الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الجمعية الجزائرية لأولمبياد الرياضيات — مديرية التعليم المتخصص والتعليم الخاص

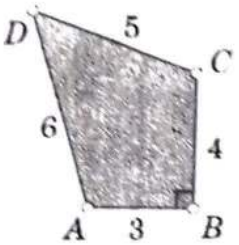
المسابقة التصفوية الأولى لأولمبياد الرياضيات العالمية 2023

التاريخ: 2022/11/26 — المستوى: 3و4 متوسط — التوقيت: 03

ساعات

تمنح علامتان ونصف لكل تمرين ولا تعطى أي علامة لنتيجة دون تبرير أو حساب

التمرين 1:



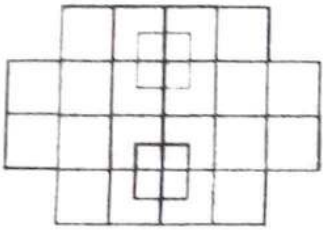
في الرباعي $ABCD$ لدينا $AB=3$ ، $BC=4$ ، $CD=5$ و $DA=6$ و $\widehat{ABC}=90°$

احسب مساحة الرباعي $ABCD$.

التمرين 2:

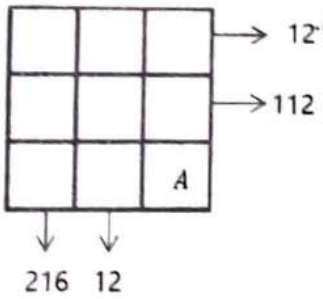
x ، y عددان حقيقيان بحيث $x^2+xy+y^2=92$ و $x+y=11$ ما هي قيمة xy ؟

التمرين 3:



ما هو عدد المربعات الشكل المقابل علما أنه مشكل من مربعات ؟

التمرين 4:



في الشكل المقابل نستعمل الأرقام من 1 إلى 9 مرة واحدة

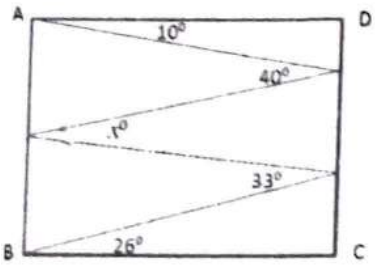
إذا كان جداء الأعداد في الصف الأول يساوي 12

وجداء الأعداد في الصف الثاني يساوي 112

وجداء الأعداد في العمود الأول يساوي 216

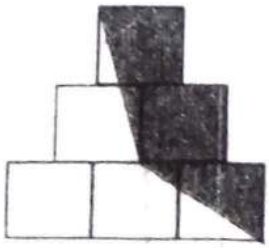
وجداء الأعداد في العمود الثاني يساوي 12. فأوجد قيمة A في الجدول.

التمرين 5 :



في الشكل المقابل $ABCD$ مستطيل، احسب قيس الزاوية X

التمرين 6 :



في الشكل المقابل ست (6) مربعات متقايسة (متماثلة).

احسب النسبة بين مساحة الجزء المظلل في الشكل والمساحة الكلية له.

التمرين 7:

a و b عددان حقيقيان غير معدومين يحققان $ab=a-b$. ما هي القيمة الممكنة لـ $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-ab$ ؟

التمرين 8:

نفرض أن $a+1=b+2=c+3=d+4=a+b+c+d+5$ ما هي قيمة $a+b+c+d$ ؟

الجمهوريّة الجزائريّة الدّيمقراطيّة الشّعبيّة
وزارة التّربية الوطنيّة

مديريّة التّعليم الثّانوي العام والتّكنولوجي — المديريّة الفرعيّة للتّعليم المتخصّص والتّعليم الخاصّ

السّبت 24 شعبان 1438هـ
الموافق لـ 20 ماي 2017م

امتحان التّرشيح للمرحلة الأولى من التّحضير لأولمبياد الرّياضيّات الدّولي

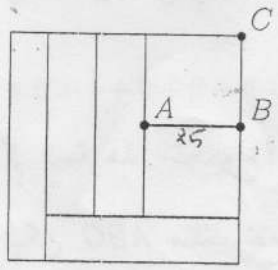
المستوى المتوسّط

تنبيه: هناك ثمانية أسئلة، يقتصر حلّ التّلميذ في كلّ سؤال على كتابة النّاتج وهو عبارة عن عدد طبيعي. يمنع استعمال الآلة الحاسبة.

السّؤال 01 : ولد أحمد سنة 1962م. وفي 1980م كان عمره 18 سنة، وهو مجموع أرقام السّنة الّتي ولد فيها $2+6+9+1$. لفيصل أخ صغير، وهو وأخوه عمرهما سنة 2017م هو مجموع أرقام السّنة الّتي ولد فيها كلّ واحد منهما. ما هي السّنة الّتي ولد فيها فيصل؟

السّؤال 02 : لتكن A و B نقطتين مختلفتين في المستو. الدّائرة (ω_1) مركزها A وتمرّ بـ B. الدّائرة (ω_2) مركزها B وتمرّ بـ A. يقطع المستقيم (AB) الدّائرة (ω_2) مرّة ثانية في C. النّقطة D على الدّائرة (ω_2) بحيث يكون $\widehat{BDC}=52°$. يقطع المستقيم (BD) الدّائرة (ω_1) مرّة ثانية في E. جد قيس الزّاوية $\widehat{EAB}$ بالدّرجات.

السّؤال 03 : تمّ تقسيم مربّع إلى 6 مستطيلات لها كلّها نفس المساحة بالطّريقة الموضّحة في الشّكل المقابل. إذا علمت أنّ $AB=25$ فما هي قيمة BC.



السّؤال 04 : النّقطة M منتصف الضّلع $[AB]$ للرّباعي $ABCD$ وتحقّق $AM=MB=BC=DA=64$ و $MC=MD=40$. احسب طول الضّلع $[CD]$.

الوقت المتاح: 3 ساعات

السّؤال 05 : العدد 612 مضاعف للعددين 9 و 4 وأرقامه الّتي يكتب بها 6 ، 1 ، 2 مختلفة لكنّها ليست كلّها زوجيّة. والعدد 2880 مضاعف للعددين 9 و 4 وأرقامه الّتي يكتب بها 2 ، 8 ، 8 ، 0 كلّها زوجيّة لكنّها ليست كلّها مختلفة. جد أكبر مضاعف للعددين 9 و 4 أرقامه كلّها زوجيّة ومختلفة فيما بينها.

السّؤال 06 : ألصقنا كلّ الأعداد من 1 إلى 30000 :

$$1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 ، 10 ، 11 ، 12 ، 13 ، 14 ، \ldots ، 29999 ، 30000$$

الواحد تلو الآخر بهذا التّرتيب لنحصل على سلسلة طويلة

$$2999930000\cdots 1234567891011121314.$$

ففي هذه السّلسلة يظهر مثلا العدد 1234 في أقصى اليسار كما يظهر العدد 9930 في اليمين. كم من مرّة يظهر العدد 2017 في هذه السّلسلة؟

السّؤال 07 : ألصقنا كلّ الأعداد من 1 إلى 1000 :

$$1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 ، 10 ، 11 ، \ldots ، 999 ، 1000$$

الواحد تلو الآخر لنحصل على سلسلة طويلة $9991000\cdots 1234567891011$. ثمّ وضعنا بين كلّ رقمين متتاليين إشارة + هكذا

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+1+0+1+1+\cdots+9+9+9+1+0+0+0.$$

كم قيمة هذا المجموع؟

السّؤال 08 : ليكن ABC مثلّثا. تقع النّقطة A' على امتداد الضّلع $[CA]$ من جهة A وتحقّق $AA' = 11CA$. تقع النّقطة B' على امتداد الضّلع $[AB]$ من جهة B وتحقّق $BB' = 12AB$. تقع النّقطة C' على امتداد الضّلع $[BC]$ من جهة C وتحقّق $CC' = 13BC$. احسب حاصل قسمة مساحة المثلّث $A'B'C'$ على مساحة المثلّث ABC.

الجمهوريّة الجزائريّة الدّيمقراطيّة الشّعبيّة
وزارة التّربية الوطنيّة

اللّجنة الجزائريّة لأولمبياد الرّياضيّات — مديريّة التّعليم الثّانوي العام والتّكنولوجي

السّبت 30 رجب 1437 هـ
الموافق لـ 7 ماي 2016م

امتحان التّرشيح للمرحلة الأولى من التّحضير لأولمبياد الرّياضيّات الدّولي

المستوى المتوسّط

تنبيه: هناك عشرة أسئلة، يقتصر حلّ التّلميذ في كلّ سؤال على كتابة النّاتج وهو عبارة عن عدد طبيعي. يمنع استعمال الآلة الحاسبة.

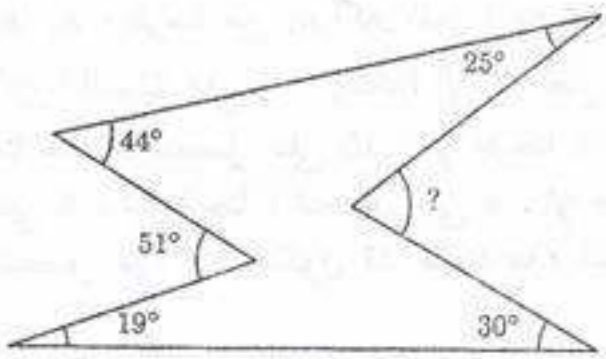
السّؤال 01 : العدد 2016 يكتب بأربعة أرقام ويحقّق الخاصّيّة التّالية: إذا قسمنا آخر رقمه 6 على أوّل رقمه 2 حصلنا على مجموع أرقامه الثّلاثة الأولى $\frac{6}{2} = 2+0+1$. ما هو أكبر عدد يكتب بأربعة أرقام ولديه نفس الخاصّيّة؟

السّؤال 02 : احسب العدد

$$\sqrt{2016 \times 2017 + \sqrt{2016 \times 2017 + \sqrt{2016 \times 2017 + \sqrt{2016 \times 2018 + 1}}}}.$$

السّؤال 03 : ليكن m و n عددين طبيعيّين يحقّقان $mn = 2016$. ما هي أكبر قيمة ممكنة للمجموع $m+n$ ؟

السّؤال 04 : في الشّكل التّالي احسب قيس الزّاوية الّتي عليها نقطة استفهام:



السّؤال 05 : طبّقنا العمليّة التّالية على العددين 1962 و 2016 :
حسبنا الجداء $1962 \times 2016 = 3955392$ ثمّ جمعنا أرقام الجداء لنحصل على $3+9+5+5+3+9+2=36$.
إذا طبّقنا نفس العمليّة على العددين 8 و $88\cdots8$ وحصلنا على 2016 ، كم يوجد من 8 في كتابة العدد $88\cdots8$ ؟

السّؤال 06 : ليكن ABC مثلّثا قائما أطوال أضلاعه a ، b ، c تحقّق $a+b+c=22$ و $a^2+b^2+c^2=200$. احسب مساحة ABC.

السّؤال 07 : ليكن $ABCD$ مستطيلا أطوال أضلاعه $AB=58$ و $BC=42$. تمّ رسم دائرتين قطراهما $[AB]$ و $[CD]$. تتقاطع الدّائرتان في نقطتين P و Q. احسب الطّول PQ.

السّؤال 08 : نقول عن زوج (a,b) إنّه متّزن، حيث a,b عددان طبيعيّان كلاهما أقل من أو يساوي 30 ، إذا كان الفارق بينهما لا يتعدّى 2. فمثلا الأزواج الثّلاثة المختلفة $(28,30)$ ، $(30,28)$ ، $(23,23)$ متّزنة في حين أنّ الزّوجين $(14,11)$ ، $(21,26)$ غير متّزنين لأجل $14-11=3$ و $26-21=5$. كم توجد من أزواج متّزنة؟

السّؤال 09 : تحقّق الأعداد الطّبيعيّة $0 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{10}$ العلاقة
$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=100.$$
احسب مجموع أكبر وأصغر قيمتين ممكنتين للعدد a_{10}.

السّؤال 10 : اخترنا عددا صحيحا $n \geq 2$ ، ثمّ قمنا بالعمليّة التّالية: طرحنا من n أكبر قاسم له مختلف عنه فحصلنا على عدد جديد n_1 ، طرحنا من n_1 أكبر قاسم لـ n_1 مختلف عنه فحصلنا على عدد جديد n_2 ، ثمّ كرّرنا العمليّة على n_2 ، وهكذا إلى أن نصل إلى 1.
فمثلا إذا اخترنا العدد 30 ، طرحنا منه 15 لنحصل على 15 ، ثمّ طرحنا 5 لنحصل على 10 ، ثمّ طرحنا 5 لنحصل على 5 ، ثمّ طرحنا 1 لنحصل على 4 ، ثمّ طرحنا 2 لنحصل على 2 ، ثمّ طرحنا 1 لنحصل على 1 ، فنكون قد طبّقنا هذه العمليّة 6 مرّات حتّى نحصل على 1.
إذا اخترنا العدد 17^{10} كم من مرّة سنطبّق هذه العمليّة حتّى نحصل على 1؟

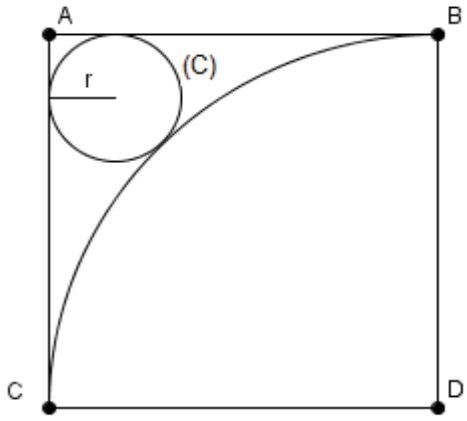
أولمبياد السادس عشر

تمرين 1

x و y و z أعداد حقيقية موجبة غير منعدمة بحيث : $x+y+z=1$

بين أن : $\frac{x(1-x)}{yz}+\frac{y(1-y)}{xz}+\frac{z(1-z)}{xy}\geq 6$

تمرين 2



نعتبر الشكل جانبه بحيث :

$ABDC$ مربع و $BD=R$ و r هو شعاع الدائرة (C)

بين أن : $r=R\left(3-2\sqrt{2}\right)$

تمرين 3

حل المعادلة : $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=8$

تمرين 4

x و y عددان حقيقيان موجبان غير منعدمان

بين أن : $\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}\geq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

www.dzexams.com

حل أولمبياد السادس عشر

تمرين 1

لدينا : $(x-y)^2 \geq 0$

يعني : $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$

يعني : $x^2 + y^2 \geq 2xy$

يعني : $z \times (x^2 + y^2) \geq z \times 2xy$

إذن : $z(x^2 + y^2) \geq 2xyz$ (1)

بنفس الطريقة نبين أن : $y(x^2 + z^2) \geq 2xyz$ (2)

و $x(y^2 + z^2) \geq 2xyz$ (3)

نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف :

$$z(x^2 + y^2) + y(x^2 + z^2) + x(y^2 + z^2) \geq 2xyz + 2xyz + 2xyz$$

أي : $zx^2 + zy^2 + yx^2 + yz^2 + xy^2 + xz^2 \geq 6xyz$

أي : $x^2(y+z) + y^2(x+z) + z^2(y+x) \geq 6xyz$

ونعلم أن : $x+y+z=1$ يعني : $x+y=1-z$ و $x+z=1-y$ و $y+z=1-x$

أي : $x^2(y+z) + y^2(x+z) + z^2(y+x) = x^2(1-x) + y^2(1-y) + z^2(1-z) \geq 6xyz$

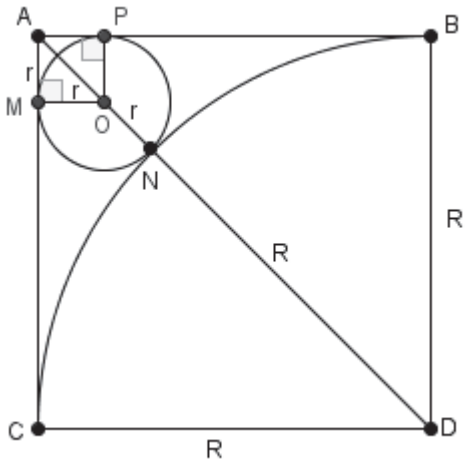
أي : $\frac{1}{xyz} \times (x^2(1-x) + y^2(1-y) + z^2(1-z)) \geq \frac{1}{\cancel{xyz}} \times 6\cancel{xyz}$

أي : $\frac{x^2(1-x)}{xyz} + \frac{y^2(1-y)}{xyz} + \frac{z^2(1-z)}{xyz} \geq 6$

وبالتالي : $\frac{x(1-x)}{yz} + \frac{y(1-y)}{xz} + \frac{z(1-z)}{xy} \geq 6$

www.dzexams.com

تمرين 2



لدينا (AM) و (AP) مماسا للدائرة (C)

إذن : $(AM)\perp(OM)$ و $(AP)\perp(OP)$

ومنه $A\hat{M}O = A\hat{P}O = 90^\circ$

لدينا : $P\hat{O}M = 360 - A\hat{M}O - A\hat{P}O - M\hat{A}P$

إذن : $P\hat{O}M = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

بما أن $P\hat{O}M = A\hat{M}O = A\hat{P}O = M\hat{A}P = 90^\circ$ و $OP = OM$

فإن الرباعي $AMOP$ مربع

حساب AO :

لدينا المثلث AMO قائم الزاوية في M

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $AO^2 = AM^2 + MO^2$

اي : $AO^2 = r^2 + r^2 = 2r^2$

ومنه : $AO = \sqrt{r^2 2} = r\sqrt{2}$

حساب AD :

لدينا المثلث ABD قائم الزاوية في D

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $AD^2 = AB^2 + BD^2$

اي : $AD^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$

ومنه : $AD = \sqrt{R^2 2} = R\sqrt{2}$

حساب r :

لدينا : $AD = AO + ON + ND$

يعني : $R\sqrt{2} = r\sqrt{2} + r + R$

يعني : $R\sqrt{2} - R = r\sqrt{2} + r$

يعني : $R\left(\sqrt{2}-1\right) = r\left(\sqrt{2}+1\right)$

يعني : $r = \dfrac{R\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{2}+1}$

www.dzexams.com

يعني :

$$r=\frac{R\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{2}+1}\times\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}$$
$$=\frac{R\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2-1^2}$$
$$=\frac{R\left(2-2\sqrt{2}+1\right)}{1}$$
$$=R\left(3-2\sqrt{2}\right)$$

وبالتالي : $r=R\left(3-2\sqrt{2}\right)$

تمرين 3

لدينا : $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=8$

يعني : $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}}\times\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}=8$

يعني : $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}}{x-(x-2)}+\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{x+2-x}=8$

يعني : $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}}{2}+\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{2}=8$

يعني : $\frac{\cancel{\sqrt{x}}-\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}-\cancel{\sqrt{x}}}{2}=8$

يعني : $-\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}=8$

يعني : $\left(-\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}\right)^2=8^2$

يعني : $x-\cancel{2}-2\sqrt{(x-2)(x+2)}+x+\cancel{2}=64$

يعني : $2x-2\sqrt{x^2-4}=64$

يعني : $2\left(x-\sqrt{x^2-4}\right)=64$

يعني : $x-\sqrt{x^2-4}=32$

يعني : $-\sqrt{x^2-4}=32-x$

يعني : $\left(-\sqrt{x^2-4}\right)^2=(32-x)^2$

www.dzexams.com

يعني : $\cancel{x^2}-4=1024-64x+\cancel{x^2}$

يعني : $64x=4+1024$

يعني : $64x=1028$

وبالتالي : $x=\frac{1028}{64}=\frac{257}{16}$

تمرين 4

لدينا :

$$\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{x^2+y^2}{y^2x^2}-\frac{y+x}{xy}$$
$$=\frac{x^3+y^3}{y^2x^2}-\frac{xy}{xy}\times\frac{y+x}{xy}$$
$$=\frac{x^3+y^3}{y^2x^2}-\frac{xy^2+x^2y}{x^2y^2}$$
$$=\frac{x^3+y^3-xy^2-x^2y}{x^2y^2}$$
$$=\frac{x^2(x-y)-y^2(x-y)}{x^2y^2}$$
$$=\frac{(x-y)(x^2-y^2)}{x^2y^2}$$
$$=\frac{(x-y)(x-y)(x+y)}{x^2y^2}$$
$$=\frac{(x-y)^2(x+y)}{x^2y^2}\geq 0$$

لأن $(x-y)^2\geq 0$ و $(x+y)>0$ و $x^2y^2>0$ ($x>0$ و $y>0$)

إذن : $\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}\geq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

www.dzexams.com

أولمبياد الخامس عشر

تمرين 1

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا

بين أن $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{x+z}$

تمرين 2

ABC مثلث

بين أن $S_{ABC}=\frac{r}{2}p$ (S_{ABC} هي مساحة المثلث ABC و r هو شعاع الدائرة المحاطة بالمثلث ABC و p هو محيط المثلث ABC)

تمرين 3

x و y و z أعدادا حقيقية موجبة بحيث : $2\left(z^2-y^2\right)=3x^2$

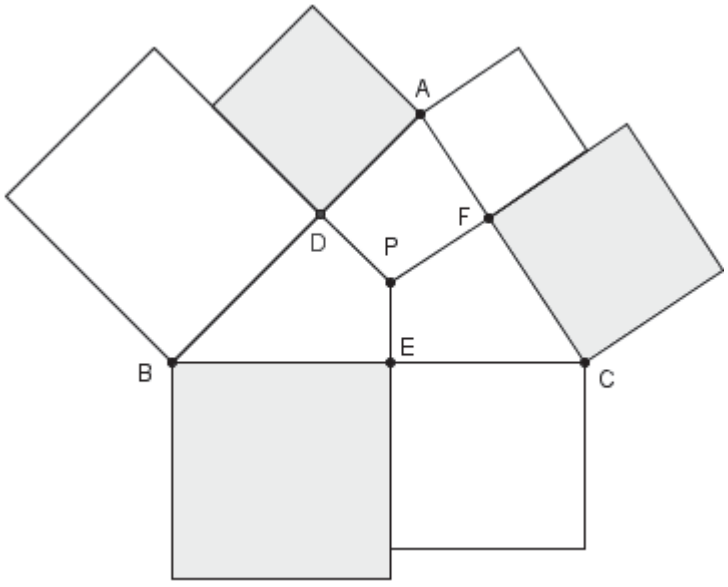
حدد أ كبر هده الأعداد

تمرين 4

ABC مثلث جميع زواياه حادة و النقطة P داخله .

النقط D و E و F هي المساقط العمودية للنقطة P على $[AB]$ و $[BC]$ و $[CA]$ على التوالي.

ننشئ 6 مربعات خارج المثلث ABC كما هو مبين في الشكل جانبه



بين أن مجموع مساحات المربعات الرمادية يساوي مجموع مساحات المربعات البيضاء

www.dzexams.com

حل أولمبياد الخامس عشر

تمرين 1

لدينا : $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 \geq 0$

يعني : $x-2\sqrt{xy}+y \geq 0$

إذن : $x+y \geq 2\sqrt{xy}$ (1)

لدينا : $\left(\sqrt{\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{1}{y}}\right)^2 \geq 0$

يعني : $\frac{1}{x}-2\sqrt{\frac{1}{xy}}+\frac{1}{y} \geq 0$

إذن : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}$ (2)

نضرب المتفاوتتين 1 و 2 طرف بطرف : $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geq 2\sqrt{xy} \times 2\sqrt{\frac{1}{xy}}$

يعني : $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geq 2\times 2\sqrt{\cancel{xy}\times\frac{1}{\cancel{xy}}}$

يعني : $\frac{1}{\cancel{x+y}}\times\cancel{(x+y)}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geq 4\times\frac{1}{x+y}$

إذن : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ (3)

بنفس الطريقة نبين أن : $\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{4}{y+z}$ (4)

و $\frac{1}{x}+\frac{1}{z} \geq \frac{4}{x+z}$ (5)

نجمع المتفاوتات 3 و 4 و 5 طرف بطرف : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{z} \geq \frac{4}{x+y}+\frac{4}{y+z}+\frac{4}{x+z}$

يعني : $\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z} \geq \frac{2\times 2}{x+y}+\frac{2\times 2}{y+z}+\frac{2\times 2}{x+z}$

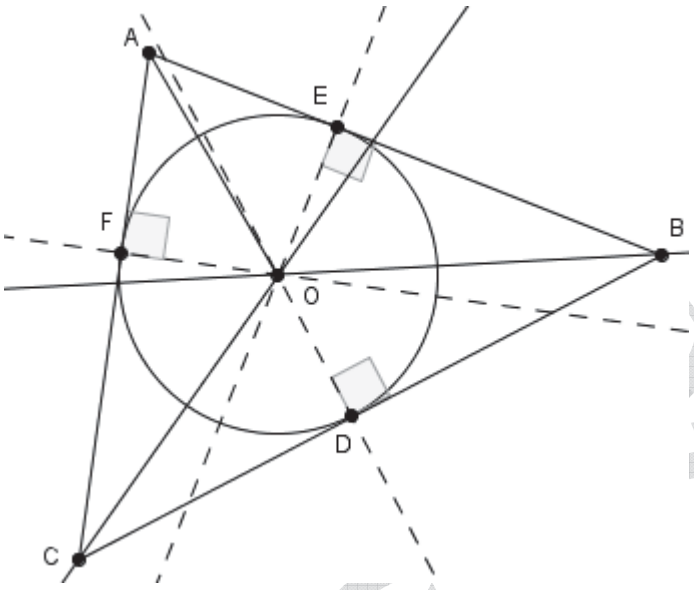
يعني : $2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 2\left(\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{x+z}\right)$

www.dzexams.com

يعني : $\frac{1}{2}\times 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq \frac{1}{2}\times 2\left(\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{x+z}\right)$

وبالتالي : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq \frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{x+z}$

تمرين 2



لدينا النقطة O هي مركز الدائرة المحاطة بالمثلث ABC و r شعاعها

و النقط D و E و F هي المساقط العمودية للنقطة O على $[BC]$ و $[AB]$ و $[AC]$ على التوالي

إذن : $OF=OE=OD=r$

لدينا :

$$\begin{aligned}S_{ABC}&=S_{AOC}+S_{ABO}+S_{OBC}\\&=\frac{AC\times OF}{2}+\frac{AB\times OE}{2}+\frac{BC\times OD}{2}\\&=\frac{AC\times r}{2}+\frac{AB\times r}{2}+\frac{BC\times r}{2}\\&=\frac{r}{2}(AC+AB+BC)\end{aligned}$$

نعلم أن محيط المثلث ABC هو : $p=AC+AB+BC$

إذن : $S_{ABC}=\frac{r}{2}(AC+AB+BC)=\frac{r}{2}p$

تمرين 3

لدينا : $2\left(z^2-y^2\right)=3x^2\geq 0$

يعني : $z^2-y^2\geq 0$ يعني : $z^2\geq y^2$

www.dzexams.com

إذن : $z \geq y$ (1) (لأن $z \geq 0$ و $y \geq 0$)

لدينا : $2z^2 - 2y^2 = 2x^2 + x^2$

يعني : $2z^2 - 2x^2 = 2\left(z^2 - x^2\right) = 2y^2 + x^2 \geq 0$

يعني : $z^2 - x^2 \geq 0$ يعني : $z^2 \geq x^2$

إذن : $z \geq x$ (2) (لأن $z \geq 0$ و $x \geq 0$)

من 1 و 2 نستنتج أن z هو أكبر هذه الأعداد

تمرين 4

– مساحات المربعات الرمادية هي : $AF^2 + CE^2 + BD^2$

– مساحات المربعات المخدشة هي : $FC^2 + BE^2 + DA^2$

لنبين أن : $AF^2 + CE^2 + BD^2 = FC^2 + BE^2 + DA^2$

نطبق مبرهنة فيثاغورس على المثلثات APD و PCF و PBE و PCE و PBD و PAF :

$$\begin{cases} PA^2 = AD^2 + PD^2 \\ PC^2 = CF^2 + PF^2 \\ PB^2 = BE^2 + PE^2 \\ PC^2 = EC^2 + PE^2 \\ PB^2 = DB^2 + PD^2 \\ PA^2 = FA^2 + PF^2 \end{cases}$$

يعني :

$$\begin{cases} AD^2 = PA^2 - PD^2 \\ CF^2 = PC^2 - PF^2 \\ BE^2 = PB^2 - PE^2 \\ EC^2 = PC^2 - PE^2 \\ DB^2 = PB^2 - PD^2 \\ FA^2 = PA^2 - PF^2 \end{cases}$$

إذن :

$$\begin{aligned} FA^2 + EC^2 + DB^2 &= PA^2 - PF^2 + PC^2 - PE^2 + PB^2 - PD^2 \\ &= PA^2 - PD^2 + PC^2 - PF^2 + PB^2 - PE^2 \\ &= AD^2 + CF^2 + BE^2 \end{aligned}$$

www.dzexams.com

أولمبياد الرابع عشر

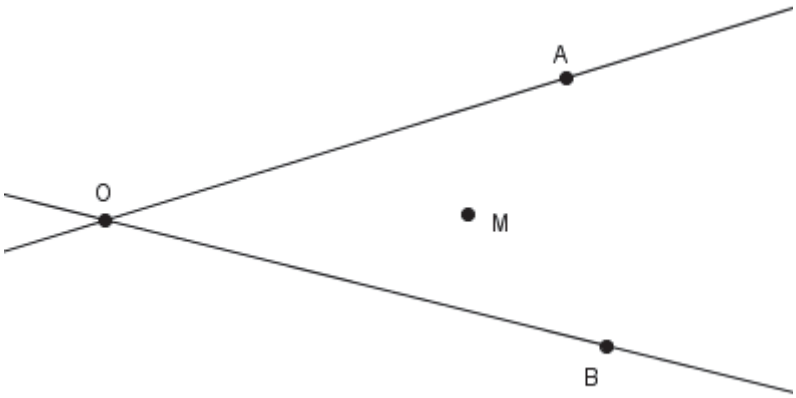
تمرين 1

x و y عددين حقيقيين موجبين

بين أن $\left(\frac{x+y}{2}\right)^3 \leq \frac{x^3+y^3}{2}$

تمرين 2

نعتبر الشكل جانبه :



حدد نقطتين O' و N من

المستقيمين (OA) و (OB) على

التوالي بحيث تكون النقطة M

منتصف $[NO']$

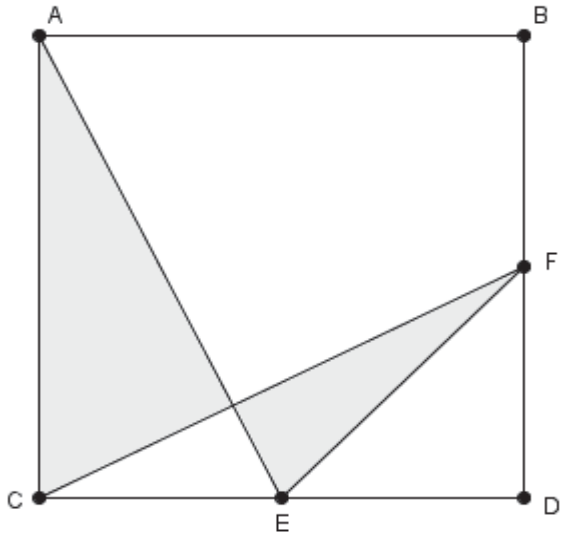
تمرين 3

x و y و z أعداد حقيقية غير منعدمة بحيث : $xy+yz+zx=0$

بين أن : $\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}=-3$

تمرين 4

احسب S مساحة المنطقة المضللة



www.dzexams.com

حل أولمبياد الرابع عشر

تمرين 1

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^3-\frac{x^3+y^3}{2}=\frac{(x+y)^3}{2^3}-\frac{x^3+y^3}{2}=\frac{(x+y)^2(x+y)}{2^3}-\frac{4\left(x^3+y^3\right)}{4\times 2}$$

$$=\frac{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}{8}-\frac{4x^3+4y^3}{8}$$

$$=\frac{-3x^3+3x^2y+3xy^2-3y^3}{8}$$

$$=\frac{-3\left(x^3-x^2y-xy^2+y^3\right)}{8}$$

$$=\frac{-3\left(x^2(x-y)-y^2(x-y)\right)}{8}$$

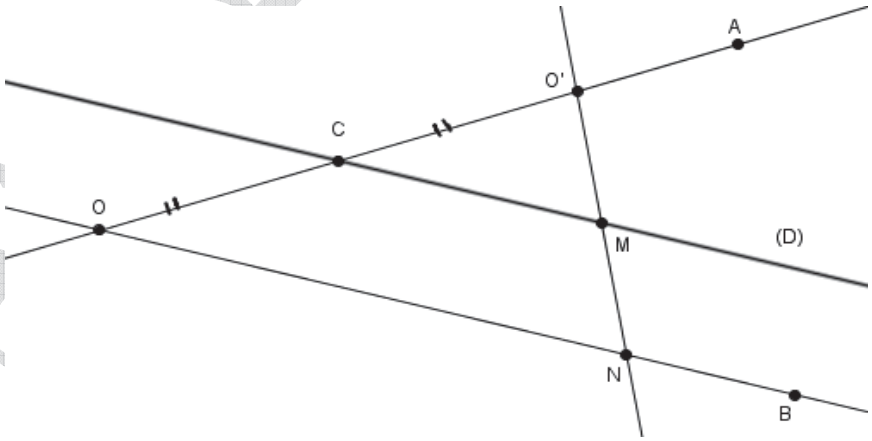
$$=\frac{-3(x-y)\left(x^2-y^2\right)}{8}$$

$$=\frac{-3(x-y)(x-y)(x+y)}{8}$$

$$=\frac{-3(x-y)^2(x+y)}{8}\le 0$$

(لأن $(x-y)^2\ge 0$ و $x+y\ge 0$)

تمرين 2



المرحلة الأولى :

ننشئ المستقيم (D) الموازي للمستقيم (OB) ويقطع المستقيم (OA) في النقطة C

المرحلة الثانية :

www.dzexams.com

ننشئ النقطة O' مماثلة النقطة O بالنسبة للنقطة C

المرحلة الثالثة :

ننشئ النقطة N تقاطع المستقيمين $(O'M)$ و (OB)

لدينا في المثلث $O'ON$ المستقيم (D) يمر من C منتصف القطعة $[OO']$ ويوازي (ON)

ويقطع $[NO']$ في النقطة M

إذن النقطة M هي منتصف القطعة $[NO']$

تمرين 3

$$\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}=\frac{xy(x+y)+yz(y+z)+xz(z+x)}{xyz}$$

$$=\frac{xy(x+y)+xyz-xyz+yz(y+z)+xyz-xyz+xz(z+x)+xyz-xyz}{xyz}$$

$$=\frac{xy(x+y+z)-xyz+yz(y+z+x)-xyz+xz(z+x+y)-xyz}{xyz}$$

$$=\frac{xy\times 0-xyz+yz\times 0-xyz+xz\times 0-xyz}{xyz}$$

$$=\frac{-xyz-xyz-xyz}{xyz}$$

$$=\frac{-3\,xyz}{xyz}$$

$$=-3$$

تمرين 4

لدينا المثلث ACE قائم الزاوية في C

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $AE^2=AC^2+CE^2$

ومنه : $AE^2=2^2+1^2=4+1=5$

أي : $AE=\sqrt{5}$

و لدينا : $\begin{cases} AC=DC \\ CE=DF \\ A\hat{C}E=F\hat{D}C \end{cases}$

إذن المثلثان ACE و FDC متقايسان

www.dzexams.com

ومنه : $A\hat{C}E = F\hat{C}D$ و $AE = CF = \sqrt{5}$

لدينا : $H\hat{C}E + H\hat{E}C = C\hat{A}E + H\hat{E}C = 180^\circ - A\hat{C}E = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

إذن : $C\hat{H}E = 180^\circ - \left(H\hat{C}E + H\hat{E}C\right) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

ومنه المثلثان AHC و FHE قائما الزاوية في H

أي : $S = \frac{AH \times CH}{2} + \frac{EH \times FH}{2}$ (S مساحة المنطقة المضللة)

حساب AH و CH و EH و FH :

لدينا : $\sin C\hat{A}E = \frac{CE}{AE} = \frac{CH}{AC}$

و $\cos C\hat{A}E = \frac{CA}{AE} = \frac{AH}{AC}$

و $\sin F\hat{C}D = \frac{FD}{FC} = \frac{EH}{EC}$

يعني : $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{CH}{2}$

و $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{AH}{2}$

و $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{EH}{1}$

إذن : $CH = \frac{2}{\sqrt{5}}$

و $AH = \frac{4}{\sqrt{5}}$

و $EH = \frac{1}{\sqrt{5}}$

لدينا : $FH = FC - CH = \sqrt{5} - \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$

وبالتالي :

$$S = \frac{\frac{4}{\sqrt{5}} \times \frac{2}{\sqrt{5}}}{2} + \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{3}{\sqrt{5}}}{2}$$
$$= \frac{4}{5} + \frac{3}{10}$$
$$= \frac{11}{10}$$

www.dzexams.com

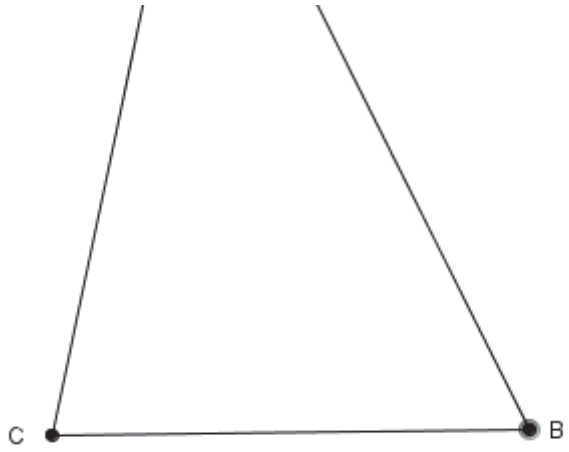
أولمبياد الثالث عشر

تمرين 1

x و y عددان حقيقيان مختلفان ($x \neq y$) و موجبان قطعا بحيث : $x+2y=3\sqrt{xy}$

احسب $\frac{x}{y}$

تمرين 2



أراد محمد أن يرسم مثلثا ABC لكن

لاحظ أن الرأس A يوجد خارج الورقة

كماهو مبين في الشكل جانبه

ساعد محمد على رسم المتوسط الموافق

للضلع $[BC]$

تمرين 3

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا

1 – بين أن $\frac{xy}{x+y} \leq \frac{x+y}{4}$

2 – أستنتج أن $\frac{xy}{x+y}+\frac{xz}{x+z}+\frac{zy}{z+y} \leq \frac{x+y+z}{2}$

تمرين 4

EFG مثلث قائم الزاوية في F

بين أن : $EF+FG \leq \sqrt{2}EG$

www.dzexams.com

حل أولمبياد الثالث عشر

تمرين 1

لدينا : $x+2y=3\sqrt{xy}$

يعني : $\frac{x+2y}{y}=\frac{3\sqrt{xy}}{y}$

يعني : $\frac{x}{y}+2=3\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{y^2}}$

يعني : $\frac{x}{y}+2=3\sqrt{\frac{xy}{y^2}}$

يعني : $\frac{x}{y}+2=3\sqrt{\frac{x}{y}}$

يعني : $\frac{x}{y}-3\sqrt{\frac{x}{y}}+2=0$

يعني : $\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2-2\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{x}{y}}+2=0$

يعني : $\sqrt{\frac{x}{y}}\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-2\right)-\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-2\right)=0$

يعني : $\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-2\right)\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-1\right)=0$

يعني : $\sqrt{\frac{x}{y}}-2=0$ أو $\sqrt{\frac{x}{y}}-1=0$

يعني : $\sqrt{\frac{x}{y}}=2$ أو $\sqrt{\frac{x}{y}}=1$

يعني : $\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2=2^2$ أو $\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2=1^2$

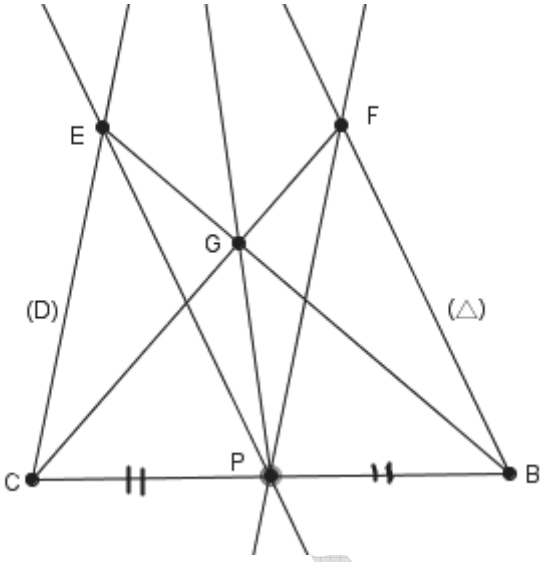
يعني : $\frac{x}{y}=4$ أو $\frac{x}{y}=1$

ونعلم أن x و y عددان حقيقيان مختلفان إذن $\frac{x}{y}\neq 1$

وبالتالي : $\frac{x}{y}=4$

www.dzexams.com

تمرين 2



– ننشئ النقطة P منتصف $[BC]$

– ننشئ المستقيم المار من P والموازي للمستقيم (Δ) ويقطع المستقيم (D) في النقطة E

– ننشئ المستقيم المار من P والموازي للمستقيم (D) ويقطع المستقيم (Δ) في النقطة F

– لدينا في المثلث ABC المستقيم (PE) يمر من P منتصف القطعة $[BC]$ ويوازي $(AB)=(\Delta)$ ويقطع $(AC)=(D)$ في النقطة E

إذن النقطة E هي منتصف القطعة $[AC]$

ومنه المستقيم (BE) هو متوسط المثلث ABC (1)

– لدينا في المثلث ABC المستقيم (PF) يمر من P منتصف القطعة $[BC]$ ويوازي $(AC)=(D)$ ويقطع $(AB)=(\Delta)$ في النقطة F

إذن النقطة F هي منتصف القطعة $[AB]$

ومنه المستقيم (CF) هو متوسط المثلث ABC (2)

من 1 و 2 نستنتج أن النقطة G هي مركز ثقل المثلث ABC

وبالتالي المستقيم (PG) هو المتوسط الموافق للضلع $[BC]$ المار من النقطة A

تمرين 3

www.dzexams.com

1- لدينا :

$$\frac{xy}{x+y}-\frac{x+y}{4}=\frac{4xy-(x+y)^2}{4(x+y)}=\frac{4xy-x^2-2xy-y^2}{4(x+y)}=\frac{2xy-x^2-y^2}{4(x+y)}=\frac{-(x-y)^2}{4(x+y)}\geq 0$$

إذن : $\frac{xy}{x+y}\leq\frac{x+y}{4}$

2- حسب السؤال 1 لدينا : $\begin{cases}\frac{xy}{x+y}\leq\frac{x+y}{4}\\ \frac{zy}{z+y}\leq\frac{z+y}{4}\\ \frac{xz}{x+z}\leq\frac{x+z}{4}\end{cases}$ يكافئ : $\frac{xy}{x+y}+\frac{xz}{x+z}+\frac{zy}{z+y}\leq\frac{x+y}{4}+\frac{x+z}{4}+\frac{z+y}{4}$

يكافئ : $\frac{xy}{x+y}+\frac{xz}{x+z}+\frac{zy}{z+y}\leq\frac{2x+2y+2z}{4}$ يكافئ : $\frac{xy}{x+y}+\frac{xz}{x+z}+\frac{zy}{z+y}\leq\frac{2(x+y+z)}{4}$

إذن : $\frac{xy}{x+y}+\frac{xz}{x+z}+\frac{zy}{z+y}\leq\frac{x+y+z}{2}$

تمرين 4

لدينا EFG مثلث قائم الزاوية في F

حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة إذن : $EG^2=EF^2+FG^2$

لنحدد إشارة الفرق $(EF+FG)^2-\left(\sqrt{2}EG\right)^2$:

$$\begin{aligned}(EF+FG)^2-\left(\sqrt{2}EG\right)^2&=EF^2+FG^2+2EF\times FG-2EG^2\\&=EF^2+FG^2+2EF\times FG-2EG^2\\&=EF^2+FG^2+2EF\times FG-2\left(EF^2+FG^2\right)\\&=EF^2+FG^2+2EF\times FG-2EF^2-2FG^2\\&=2EF\times FGG-EF^2-FG^2\\&=-\left(EF^2-2EF\times FG+FG^2\right)\\&=-(EF-FG)^2\leq 0\end{aligned}$$

إذن : $(EF+FG)^2\leq\left(\sqrt{2}EG\right)^2$

ومنه : $EF+FG\leq\sqrt{2}EG$

www.dzexams.com

أولمبياد الثاني عشر

تمرين 1

x و y و z أعدادا حقيقية غير منعدمة بحيث : $xz+yz+xy=0$

بين أن : $\frac{x+y}{xy}+\frac{y+z}{yz}+\frac{z+x}{xc}=0$

تمرين 2

ABC مثلث بحيث : $AB^4-AC^4=BC^2\left(AB^2-AC^2\right)$ و $AB\neq AC$

بين أن المثلث ABC قائم الزاوية

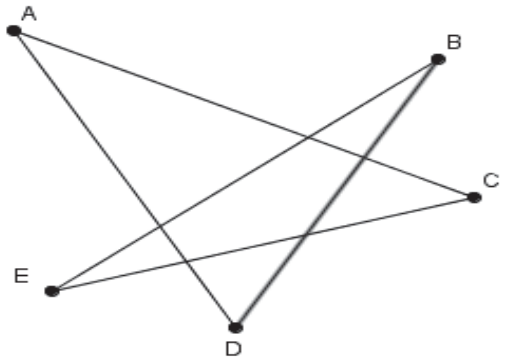
تمرين 3

x و y و z أعدادا حقيقية موجبة غير منعدمة بحيث : $x<y+z$

بين أن : $\frac{x}{1+x}<\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}$

تمرين 4

نعتبر الشكل جانبه



بين أن $\hat{A}+\hat{D}+\hat{B}+\hat{E}+\hat{C}=180^\circ$

www.dzexams.com

حل أولمبياد الثاني عشر

تمرين 1

لدينا :

$$\frac{x+y}{xy}+\frac{y+z}{yz}+\frac{z+x}{xc}=\frac{z}{z}\times\frac{x+y}{xy}+\frac{x}{x}\times\frac{y+z}{yz}+\frac{y}{y}\times\frac{z+x}{xz}$$
$$=\frac{xz+yz}{xyz}+\frac{xy+xz}{xyz}+\frac{yz+xy}{xyz}$$
$$=\frac{xz+yz+xy+xz+yz+xy}{xyz}$$
$$=\frac{2xz+2yz+2xy}{xyz}$$
$$=\frac{2(xz+yz+xy}{xyz}$$
$$=\frac{2\times 0}{xyz}=0$$

إذن : $\boxed{\frac{x+y}{xy}+\frac{y+z}{yz}+\frac{z+x}{xc}=0}$

تمرين 2

لدينا : $AB^4-AC^4=BC^2\left(AB^2-AC^2\right)$

يعني : $AB^4-AC^4=BC^2\times AB^2-BC^2\times AC^2$

يعني : $AB^4-AC^4-BC^2\times AB^2+BC^2\times AC^2=0$

يعني : $\left(AB^2-AC^2\right)\left(AB^2+AC^2\right)-BC^2\left(AB^2-AC^2\right)=0$

يعني : $\left(AB^2-AC^2\right)\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)=0$

يعني : $AB^2-AC^2=0$ أو $AB^2+AC^2-BC^2=0$

يعني : $AB^2=AC^2$ أو $AB^2+AC^2=BC^2$

يعني : $AB=AC$ أو $AB^2+AC^2=BC^2$

ونعلم أن $AB\neq AC$ إذن $AB^2+AC^2=BC^2$

حسب مبرهنة فيتاقورس العكسية فإن المثلث ABC قائم الزاوية في A

www.dzexams.com

تمرين 3

$$\frac{x}{1+x}-\left(\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}\right)=\frac{x}{1+x}-\frac{y}{1+y}-\frac{z}{1+z}$$

$$=\frac{x(1+y)(1+z)-y(1+x)(1+z)-z(1+x)(1+y)}{(1+x)(1+y)(1+z)}$$

$$=\frac{x+\cancel{xz}+\cancel{xy}+\cancel{xyz}-y-yz-\cancel{xy}-\cancel{xyz}-z-yz-\cancel{xz}-xyz}{(1+x)(1+y)(1+z)}$$

$$=\frac{x-y-z-2yz-xyz}{(1+x)(1+y)(1+z)}$$

لدينا : $x>0$ و $y>0$ و $z>0$ و $x<y+z$

إذن $(1+x)(1+y)(1+z)>0$ و $-2yz-xyz<0$ و $x-y-z<0$

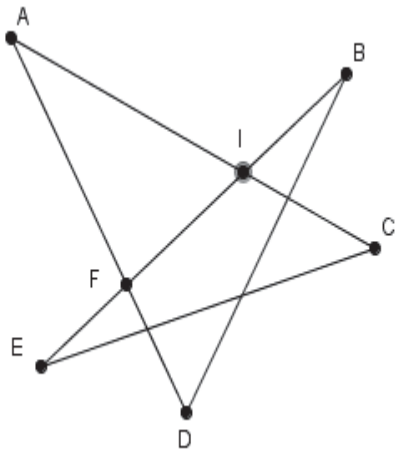
ومنه : $\frac{x-y-z-2yz-xyz}{(1+x)(1+y)(1+z)}<0$

وبالتالي : $\frac{x}{1+x}<\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}$

تمرين 4

نضع النقطة F تقاطع المستقيمين (AD)و (EB)

و نضع النقطة I تقاطع المستقيمين (AC)و (EB)



لدينا : $A\hat{I}F+C\hat{I}E=180$ و $A\hat{F}I+B\hat{F}D=180$

إذن : $C\hat{I}E=180-A\hat{I}F$ و $B\hat{F}D=180-A\hat{F}I$

في المثلث DFB لدينا : $B\hat{F}D+\hat{D}+\hat{B}=180$

يعني : $180-A\hat{F}I+\hat{D}+\hat{B}=180$ ($B\hat{F}D=180-A\hat{F}I$)

إذن : $A\hat{F}I=\hat{D}+\hat{B}$ (1)

في المثلث CEI لدينا : $C\hat{I}E+\hat{E}+\hat{C}=180$

يعني : $180-A\hat{I}F+\hat{E}+\hat{C}=180$ ($C\hat{I}E=180-A\hat{I}F$)

إذن : $A\hat{I}F=\hat{E}+\hat{C}$ (2)

في المثلث AFI لدينا : $\hat{A}+A\hat{F}I+A\hat{I}F=180^{\circ}$ (3)

من 1 و 2 و 3 نستنتج أن : $\hat{A}+\hat{D}+\hat{B}+\hat{E}+\hat{C}=180^{\circ}$

www.dzexams.com

أولمبياد الحادي عشر

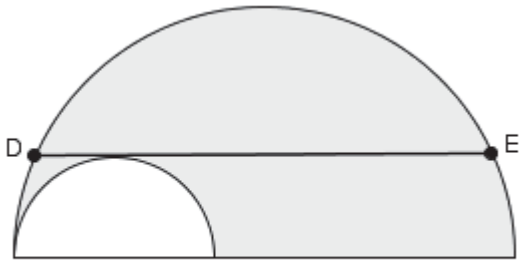
تمرين 1

نعتبر الشكل جانبه بحيث :

المستقيم (DE) مماس للدائرة الصغيرة

و $DE=8cm$

احسب S' مساحة المطقة المظللة



تمرين 2

x و y و z أعداد حقيقية غير منعدمة بحيث : $x+\frac{1}{y}=10$ و $y+\frac{1}{z}=11$ و $z+\frac{1}{x}=12$

بين أن : $xyz+\frac{1}{xyz}=1287$

تمرين 3

EFG مثلث متساوي الساقين في E و A نقطة من $[FG]$

و $[FD]$ الإرتفاع الموافق للضلع $[EG]$

و النقطتان B و C هما المسقطان العموديان للنقطة A على (EF) و (EG) على التوالي

بين أن : $FD=AB+AC$

تمرين 4

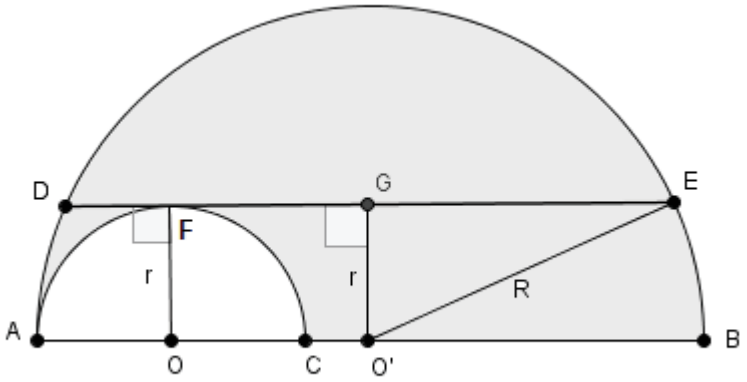
x و y عددين حقيقيين

بين أن : $(x^2+1)(y^2+1)\geq x(y^2+1)+y(x^2+1)$

www.dzexams.com

حل أولمبياد الحادي عشر

تمرين 1



نعتبر النقطة O' مركز الدائرة الكبيرة التي شعاعها R

و النقطة O مركز الدائرة الصغيرة التي شعاعها r

لدينا : $O'E = O'D = R$

إذن $(O'G)$ واسط القطعة $[DE]$

ومنه النقطة G منتصف $[DE]$

أي $GE = GD = 4cm$

لدينا المثلث $O'GE$ قائم الزاوية في G

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $O'E^2 = O'G^2 + GE^2$

أي : $R^2 = r^2 + 16$

مساحة المنطقة المظللة (S') = مساحة نصف الدائرة الكبيرة – مساحة نصف الدائرة الصغيرة

$$S' = \frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi\left(r^2+16\right)}{2} - \frac{\pi r^2}{2}$$
$$= \frac{\pi 16}{2}$$
$$= 8\pi$$

www.dzexams.com

تمرين 2

لدينا : $x+\frac{1}{y}=10$ و $y+\frac{1}{z}=11$ و $z+\frac{1}{x}=12$

نجمع المتساويات طرف بطرف إذن : $x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=33$

نضرب المتساويات طرف بطرف: $\left(x+\frac{1}{y}\right)\times\left(y+\frac{1}{z}\right)\times\left(z+\frac{1}{x}\right)=1320$

يعني : $\left(xy+\frac{x}{z}+1+\frac{1}{yz}\right)\times\left(z+\frac{1}{x}\right)=1320$

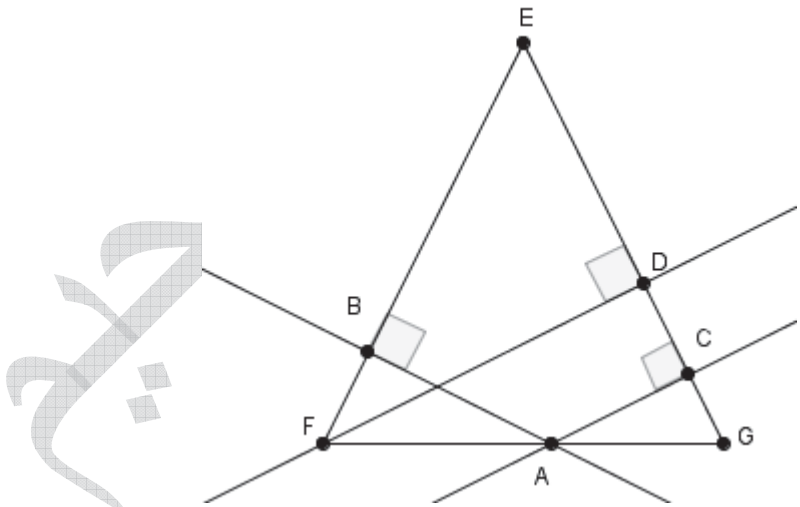
يعني : $xyz+y+x+\frac{1}{z}+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xyz}=1320$

يعني : $\left(xyz+\frac{1}{xyz}\right)+\left(x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1320$

يعني : $\left(xyz+\frac{1}{xyz}\right)+33=1320$

وبالتالي : $xyz+\frac{1}{xyz}=1287$

تمرين 3



لدينا : $S_{EFG}=S_{EFA}+S_{EAG}$

(S_{EFG} : مساحة مثلث EFG ،، S_{EFA} : مساحة مثلث EFA ،، S_{EAG} : مساحة مثلث EAG)

www.dzexams.com

يعني : $\frac{EG\times FD}{2}=\frac{AB\times EF}{2}+\frac{AC\times EG}{2}$

يعني : $\frac{EG\times FD}{2}=\frac{AB\times EF+AC\times EG}{2}$

يعني : $\frac{EG\times FD}{2}=\frac{AB\times EG+AC\times EG}{2}$ (لأن المثلث EFG متساوي الساقين في E $EF=EG$)

يعني : $\frac{EG\times FD}{2}=\frac{EG(AB+AC)}{2}$

يعني : $\frac{\cancel{2}}{\cancel{EG}}\times\frac{\cancel{EG}\times FD}{\cancel{2}}=\frac{\cancel{2}}{\cancel{EG}}\times\frac{\cancel{EG}(AB+AC)}{\cancel{2}}$

إذن : $FD=AB+AC$

تمرين 4

لدينا : $(x-1)^2=x^2-2x+1\geq 0$ و $(y-1)^2=y^2-2y+1\geq 0$

يعني : $x^2+1\geq 2x$ و $y^2+1\geq 2y$

يعني : $\frac{x^2+1}{2}\geq x$ و $\frac{y^2+1}{2}\geq y$

يعني : $\frac{(x^2+1)}{2}(y^2+1)\geq x(y^2+1)$ و $\frac{(y^2+1)}{2}(x^2+1)\geq y(x^2+1)$

نجمع المتفاوتتين طرف بطرف : $\frac{(x^2+1)}{2}(y^2+1)+\frac{y^2+1}{2}(x^2+1)\geq x(y^2+1)+y(x^2+1)$

يعني : $\frac{2(x^2+1)}{2}\times(y^2+1)\geq x\times(y^2+1)+y\times(x^2+1)$

إذن : $(x^2+1)\times(y^2+1)\geq x\times(y^2+1)+y\times(x^2+1)$

www.dzexams.com

أولمبياد العاشر

تمرين 1

x و y و z و t أعداد حقيقية موجبة بحيث : $x+y+z=1$

1- بين أن : $\sqrt{t} \leq \frac{t+1}{2}$

1- استنتج أن : $\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}+\sqrt{2z+1} \leq 4$

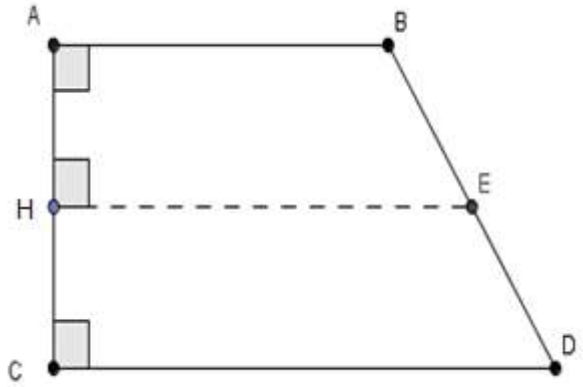
تمرين 2

EFG مثلث قائم الزاوية في E

النقطة M المسقط العمودي للنقطة E على المستقيم (FG)

بين أن : $EF+EG<EM+FG$

تمرين 3



$ABCD$ رباعي بحيث : $(AB)\perp(AC)$

و $(DC)\perp(AC)$ والنقطة E منتصف $[BD]$

النفطة H هي المسقط العمودي للنقطة

E على (AC)

بين أن $2EH=AB+DC$

تمرين 4

احسب :

$$S=\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+...+\frac{1}{1000\sqrt{999}+999\sqrt{1000}}$$

www.dzexams.com

حل أولمبياد العاشر

تمرين 1

1- لدينا : $\left(\sqrt{t}-1\right)^2 \geq 0$

يعني : $\left(\sqrt{t}-1\right)^2 = t-2\sqrt{t}+1 \geq 0$ يعني : $-2\sqrt{t} \geq -t-1$ يعني : $2\sqrt{t} \leq t+1$

يعني : $\frac{1}{2}\times 2\sqrt{t} \leq \frac{1}{2}(t+1)$

إذن : $\sqrt{t} \leq \frac{t+1}{2}$

2- حسب السؤال 1 لدينا : $\sqrt{2x+1} \leq \frac{(2x+1)+1}{2}$

و $\sqrt{2y+1} \leq \frac{(2y+1)+1}{2}$

و $\sqrt{2z+1} \leq \frac{(2z+1)+1}{2}$

نجمع المتفاوتات طرف بطرف : $\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}+\sqrt{2z+1} \leq \frac{(2x+1)+1}{2}+\frac{(2y+1)+1}{2}+\frac{(2z+1)+1}{2}$

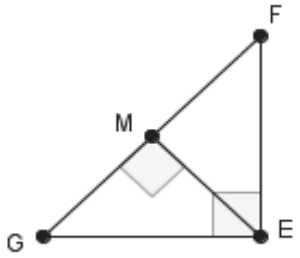
يعني : $\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}+\sqrt{2z+1} \leq \frac{2x+2y+2z+6}{2}$

يعني : $\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}+\sqrt{2z+1} \leq \frac{2(x+y+z)+6}{2}$

يعني : $\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}+\sqrt{2z+1} \leq \frac{2\times 1+6}{2}$ يعني : $\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}+\sqrt{2z+1} \leq \frac{8}{2}$

إذن : $\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}+\sqrt{2z+1} \leq 4$

تمرين 2



لدينا :

$$(EM+FG)^2 = EM^2+2EM\times FG+FG^2$$
$$= EM^2+4\left(\frac{EM\times FG}{2}\right)+FG^2$$

نعلم أن : $S_{EFG} = \frac{EM\times FG}{2} = \frac{EF\times EG}{2}$

(S_{EFG} : مساحة المثلث EFG)

إذن : $(EM+FG)^2 = EM^2+4S_{EFG}+FG^2$ (1)

www.dzexams.com

لدينا :

$$(EF+EG)^2 = EF^2 + 2EF\times EG + EG^2$$
$$= EF^2 + EG^2 + 4\left(\frac{EF\times EG}{2}\right)$$

($FG^2 = EF^2 + EG^2$ لأن المثلث EFG قائم الزاوية في E)

إذن : $(EF+EG)^2 = FG^2 + 4S_{EFG}$ (2)

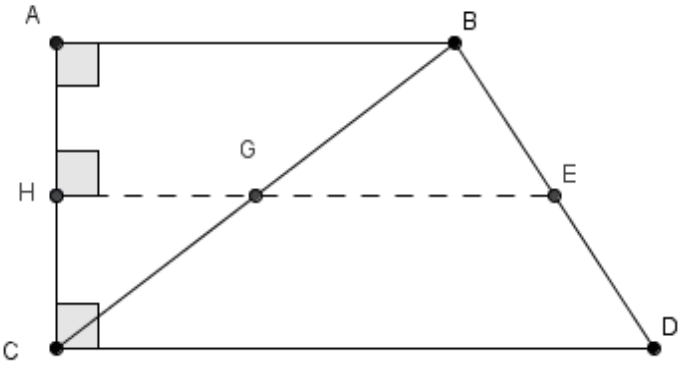
نقوم بطرح المتساويتين 1 و 2 طرف بطرف :

$$(EF+EG)^2 - (EM+FG)^2 = FG^2 + 4S_{ABC} - \left(EM^2 + 4S_{ABC} + FG^2\right)$$
$$= \cancel{FG^2} + \cancel{4S_{ABC}} - EM^2 - \cancel{4S_{ABC}} - \cancel{FG^2}$$
$$= -EM^2 < 0$$

إذن : $(EF+EG)^2 < (EM+FG)^2$

وبالتالي : $EF+EG < EM+FG$

تمرين 3



بتطبيق طاليس المباشرة في المثلث BCD : $\frac{BG}{BC} = \frac{BE}{BD} = \frac{GE}{CD}$

يعني: $\frac{GE}{CD} = \frac{BE}{BD} = \frac{BE}{2BE} = \frac{1}{2}$ (لأن E منتصف $[BD]$)

إذن $GE = \frac{1}{2}CD$ (1)

لدينا في المثلث BCD النقطة E منتصف $[BD]$ و $(GE)//(CD)$

إذن G منتصف $[BC]$

بتطبيق طاليس المباشرة في المثلث ABC : $\frac{CH}{CA} = \frac{CG}{CB} = \frac{HG}{AB}$

ومنه $\frac{HG}{AB} = \frac{CG}{CB} = \frac{1}{2}$ (G منتصف $[BC]$)

www.dzexams.com

إذن : $HG=\frac{1}{2}AB$ (2)

من 1 و 2 نستنتج أن : $2EH=2(HG+GE)=2\left(\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}CD\right)=AB+CD$

تمرين 4

لدينا :

$$\begin{aligned}\frac{1}{x\sqrt{x-1}+(x-1)\sqrt{x}}&=\frac{1}{x\sqrt{x-1}+(x-1)\sqrt{x}}\times\frac{x\sqrt{x-1}-(x-1)\sqrt{x}}{x\sqrt{x-1}-(x-1)\sqrt{x}}\\&=\frac{x\sqrt{x-1}-(x-1)\sqrt{x}}{x^2(x-1)-(x-1)^2\times x}\\&=\frac{x\sqrt{x-1}-(x-1)\sqrt{x}}{x^3-x^2-x(x^2-2x+1)}\\&=\frac{x\sqrt{x-1}-(x-1)\sqrt{x}}{\cancel{x^3}-x^2-\cancel{x^3}+2x^2-x}\\&=\frac{x\sqrt{x-1}-(x-1)\sqrt{x}}{x^2-x}\\&=\frac{x\sqrt{x-1}-(x-1)\sqrt{x}}{x(x-1)}\\&=\frac{\cancel{x}\sqrt{x-1}}{\cancel{x}(x-1)}-\frac{\cancel{(x-1)}\sqrt{x}}{x\cancel{(x-1)}}\\&=\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}-\frac{\sqrt{x}}{x}\end{aligned}$$

إذن :

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{1000\sqrt{999}+999\sqrt{1000}}\\&=\frac{\sqrt{1}}{1}-\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}}+\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}}-\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{3}}+\ldots\ldots+\frac{\cancel{\sqrt{999}}}{\cancel{999}}-\frac{\sqrt{1000}}{1000}\\&=1-\frac{\sqrt{1000}}{1000}=1-\frac{10\sqrt{10}}{1000}=1-\frac{\sqrt{10}}{100}\end{aligned}$$

www.dzexams.com

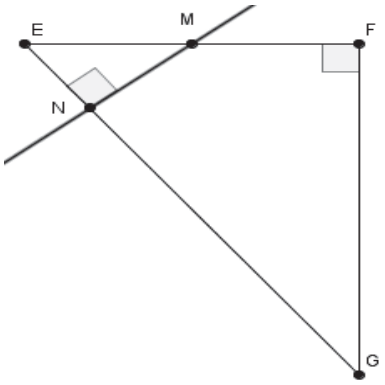
أولمبياد التاسع

تمرين 1

x و y عددان حقيقيان بحيث : $x>1$ و $y>1$

بين أن : $\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}\geq 8$

تمرين 2



EFG مثلث قائم الزاوية في F بحيث : $EF<FG$

النقطة M منتصف $[EF]$

النقطة N هي المسقط العمودي للنقطة

M على (EG)

بين أن : $GN^2-EN^2=FG^2$

تمرين 3

m عدد حقيقي موجب قطعا قطعا

1- بين أن $m+\frac{1}{m}\geq 2$

2- x و y و z و t أعداد حقيقية موجبة قطعا

بين أن : $(x+y+z+t)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)\geq 16$

تمرين 4

$ABCD$ متوازي الأضلاع و M و N منتصفا $[BC]$ و $[AD]$ على التوالي

في المثلث AMD الإرتفاع المار من D يقطع (AM) في E

بين أن : $CE=CD$

www.dzexams.com

حل أولمبياد التاسع

تمرين 1

لدينا : $x>1$ و $y>1$

يعني : $x-1>0$ و $y-1>0$

نضع : $a=x-1$ و $b=y-1$

يعني : $x=a+1$ و $y=b+1$

إذن : $x^2=(a+1)^2$ و $y^2=(b+1)^2$

لدينا :

$$\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}=\frac{(a+1)^2}{b}+\frac{(b+1)^2}{a}$$
$$=\frac{a^2+2a+1}{b}+\frac{b^2+2b+1}{a}$$
$$=\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}+2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$$

لدينا : $(a+b)^2\geq 0$

يعني : $a^2+2ab+b^2\geq 0$ يعني : $a^2+b^2\geq 2ab$

يعني : $\frac{1}{ab}\times(a^2+b^2)\geq\frac{1}{\cancel{ab}}\times 2\cancel{ab}$ يعني : $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$

إذن : $2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\geq 4$ (1)

لدينا : $(a-1)^2\geq 0$

يعني : $a^2-2a+1\geq 0$ يعني : $a^2+1\geq 2a$ يعني : $\frac{1}{b}\times(a^2+1)\geq\frac{1}{b}\times 2a$

إذن : $\frac{a^2+1}{b}\geq\frac{2a}{b}$ (2)

بنفس الطريقة نبين أن : $\frac{b^2+1}{a}\geq\frac{2b}{a}$ (3)

نجمع المتفاوتتين 2 و 3 طرف بطرف :

www.dzexams.com

$$\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}\geq\frac{2a}{b}+\frac{2b}{a}$$

أي : $\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}\geq 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$

ومنه : $\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}\geq 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$ (4)

من 1 و 4 نستنتج أن : $\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}=\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}+2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\geq 4+4$

وبالتالي : $\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}\geq 8$

تمرين 2

لدينا المثلثان MEN و MNG قائما الزاوية

حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة إذن : $ME^2=MN^2+EN^2$ و $MG^2=MN^2+GN^2$

ومنه : $EN^2=ME^2-MN^2$ و $GN^2=MG^2-MN^2$

ومنه : $GN^2-EN^2=MG^2-MN^2-\left(ME^2-MN^2\right)$

ومنه : $GN^2-EN^2=MG^2-ME^2$

ومنه : $GN^2-EN^2=MG^2-MF^2$ (1)

($ME=MF$ لأن النقطة M منتصف $[EF]$)

لدينا المثلثان MGF قائم الزاوية

حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة إذن : $MG^2=MF^2+FG^2$

ومنه : $FG^2=MG^2-MF^2$ (2)

من 1 و 2 نستنتج أن : $GN^2-EN^2=FG^2$

تمرين 3

1- لدينا : $m+\frac{1}{m}-2=\frac{m^2+1}{m}-2=\frac{m^2+1-2m}{m}=\frac{(m-1)^2}{m}\geq 0$ إذن : $m+\frac{1}{m}\geq 2$

2- لدينا :

$$(x+y+z+t)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)=1+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{x}{t}+\frac{y}{x}+1+\frac{y}{z}+\frac{y}{t}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+1+\frac{z}{t}+\frac{t}{x}+\frac{t}{y}+\frac{t}{z}+1$$

$$=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{x}{t}+\frac{t}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{y}{t}+\frac{t}{y}\right)+\left(\frac{z}{t}+\frac{t}{z}\right)+4$$

www.dzexams.com

حسب السؤال 1 لدينا : $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$ و $\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\geq 2$ و $\frac{x}{t}+\frac{t}{x}\geq 2$

و $\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\geq 2$ و $\frac{y}{t}+\frac{t}{y}\geq 2$ و $\frac{z}{t}+\frac{t}{z}\geq 2$

إذن :

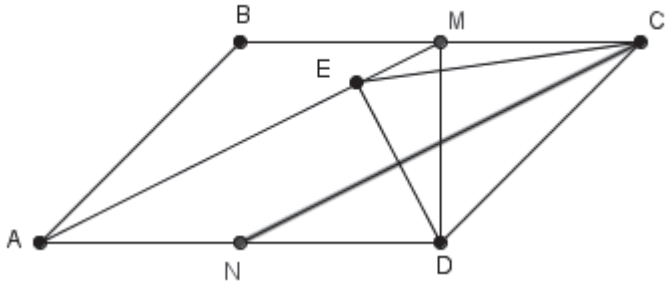
$$(x+y+z+t)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)=1+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{x}{t}+\frac{y}{x}+1+\frac{y}{z}+\frac{y}{t}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+1+\frac{z}{t}+\frac{t}{x}+\frac{t}{y}+\frac{t}{z}+1$$

$$=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{x}{t}+\frac{t}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{y}{t}+\frac{t}{y}\right)+\left(\frac{z}{t}+\frac{t}{z}\right)+4$$

$$\geq 2+2+2+2+2+2+4$$

وبالتالي : $\boxed{(x+y+z+t)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)\geq 16}$

تمرين 4



لدينا $ABCD$ متوازي الأضلاع و M و N منتصفا $[BC]$ و $[AD]$ على التوالي

إذن : $(MC)//(AN)$ و $MC=AN$

ومنه : الرباعي $ANCM$ متوازي الأضلاع

ومنه : $(AM)//(NC)$

ومنه : $(CN)\perp(DE)$ (1) (لأن $(AM)\perp(DE)$)

في المثلث ADE لدينا N منتصف $[AD]$ و $(CN)//(AE)$

إذن (CN) يمر من منتصف (DE) (2)

من 1 و 2 نستنتج أن (CN) هو واسط القطعة $[DE]$

وبالتالي : $CE=CD$

www.dzexams.com

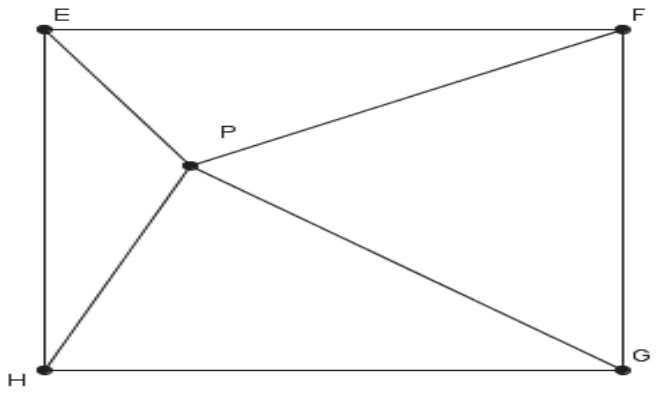
أولمبياد الثامن

تمرين 1

x و y عددان موجبان قطعا

بين أن : $\frac{x+y}{xy+x+1} \leq \frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}$

تمرين 2



$EFGH$ مربع

و النقطة P توجد في داخله

كماهو مبين في الشكل جانبه

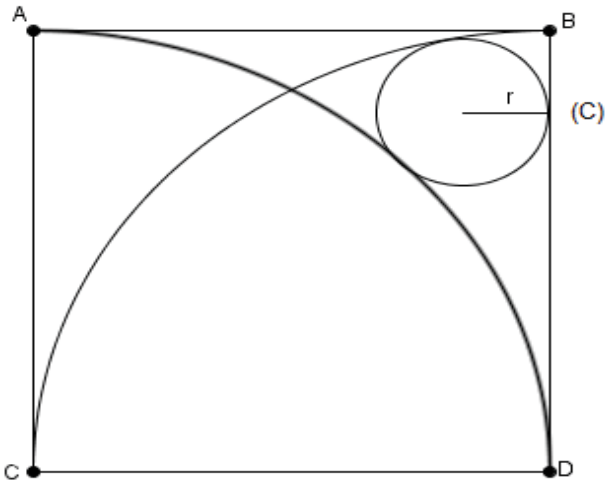
بين أن : $GP^2+EP^2=HP^2+FP^2$

تمرين 3

x و y عددين حقيقيين مختلفين غير منعدمين بحيث : $(x-y)(3x-2y)=xy$

احسب $\frac{x+y}{x-y}$

تمرين 4



نعتبر الشكل جانبه بحيث :

$ABDC$ مربع و $BD=6cm$ و r هو

شعاع الدائرة (C)

بين أن : $r=1cm$

www.dzexams.com

حل أولمبياد الثامن

تمرين 1

لدينا : $x>0$ و $y>0$

يعني : $x+y\geq x$ يعني : $x+y+1\geq x+1$ يعني : $\frac{1}{x+y+1}\leq\frac{1}{x+1}$

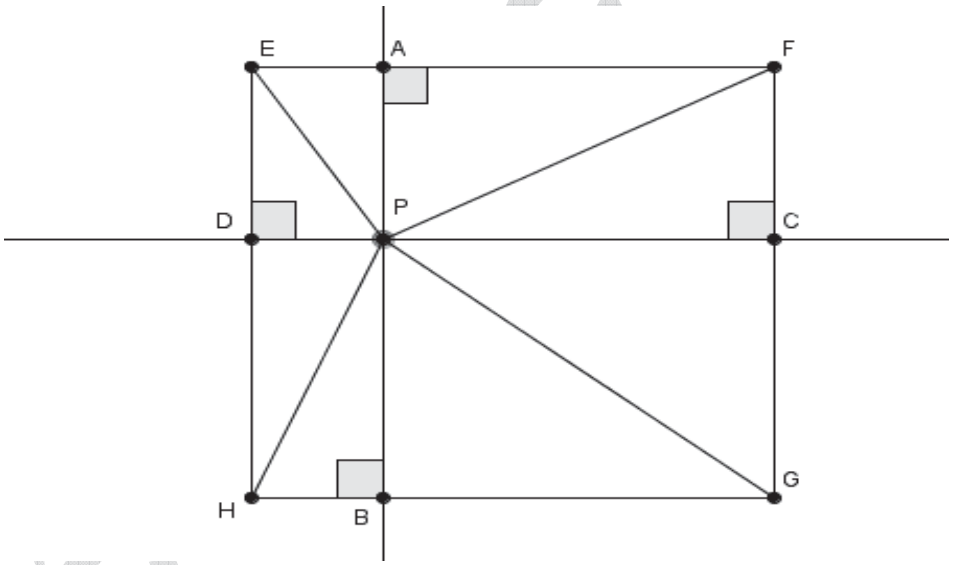
إذن : $\frac{x}{x+y+1}\leq\frac{x}{x+1}$ (1)

بنفس الطريقة نبين أن : $\frac{y}{y+x+1}\leq\frac{y}{y+1}$ (2)

من 1 و 2 نستنتج أن : $\frac{x}{x+y+1}+\frac{y}{y+x+1}\leq\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}$

وبالتالي : $\frac{x+y}{x+y+1}\leq\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}$

تمرين 2



تعتبر النقطة A المسقط العمودي للنقطة P على $[EF]$

و النقطة C المسقط العمودي للنقطة P على $[FG]$

و النقطة B المسقط العمودي للنقطة P على $[GH]$

www.dzexams.com

و النقطة D المسقط العمودي للنقطة P على $[EH]$

نطبق مبرهنة فيثاغورس على المثلثات AEP و AFP و PCG و PHB :

$$\begin{cases} EP^2 = AP^2 + AE^2 = AP^2 + DP^2 \\ PG^2 = PC^2 + CG^2 = PC^2 + PB^2 \\ PF^2 = AP^2 + AF^2 = AP^2 + PC^2 \\ PH^2 = PB^2 + HB^2 = PB^2 + DP^2 \end{cases} \left(AE = DP \text{ و } CG = PB \text{ و } AF = PC \text{ و } HB = DP \right)$$

إذن :

$$\begin{aligned} PG^2 + EP^2 &= PC^2 + PB^2 + AP^2 + DP^2 \\ &= PB^2 + DP^2 + AP^2 + PC^2 \\ &= PH^2 + PF^2 \end{aligned}$$

تمرين 3

لدينا : $(x-y)(3x-2y) = xy$ يعني : $3x^2 - 2xy - 3xy + 2y^2 - xy = 0$

يعني : $3x^2 - 6xy + 2y^2 = 0$ يعني : $3\left(x^2 - 2xy + \frac{2y^2}{3}\right) = 0$

يعني : $\left(x^2 - 2xy + y^2 - \frac{y^2}{3}\right) = 0$ يعني : $\left((x-y)^2 - \frac{y^2}{3}\right) = 0$

يعني : $\left(x - y + \frac{y}{\sqrt{3}}\right)\left(x - y - \frac{y}{\sqrt{3}}\right) = 0$

يعني : $x - y + \frac{y}{\sqrt{3}} = 0$ و $x - y - \frac{y}{\sqrt{3}} = 0$

يعني : $x = y - \frac{y}{\sqrt{3}}$ و $x = y + \frac{y}{\sqrt{3}}$

إذن :

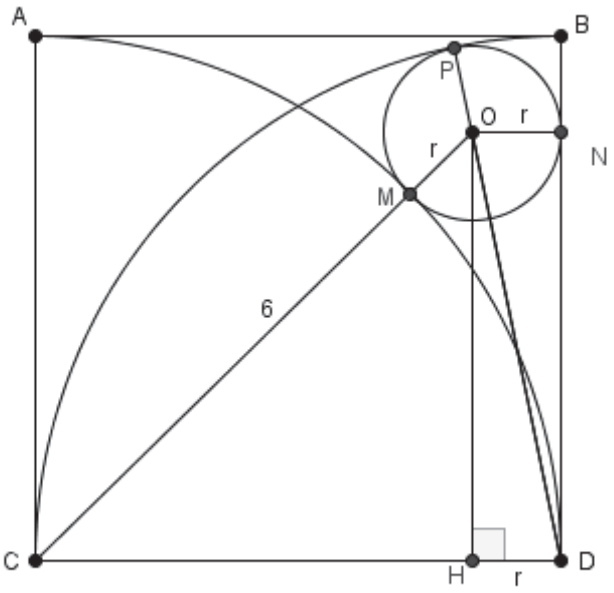
$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{y - \frac{y}{\sqrt{3}} + y}{y - \frac{y}{\sqrt{3}} - y} = \frac{2y - \frac{y}{\sqrt{3}}}{-\frac{y}{\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{3} - 1}{-1} = 1 - 2\sqrt{3}$$

أو

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{y + \frac{y}{\sqrt{3}} + y}{y + \frac{y}{\sqrt{3}} - y} = \frac{2y + \frac{y}{\sqrt{3}}}{\frac{y}{\sqrt{3}}} = 1 + 2\sqrt{3}$$

www.dzexams.com

تمرين 4



نعتبر النقطة H المسقط العمودي للنقطة O على (CD)

إذن : $O\hat{H}D = 90^\circ$

بما أن (DN) مماسا للدائرة (C) في النقطة N

فإن: $(DN) \perp (ON)$ ومنه $D\hat{N}O = 90^\circ$

لدينا : $H\hat{O}N = 360 - D\hat{N}O - O\hat{H}D - H\hat{D}N$

يعني: $H\hat{O}N = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

بما أن $H\hat{O}N = D\hat{N}O = O\hat{H}D = H\hat{D}N = 90^\circ$

فإن الرباعي $ONDH$ مستطيل

ومنه : $OH = ND$

ونعلم أن : $CH = CD - HD$ و $CO = CM + MO$ و $DO = DP - PO$

يعني : $CH = 6 - r$ و $CO = 6 + r$ و $DO = 6 - r$

حساب OH :

لدينا المثلث OHC قائم الزاوية في H

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $CO^2 = CH^2 + OH^2$

اي : $OH^2 = CO^2 - CH^2$ أي : $OH^2 = (6+r)^2 - (6-r)^2$

أي : $OH^2 = \cancel{36} + 12r + \cancel{r^2} - \cancel{36} + 12r - \cancel{r^2}$ ومنه : $OH = \sqrt{24r}$

حساب r :

لدينا المثلث ODN قائم الزاوية في D

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $OD^2 = ON^2 + DN^2$

اي : $(6-r)^2 = r^2 + \left(\sqrt{24r}\right)^2$ ($DO = 6-r$ و $OH = ND$)

أي : $36 - 12r + \cancel{r^2} = \cancel{r^2} + 24r$ أي : $36r = 36$

وبالتالي : $r = 1$

www.dzexams.com

أولمبياد السابع

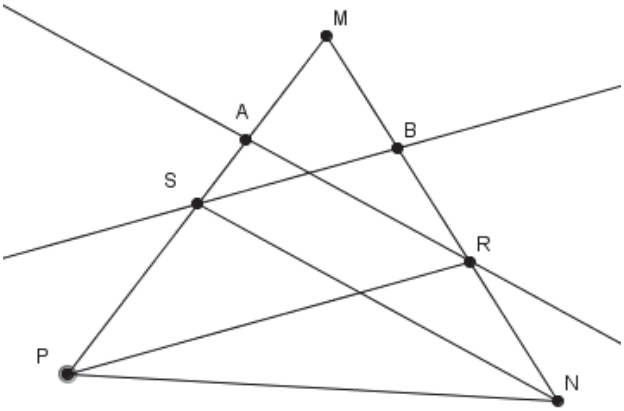
تمرين 1

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا

1- بين أن : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}$

2- استنتج أن : $\frac{1}{2x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{2z}\geq\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}$

تمرين 2



في الشكل جانبه لدينا : $S\in[PM]$ و $R\in[NM]$

و $(AR)//(NS)$ و $(PR)//(BS)$

بين أن : $\frac{MA}{MP}=\frac{MB}{MN}$

تمرين 3

ABC مثلث قائم الزاوية في C

بين أن : $BC^K > AB^k + AC^K$ ($K>2$)

تمرين 4

x و y و z و x' و y' و z' أعداد حقيقية موجبة قطعا بحيث : $\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'}=m$

بين أن : $\sqrt{xx'}+\sqrt{yy'}+\sqrt{zz'}=\sqrt{(x+y+z)(x'+y'+z')}$

www.dzexams.com

حل أولمبياد السابع

تمرين 1

1- لدينا : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{4}{x+y}=\frac{y+x}{xy}-\frac{4}{x+y}=\frac{(x+y)^2-4xy}{xy(x+y)}=\frac{x^2-2xy+y^2}{xy(x+y)}=\frac{(x-y)^2}{xy(x+y)}\geq 0$

(لأن : $(x-y)^2\geq 0$ و لدينا $x>0$ و $y>0$ يعني $xy(x+y)\geq 0$)

إذن : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}$

2- حسب السؤال السابق لدينا : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}$ (1)

بنفس الطريقة نبين أن : $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{4}{y+z}$ (2)

و $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\geq\frac{4}{x+z}$ (3)

نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\geq\frac{4}{x+y}+\frac{4}{y+z}+\frac{4}{x+z}$

أي : $\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}\geq 4\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+z}\right)$

أي : $\frac{1}{4}\times 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq\frac{1}{4}\times 4\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+z}\right)$

أي : $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+z}$

وبالتالي : $\frac{1}{2x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{2z}\geq\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}$

تمرين 2

في المثلث MSN لدينا : $(AR)//(NS)$

حسب مبرهنة طاليس المباشرة إذن : $\frac{MA}{MS}=\frac{MR}{MN}=\frac{AR}{SN}$ ومنه $\frac{MA}{MS}=\frac{MR}{MN}$

أي $MS\times MR=MA\times MN$ (1)

في المثلث MRP لدينا : $(PR)//(BS)$

حسب مبرهنة طاليس المباشرة إذن : $\frac{MB}{MR}=\frac{MS}{MP}=\frac{BS}{PR}$ ومنه $\frac{MB}{MR}=\frac{MS}{MP}$

أي $MS\times MR=MB\times MP$ (2)

www.dzexams.com

من 1 و 2 نستنتج أن : $MA\times MN = MB\times MP$

وبالتالي : $\frac{MA}{MP} = \frac{MB}{MN}$

تمرين 3

لدينا : ABC مثلث قائم الزاوية في C

إذن : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

نضرب طرفي المتساوية في BC^{K-2} فنحصل على : $BC^2\times BC^{K-2} = AB^2\times BC^{K-2} + AC^2\times BC^{K-2}$

يعني : $BC^K = AB^2\times BC^{K-2} + AC^2\times BC^{K-2}$ (1)

لدينا : $BC > AB$ و $BC > AC$ يعني : $BC^{K-2} > AB^{K-2}$ و $BC^{K-2} > AC^{K-2}$

يعني : $BC^{K-2}\times AB^2 > AB^{K-2}\times AB^2$ و $BC^{K-2}\times AC^2 > AC^{K-2}\times AC^2$

إذن : $BC^{K-2}\times AB^2 > AB^k$ و $BC^{K-2}\times AC^2 > AC^K$ (2)

من 1 و 2 نستنتج أن : $BC^K > AB^k + AC^K$

تمرين 4

لدينا : $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} = m$

إذن : $x = mx'$ و $y = my'$ و $z = mz'$

لدينا:

$$\begin{aligned}\sqrt{xx'} + \sqrt{yy'} + \sqrt{zz'} &= \sqrt{mx'x'} + \sqrt{my'y'} + \sqrt{mz'z'}\\ &= \sqrt{mx'^2} + \sqrt{my'^2} + \sqrt{mz'^2}\\ &= x'\sqrt{m} + y'\sqrt{m} + z'\sqrt{m}\\ &= \sqrt{m}\left(x'+y'+z'\right)\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+y+z)(x'+y'+z')} &= \sqrt{(mx'+my'+mz')(x'+y'+z')}\\ &= \sqrt{m(x'+y'+z')(x'+y'+z')}\\ &= \sqrt{m}\left(x'+y'+z'\right)\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{\sqrt{xx'} + \sqrt{yy'} + \sqrt{zz'} = \sqrt{(x+y+z)(x'+y'+z')}}$

www.dzexams.com

أولمبياد السادس

تمرين 1

x و y و z أعداد حقيقية موجبة ($x>0$ و $y>0$ و $z>0$)

1- بين أن $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$

2- استنتج أن : $\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}\geq 6$

تمرين 2

x و y و z أعداد حقيقية بحيث : $\begin{cases} x-7y+8z=4 \\ 8x+4y-z=7 \end{cases}$

بين أن : $x^2-y^2+z^2=1$

تمرين 3

في الشكل جانبه لدينا :

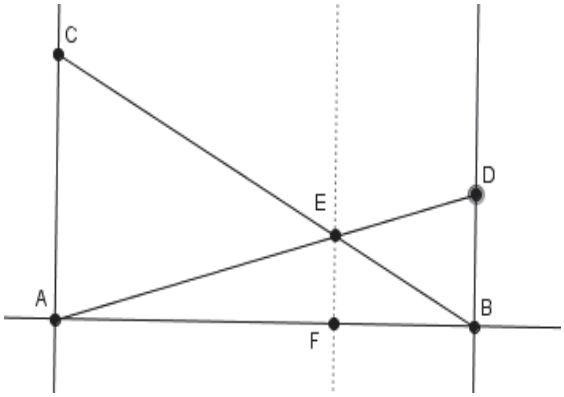
$(AC)//(BD)$ و $AC=8$

و $BD=4$ و E نقطة

تقاطع (BC) و (AD)

و F نقطة من القطعة $[AB]$ بحيث $(EF)//(BD)$

احسب EF



تمرين 4

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا و m عدد حقيقي

بحيث : $xyz=1$ و $\frac{2xm}{xy+x+1}+\frac{2ym}{yz+y+1}+\frac{2zm}{xz+z+1}=1$

بين أن : $m=\frac{1}{2}$

www.dzexams.com

حل أولمبياد السادس

تمرين 1

1 – لدينا : $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2=\frac{x^2+y^2}{xy}-2=\frac{x^2-2xy+y^2}{xy}=\frac{(x-y)^2}{xy}\geq 0$

(لأن $(x-y)^2\geq 0$ و $xy>0$)

إذن : $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$

2– حسب السؤال السابق لدينا : $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$ (1)

بنفس الطريقة نبين أن : $\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\geq 2$ (2)

و $\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\geq 2$ (3)

نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف :

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\geq 2+2+2$$

أي : $\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}\geq 2+2+2$

إذن : $\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}\geq 6$

تمرين 2

نضع : $\begin{cases}x-7y+8z=4 & (1)\\ 8x+4y-z=7 & (2)\end{cases}$

نضرب المعادلة (1) في 2 والمعادلة (2) في 1 : $\begin{cases}x-7y+8z=4 & (\times 2)\\ 8x+4y-z=7 & (\times 1)\end{cases}$

يعني : $\begin{cases}2x-14y+16z=8\\ 8x+4y-z=7\end{cases}$

نجمع المعادلتين المحصل عليهما طرف بطرف : $2x-14y+16z+8x+4y-z=8+7$

www.dzexams.com

يعني : $10x-10y+15z=15$

يعني : $10(x-y)=15(1-z)$

إذن : $x-y=\frac{15}{10}(1-z)=\frac{3}{2}(1-z)$ (3)

نضرب المعادلة (1) في -1 والمعادلة (2) في 2 : $\begin{cases} x-7y+8z=4 & (\times(-1)) \\ 8x+4y-z=7 & (\times 2) \end{cases}$

أي : $\begin{cases} -x+7y-8z=-4 \\ 16x+8y-2z=14 \end{cases}$

نجمع المعادلتين المحصل عليهما طرف بطرف : $-x+7y-8z+16x+8y-2z=-4+14$

يعني : $15x+15y-10z=10$

يعني : $15(x+y)=10(1+z)$

إذن : $x+y=\frac{10}{15}(1+z)=\frac{2}{3}(1+z)$ (4)

نضرب المتساويتان 3 و 4 طرف بطرف : $(x-y)\times(x+y)=\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}(1-z)\times\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}(1+z)$

يعني : $x^2-y^2=1-z^2$

وبالتالي : $x^2-y^2+z^2=1$

تمرين 3

بتطبيق طاليس المباشرة في المثلث ABC :

$\frac{BF}{BA}=\frac{BE}{BC}=\frac{EF}{AC}$ ومنه $\frac{BF}{BA}=\frac{EF}{AC}$ (1)

بتطبيق طاليس المباشرة في المثلث ADB :

$\frac{AF}{AB}=\frac{AE}{AD}=\frac{EF}{DB}$ ومنه $\frac{AF}{AB}=\frac{EF}{DB}$ (2)

نجمع المتساويتان 1 و 2 طرف بطرف نجد :

$$\frac{BF}{BA}+\frac{AF}{AB}=\frac{EF}{AC}+\frac{EF}{DB}$$

يعني : $EF\left(\frac{1}{AC}+\frac{1}{DB}\right)=\frac{BF+AF}{AB}=\frac{AB}{AB}=1$

إذن : $\frac{1}{AC}+\frac{1}{DB}=\frac{1}{EF}$

التطبيق العددي :

www.dzexams.com

$$\frac{1}{EF}=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{4+8}{32}=\frac{12}{32}$$

$$EF=\frac{32}{12}=\frac{8}{3}$$

تمرين 4

بما أن : $xyz=1$ فإن : $yz=\frac{1}{x}$ و $xz=\frac{1}{y}$

لدينا : $\frac{2xm}{xy+x+1}+\frac{2ym}{yz+y+1}+\frac{2zm}{xz+z+1}=1$

يعني : $\frac{2xm}{xy+x+1}+\frac{2ym}{\frac{1}{x}+y+1}+\frac{2zm}{\frac{1}{y}+z+1}=1$

يعني : $\frac{2xm}{xy+x+1}+\frac{2ym}{\frac{1+xy+x}{x}}+\frac{2zm}{\frac{1+yz+y}{y}}=1$

يعني : $\frac{2xm}{xy+x+1}+\frac{2xym}{1+xy+x}+\frac{2yzm}{1+yz+y}=1$

يعني : $\frac{2xm}{xy+x+1}+\frac{2xym}{1+xy+x}+\frac{2yxm}{1+\frac{1}{x}+y}=1$

يعني : $\frac{2xm}{xy+x+1}+\frac{2xym}{1+xy+x}+\frac{2yzm}{\frac{1+xy+x}{x}}=1$

يعني : $\frac{2xm}{xy+x+1}+\frac{2xym}{1+xy+x}+\frac{2xyzm}{1+xy+x}=1$

يعني : $\frac{2xm+2xym+2\times1\times m}{xy+x+1}=1$

يعني : $\frac{2m\left(\cancel{x+xy+1}\right)}{\cancel{xy+x+1}}=1$

يعني : $2m=1$

وبالتالي : $m=\frac{1}{2}$

www.dzexams.com

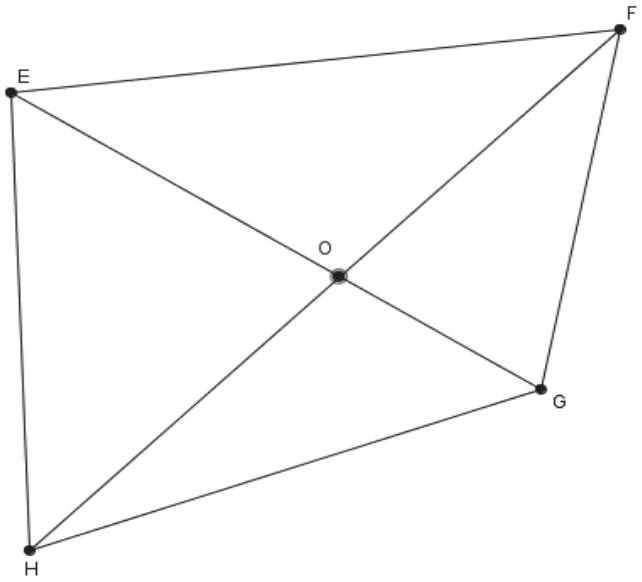
أولمبياد الخامس

تمرين 1

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا

بين أن : $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9$

تمرين 2



$EFGH$ رباعي محدب قطراه

$[EG]$ و $[FH]$ يتقاطعان

في النقطة O كماهو مبين

في الشكل جانبه

P : محيط الرباعي $EFGH$

بين أن : $\frac{1}{2}P < EG+FH < P$

تمرين 3

احسب $\dfrac{\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{5\times 6}+....+\frac{1}{99\times 100}}{\frac{1}{51\times 100}+\frac{1}{52\times 99}+\frac{1}{53\times 98}+...+\frac{1}{99\times 52}+\frac{1}{100\times 51}}$

تمرين 4

أنشئ قطعة طولها $\sqrt{10}$ (تبرير الإنشاء)

www.dzexams.com

حل أولمبياد الخامس

تمرين 1

نحدد إشارة الفرق $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-9$:

لدينا :

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-9=\frac{x}{x}+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{y}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+\frac{z}{z}-9$$
$$=1+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+1+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+1-9$$
$$=\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}-6$$
$$=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}-2+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}-2$$
$$=\frac{x^2+y^2-2xy}{xy}+\frac{y^2+z^2-2zy}{zy}+\frac{x^2+z^2-2xz}{xz}$$
$$=\frac{(x-y)^2}{xy}+\frac{(z-y)^2}{zy}+\frac{(x-z)^2}{xz}$$

نعلم أن $(x-z)^2\geq 0$ و $(x-y)^2\geq 0$ و $(z-y)^2\geq 0$

بما أن $x>0$ و $y>0$ و $z>0$ فإن : $xy>0$ و $zy>0$ و $xz>0$

إذن : $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-9=\frac{(x-y)^2}{xy}+\frac{(z-y)^2}{zy}+\frac{(x-z)^2}{xz}\geq 0$

وبالتالي : $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9$

تمرين 2

محيط الرباعي $EFGH$ هو :

$$P=EF+FG+GH+HE$$

في المثلثين EFG و EHG لدينا : $EG<EF+FG$ و $EG<EH+HG$

نجمع المتفاوتيتين طرف بطرف : $EG+EG<EF+FG+EH+HG$

أي : $2EG<P$

www.dzexams.com

إذن : $EG<\frac{P}{2}$ (1)

في المثلثين EHF و HGF لدينا : $FH<EF+EH$ و $FH<GF+HG$

نجمع المتفاوتيتين طرف بطرف : $FH+FH<EF+EH+GF+HG$

أي : $2FH<P$

إذن : $FH<\frac{P}{2}$ (2)

من 1 و 2 نستنتج أن : $EG+FH<P$ (3)

في المثلثات EFO و FOG و HGO و EOH لدينا : $EF<EO+OF$

و $FG<OF+OG$ و $HG<OG+OH$ و $EH<OH+OE$

نجمع المتفاوتات طرف بطرف: $EF+FG+HG+EH<EO+OF+OF+OG+OG+OH+OH+OE$

أي : $P<2(EO+OG)+2(OF+OH)$ أي : $P<2EG+2FH$

أي : $P<2(EG+FH)$ أي : $\frac{P}{2}<EG+FH$ (4)

من 3 و 4 نستنتج أن : $\frac{1}{2}P<EG+FH<P$

تمرين 3

نضع : $X=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{5\times6}+...+\frac{1}{99\times100}$

و $Y=\frac{1}{51\times100}+\frac{1}{52\times99}+\frac{1}{53\times98}+...+\frac{1}{99\times52}+\frac{1}{100\times51}$

لدينا : $X=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{5\times6}+...+\frac{1}{99\times100}$

يعني : $X=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+...+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)$

يعني : $X=\left(1+\left(\frac{1}{2}-2\times\frac{1}{2}\right)\right)+\left(\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{4}-2\times\frac{1}{4}\right)\right)+\left(\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{6}-2\times\frac{1}{6}\right)\right)+...+\left(\frac{1}{99}+\left(\frac{1}{100}-2\times\frac{1}{100}\right)\right)$

يعني : $X=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}...+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}...+\frac{1}{100}\right)$

يعني : $X=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}...+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}...+\frac{1}{50}\right)$

يعني : $X=\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\frac{1}{53}...+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}$

يعني : $X+X=\left(\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\frac{1}{53}...+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}\right)+\left(\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\frac{1}{53}...+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}\right)$

www.dzexams.com

يعني : $2X=\left(\frac{1}{51}+\frac{1}{100}\right)+\left(\frac{1}{52}+\frac{1}{99}\right)+\left(\frac{1}{53}+\frac{1}{98}\right)+...+\left(\frac{1}{99}+\frac{1}{52}\right)+\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{51}\right)$

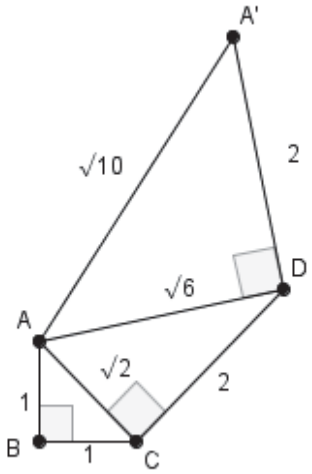
يعني : $2X=\frac{151}{51\times100}+\frac{151}{52\times99}+\frac{151}{53\times98}+...+\frac{151}{99\times52}+\frac{151}{100\times51}$

يعني : $2X=151\left(\frac{1}{51\times100}+\frac{1}{52\times99}+\frac{1}{53\times98}+...+\frac{1}{99\times52}+\frac{1}{100\times51}\right)$

يعني : $2X=151Y$

وبالتالي : $\frac{X}{Y}=\frac{151}{2}$

تمرين 4



المرحلة الأولى :

ننشئ المثلث ABC قائم الزاوية في B بحيث :

$AB=BC=1$

حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة إذن :

$AC^2=AB^2+BC^2$

يعني : $AC^2=1^2+1^2=1+1=2$ ومنه : $AC=\sqrt{2}$

المرحلة الثانية :

ننشئ النقطة D بحيث المثلث ADC قائم الزاوية في

C بحيث : $DC=2$

حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة إذن : $AD^2=AC^2+DC^2$

يعني : $AD^2=\left(\sqrt{2}\right)^2+2^2=2+4=6$ ومنه : $AD=\sqrt{6}$

المرحلة الثالثة :

ننشئ النقطة A' بحيث المثلث ADA' قائم الزاوية في D بحيث : $DA'=2$

حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة إذن : $AA'^2=DA'^2+AD^2$

يعني : $AA'^2=2^2+\left(\sqrt{6}\right)^2=4+6=10$

ومنه : $AA'=\sqrt{10}$

www.dzexams.com

أولمبياد الرابع

تمرين 1

x و y عددان حقيقيان موجبان قطعا

بين أن $\frac{x}{x^4+y^2}+\frac{y}{y^4+x^2}\leq\frac{1}{xy}$

تمرين 2

ABC مثلث والنقط D و E و F هي على التوالي

منتصفات القطع $[BC]$ و $[AC]$ و $[AB]$

بين أن : $\frac{AB+AC+BC}{2}<AD+CE+BF<AB+AC+BC$

تمرين 3

EFG مثلث قائم الزاوية في E

بين أن : $EF^4+EG^4<FG^4$

تمرين 4

بين ان : $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times...\times\frac{2012}{2013}\times\frac{2014}{2015}<\frac{1}{\sqrt{2016}}$

www.dzexams.com

حل أولمبياد الرابع

تمرين 1

لدينا : $(x^2+y)^2 \geq 0$

أي : $x^4-2x^2y+y^2 \geq 0$ أي : $x^4+y^2 \geq 2x^2y$ أي : $\frac{1}{x^4+y^2} \leq \frac{1}{2x^2y}$ أي : $\frac{x}{x^4+y^2} \leq \frac{x}{2x^2y}$

إذن : $\frac{x}{x^4+y^2} \leq \frac{1}{2xy}$ (1)

بنفس الطريقة نبين أن : $\frac{y}{y^4+x^2} \leq \frac{1}{2yx}$ (2)

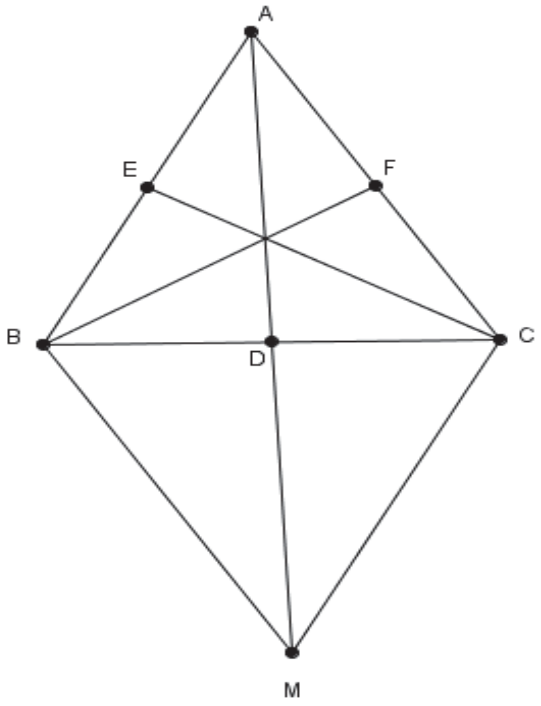
نجمع المتفاوتات 1 و 2 طرف بطرف : $\frac{x}{x^4+y^2}+\frac{y}{y^4+x^2} \leq \frac{1}{2xy}+\frac{1}{2yx}$

ومنه : $\frac{x}{x^4+y^2}+\frac{y}{y^4+x^2} \leq \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}xy}$

وبالتالي : $\frac{x}{x^4+y^2}+\frac{y}{y^4+x^2} \leq \frac{1}{xy}$

تمرين 2

لتكن M مماثلة A بالنسبة للنقطة D



www.dzexams.com

لدينا D منتصف $[BC]$

إذن C هي مماثلة B بالنسبة للنقطة D

بما أن C و M هما مماثلتي A و B على التوالي بالنسبة للنقطة D

فإن : $AB=CM$ (1)

في المثلث ACM لدينا : $AM<AC+CM$ (2)

من 1 و 2 نستنتج أن : $AM<AC+AB$

نعلم أن $AM=2AD$ (لأن M مماثلة A بالنسبة للنقطة D يعني D منتصف $[AM]$)

أي $2AD<AC+AB$ (3)

في المثلثان ADC و ADB لدينا : $AC<AD+DC$ (4)

و $AB<AD+DB$ (5)

نجمع المتفاوتتين 4 و 5 طرف بطرف : $AC+AB<AD+DC+AD+DB$

نعلم أن : $BC=BD+DC$

أي : $AC+AB<2AD+BC$

إذن : $AC+AB-BC<2AD$ (6)

من 3 و 6 نستمنج أن : $AC+AB-BC<2AD<AC+AB$ (7)

بنفس الطريقة نبين أن : $AC+BC-AB<2CE<AC+BC$ (8)

و $AB+BC-AC<2BF<AB+BC$ (9)

نجمع المتفاوتات 7 و 8 و 9 طرف بطرف :

$$AC+AB-BC+AC+BC-AB+AB+BC-AC<2AD+2CE+2BF<AC+AB+AC+BC+AB+BC$$

أي :

$$AC+\cancel{AB}-\cancel{BC}+\cancel{AC}+\cancel{BC}-\cancel{AB}+AB+BC-\cancel{AC}<2(AD+CE+BF)<2AC+2AB+2BC$$

أي : $\frac{1}{2}\times(AB+AC+BC)<\frac{1}{\cancel{2}}\times\cancel{2}(AD+CE+BF)<\frac{1}{\cancel{2}}\times\cancel{2}(AC+AB+BC)$

وبالتالي : $\frac{AB+AC+BC}{2}<AD+CE+BF<AB+AC+BC$

تمرين 3

www.dzexams.com

لدينا EFG مثلث قائم الزاوية في E

إذن : $EF^2+EG^2=FG^2$

لنحدد إشارة الفرق $\left(EF^4+EG^4\right)-FG^4$:

$$FG^4-EF^4-EG^4=\left(FG^2\right)^2-EF^4-EG^4=\left(EF^2+EG^2\right)^2-EF^4-EG^4$$
$$=\left(EF^2\right)^2+2EF^2\times EG^2+\left(EG^2\right)^2-EF^4-EG^4$$
$$=\cancel{EF^4}+2EF^2\times EG^2+\cancel{EG^4}-\cancel{EF^4}-\cancel{EG^4}$$
$$=2EF^2\times EG^2>0$$

وبالتالي : $EF^4+EG^4<FG^4$

تمرين 4

نضع : $X=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{2012}{2013}\times\frac{2014}{2015}$ و $Y=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\ldots\times\frac{2013}{2014}\times\frac{2015}{2016}$

لدينا :

$$\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$$
$$\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$$
$$\vdots$$
$$\frac{2012}{2013}<\frac{2013}{2014}$$
$$\frac{2014}{2015}<\frac{2015}{2016}$$

يعني : $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{2012}{2013}\times\frac{2014}{2015}<\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\ldots\times\frac{2013}{2014}\times\frac{2015}{2016}$

يعني : $X<Y$

يعني : $X^2<XY$

يعني : $\sqrt{X^2}=X<\sqrt{XY}$

لنحسب $\sqrt{XY}$:

لدينا : $XY=\frac{1}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\times\frac{\cancel{4}}{\cancel{5}}\times\frac{\cancel{5}}{\cancel{6}}\times\frac{\cancel{6}}{\cancel{7}}\times\ldots\times\frac{\cancel{2012}}{\cancel{2013}}\times\frac{\cancel{2013}}{\cancel{2014}}\times\frac{\cancel{2014}}{\cancel{2015}}\times\frac{\cancel{2015}}{2016}=\frac{1}{2016}$

إذن : $\sqrt{XY}=\sqrt{\frac{1}{2016}}=\frac{1}{\sqrt{2016}}$

وبالتالي : $X=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{2012}{2013}\times\frac{2014}{2015}<\sqrt{XY}=\frac{1}{\sqrt{2016}}$

www.dzexams.com

أولمبياد الثالث

تمرين 1

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا

بين أن $\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}+\frac{yz}{x}\geq x+y+z$

تمرين 2

AHB مثلث بحيث : $A\hat{B}H=120^{\circ}$

و $[BC)$ هو منصف الزاوية $A\hat{B}H$ ($C\in[HA]$)

المستقيم المار من H والموازي للمستقيم (CB) يقطع المستقيم (AB) في النقطة D .

بين أن : $\frac{1}{\quad}=\frac{1}{\quad}+1$

تمرين 3

x و y و z أعداد حقيقية غير منعدمة بحيث : $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2$

بين أن : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$

تمرين 4

ABC مثلث و النقطة D منتصف $[BC]$

و (AE) الإرتفاع الموافق للضلع $[BC]$ ($E\in(BC)$)

و النقطتان F و G هما المسقطان العموديان على التوالي للنقطتين B و C على (AD)

بين أن $CG=BF$

www.dzexams.com

حل أولمبياد الثالث

تمرين 1

لتكن a و b و c أعداد حقيقية موجبة قطعا بحيث: $a=xy$ و $b=yz$ و $c=xz$

لدينا : $(a-b)^2\geq 0$ و $(b-c)^2$ و $(c-a)^2\geq 0$

أي : $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0$ أي : $a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ac+a^2\geq 0$

أي : $2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac\geq 0$ أي : $2\left(a^2+a^2+a^2\right)\geq 2(ab+bc+ac)$

أي : $\frac{1}{2\sqrt{abc}}\times 2\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq \frac{1}{2\sqrt{abc}}\times 2(ab+bc+ac)$

أي : $\frac{a^2}{\sqrt{abc}}+\frac{b^2}{\sqrt{abc}}+\frac{c^2}{\sqrt{abc}}\geq \frac{ab}{\sqrt{abc}}+\frac{bc}{\sqrt{abc}}+\frac{ac}{\sqrt{abc}}$

أي : $\frac{a^2}{\sqrt{abc}}+\frac{b^2}{\sqrt{abc}}+\frac{c^2}{\sqrt{abc}}\geq \frac{\sqrt{a^2b^2}}{\sqrt{abc}}+\frac{\sqrt{b^2c^2}}{\sqrt{abc}}+\frac{\sqrt{a^2c^2}}{\sqrt{abc}}$

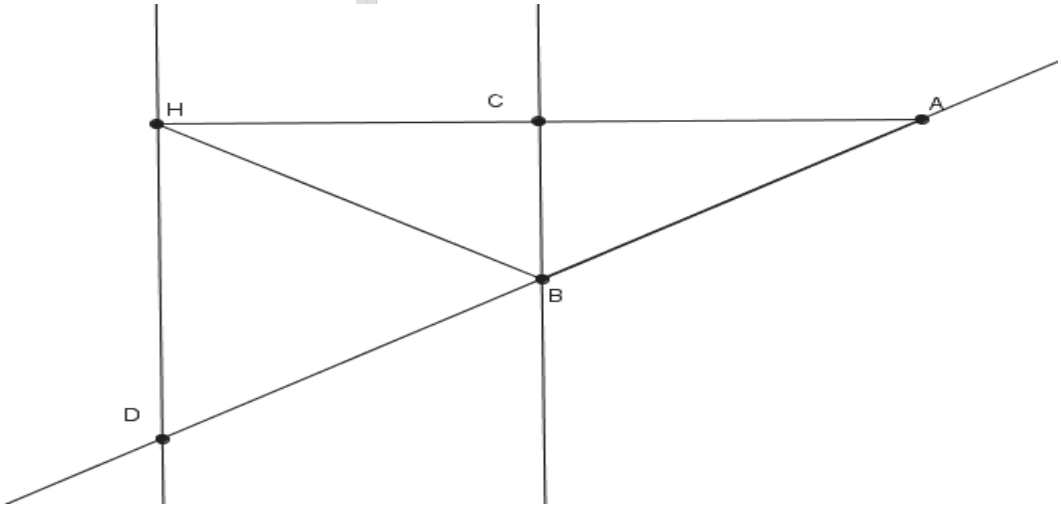
أي : $\frac{a^2}{\sqrt{abc}}+\frac{b^2}{\sqrt{abc}}+\frac{c^2}{\sqrt{abc}}\geq \sqrt{\frac{ab}{c}}+\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ac}{b}}$

أي : $\frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2y^2z^2}}+\frac{y^2z^2}{\sqrt{x^2y^2z^2}}+\frac{x^2z^2}{\sqrt{x^2y^2z^2}}\geq \sqrt{\frac{xy^2z}{xz}}+\sqrt{\frac{yz^2x}{xy}}+\sqrt{\frac{x^2yz}{yz}}$

أي : $\frac{x^2y^2}{xyz}+\frac{y^2z^2}{xyz}+\frac{x^2z^2}{xyz}\geq \sqrt{y^2}+\sqrt{z^2}+\sqrt{x^2}$

وبالتالي : $\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}\geq y+z+x$

تمرين 2



بما أن $[BC)$ هو منصف الزاوية $A\hat{B}H$

www.dzexams.com

فإن : $A\hat{B}C = H\hat{B}C = \frac{A\hat{B}H}{2} = \frac{120}{2} = 60$

ولدينا $D\hat{B}A = H\hat{B}D + A\hat{B}H$

إذن : $H\hat{B}D = D\hat{B}A - A\hat{B}H = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ (1)

بما أن المستقيمان (CB) و (HD) متوازيان و (HB) قاطع لهما

فإن : $B\hat{H}D = H\hat{B}C = 60^\circ$ (2)

ولدينا : $H\hat{D}B + D\hat{H}B + H\hat{B}D = 180$

أي $H\hat{D}B = 180 - \left(D\hat{H}B + H\hat{B}D\right)$

ومنه $H\hat{D}B = 180^\circ - \left(60^\circ + 60^\circ\right) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ (3)

من 1 و 2 و 3 نستنتج أن المثلث HDB متساوي الأضلاع

ومنه $HD = HB = DB$

لدينا $(HD)//(CB)$

حسب مبرهنة طاليس المباشرة إذن : $\frac{AH}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{DH}{CB}$

أي : $\frac{AD}{AB} = \frac{DH}{CB}$

أي : $\frac{AB+BD}{AB} = \frac{BH}{CB}$ ($HD = HB = DB$ و $AD = AB + BD$)

أي : $\frac{AB+BH}{AB \times BH} = \frac{1}{CB}$

أي : $\frac{\cancel{AB}}{\cancel{AB} \times BH} + \frac{\cancel{BH}}{AB \times \cancel{BH}} = \frac{1}{CB}$

وبالتالي : $\boxed{\frac{1}{BH} + \frac{1}{AB} = \frac{1}{CB}}$

تمرين 3

لدينا : $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2$

أي : $(x+y)^2 + 2(x+y)z + z^2 = x^2 + y^2 + z^2$

أي : $x^2 + 2xy + y^2 + 2(x+y)z + z^2 = x^2 + y^2 + z^2$

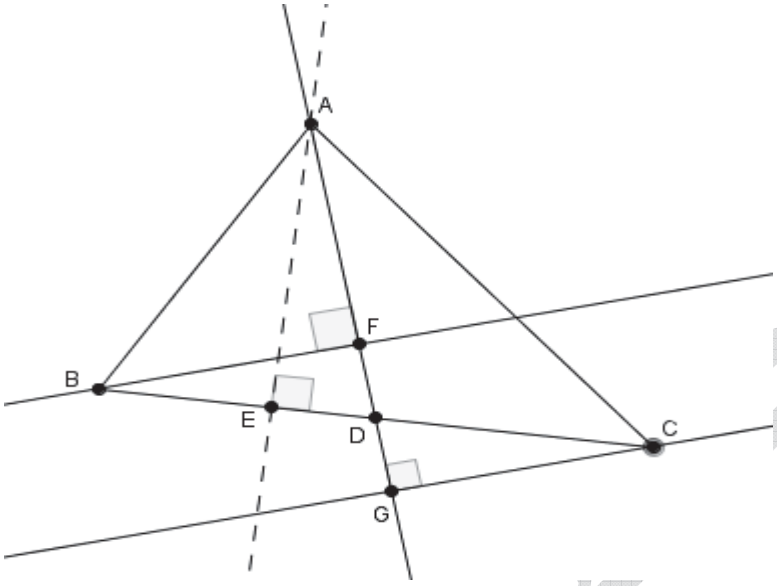
أي : $2xy + 2(x+y)z = 0$ أي : $2(xy + xz + yz) = 0$

أي : $\frac{1}{\cancel{2}xyz} \times \cancel{2}(xy + xz + yz) = 0 \times \frac{1}{2xyz}$ أي : $\frac{xy}{xyz} + \frac{xz}{xyz} + \frac{yz}{xyz} = 0$

www.dzexams.com

وبالتالي : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$

تمرين 4



نحسب مساحة المثلثين ABD و ACD بطريقتين محتلفتين

الطريقة الأولى :

لدينا : $S_{ABD}=\frac{AE\times BD}{2}$ و $S_{ACD}=\frac{AE\times CD}{2}$

(S_{ABD} هي مساحة المثلث ABD و S_{ACD} هي مساحة المثلث ACD)

نعلم أن $BD=CD$

إذن $S_{ABD}=S_{ACD}$

الطريقة الثانية :

لدينا : $S_{ABD}=\frac{AD\times BF}{2}$ و $S_{ACD}=\frac{AD\times CG}{2}$

بما أن $S_{ABD}=S_{ACD}$

فإن : $\frac{AD\times BF}{2}=\frac{AD\times CG}{2}$

يعني : $\frac{\cancel{2}}{\cancel{AD}}\times\frac{\cancel{AD}\times BF}{\cancel{2}}=\frac{\cancel{2}}{\cancel{AD}}\times\frac{\cancel{AD}\times CG}{\cancel{2}}$

وبالتالي : $BF=CG$

www.dzexams.com

أولمبياد الثاني

تمرين 1

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا بحيث : $x+y+z=3$

بين أن : $\frac{\sqrt{x}}{y+z}+\frac{\sqrt{y}}{x+z}+\frac{\sqrt{z}}{x+y}\geq\frac{3}{2}$

تمرين 2

EFG مثلث متساوي الساقين في E و A نقطة من $[FG]$

و $[FD]$ الإرتفاع الموافق للضلع $[EG]$

و النقطتان B و C هما المسقطان العموديان للنقطة A على (EF) و (EG) على التوالي

بين أن : $FD=AB+AC$

تمرين 3

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا بحيث : $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{}$

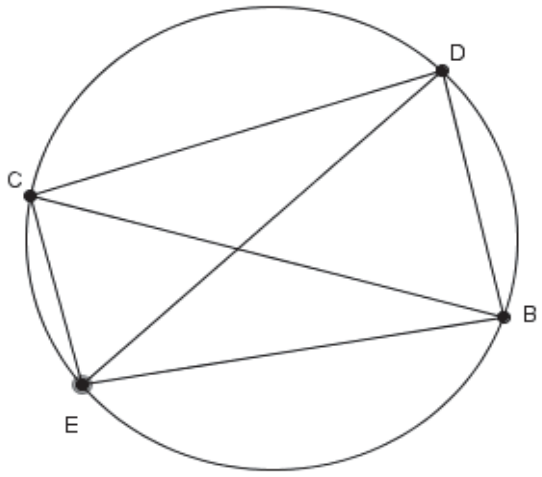
بين أن : $xyz=1$

تمرين 4

$ECDB$ رباعي محاط بدائرة

(أنظر الشكل جانبه)

بين أن : $EC\times DB+DC\times EB=BC\times ED$



www.dzexams.com

حل أولمبياد الثاني

تمرين 1

لدينا : $\left(\sqrt{x}-1\right)^2 \geq 0$

يعني : $\left(\sqrt{x}-1\right)^2 \times \left(-\sqrt{x}-2\right) \leq 0 \times \left(-\sqrt{x}-2\right)$ ($-\sqrt{x}-2 \leq 0$)

يعني : $\left(x-2\sqrt{x}+1\right) \times \left(-\sqrt{x}-2\right) \leq 0$

يعني : $-x\sqrt{x}-\cancel{2x}+\cancel{2x}+4\sqrt{x}-\sqrt{x}-2 \leq 0$

يعني : $-x\sqrt{x}+3\sqrt{x}-2 \leq 0$

يعني : $\sqrt{x}\left(3-x\right) \leq 2$

يعني : $\frac{1}{\sqrt{x}\left(3-x\right)} \geq \frac{1}{2}$ ($3-x=y+z>0$)

يعني : $\left(\sqrt{x}\right)^2 \times \frac{1}{\sqrt{x}\left(3-x\right)} \geq \left(\sqrt{x}\right)^2 \times \frac{1}{2}$

إذن : $\frac{\sqrt{x}}{y+z} \geq \frac{x}{2}$ (1)

بنفس الطريقة نبين أن : $\frac{\sqrt{y}}{x+z} \geq \frac{y}{2}$ (2)

و $\frac{\sqrt{z}}{x+y} \geq \frac{z}{2}$ (3)

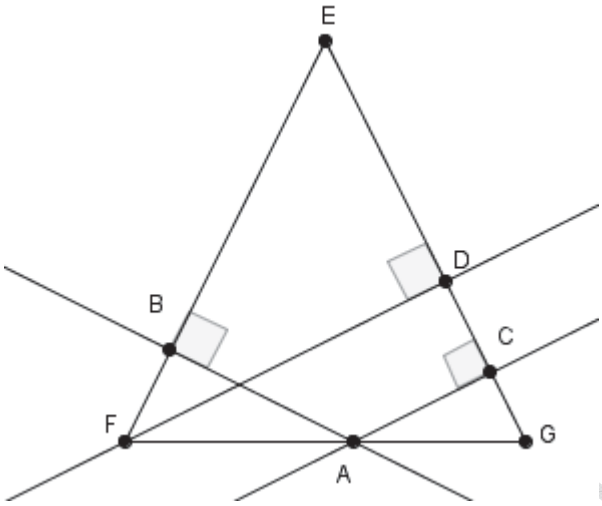
نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف : $\frac{\sqrt{x}}{y+z}+\frac{\sqrt{y}}{x+z}+\frac{\sqrt{z}}{x+y} \geq \frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}$

أي : $\frac{\sqrt{x}}{y+z}+\frac{\sqrt{y}}{x+z}+\frac{\sqrt{z}}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2}$

وبالتالي : $\frac{\sqrt{x}}{y+z}+\frac{\sqrt{y}}{x+z}+\frac{\sqrt{z}}{x+y} \geq \frac{3}{2}$

تمرين 2

www.dzexams.com



لدينا : $S_{EFG}=S_{EFA}+S_{EAG}$

(S_{EFG} : مساحة مثلث EFG ،، S_{EFA} : مساحة مثلث EFA ،، S_{EAG} : مساحة مثلث EAG)

يعني : $\frac{EG\times FD}{2}=\frac{AB\times EF}{2}+\frac{AC\times EG}{2}$

يعني : $\frac{EG\times FD}{2}=\frac{AB\times EF+AC\times EG}{2}$

يعني : $\frac{EG\times FD}{2}=\frac{AB\times EG+AC\times EG}{2}$ (لأن المثلث EFG متساوي الساقين في E) $EF=EG$

يعني : $\frac{EG\times FD}{2}=\frac{EG(AB+AC)}{2}$

يعني : $\frac{\cancel{2}}{\cancel{EG}}\times\frac{\cancel{EG}\times FD}{\cancel{2}}=\frac{\cancel{2}}{\cancel{EG}}\times\frac{\cancel{EG}(AB+AC)}{\cancel{2}}$

إذن : $FD=AB+AC$

تمرين 3

لدينا : $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}$

يعني : $x-y=\frac{1}{z}-\frac{1}{y}$ يعني: $x-y=\frac{y-z}{zy}$ يعني : $zy=\frac{y-z}{x-y}$

إذن : $xyz=\frac{x(y-z)}{x-y}$ (1)

لدينا : $y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$

يعني : $y-z=\frac{1}{x}-\frac{1}{z}$ يعني : $y-z=\frac{z-x}{xz}$ يعني : $xz=\frac{z-x}{y-z}$

www.dzexams.com

إذن : $xyz=\dfrac{y(z-x)}{y-z}$ (2)

لدينا : $x+\dfrac{1}{y}=z+\dfrac{1}{x}$

يعني : $z-x=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}$ يعني : $z-x=\dfrac{x-y}{xy}$

إذن : $xy=\dfrac{x-y}{z-x}$ (3)

نضرب المتساويتان 1 و 2 طرف بطرف : $(xyz)\times(xyz)=\dfrac{x(y-z)}{x-y}\times\dfrac{y(z-x)}{y-z}$

ومنه : $(xyz)^2=\dfrac{xy(z-x)}{x-y}$ (4)

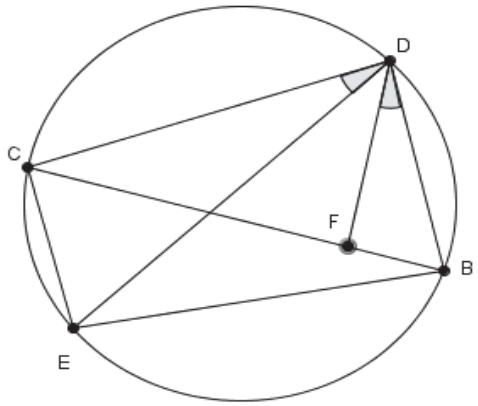
من 3 و 4 نستنتج أن : $(xyz)^2=\dfrac{\left(\dfrac{x-y}{z-x}\right)(z-x)}{x-y}$

أي : $(xyz)^2=\dfrac{x-y}{z-x}\times\dfrac{z-x}{x-y}=1$

بما أن $x>0$ و $y>0$ و $z>0$ أعداد حقيقية موجبة فإن : $xyz>0$

وبالتالي : $xyz=1$

تمرين 4



نضع النقطة F على $[BC]$ بحيث : $C\hat{D}E=B\hat{D}F$ (1)

بما أن $D\hat{B}F$ و $D\hat{E}C$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس

فإن: $D\hat{B}F=D\hat{E}C$ (2)

من 1 و 2 نستنتج أن المثلثان CED و DBF متشابهان

www.dzexams.com

أي $\frac{DB}{DE}=\frac{BF}{CE}$

ومنه $DB\times CE=BF\times DE$ (3)

لدينا : $C\hat{D}E=B\hat{D}F$

يعني : $C\hat{D}E+E\hat{D}F=B\hat{D}F+E\hat{D}F$

إذن : $C\hat{D}F=E\hat{D}B$ (4)

بما أن $D\hat{C}F$ و $D\hat{E}B$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس

فإن: $D\hat{C}F=D\hat{E}B$ (5)

من 4 و 5 نستنتج أن المثلثان DFC و DBE متشابهان

أي : $\frac{DC}{DE}=\frac{CF}{BE}$

ومنه : $DC\times BE=CF\times DE$ (6)

نجمع المتساويتين 6 و 3 طرف بطرف : $DB\times CE+DC\times BE=BF\times DE+CF\times DE$

أي : $DB\times CE+DC\times BE=DE(BF+CF)$

وبالتالي : $EC\times DB+DC\times EB=BC\times ED$

www.dzexams.com

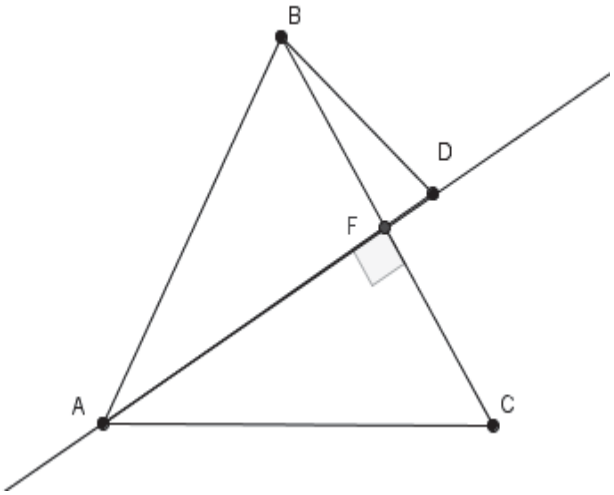
أولمبياد الأول

تمرين 1

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا

بين أن : $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\geq x+y+z$

تمرين 2



نعتبر الشكل جانبه بحيث : $BA=BC$

و $BA=AD$ و $(AD)\perp(BC)$

احسب : $B\hat{A}C+A\hat{D}B$

تمرين 3

EFG مثلث متساوي الأضلاع والنقطة P داخله

ارتفاع المثلث EFG المار من E يقطع (FG) في النقطة D

بين أن : $PB+PC+PA=ED$

تمرين 4

x و y و z و w أعداد حقيقية موجبة قطعا بحيث : $\frac{x}{y}=\frac{y}{z}=\frac{z}{w}$

بين أن : $\sqrt{\frac{x^5+y^2z^2+x^3z^2}{y^4z+w^4+y^2zw^2}}=\frac{x}{w}$

www.dzexams.com

حل أولمبياد الأول

تمرين 1

لدينا : $(x-y)^2 \geq 0$

يعني : $x^2-2xy+y^2 \geq 0$ يعني : $x^2+y^2 \geq 2xy$ يعني : $\frac{x^2+y^2}{y} \geq \frac{2xy}{y}$

إذن : $\frac{x^2}{y}+y \geq 2x$ (1)

وبنفس الطريقة نبين أن : $\frac{y^2}{z}+z \geq 2y$ (2)

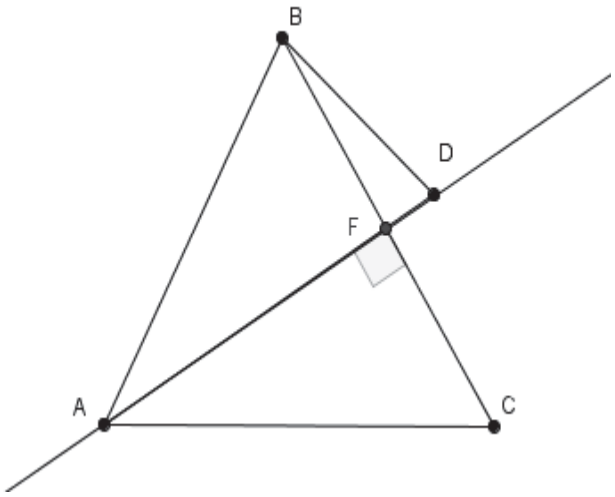
و $\frac{z^2}{x}+x \geq 2z$ (3)

نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف : $\frac{x^2}{y}+y+\frac{y^2}{z}+z+\frac{z^2}{x}+x \geq 2x+2y+2z$

أي : $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}+(x+y+z)-(x+y+z) \geq 2(x+y+z)-(x+y+z)$

وبالتالي : $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x} \geq x+y+z$

تمرين 2



لدينا : $BA=BC$ و $BA=AD$

إذن المثلثان ABC و ABD متساويا الساقين في B و A على التوالي

ومنه $B\hat{A}C=B\hat{C}A$ و $A\hat{B}D=A\hat{D}B$

بما أن المثلثات BAF و AFC و BFD هي قائمة الزاوية كلها في F

www.dzexams.com

فإن : $F\hat{A}C+A\hat{C}B=90^{\circ}$ و $B\hat{A}F+A\hat{B}C=90^{\circ}$ و $F\hat{B}D+B\hat{D}A=90^{\circ}$

نجمع المتساويات الثلاثة طرف بطرف : $F\hat{A}C+A\hat{C}B+B\hat{A}F+A\hat{B}C+F\hat{B}D+B\hat{D}A=90^{\circ}+90^{\circ}+90^{\circ}$

أي : $\left(F\hat{A}C+B\hat{A}F\right)+A\hat{C}B+\left(A\hat{B}C+F\hat{B}D\right)+B\hat{D}A=90^{\circ}+90^{\circ}+90^{\circ}$

نعلم أن : $B\hat{A}C=F\hat{A}C+B\hat{A}F$ و $A\hat{B}D=A\hat{B}C+F\hat{B}D$

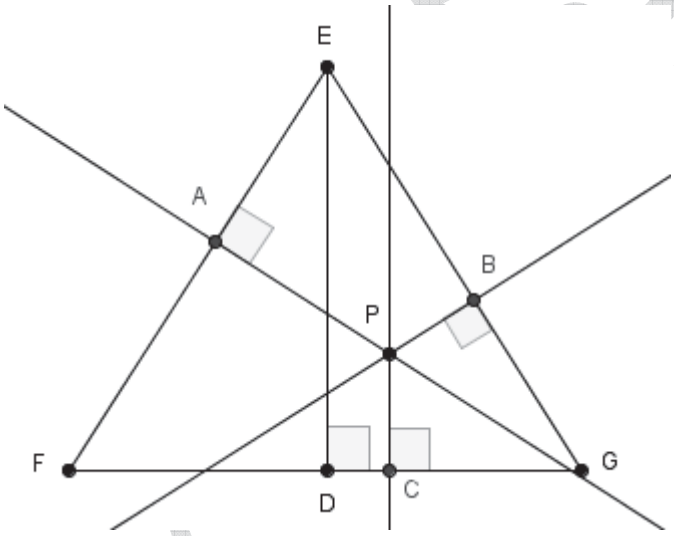
أي : $B\hat{A}C+A\hat{C}B+A\hat{B}D+B\hat{D}A=90^{\circ}+90^{\circ}+90^{\circ}$

أي : $2B\hat{A}C+2B\hat{D}A=270^{\circ}$ لأن $B\hat{A}C=B\hat{C}A$ و $A\hat{B}D=A\hat{D}B$

أي : $2\left(B\hat{A}C+B\hat{D}A\right)=270^{\circ}$

وبالتالي : $B\hat{A}C+B\hat{D}A=135^{\circ}$

تمرين 3



نحسب مساحة المثلث EFG بطريقتين مختلفتين :

الطريقة الأولى : $S_{EFG}=\dfrac{ED\times FG}{2}$ (1)

الطريقة الثانية :

لدينا :

$$\begin{aligned}S_{EFG}&=S_{PEG}+S_{PFG}+S_{PEF}\\&=\frac{PB\times EG}{2}+\frac{PC\times FG}{2}+\frac{PA\times EF}{2}\\&=\frac{PB\times EG+PC\times FG+PA\times EF}{2}\end{aligned}$$

نعلم أن $FG=EG=EF$

www.dzexams.com

إذن : $S_{EFG} = \dfrac{PB\times FG + PC\times FG + PA\times FG}{2}$

ومنه : $S_{EFG} = \dfrac{FG(PB+PC+PA)}{2}$ (2)

من 1 و 2 نستنتج أن : $\dfrac{FG(PB+PC+PA)}{2} = \dfrac{ED\times FG}{2}$

أي : $\dfrac{2}{FG}\times\dfrac{FG(PB+PC+PA)}{2} = \dfrac{2}{FG}\times\dfrac{ED\times FG}{2}$

وبالتالي : $PB+PC+PA = ED$

تمرين 4

نضع : $\dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{z} = \dfrac{z}{w} = k$

يعني : $z = kw$ و $y = zk$ و $x = yk$

يعني : $z = kw$ و $y = (kw)k$ و $x = yk$

إذن : $z = kw$ و $y = wk^2$ و $x = (wk^2)k = k^3w$

لنبين أن : $\sqrt{\dfrac{x^5+y^2z^2+x^3z^2}{y^4z+w^4+y^2zw^2}} - \dfrac{x}{w} = 0$

$$\sqrt{\frac{x^5+y^2z^2+x^3z^2}{y^4z+w^4+y^2zw^2}} - \frac{x}{w} = \sqrt{\frac{(k^3w)^5+(wk^2)^2(kw)^2+(k^3w)^3(kw)^2}{(wk^2)^4(kw)+w^4+(wk^2)^2(kw)w^2}} - \frac{wk^3}{w}$$

$$= \sqrt{\frac{k^{15}w^5+k^4w^2k^2w^2+k^9w^3k^2w^2}{k^8w^4kw+w^4+k^4w^2kww^2}} - k^3$$

$$= \sqrt{\frac{k^{15}w^5+k^6w^4+k^{11}w^5}{k^9w^5+w^4+k^5w^5}} - k^3$$

$$= \sqrt{\frac{k^6\cancel{w^4}\left(\cancel{k^9w+1+k^5w}\right)}{\cancel{w^4}\left(\cancel{k^9w+1+k^5w}\right)}} - k^3$$

$$= \sqrt{k^6} - k^3 = \sqrt{(k^3)^2} - k^3 = k^3 - k^3 = 0$$

وبالتالي : $\sqrt{\dfrac{x^5+y^2z^2+x^3z^2}{y^4z+w^4+y^2zw^2}} = \dfrac{x}{w}$

www.dzexams.com