الأعداد الناطقة

I) مفهوم العدد الناطق

نشاط :

(1) هل يوجد عدد صحيح x بحيث $x \times (+3) = +15$ ؟
نعم $x = +5$ و نسميه **حاصل القسمة التام** للعدد $+15$ على العدد $+3$.

(2) هل يوجد عدد صحيح x بحيث $x \times 10 = 38$ ؟
لا لأنّ $3 \times 10 = 30$ و $4 \times 10 = 40$.
هل يوجد عدد عشري x بحيث $x \times 10 = 38$ ؟
نعم $x = 3,8$ و نسميه **حاصل القسمة التام** للعدد الصحيح 38 على العدد الصحيح 10 .

(3) هل يوجد عدد صحيح أو عشري x بحيث $x \times 7 = 5$ ؟
لا لأنّ القسمة $5 \div 7$ لا تنتهي.
في هذه الحالة نكتب $x = \frac{5}{7}$ و نسميه **عدداً كسرياً** (أو **كسراً** اختصاراً).
نقول أنّ العدد الكسري $\frac{5}{7}$ هو **حاصل القسمة التام** للعدد 5 على العدد 7 .

(4) هل يوجد عدد نسبي أو كسر x يحقق المساواة $x \times (+3) = -12,5$ ؟ **الجواب** : لا !
في هذه الحالة **نقبل** أنه يوجد عدد يُحقق المطلوب، نسميه **عددا ناطقاً** و نكتب : $x = \frac{-12,5}{+3}$.
نقول أنّ العدد الناطق هو **حاصل القسمة التام** للعدد النسبي $-12,5$ على العدد النسبي $+3$.
كل من حواصل القسمة $(+5)$ ، $3,8$ ، $\frac{5}{7}$ الواردة في المسائل السابقة هو عدد ناطق.

تعريف : **العدد الناطق** هو حاصل قسمة عدد نسبي a على عدد نسبي غير معدوم b .
كل عدد ناطق يُكتب على الشكل $\frac{a}{b}$.

أمثلة : كل من $+7$ ، $-3,1$ ، $\frac{139}{57}$ ، $\frac{-49}{11}$ ، $\frac{+1,71}{-89}$ هو عدد ناطق.

ملاحظة : العدد π (بحيث $\pi \approx 3,14$) **ليس** عددا ناطقا !

الكتابة المبسطة للعدد الناطق : كتابة عدد ناطق في شكله المُبسّط تعني كتابته على شكل كسر مُختزَل مسبوق بإشارة.

أمثلة : $\frac{17}{-1} = -17$ ، $\frac{-3,7}{-7} = \frac{3,7 \times 10}{7 \times 10} = \frac{37}{70}$ ، $\frac{14}{-35} = -\frac{14}{35} = -\frac{14 \div 7}{35 \div 7} = -\frac{2}{5}$.

تطبيقات

1 (تمرين 17 صفحة 38)

العدد الناطق	$\frac{-20}{3}$	$\frac{18}{7}$	$\frac{-25}{-8,3}$	$\frac{-13}{-4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3,5}{-7}$	$\frac{-4}{10}$
إشارته	سالبة	موجبة	موجبة	موجبة	موجبة	سالبة	سالبة

2 بسِّط الكتابات الآتية : $\frac{-2}{-3}$ ، $\frac{-12}{+5}$ ، $\frac{+7}{+6}$ ، $\frac{+8}{-3}$ ، $\frac{-6}{+9}$ ، $\frac{-15}{+21}$.

الحل :

$\frac{-2}{-3} = +\frac{2}{3}$ | $\frac{-12}{+5} = -\frac{12}{5}$ | $\frac{+7}{+6} = +\frac{7}{6}$ | $\frac{+8}{-3} = -\frac{8}{3}$ | $\frac{-6}{+9} = -\frac{6}{9} = -\frac{6 \div 3}{9 \div 3} = -\frac{2}{3}$ | $\frac{-15}{+21} = -\frac{15}{21} = -\frac{15 \div 3}{21 \div 3} = -\frac{5}{7}$

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

II) تساوي عددين ناطقين

نشاط 1 :

(1) (ا) اكتب على أبسط شكل كلا من $\frac{-3}{5}$ و $\frac{12}{-20}$.
ماذا تستنتج ؟

(ب) أتمم : $\frac{-3}{5}=\frac{-3\times\cdots}{5\times\cdots}=\frac{12}{-20}$.

(2) **الإثبات** : لتكن a ، b و k أعدادا نسبية بحيث $b\neq 0$ و $k\neq 0$. سنبرهن فيما يلي أنّ $\frac{a}{b}=\frac{a\times k}{b\times k}$.

من أجل ذلك، نضع $q=\frac{a}{b}$ (q هو حاصل قسمة a على b) .

أتمم المساويات التالية : بالتعريف، $a = q\times b$ منه $q\times b\times k=\cdots\times\cdots$ إذن جداء العدد q في العدد $b\times k$ يساوي $\cdots\times\cdots$ و بالتالي $q=\frac{\cdots\times\cdots}{b\times k}$.

لكن $q=\frac{a}{b}$ إذن $\frac{a}{b}=\frac{\cdots\times\cdots}{b\times k}$ و هو المطلوب.

لا يتغيّر العدد الناطق إذا ضربنا (أو قسمنا) بسطه و مقامه في (أو على) **نفس العدد غير المعدوم**.

بتعبير آخر، إذا كانت a ، b و k أعدادا نسبية بحيث $b\neq 0$ و $k\neq 0$ فإنّ : $\frac{a}{b}=\frac{a\times k}{b\times k}$ و $\frac{a}{b}=\frac{a\div k}{b\div k}$.

أمثلة : $\frac{-3}{5}=\frac{-3\times 4}{5\times 4}=\frac{-12}{20}$ ؛ $\frac{9}{-15}=\frac{9\div(-3)}{-15\div(-3)}=\frac{-3}{5}$ ؛ $\frac{-25}{-40}=\frac{5\div(-5)}{8\div(-5)}=\frac{5}{8}$.

نشاط 2 :

(1) (ا) ما هي الكتابة العشرية لكل من $\frac{221}{136}$ و $\frac{247}{152}$ ؟
ماذا تلاحظ ؟

(ب) احسب الجداءين 136×247 و 152×221 .
ماذا تلاحظ ؟

(2) **الإثبات** : لتكن a ، b ، c و d أعدادا نسبية بحيث $b\neq 0$ و $d\neq 0$. نفرض فيما يلي أنّ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

(ا) برهن أنّ : $\frac{a\times d}{b\times d}=\frac{b\times c}{b\times d}$.

(ب) ماذا تلاحظ بالنسبة للمقامين ؟
ماذا يمكن استنتاجه بالنسبة للبسطين ؟

(3) (ا) جِد عددا n بحيث $1,5\times 4=3\times n$.

(ب) قارن بين العددين $\frac{n}{4}$ و $\frac{1,5}{3}$. ماذا تستنتج ؟

(ج) a ، b ، c و d أعدادا نسبية بحيث $b\neq 0$ ، $d\neq 0$ و $a\times d=b\times c$. بيّن أنّ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

a ، b ، c و d أعدادا نسبية بحيث $b\neq 0$ و $d\neq 0$.

(1) إذا كان $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ فإنّ $a\times d=b\times c$.

(2) و إذا كان $a\times d=b\times c$ فإنّ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

أمثلة :

(1) هل العددان الناطقان $\frac{17}{15}$ و $\frac{221}{195}$ متساويان ؟ علّل.

الجواب : لدينا $17\times 195=3315$ و $15\times 221=3315$ أي $15\times 221=17\times 195$ و بالتالي $\frac{17}{15}=\frac{221}{195}$.

(2) هل العددان الناطقان $\frac{13}{14}$ و $\frac{167}{182}$ متساويان ؟ علّل.

الجواب : لدينا $13\times 182=2366$ و $14\times 167=2338$ أي $14\times 167\neq 13\times 182$ و بالتالي $\frac{13}{14}\neq\frac{167}{182}$.

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

III) جمع و طرح عددين ناطقين

نشاط :

الجزء الأول

(1) (ا) ما هي الكتابة العشرية لكل من $\frac{-6}{5}$ و $\frac{2}{5}$ ؟

استنتج الكتابة العشرية للمجموع $\frac{-6}{5}+\frac{2}{5}$ ثم قارنها بالكتابة العشرية للعدد $\frac{-6+2}{5}$.

(ب) أتمم المساواة : $\frac{-6}{5}+\frac{2}{5}=\frac{\cdots\cdots\cdots}{5}$.

(2) هل قاعدة جمع كسرين لهما نفس المقام تصلح مع الأعداد الناطقة ؟

الجزء الثاني : إثبات قاعدة جمع عددين ناطقين لهما نفس المقام

a ، b و c أعداد نسبية بحيث $c\neq 0$.

نريد أن نبرهن أنّ $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$.

من أجل ذلك، نضع $q=\frac{a}{c}$ و $q'=\frac{b}{c}$.

حسب تعريف حاصل القسمة، لدينا : $q\times c=\cdots$ و $q'\times c=\cdots$

منه $\cdots\times\cdots+\cdots\times\cdots=a+b$ و بأخذ العامل المشترك $\cdots$ ، ينتج أن : $a+b=(\cdots+\cdots)\times\cdots$ منه $\frac{a+b}{\cdots}=\cdots+\cdots$.

الجزء الثالث : إثبات قاعدة طرح عددين ناطقين لهما نفس المقام

(1) (ا) ما هو معاكس العدد الناطق $\frac{-3}{7}$ ؟

(ب) احسب الفرق $\frac{5}{7}-\frac{-3}{7}$ باتباع نفس طريقة طرح عددين نسبيين.

(2) بيّن أنّ : $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$.

الجزء الرابع : المقامان مختلفان

(1) أتمم :

$$\frac{-3}{8}=\frac{\cdots}{16}=\frac{\cdots}{24}=\frac{\cdots}{32}=\frac{\cdots}{40}$$
$$\frac{5}{6}=\frac{\cdots}{12}=\frac{\cdots}{18}=\frac{\cdots}{24}=\frac{\cdots}{30}$$

(2) استنتج طريقة لجمع أو طرح العددين $\frac{-3}{8}$ و $\frac{5}{6}$.

لجمع (أو طرح) عددين ناطقين لهما نفس المقام، نجمع (أو نطرح) بسطيهما و نحتفظ بالمقام المشترك. بتعبير آخر، إذا كانت a ، b و c أعدادا نسبية بحيث $c\neq 0$ فإنّ : $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$ و $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$.

أمثلة :

$$\frac{-2}{7}+\frac{8}{7}=\frac{-2+8}{7}=\frac{6}{7}$$
$$\frac{1,5}{11}-\frac{8}{11}=\frac{1,5-8}{11}=\frac{-6,5}{11}=-\frac{6,5}{11}$$
$$\frac{2}{-3}+\frac{-7}{-3}=\frac{2+(-7)}{-3}=\frac{-5}{-3}=\frac{5}{3}$$
$$\frac{2}{17}-\frac{-2}{17}=\frac{2-(-2)}{17}=\frac{2+2}{17}=\frac{4}{17}$$

لجمع (أو طرح) عددين ناطقين بمقامين مختلفين، نبدأ بتوحيد مقاميهما ثمّ نطبق القاعدة السابقة.

أمثلة :

$$\frac{1}{2}+\frac{5}{3}=\frac{1\times 3}{2\times 3}+\frac{5\times 2}{3\times 2}=\frac{3}{6}+\frac{10}{6}=\frac{3+10}{6}=\frac{13}{6}$$
$$\frac{4}{-3}+\frac{5}{2}=\frac{4\times(-2)}{-3\times(-2)}+\frac{5\times 3}{2\times 3}=\frac{-8}{6}+\frac{15}{6}=\frac{-8+15}{6}=\frac{7}{6}$$
$$\frac{-5}{8}-\frac{7}{6}=\frac{-5\times 3}{8\times 3}-\frac{7\times 4}{6\times 4}=\frac{-15}{24}-\frac{28}{24}=\frac{-15-27}{24}=\frac{-43}{24}=-\frac{43}{24}$$

ملاحظة : عند جمع أو طرح العددين الناطقين $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ (بمقامين مختلفين)، يمكن ملاحظة أنّ العدد $b\times d$ هو مضاعف مشترك للمقامين و بالتالي يكون : $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\times \boldsymbol{d}}{b\times \boldsymbol{d}}+\frac{\boldsymbol{b}\times c}{\boldsymbol{b}\times d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$ و $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\times \boldsymbol{d}}{b\times \boldsymbol{d}}-\frac{\boldsymbol{b}\times c}{\boldsymbol{b}\times d}=\frac{ad}{bd}-\frac{bc}{bd}=\frac{ad-bc}{bd}$.

لدينا إذن : $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ و $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$.

أمثلة :

$$\frac{-2}{3}+\frac{5}{2}=\frac{-2\times 2+3\times 5}{3\times 2}=\frac{-4+15}{6}=\frac{11}{6}$$
$$\frac{3}{-7}-\frac{5}{4}=\frac{3\times 4-(-7)\times 5}{(-7)\times 4}=\frac{12-(-35)}{-28}=\frac{12+35}{-28}=\frac{47}{-28}=-\frac{47}{28}$$

belhocine : https://prof27math.weebly.com/

تطبيقات

3 احسب ثم بسِّط النتائج إن أمكن :

$A = \frac{4}{7} + \frac{-8}{7}$ | $B = \frac{3}{13} - \frac{-7}{13}$ | $C = \frac{-3}{4} + \frac{7}{12}$ | $D = \frac{1}{5} - \frac{3}{4}$

4 احسب ثم بسِّط النتائج إن أمكن :

$E = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}$ | $G = 5 + \frac{8}{3}$ | $I = \frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ | $K = \frac{-3}{10} - \frac{2}{5}$ | $M = -\frac{5}{3} + \frac{3}{2}$

$F = \frac{12}{5} + \frac{3}{10}$ | $H = \frac{5}{9} + \frac{7}{3}$ | $J = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}$ | $L = \frac{1}{2} - 5$ | $N = -\frac{5}{11} - \frac{3}{2}$

5 احسب ثم بسِّط النتائج إن أمكن :

$P = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}$ | $Q = -\frac{1}{6} + \frac{5}{3} + \frac{1}{2}$ | $R = \frac{-3}{7} + \frac{5}{4} - \frac{9}{14}$ | $S = 3 - \frac{2}{5} - \frac{10}{3}$

belhocine : https://prof27math.weebly.com/