المنهاج: تعليم نقطة على الدائرة المثلثية ، الدالتين COS و SINخواص الزوايا الموجهة .تعيين اقياس زاوية موجهة .

مراحل الحصة	سير الحصـــة	المـدة
مرحلة الإنطلاق (الإستعداد)	**نشاط مقترح :**	20 دقيقة

1– اكمل الجدول التالي:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$cosx$						
$sinx$						

2– احسب مايلي:

$sin(-\frac{\pi}{6})$ ، $cos(-\frac{\pi}{6})$ ، $sin(\frac{193\pi}{3})$ ، $cos(\frac{193\pi}{3})$.

مناقشة النشاط : (15 دقيقة)

1– إكمال الجدول:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$cosx$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	-1
$sinx$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	0

مرحلة التكوين (البناء) — 25 دقيقة

2–

$$sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$sin\left(\frac{193\pi}{3}\right) = sin\left(\frac{192\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = sin\left(\frac{\pi}{3} + 64\pi\right) = sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

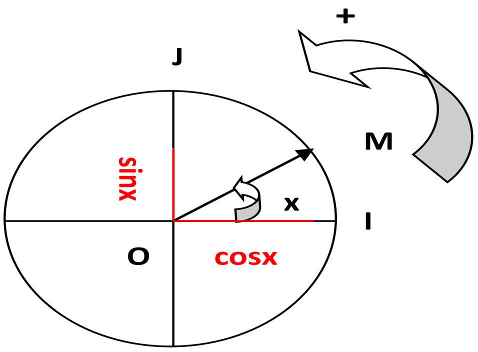
$$\cos\left(\frac{193\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{192\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + 64\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

مرحلة الإستثمار (التحصيل)

1) جيب التمام وجيب زاوية موجهة لشعاعين :

تذكير وتعريف : (C) الدائرة المثلثية التي مركزها O ولتكن A و B نقطتين من الدائرة (C) حيث ان

$(O\,;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ معلم متعامد ومتجانس مباشر . نضع $\overrightarrow{OA}=\vec{\imath}$ و $\overrightarrow{OB}=\vec{\jmath}$ ، لكل عدد حقيقي
صورة Mعلى الدائرة (C)
حيث قيس x بالرديان للزاوية الموجهة $(\vec{\imath};\overrightarrow{OM})$



نعلم ان جيب التمام العدد x
هو فاصلة النقطة M ونكتب $\cos(x)$
وان جيب العدد x هو
ترتيب النقطة M ونكتب $\sin(x)$
ادا كان x قيسا بالرديان للزاوية
الموجهة $(\vec{\imath};\overrightarrow{OM})$ ، فان كل عدد حقيقي
من الشكل $x+2k\pi$ حيث صحيح هو
كدالك قيس بالرديان للزاوية الموجهة $(\vec{\imath};\overrightarrow{OM})$
ومنه x و $x+2k\pi$ لهما نفس الصورة M على الدائرة (C) وبالتالي
$\cos(x+2k\pi)=\cos(x)$ و $\sin(x+2k\pi)=\sin(x)$ مع $k\in\mathbb{Z}$
ونقول ان الدالتين دوريتان ودورهما 2π .

2) <u>نتائج :</u> من اجل كل عدد حقيقي x .
$-1\le\cos(x)\le 1$ و $-1\le\sin(x)\le 1$ و $(\sin x)^2+(\cos x)^2=1$
جدول القيم الشهيرة :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

1. <u>جيب تمام و جيب الزوايا المرفقة:</u>

<u>تعريف :</u>

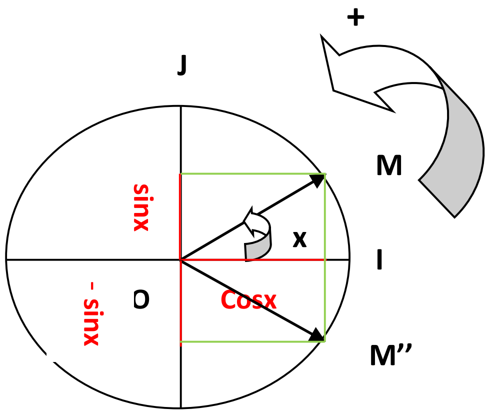
نسمي الزوايا المرفقة بزاوية موجهة حيث x قيس لها ، الزوايا الموجهة التي أحد أقياسها :
$-x$ ، $\pi-x$ ، $\pi+x$ ، $\frac{\pi}{2}-x$ ، $\frac{\pi}{2}+x$.

فيما يلي نأخذ x عددا حقيقيا و M صورته على دائرة مثلثية المرفقة بالمعلم المتعامد و المتجانس $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$

مبرهنة 01:

1-من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: M و M' صورتا العددين x و $-x$.

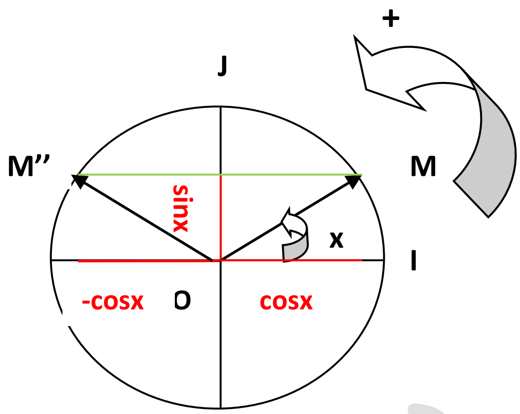
M و M' متناظرتين بالنسبة لمحور الفواصل



إذن: $\begin{cases} x_{M'} = x_M \\ y_{M'} = y_M \end{cases}$ ومنه

$$\begin{cases} cos(-x) = cos(x) \\ sin(-x) = sin(x) \end{cases}$$

2- M و M' صورتا العددين x و $(\pi - x)$ وبالتالي M و M' متناظرتين بالنسبة لمحور التراتيب.



إذن: $\begin{cases} x_{M'} = -x_M \\ y_{M'} = y_M \end{cases}$ ومنه

$$\begin{cases} cos(\pi - x) = -cos(x) \\ sin(\pi - x) = sin(x) \end{cases}$$

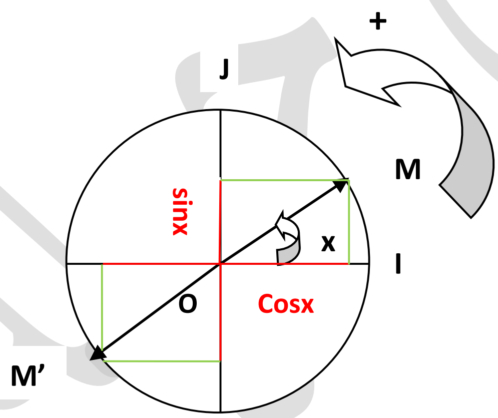
.

3- M و M' صورتا العددين x و $(\pi + x)$ وبالتالي M و M' متناظرتين بالنسبة إلى مبدأ المعلم.

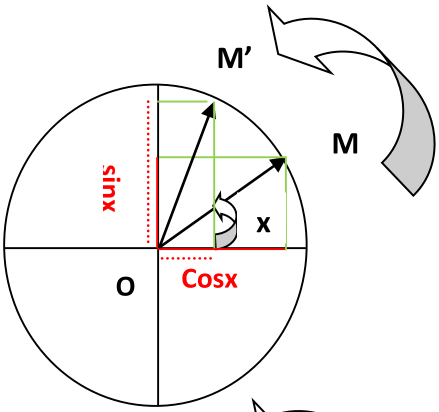
إذن: $\begin{cases} x_{M'} = -x_M \\ y_{M'} = -y_M \end{cases}$ ومنه

$$\begin{cases} cos(\pi + x) = -cos(x) \\ sin(\pi + x) = -sin(x) \end{cases}$$

.



4. M و M' صورتا العددين x و $(\frac{\pi}{2}-x)$ على الترتيب و بالتالي M و M' متناظرتين بالنسبة إلى منصف الربع الأول $y=x$.

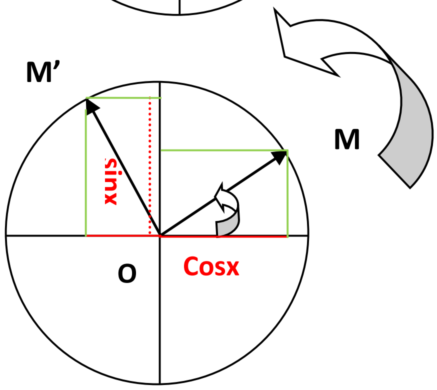


إذن: $\begin{cases} x_{M'}=y_M \\ y_{M'}=x_M \end{cases}$ ومنه

$$\begin{cases} cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=sin(x) \\ sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=cos(x) \end{cases}$$

5- M، M'' و M' صور الأعداد x، $(\frac{\pi}{2}+x)$ و $(\frac{\pi}{2}-x)$ على الترتيب

و بالتالي M' و M'' متناظرتين بالنسبة إلى محور التراتيب.



إذن: $\begin{cases} x_{M''}=-x_{M'} \\ y_{M''}=y_{M'} \end{cases}$ ومنه

$$\begin{cases} cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-sin(x) \\ sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=cos(x) \end{cases}$$

مثال: بسط العبارة $A(x)$ في كل حالة من الحالات التالية:

- $A(x)=sinx+cos(\pi-x)+cos(\pi+x)$.
- $A(x)=sinx+sin(\pi-x)+sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-cosx$.
- $A(x)=\sin(\frac{3\pi}{2}-x)+sin(x+5\pi)+cos(\frac{\pi}{2}-x)$.
- $A(x)=\sin(\pi+x)+cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+cos(\pi-x)+\sin(\frac{\pi}{2}+x)$.

تطبيق01: اثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x المساويات التالية:

- $sin\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)-2\,cos\left(\frac{21\pi}{2}-x\right)-3sin(x-3\pi)+sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=sinx$.
- $sin(x+7\pi)-2\,sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=2sin\left(\frac{13\pi}{2}-x\right)-cos\left(x+\frac{7\pi}{2}\right)$.

تطبيق02: علماأن: $tanx=\frac{\sqrt{5}}{2}$ حيث : $x\in\left]\pi;\frac{3\pi}{2}\right[$

1. احسب القيمة المضبوطة لكل من $cosx$ و $sinx$.
2. احسب $cos(\pi-x)$ ، $cos(\pi+x)$ ، $sin(\pi-x)$ ، $sin(\pi+x)$ ، $tan(\pi-x)$، $tan(\pi+x)$.

تمرين : من رقم 36 إلى رقم 41 صفحة 229

تمرين: من رقم 51 إلى رقم 53 صفحة 230

تمرين رقم 56+57 صفحة 230

المراجع: الكتاب المدرسي ،المنهاج ،لتوزيع السنوي ، التدرج ، الوثيقة المرفقة.

ثانوية: ....

الأستاذ: بن حولة عثمـــــان

ميدان التعلم: هندسة

مذكرة سير حصة رقم 04.

المـــادة: رياضيـات

الوحدة التعلمية الزوايا الموجهة وحساب المثلثات

المـــدة: 02 ساعة

المحتوى المعرفي **المعادلات والمتراجحات المثلثية :**

المستوى 2 ع ت .

الكفاءات القبلية: مفاهيم أولية حول الدائرة المثلثية .	**الكفاءات المستهدفة:-** حل المعادلات والمتراجحات المثلثية.

توجيهات و تعاليق من المنهاج:

حل المعادلات والمتراجحات المثلثية بأشكال مختلفة.

مراحل الحصة	سير الحصـــة	المـــدة
مرحلة الإنطلاق (الإستعداد)		

– المعادلات مثلثية :

1 . الأعداد الحقيقية التي لها نفس الجيب التمام ونفس الجيب :

تعريف : a و b عددين حقيقيين :

$\cos(a) = \cos(b)$ معناه $a = b + 2k\pi$ أو $a = -b + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

$\sin(a) = \sin(b)$ معناه $a = b + 2k\pi$ أو $a = \pi - b + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

مثـــــال :

– $\cos x = \cos\frac{\pi}{3}$ معناه $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ أو $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

– $\sin x = \sin\frac{\pi}{6}$ معناه $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ أو $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

معناه $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ أو $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

20 دقيقة

2 . المعادلات المثلثية الاساسية :

– **المعادلات من الشكل : $\cos(x) = a$ حيث a عدد حقيقي**

15 دقيقة

نعلم أن $-1 \le \cos x \le 1$

اداكان: $a \notin [-1;1]$ فان المعادلة $\cos(x) = a$ لا تقبل حلول في $\Re$.

اذا كان $a \in [-1;1]$ فانه يوجد عدد حقيقي b حيث $\cos(b) = a$ والحلول هي: $x = b + 2k\pi$ أو $x = -b + 2k\pi$

25 دقيقة

مرحلة التكوين (البنـاء)

صور حلول هذه المعادلة هما نقطتين متناظرتين بالنسبة لحامل محور الفواصل .

مثـــال 01 : حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين التاليتين: $cosx = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $cosx = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

الحل:

مرحلة الإستثمار (التحصيل)

– لدينا $cosx = \frac{\sqrt{3}}{2}$ تكافئ $cosx = cos\frac{\pi}{6}$ تكافئ
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{أو} \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$
حيث k عدد صحيح نسبي.

- لدينا $cosx=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ تكافئ $cosx=cos\frac{3\pi}{4}$ تكافئ $\begin{cases} x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \\ \text{أو} \\ x=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi \end{cases}$ حيث k عدد

صحيح نسبي.

مثـــال 02 : حل في $\Re$ المعادلة $\cos x=\frac{1}{2}$

نعلم أن $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ ومنه $S:\left\{x=\frac{\pi}{3}+2\pi k; x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k; k\in\mathbb{Z}\right\}$

مثـــال 03 : حل في $\Re$ المعادلة $\cos x=\frac{-\sqrt{3}}{2}$

القيس ينتمي إلى الربع الثاني أو الثالث

ومنه $S:\left\{x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k; x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k; k\in\mathbb{Z}\right\}$

مثـــال 04: حل في المجال $[-\pi,-3\pi]$ المعادلة $\cos x=\frac{1}{2}$

نعلم أن $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ ومنه $S:\left\{\frac{-\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3},\frac{7\pi}{3}\right\}$

2) الحلول التي تنتمي إلى المجال : $[-\pi,0]\cup[0,3\pi]$

$S:\left\{x=\frac{\pi}{3}+2\pi k; x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k; k\in\mathbb{Z}\right\}$

- $\left\{x=\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}\right\}$

ومنه لما $x=\frac{\pi}{3}, k=0$ مقبول

ولما $x=\frac{7\pi}{3}, k=1$ مقبول

لما $x=\frac{13\pi}{3}, k=2$ مرفوض

ومنه $S:\left\{\frac{-\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3},\frac{7\pi}{3}\right\}$

2) $\left\{x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k', k'\in\mathbb{Z}\right\}$

ومنه لما $x=-\frac{\pi}{3}, k'=0$ مقبول

ولما $x=\frac{5\pi}{3}, k'=1$ مقبول

لما $x=-\frac{9\pi}{3}, k'=-1$ مرفوض

- **المعادلات من الشكل: $\sin(x)=a$ حيث a عدد حقيقي.**

نعلم أن $-1\le\sin x\le 1$

اداكان : $a\notin[-1;1]$ فان المعادلة $\sin(x)=a$ لا تقبل حلول في $\Re$.

ادا كان $a\in[-1;1]$ فانه يوجد عدد حقيقي b حيث $a=\sin(b)$ و الحلول

هي: $x=b+2k\pi$ او $x=\pi-b+2k\pi$

صور حلول هذه المعادلة هما نقطتين متناظرتين بالنسبة لحامل محور التراتيب .

مثـــال 01 : حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين التاليتين: $sinx=-1$ ، $sinx=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

الحل:

1- لدينا $sinx = -1$ تكافئ $sinx = sin\frac{3\pi}{2}$ تكافئ $\begin{cases} x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{أو} \\ x = \pi - \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$ حيث k عدد صحيح نسبي.

تكافئ $\begin{cases} x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{أو} \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$ حيث k عدد صحيح نسبي.

2- لدينا $sinx = \frac{\sqrt{2}}{2}$ تكافئ $sinx = sin\frac{\pi}{4}$ تكافئ $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{أو} \\ x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$ حيث k عدد صحيح نسبي.

تكافئ $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{أو} \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$ حيث k عدد صحيح نسبي.

مثـــال 02 : حل في $\Re$ المعادلة $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

نعلم أن $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ومنه

$$S : \left\{ x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k ; x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

مثـــال 03 : حل في $[-\pi, -3\pi]$ المعادلة $\sin x = -\frac{1}{2}$ ومنه

$$S : \left\{ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k ; x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

تطبيق01:

حل في $\mathbb{R}$المعادلتين التاليتين: $2sinx - \sqrt{3} = 0$ ، $cosx - 1 = 0$.

تطبيق 02 :

حل في $\mathbb{R}$المعادلة التالية ذات المجهول الحقيقي x ثم استنتج الحلول في المجال $[-\pi, \pi]$حيث،

$cosx = \frac{1}{\sqrt{2}}$. و $\cos x.\sin^2 x + \cos x.\sin x - 2\cos x = 0$

تطبيق02: رقم 77 ص232.

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

- $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$.
- $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- $\cos x+\sin x=0$.
- $\cos(3x)=\cos x$.
- $\cos(2x)=\sin x$.

تطبيق 03 : رقم 78 ص 232.

حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين التاليتين:

- $\sin^2 x-\sin x-6=0$.
- $2\cos^2 x-3\cos x-2=0$.

3) حل المعادلات من الشكل: $\cos(u)=\sin(v)$.

طريــقة وارشـتاد :

لحل معادلة من الشكل: $\cos(u)=\sin(v)$. يجب تحويل cos الى sin أو العكس .وذالك باستعمال مايلي :

$$\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin(x)\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos(x)\end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x)\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(x)\end{cases}.$$

لتمثيل الحلول على الدائرة المثلثية نعتمد على اقياس الزوايا الشهيرة .

أعمـال موجهة صفحة 222 :

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية ذات المجهول الحقيقي x حيث: $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)$

الحـــل :

نعلم أن $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x)$ أذن

$$\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)$$

أي $\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)$

ومنه المعادلة $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)$ تكافئ $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)$

معناه : $\begin{cases}x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}-3x+2k\pi\\ \text{أو}\\ x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{6}+3x+2k\pi\end{cases}$ حيث k عدد صحيح نسبي.

ومنه $\begin{cases}4x=\frac{10\pi}{20}+2k\pi\\ \text{أو}\\ -2x=\frac{2\pi}{24}+2k\pi\end{cases}$ حيث k عدد صحيح نسبي.

أي . $S:=\left\{x=\frac{5\pi+2\pi k}{48};x=\frac{-\pi-24\pi k}{24};k\in\mathbb{Z}\right\}$

تمارين 56 و 57 ص 230 واجب منزلي .

2) حل المتراجحات المثلثية :

مثال01: عين مجموعة قيم x من المجال $[0,2\pi]$ حيث : $sinx < \frac{1}{2}$.

الحل:

نرفق بكل عدد حقيقي x من المجال $[0,2\pi]$ النقطة M بحيث يكون $sinx$ ترتيبها .

توجد نقطتان M_1 و M_2 مرفقتين بالعددين $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6}$ على الترتيب.

لكي يكون $sinx < \frac{1}{2}$ يجب أن تكون النقطة M تنتمي إلى القوس $\widehat{M_1M_2}$

و بالتالي x تنتمي إلى $\left]\frac{5\pi}{6},2\pi\right]$ و $\left[0,\frac{\pi}{6}\right[$.

إذن مجموعة حلول المتراجحة هي : $S = \left]\frac{5\pi}{6},2\pi\right] \cup \left[0,\frac{\pi}{6}\right[$

مثال02: عين مجموعة قيم x من المجال $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ حيث : $2\sqrt{3}cosx < 3$.

الحل:

لدينا من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$: $2\sqrt{3}cosx < 3$ تكافئ $cosx < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

نرفق بكل عدد حقيقي x من المجال $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$، النقطة M بحيث يكون $cosx$ فاصلتها .

توجد نقطتان M_1 و M_2 مرفقتين بالعددين $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{-\pi}{6}$ على الترتيب.

لكي يكون $cosx < \frac{\sqrt{3}}{2}$ يجب أن تكون النقطة M تنتمي إلى القوسين $\widehat{M_1J}$ و $\widehat{J'M_2}$.

و بالتالي قيم x التي تحقق المتراجحة $\left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{-\pi}{2},\frac{-\pi}{6}\right[$.

مثال 03: عين مجموعة قيم x من المجال $[0,2\pi]$ حيث :

$\frac{-1}{2} \leq cosx \leq \frac{1}{2} \dots\dots\dots (I)$.

الحل:

1) أولا : نقوم بحل المتراجحة $cosx \leq \frac{1}{2}$:

نرفق بكل عدد حقيقي x من المجال $[0,2\pi]$، النقطة M بحيث يكون $cosx$ فاصلتها .

توجد نقطتان M_1 و M_2 مرفقتين بالعددين $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{5\pi}{3}$ على الترتيب.

لكي يكون $cosx \leq \frac{1}{2}$ يجب أن تكون النقطة M تنتمي إلى القوس $\widehat{M_1M_2}$.

و بالتالي قيم x التي تحقق المتراجحة هي $S_1 = \left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right]$ ....(1)

2) ثانيا : نقوم بحل المتراجحة $\frac{-1}{2} \leq cosx$:

نرفق بكل عدد حقيقي x من المجال $[0,2\pi]$، النقطة M بحيث يكون $cosx$ فاصلتها .

توجد نقطتان M'_1 و M'_2 مرفقتين بالعددين $\frac{2\pi}{3}$ و $\frac{4\pi}{3}$ على الترتيب.

لكي يكون $cosx \geq -\frac{1}{2}$ يجب أن تكون النقطة M تنتمي إلى القوس $\widehat{M'_2M'_1}$.

و بالتالي قيم x التي تحقق المتراجحة هي $S_2 = \left[0,\frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3},2\pi\right]$ ....(2)

3) من (1) و (2) نجد أن حلول المتراجحة (I) هي $S = S_1 \cap S_2$

إذن $S = \left[\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right]$

تطبيق 89 ص 233.

المراجع: الكتاب المدرسي ،المنهاج ،لتوزيع السنوي ، التدرج ، الوثيقة المرفقة.