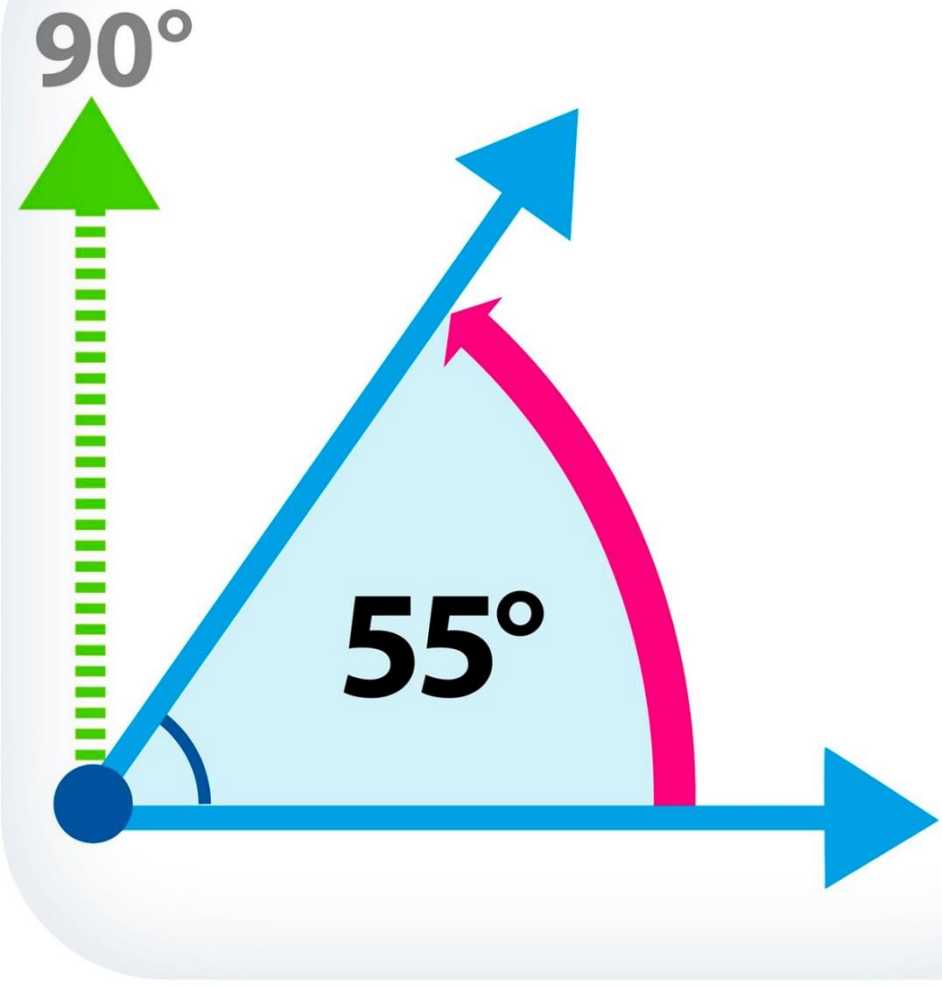
الخليل للرياضيات

مجلة
الزوايا الموجهة

الأستاذ: قويسم الخليل



- ملخص شامل للوحدة
- تمارين متنوعة محلولة

للسنة
ثانية ثانوي
الشعب العلمية

آخر تحديث: [08 فيفري 2023]

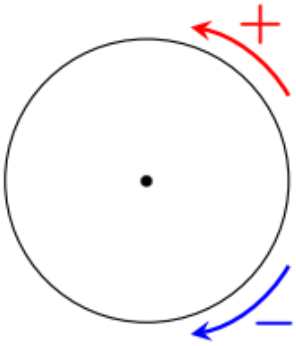
/alkhalil.math

ملخص شامل حول:

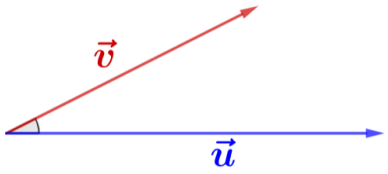
الزوايا الموجهة

الخليل للرياضيات

1 الزوايا الموجهة



- يوجه المستوي:
  - توجيها مباشرا (موجب) ⟵ عكس عقارب الساعة
  - توجيها غير مباشرا (سالب) ⟵ اتجاه عقارب الساعة
- نسمي دائرة مثلثية كل دائرة موجهة في الاتجاه المباشر والتي نصف قطرها 1
- فيما يلي: $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث أشعة غير معدومة:
- نسمي الثنائية $(\vec{u};\ \vec{v})$ زاوية موجهة لشعاعين



- إذا كان x قيس للزاوية $(\vec{u};\vec{v})$ فإن كل الاعداد من الشكل $\boxed{x+2k\pi}$ هي أقياس للزاوية $(\vec{u};\vec{v})$ حيث: $k\in\mathbb{Z}$
- يوجد قيس على المجال $\boxed{]-\pi;\pi]}$ يسمى القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{u};\ \vec{v})$
- إيجاد القيس الرئيسي للزاوية $(\vec{u};\ \vec{v})=x$:
  - يكتب الشكل العام للزاوية بـ: $\boxed{(\vec{u};\ \vec{v})=x+2k\pi}$
  - نحصر الشكل العام للزاوية بين $-\pi$ و π ، أي: $\boxed{-\pi<x+2k\pi<\pi}$
  - يكفي إيجاد k انطلاقا من هذا الحصر ثم تعويضه في الشكل العام لحساب القيس الرئيسي

ملاحظة: يوجد طريقة أخرى لإيجاد القيس الرئيسي للزاوية $(\vec{u};\vec{v})$ ، سنتطرق إليها خلال التمارين

تقايس الزوايا الموجهة:

ليكن α قيسا للزاوية $(\vec{u};\vec{v})$ و α' قيسا للزاوية $(\vec{u'};\vec{v'})$

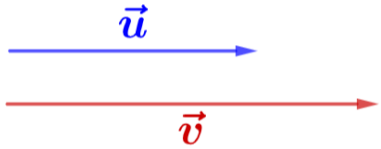
- تكون الزويتان $(\vec{u};\vec{v})$ و $(\vec{u'};\vec{v'})$ متقايستان إذا وفقط إذا كان من أجل كل $k\in\mathbb{Z}$:

$$\boxed{\alpha'=\alpha+2k\pi}$$

- أي: $\alpha'-\alpha$ مضاعف لـ 2π

الارتباط الخطي في الزوايا الموجهة:

- $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا معناه:
  - $(\vec{u};\vec{v})=2k\pi$ وهذا يعني $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في نفس الاتجاه



  - $(\vec{u};\vec{v})=\pi+2k\pi$ وهذا يعني $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في اتجاهين متعاكسين

الخليل للرياضيات

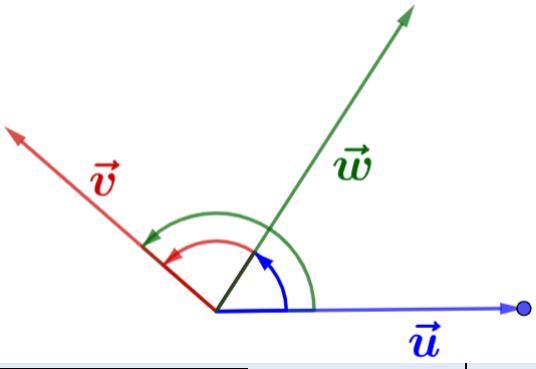
خاصية $(k;k') \in \mathbb{R}^*$

☒ **إذا كان:** k و k' **من نفس الإشارة** **فإن:** $(k\vec{u};k'\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v})$

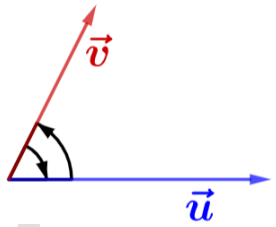
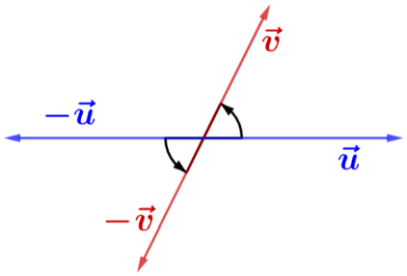
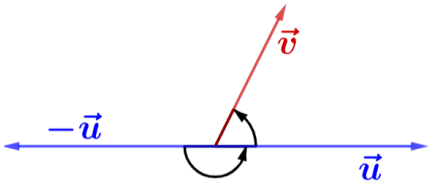
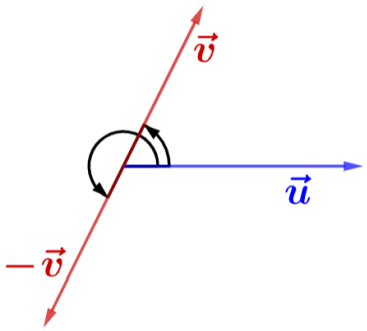
☒ **إذا كان:** k و k' **مختلفين في الإشارة فإن:** $(k\vec{u};k'\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v}) + \pi$

علاقة شال:

لدينا: $\boxed{(\vec{u};\vec{v}) = (\vec{u};\vec{w}) + (\vec{w};\vec{v})}$



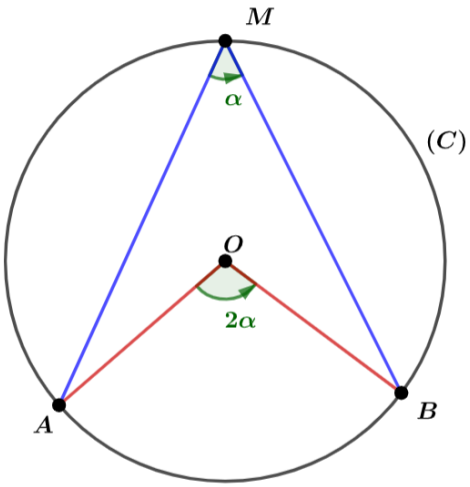
نتائج:

$\boxed{(\vec{u};\vec{v}) = -(\vec{v};\vec{u})}$	$\boxed{(-\vec{u};-\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v})}$
	
$\boxed{(-\vec{u};\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v}) + \pi}$	$\boxed{(\vec{u};-\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v}) + \pi}$
	

الزاوية المحيطية

إذا كانت A ، B و M **ثلاث نقط متمايزة مثنى مثنى من دائرة مثلثية** (C) **مركزها** O **فإن:**

$$\boxed{(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})}$$



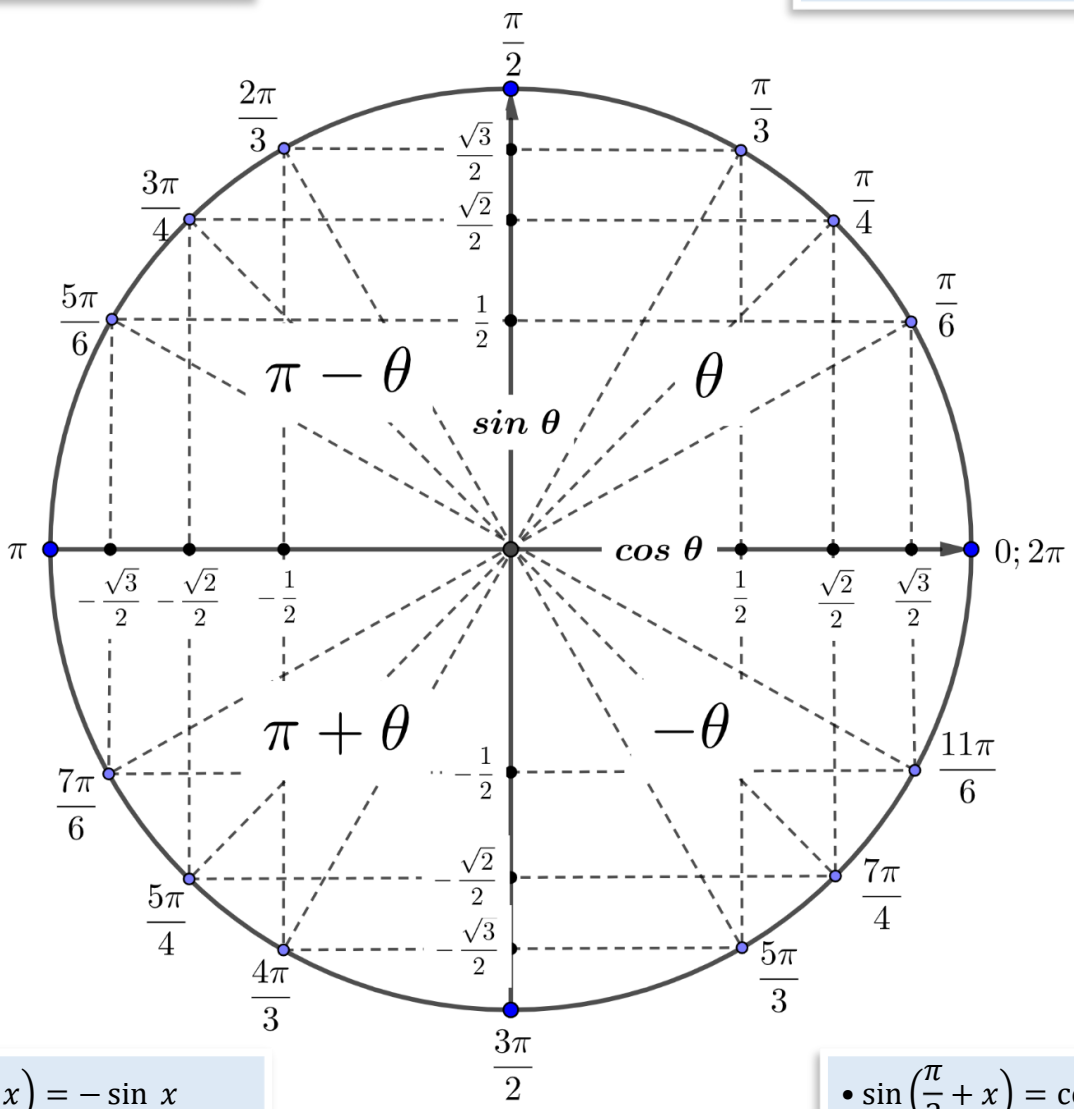
الخليل للرياضيات

الدائرة المثلثية

- $\cos(-x) = \cos x$
- $\sin(-x) = -\sin x$

- $\cos(\pi + x) = -\cos\ x$
- $\cos(\pi - x) = -\cos\ x$

- $\sin(\pi + x) = -\sin x$
- $\sin(\pi - x) = \sin x$



- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin\ x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\ x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

جدول الزوايا الشهيرة

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0

الخليل للرياضيات

بعض العلاقات المثلثية الشهرية

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$:

- $-1 \leq \cos^2 x < 1$
- $-1 \leq \sin^2 x < 1$

- $\sin x^2 + \cos x^2 = 1$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
  $= 2\cos^2 x - 1$
  $= 1 - 2\sin^2 x$
- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
- $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$
- $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$

- $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
- $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$
- $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

معادلات خاصة:

من أجل $k \in \mathbb{Z}$ لدينا:

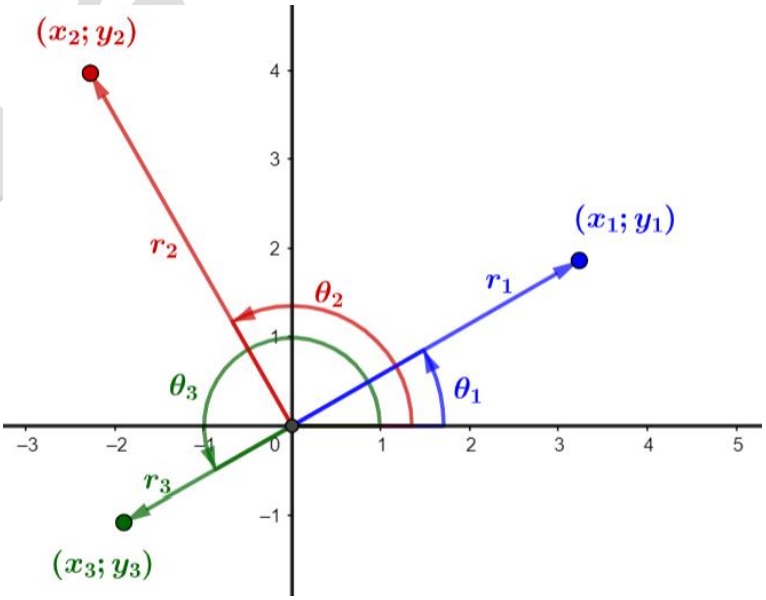
- $\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
- $\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$
- $\sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

- $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$
- $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
- $\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2k\pi$

3 الاحداثيات القطبية والديكارتية

ليكن $(o; \vec{i}, \vec{j})$ معلم مباشر متعامد متجانس، ولتكن M نقطة من المستوي تختلف عن O

- **تسمى الثنائية $M(x; y)$ الاحداثيات الديكارتية للنقطة M**
- **تسمى الثنائية $M(r; \theta)$ الاحداثيات القطبية للنقطة M حيث $r = OM$ و $\theta = (\vec{i}; \overrightarrow{OM})$**



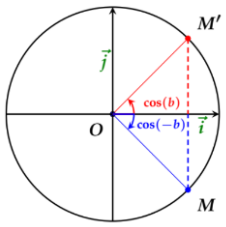
العلاقة بين الاحداثيات القطبية والديكارتية:

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، $x = r\cos\theta$ ، $y = r\sin\theta$

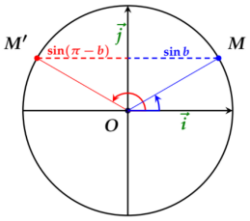
الخليل للرياضيات

4 المعادلات المثلثية

$\cos a = \cos b \Longrightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi \\ a = -b + 2k\pi \end{cases}$



$\sin a = \sin b \Longrightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi \\ a = \pi - b + 2k\pi \end{cases}$



المعادلات من الشكل: $\cos x = a$

☒ إذا كان $a \notin [a;b]$ فالمعادلة لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$

☒ إذا كان $a \in [a;b]$:

1. نبحث عن القيس الرئيسي b حيث: $\cos b = a$
2. الحلول هي: $\begin{cases} x = b + 2k\pi \\ x = -b + 2k\pi \end{cases}$

المعادلات من الشكل: $\sin x = a$

☒ إذا كان $a \notin [a;b]$ فالمعادلة لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$

☒ إذا كان $a \in [a;b]$:

1. نبحث عن القيس الرئيسي b حيث: $\sin b = a$
2. الحلول هي: $\begin{cases} x = b + 2k\pi \\ x = \pi - b + 2k\pi \end{cases}$

المعادلات من الشكل: $\cos a = \sin b$

☒ إما أن نحول sin إلى cos بالقانون $\sin b = \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right)$

فتصبح المعادلة $\cos a = \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right)$ أي من الشكل: $\cos a = \cos b$

☒ أو نحول cos إلى sin بطريقتين:

- بالقانون $\cos\ a = \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right)$

فتصبح المعادلة $\cos a = \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right)$ أي من الشكل: $\sin a = \sin b$

- بالقانون $\cos\ a = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$

فتصبح المعادلة $\cos a = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$ أي من الشكل: $\sin a = \sin b$

{هذا من فضل ربي}

♥ زكاة العلم نشره ♥

الأستاذ: قويسم الخليل

الخليل للرياضيات

تمارين متوعة:

مرفقة بحلول مفصلة

الخليل للرياضيات

التمرين 01

لتكن (C) الدائرة المثلثية المرفقة بالمعلم المتعامد المتجانس $(o;\ \vec{i},\vec{j})$، ولتكن النقطتين A و B من (C) حيث:

$$(\overrightarrow{OI};\ \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{6} \quad \text{و} \quad (\overrightarrow{OI};\ \overrightarrow{OB}) = \frac{3\pi}{4}$$

عيّن قيسا للزاوية الموجهة:

1. $(\overrightarrow{OJ};\ \overrightarrow{OA})$
2. $(\overrightarrow{OJ};\ \overrightarrow{OB})$
3. $(\overrightarrow{OA};\ \overrightarrow{OB})$

التمرين 02

أوجد في كل حالة من الحالات التالية القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{u};\ \vec{v})$ التي قيسها α

1. $\alpha = 2007rad$
2. $\alpha = \frac{14\pi}{3}$
3. $\alpha = -\frac{35\pi}{2}$

التمرين 03

أوجد في كل حالة من الحالات التالية القيس الرئيسي للزاوية الموجهة التي قيسها α

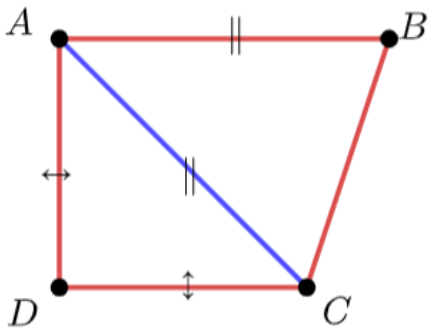
1. $\alpha = -\frac{189\pi}{4}$
2. $\alpha = \frac{65\pi}{8}$
3. $\alpha = \frac{721\pi}{5}$
4. $\alpha = \frac{2007\pi}{3}$

التمرين 04

1. هل العددان $\frac{41\pi}{8}$ و $\frac{9\pi}{8}$ قيسان لزاوية موجهة لشعاعين؟
2. هل العددان $\frac{1924\pi}{5}$ و $-\frac{4\pi}{5}$ قيسان لنفس الزاوية؟

التمرين 05

$ABCD$ شبه منحرف قائم حيث: $DC = AD$ و $AB = AC$



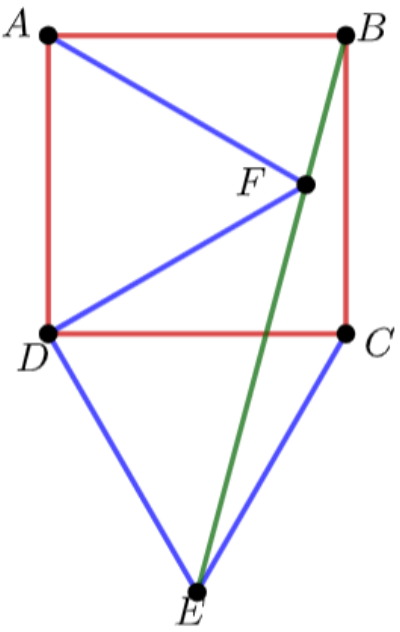
عين القيس الرئيسي للزوايا الموجهة التالية:

1. $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})$
2. $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AC})$
3. $(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{BA})$
4. $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AD})$

الخليل للرياضيات

التمرين 06

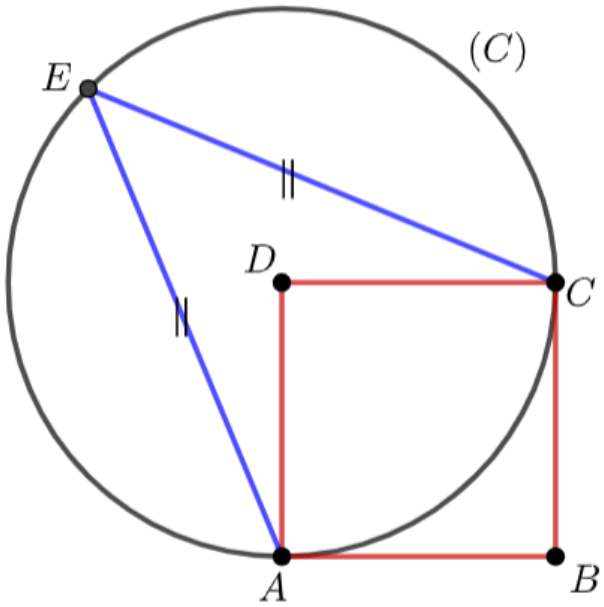
$ABCD$ مربع غير مباشر من المستوي حيث $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) = -\frac{\pi}{2}$. E نقطة خارج المربع $ABCD$ حيث: ECD مثلث متقايس الأضلاع، ولتكن النقطة F داخل المربع $ABCD$ حيث: AFD مثلث متقايس الأضلاع



1. أثبت أنّ المثلث ABF متقايس الساقين
2. عين قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{FB};\ \overrightarrow{FA})$
3. عين قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{DE};\ \overrightarrow{DF})$، ثم استنتج قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{FD};\ \overrightarrow{FE})$
4. عين قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{FB};\ \overrightarrow{FE})$
5. استنتج أنّ النقط E، F و B على استقامة واحدة

التمرين 07

في المستوي الموجه، $ABCD$ مربع و ACE مثلث متساوي الساقين، (C) الدائرة التي مركزها D ونصف قطرها DC كما في الشكل المقابل:



الخليل للرياضيات

1. عين قيسا لكل من الزاويتين الموجهتين $(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC})$ و$(\overrightarrow{EA};\overrightarrow{EC})$
2. بيّن أن المثلثين EDC و EDA متقايسان
3. عيّن قيسا لكل من الزاويتين الموجهتين $(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE})$ و$(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{DA})$
4. بيّن أنّ $(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC})+(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE})=\pi$
5. ماذا يمكنك القول عن النقط E، D و B. علل إجابتك.

التمرين 08

بدون استعمال الآلة الحاسبة، عيّن القيم المضبوطة لكل من:

1. $\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right)$
2. $\sin\left(\frac{25\pi}{6}\right)$
3. $\sin\left(-\frac{11\pi}{3}\right)$
4. $\cos\left(-\frac{31\pi}{3}\right)$

التمرين 09

1. بدون استعمال الآلة الحاسبة، عيّن القيم المضبوطة لـ $\cos x$ إذا علمت أنّ:
$\sin x=\frac{3}{5}$ و $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$
2. باستعمال آلة حاسبة عين مدور لـ x إلى 10^{-2}

التمرين 10

بدون استعمال الآلة الحاسبة، عيّن القيم المضبوطة لكل من:

1. $\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)$
2. $\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$

التمرين 11

علما أنّ $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ دون استعمال الآلة الحاسبة، عيّن القيم المضبوطة لـ $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

ثم استنتج $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)$ و $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

لاحظ أن: $\frac{\sqrt{3}+2}{4}=\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4}\right)^2$

التمرين 12

$(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ معلم متعامد متجانس

1. $\left(2;\frac{19\pi}{3}\right)$ هي الاحداثيات القطبية للنقطة A في المعلم القطبي $(O;\vec{\imath})$. عيّن الاحداثيات الديكارتية للنقطة A
2. لتكن النقطة B التي احداثييها الديكارتية $(-\sqrt{3};-1)$. عيّن احداثيات قطبية للنقطة B في المعلم القطبي $(O;\vec{\imath})$

التمرين 13

الخليل للرياضيات

عيّن في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ النقط التالية المعرفة بإحداثييها القطبية:

$A\left(1;\frac{\pi}{6}\right)$ ، $B\left(2;-\frac{5\pi}{6}\right)$ ، $C\left(3;\frac{\pi}{6}\right)$ ، $D\left(4;\frac{\pi}{2}\right)$

التمرين 14

حل في المجموعة $\mathbb{R}$ ، ثم مثل الحلول على الدائرة المثلثية، للمعادلتين ذات المجهول x ، التاليتين:

1. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\sin x = -\frac{1}{2}$

التمرين 15

علما أن قيس الزاوية الموجهة $(\vec{u};\vec{v})$ هو $-\frac{\pi}{3}$ ، عيّن قيس الزوايا الموجهة التالية:

1. $(\vec{v};\vec{u})$
2. $(5\vec{u};3\vec{v})$
3. $(-6\vec{u};5\vec{v})$
4. $(2\vec{v};-\vec{u})$

التمرين 16

عين قيمة كل من $\cos x$ و $\sin x$ للزاوية x في كل حالة مما يلي:

1. $x = -\frac{945\pi}{2}$
2. $x = \frac{-5\pi}{6}$
3. $x = \frac{-17\pi}{4}$
4. $x = \frac{2\pi}{3}$

التمرين 17

بسط العبارات التالية:

1. $A = \sin x + \cos(\pi - x) + \cos(\pi + x)$
2. $B = \sin x + \sin(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos x$
3. $C = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \sin(x + 5\pi) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
4. $D = \cos(\pi - x) - \cos x + \sin(\pi + x) + \cos\left(x + \frac{7\pi}{2}\right)$
5. $E = \sin(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(\pi - x) + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
6. $F = \tan(\pi + x) + \tan\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{cotan}(2x)$

التمرين 18

x عدد حقيقي، أثبت العبارات التالية:

1. $\sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) - 2\cos\left(\frac{21\pi}{2} - x\right) - 3\sin(x - 3\pi) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin x$
2. $\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$
3. $\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$

الخليل للرياضيات

4. $\dfrac{\sin^2 x - \sin^4 x}{\cos^2 x - \cos^4 x} = 1$

التمرين 19

حل في المجال I المعادلات التالية:

1. $\cos x = \dfrac{1}{2}$ ، $I =]-\pi;\pi]$
2. $\cos x - 2 = 0$ ، $I = \mathbb{R}$
3. $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ، $I =]-\pi;\pi]$
4. $2\cos 2x = -\sqrt{2}$ ، $I = [0;2\pi[$
5. $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}$ ، $I = \mathbb{R}$
6. $2\sqrt{2}\sin x + 2 = 0$ ، $I = \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{5\pi}{2}\right]$
7. $\cos 2x = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ ، $I = \mathbb{R}$
8. $\cos x\left(\sqrt{2}\sin x - 1\right) = 0$ ، $I = [-\pi;2\pi[$

التمرين 20

حل في المجال I المتراجحات التالية:

1. $\cos x \leq \dfrac{1}{2}$ ، $I =]-\pi;\pi]$
2. $2\sin x + \sqrt{3} \leq 0$ ، $I = [0;3\pi]$
3. $\cos x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ، $I = \left]-\dfrac{\pi}{2};2\pi\right]$
4. $-2\cos 2x + \sqrt{3} \geq 0$ ، $I = [0;2\pi[$
5. $2\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) - 1 \leq 0$ ، $I =]0;\pi]$
6. $\sqrt{2}\sin x - 1 > 0$ ، $I = \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{5\pi}{2}\right]$

التمرين 21

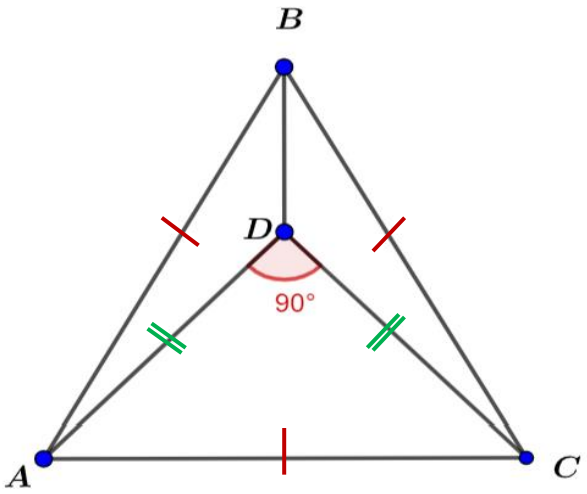
حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1. $\cos x = \sin x$
2. $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$
3. $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(3x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

الخليل للرياضيات

التمرين 22

ABC مثلث متقايس الأضلاع و D نقطة داخل المثلث ABC بحيث ADC قائم في D ومتساوي الساقين كما هو موضع في الشكل التالي:



1. عيّن قيسا للزوايا الموجهة التالية: $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})$ ، $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB})$، $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD})$ و $(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA})$
2. ما هو مجموع هذه الأقياس

التمرين 23

$P(x)$ كثير حدود معرف على $\mathbb{R}$ بـ: $P(x)=2x^3-7x^2+7x-2$

1. احسب $P(1)$، ماذا تستنتج؟
2. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x)=0$
3. استنتج حلول المعادلة $Q(x)=0$ حيث: $Q(x)=2\sin^3 x-7\sin^2 x+7\sin x-2$

ثم مثل صور حلولها على الدائرة المثلثية

التمرين 24

1) حل في المجال $]-\pi;\pi]$ المتراجحات التالية:

1. $2\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-1\geq 0$
2. $-2\sin x-\sqrt{3}\geq 0$
3. $-\frac{1}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\geq\sqrt{2}$

2) x عدد حقيقي، إذا علمت أنّ $2\cos x\cdot\sin x=1$، أحسب كلا من:

1. $\cos x+\sin x$
2. $\cos x-\sin x$
3. $\cos^2 x-\sin^2 x$

{هذا من فضل ربي}

♥ زكاة العلم نشره ♥

الأستاذ: قويسم الخليل

الخليل للرياضيات

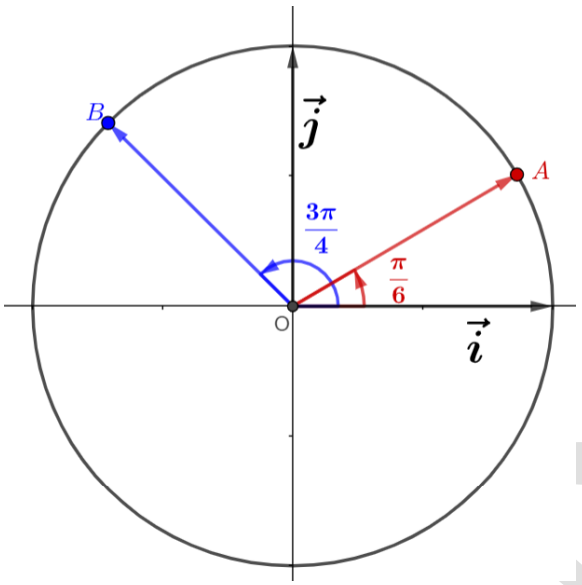
الخليل للرياضيات

حلول التمارين:

حلول مقترحة مفصلة

الخليل للرياضيات

حل التمرين 01



تعيين قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OA})$:

لدينا:

$$(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OJ})=\frac{\pi}{2}\Rightarrow-(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OJ})=(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA})-\frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow(\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OA})=(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA})-\frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow(\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OA})=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow\boxed{(\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OA})=-\frac{\pi}{3}}$$

تعيين قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OB})$:

لدينا:

$$(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})+(\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OB})\Rightarrow(\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB})-(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$$
$$\Rightarrow(\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OB})=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow\boxed{(\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OB})=\frac{\pi}{4}}$$

تعيين قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$:

لدينا:

$$(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OJ})+(\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OB})\Rightarrow(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})=-(\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OB})$$
$$\Rightarrow(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})=-\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{4}$$
$$\Rightarrow\boxed{(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})=\frac{7\pi}{12}}$$

حل التمرين 02

إيجاد في كل حالة من الحالات التالية القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{u};\vec{v})$ التي قيسها α:

☒ $\alpha=2007rad$

لدينا:

الخليل للرياضيات

$$-\pi < 2007 + 2k\pi \leq \pi \Rightarrow -\pi - 2007 < 2k\pi \leq \pi - 2007$$
$$\Rightarrow \frac{-\pi - 2007}{2\pi} < k \leq \frac{\pi - 2007}{2\pi}$$
$$\Rightarrow -319.92 < k \leq -318.92$$
$$\Rightarrow k = -319$$

إذن القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{u};\vec{v})$ هو:

$$2007 + 2(-319)\pi = \boxed{2.66rad}$$

☒ $\alpha = \frac{14\pi}{3}$

لدينا:

$$-\pi < \frac{14\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi \Rightarrow -1 < \frac{14}{3} + 2k \leq 1$$
$$\Rightarrow -1 - \frac{14}{3} < 2k \leq 1 - \frac{14}{3}$$
$$\Rightarrow \frac{-1 - \frac{14}{3}}{2} < k \leq \frac{1 - \frac{14}{3}}{2}$$
$$\Rightarrow -2.8 < k \leq -1.8$$
$$\Rightarrow k = -1$$

إذن القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{u};\vec{v})$ هو:

$$\frac{14\pi}{3} + 2(-1)\pi = \boxed{\frac{8\pi}{3}}$$

☒ $\alpha = -\frac{35\pi}{2}$

لدينا:

$$-\pi < -\frac{35\pi}{2} + 2k\pi \leq \pi \Rightarrow -1 < -\frac{35}{2} + 2k \leq 1$$
$$\Rightarrow \frac{-1 + \frac{35}{2}}{2} < k \leq \frac{1 + \frac{35}{2}}{2}$$
$$\Rightarrow 8.25 < k \leq 9.25$$
$$\Rightarrow k = 9$$

إذن القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{u};\vec{v})$ هو:

$$-\frac{35\pi}{2} + 2(9)\pi = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

حل التمرين 03

إيجاد في كل حالة من الحالات التالية القيس الرئيسي للزاوية الموجهة التي قيسها α

☒ $\alpha = -\frac{189\pi}{4}$

لدينا:

$$\alpha = -\frac{189\pi}{4} = -\frac{188\pi + \pi}{4} = -47\pi - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{3\pi}{4}}$$

☒ $\alpha = \frac{65\pi}{8}$

لدينا:

$$\alpha = \frac{65\pi}{8} = \frac{64\pi + \pi}{8} = 8\pi + \frac{\pi}{8} = \boxed{\frac{\pi}{8}}$$

☒ $\alpha = \frac{721\pi}{5}$

الخليل للرياضيات

$$\alpha = \frac{721\pi}{5} = \frac{720\pi + \pi}{5} = 144\pi + \frac{\pi}{5} = \boxed{\frac{\pi}{5}}$$

$\alpha = \frac{2007\pi}{3}$ ☒

$$\alpha = \frac{2007\pi}{3} = 699\pi = \boxed{\pi}$$

حل التمرين 04

حتى يكون عددان حقيقان α و β قيسان لزاوية موجهة لشعاعين يكفي أن يكون $\alpha - \beta$ من مضاعفات 2π

- $\frac{41\pi}{8}$ و $\frac{9\pi}{8}$

لدينا:

$$\frac{41\pi}{8} - \frac{9\pi}{8} = \frac{32\pi}{8} = 4\pi = 2 \times 2\pi$$

إذن $\frac{41\pi}{8}$ و $\frac{9\pi}{8}$ قيسان لنفس الزاوية

- $\frac{1924\pi}{5}$ و $-\frac{4\pi}{5}$

لدينا:

$$\frac{1924\pi}{5} - \left(-\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1928\pi}{5} = \frac{1925\pi + 3\pi}{5} = 385\pi + \frac{3\pi}{5} = \pi + \frac{3\pi}{5} = \frac{8\pi}{5}$$

إذن $\frac{1924\pi}{5}$ و $-\frac{4\pi}{5}$ ليسا قيسان لنفس الزاوية

حل التمرين 05

تعيين القيس الرئيسي للزوايا الموجهة التالية:

❶ $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})$

لدينا:

$$(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{4}$$

ولدينا:

$$(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}) + 2(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) = \pi \Longrightarrow (\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) = \frac{\pi - (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})}{2}$$

$$\Longrightarrow (\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) = \frac{\pi - \frac{\pi}{4}}{2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) = \frac{3\pi}{8}}$$

❷ $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AC})$

$$\boxed{(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}}$$

❸ $(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{BA})$

$$\boxed{(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{BA}) = \pi}$$

❹ $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AD})$

$$\boxed{(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AD}) = -\frac{\pi}{2}}$$

الخليل للرياضيات

حل التمرين 06

❶ اثبات أنّ المثلث ABF متقايس الساقين :

لدينا: $AD = AF$ لأن: AFD مثلث متقايس الأضلاع

لدينا: $AD = AB$ لأن: $ABCD$ مربع

ومنه: $AF = AB$

وعليه: ABF مثلث متساوي الساقين.

❶ تعيين قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{FB};\ \overrightarrow{FA})$:

لدينا: $(\overrightarrow{AD};\ \overrightarrow{AF}) = \frac{\pi}{3}$

ومنه: $(\overrightarrow{AF};\ \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{6}$

ولدينا:

$$2(\overrightarrow{FB};\ \overrightarrow{FA}) + (\overrightarrow{AF};\ \overrightarrow{AB}) = \pi \Longrightarrow (\overrightarrow{FB};\ \overrightarrow{FA}) = \frac{\pi - (\overrightarrow{AF};\ \overrightarrow{AB})}{2}$$

$$\Longrightarrow (\overrightarrow{FB};\ \overrightarrow{FA}) = \frac{\pi - \frac{\pi}{6}}{2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{(\overrightarrow{FB};\ \overrightarrow{FA}) = \frac{5\pi}{12}}$$

❷ تعيين قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{DE};\ \overrightarrow{DF})$:

لدينا: $(\overrightarrow{DE};\ \overrightarrow{DC}) = \frac{\pi}{3}$

ولدينا: $(\overrightarrow{DC};\ \overrightarrow{DF}) = \frac{\pi}{6}$

ولدينا:

$$(\overrightarrow{DE};\ \overrightarrow{DF}) = (\overrightarrow{DE};\ \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{DC};\ \overrightarrow{DF})$$

$$= \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

❸ استنتاج قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{FD};\ \overrightarrow{FE})$

لدينا: $(\overrightarrow{DE};\ \overrightarrow{DF}) = \frac{\pi}{2}$

ولدينا: $DE = DF$

إذن المثلث DEF قائم في D ومتساوي الساقين

ومنه:

$$(\overrightarrow{DE};\ \overrightarrow{DF}) + 2(\overrightarrow{FD};\ \overrightarrow{FE}) = \pi \Longrightarrow (\overrightarrow{FD};\ \overrightarrow{FE}) = \frac{\pi - (\overrightarrow{DE};\ \overrightarrow{DF})}{2}$$

$$\Longrightarrow (\overrightarrow{FD};\ \overrightarrow{FE}) = \frac{\pi - \frac{\pi}{2}}{2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{(\overrightarrow{FD};\ \overrightarrow{FE}) = \frac{\pi}{4}}$$

❸ تعيين قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{FB};\ \overrightarrow{FE})$:

$$(\overrightarrow{FB};\ \overrightarrow{FE}) = (\overrightarrow{FB};\ \overrightarrow{FA}) + (\overrightarrow{FA};\ \overrightarrow{FE})$$

$$= (\overrightarrow{FB};\ \overrightarrow{FA}) + (\overrightarrow{FA};\ \overrightarrow{FD}) + (\overrightarrow{FD};\ \overrightarrow{FE})$$

$$= \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \boxed{\pi}$$

الخليل للرياضيات

❹ استنتاج أنّ النقط E، F و B على استقامة واحدة:

بما أنّ $(\overrightarrow{FB};\ \overrightarrow{FE}) = \pi$ فإنّ النقط E، F و B على استقامة واحدة

حل التمرين 07

❶ تعيين قيسا لكل من الزاويتين الموجهتين $(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC})$ و$(\overrightarrow{EA};\overrightarrow{EC})$:

لدينا $ABCD$ مربع ومنه

$$\boxed{(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC}) = \frac{\pi}{2}}$$

ولدينا حسب نظرية الزاوية المحيطية:

$$2(\overrightarrow{EA};\overrightarrow{EC}) = (\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC}) \Longrightarrow (\overrightarrow{EA};\overrightarrow{EC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC})$$
$$\Longrightarrow \boxed{(\overrightarrow{EA};\overrightarrow{EC}) = \frac{\pi}{4}}$$

❶ تبيين أن المثلثين EDC و EDA متقايسان:

لدينا: ACE مثلث متساوي الساقين ومنه: $EA = EC$

لدينا: $ABCD$ مربع ومنه: $AD = DC$

إذن: المثلثان EDC و EDA متقايسان

❷ تعيين قيسا لكل من الزاويتين الموجهتين $(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE})$ و$(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{DA})$:

لدينا:

$$(\overrightarrow{ED};\overrightarrow{EC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{EA};\overrightarrow{EC}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8}$$

ولدينا: المثلث DCE متساوي الساقين

ومنه:

$$(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE}) + 2(\overrightarrow{ED};\overrightarrow{EC}) = \pi \Longrightarrow (\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE}) = \pi - 2(\overrightarrow{ED};\overrightarrow{EC})$$
$$\Longrightarrow (\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE}) = \pi - 2(\overrightarrow{ED};\overrightarrow{EC})$$
$$\Longrightarrow (\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE}) = \pi - 2\frac{\pi}{8}$$
$$\Longrightarrow \boxed{(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE}) = \frac{3\pi}{4}}$$

أيضا نجد أنّ:

$$\boxed{(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{DA}) = \frac{3\pi}{4}}$$

❸ تبيين أنّ $(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE}) = \pi$:

لدينا $ABCD$ مربع ومنه $(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC}) = \frac{\pi}{4}$

ومنه:

$$(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE}) = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \boxed{\pi}$$

❹ تبرير ماذا يمكننا القول عن النقط E، D و B:

حسب علاقة شال لدينا:

$$(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE}) = \pi \Longrightarrow (\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DE}) = \pi$$

ومنه النقط E، D و B على استقامية

الخليل للرياضيات

حل التمرين 08

بدون استعمال الآلة الحاسبة، تعيين القيم المضبوطة لكل من:

- $\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{8\pi+\pi}{4}\right) = \cos\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$
- $\sin\left(\frac{25\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{24\pi+\pi}{6}\right) = \sin\left(4\pi+\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \boxed{\frac{1}{2}}$
- $\sin\left(-\frac{11\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{12\pi-\pi}{3}\right) = \sin\left(-4\pi+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$
- $\cos\left(-\frac{31\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{30\pi+\pi}{3}\right) = \cos\left(-10\pi-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{\frac{1}{2}}$

حل التمرين 09

❶ تعيين القيم المضبوطة لـ $\cos x$

لدينا:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$$
$$\Rightarrow \cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$$
$$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{16}{25}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{4}{5} \\ \text{أو} \\ \cos x = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

ولدينا: $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

أي: $\cos x < 0$

ومنه: $\cos x = -\frac{4}{5}$

❷ تعيين القيم المضبوطة لـ $\cos x$

يظهر لنا في الآلة الحاسبة بعد كتابة $\cos^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right)$ **القيمة** 2.49809

ومنه مدور x إلى 10^{-2} هو $x = 2.5$

حل التمرين 10

بدون استعمال الآلة الحاسبة، تعيين القيم المضبوطة لكل من:

- $\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{12\pi-\pi}{6}\right) = \cos\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$
- $\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{6\pi+\pi}{3}\right) = \sin\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

الخليل للرياضيات

حل التمرين 11

تعيين القيم المضبوطة لـ $\sin\frac{7\pi}{12}$:

لدينا:

$$\cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{7\pi}{12}\right)=1 \Rightarrow \sin^2\left(\frac{7\pi}{12}\right)=1-\cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$

$$\Rightarrow \sin^2\left(\frac{7\pi}{12}\right)=1-\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sin^2\left(\frac{7\pi}{12}\right)=1-\frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \sin^2\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \sin^2\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$$

استنتاج $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)$:

$$\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{6\pi+7\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{7\pi}{12}\right)=-\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\boxed{-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$$

استنتاج $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$:

$$\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{6\pi-7\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{7\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\boxed{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$$

حل التمرين 12

1 تعيين الاحداثيات الديكارتية للنقطة A:

لدينا: $r=2$

ولدينا:

$$\frac{19\pi}{3}=\frac{18\pi+\pi}{3}=6\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$$

ومنه:

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\\y=2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=\sqrt{3}\end{cases}$$

إذن:

$$\boxed{A(1;\sqrt{3})}$$

2 تعيين احداثيات قطبية للنقطة B:

لدينا:

$$r=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=2$$

ومنه:

الخليل للرياضيات

$$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{x}{r}\\ \sin\theta=\dfrac{y}{r}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=\dfrac{-1}{2}\end{cases}\Rightarrow\theta=\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$$

إذن:

$$\boxed{B\left(2;\frac{7\pi}{6}\right)}$$

حل التمرين 13

تعيين في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ النقط التالية المعرفة بإحداثييها القطبية:

☒ $A\left(1;\frac{\pi}{6}\right)$

لدينا: $r=1$ **و** $\theta=\frac{\pi}{6}$

ومنه:

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\\ y=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

إذن:

$$\boxed{A\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)}$$

☒ $B\left(2;-\frac{5\pi}{6}\right)$

لدينا: $r=2$

ولدينا:

$$-\frac{5\pi}{6}=\frac{-6\pi+\pi}{6}=-\pi+\frac{\pi}{6}=-\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$$

ومنه:

$$\begin{cases}x=2\cos\left(-\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right)\\ y=2\sin\left(-\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\\ y=-2\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ y=-2\left(\dfrac{1}{2}\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-\sqrt{3}\\ y=-1\end{cases}$$

إذن:

$$\boxed{B(-1;-\sqrt{3})}$$

☒ $C\left(3;\frac{\pi}{6}\right)$

لدينا: $r=3$ **و** $\theta=\frac{\pi}{6}$

ومنه:

$$\begin{cases}x=3\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\\ y=3\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\\ y=\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

إذن:

الخليل للرياضيات

$$\boxed{C\left(\frac{3\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2}\right)}$$

☒ $D\left(4;\frac{\pi}{2}\right)$

لدينا: $r=4$ و $\theta=\frac{\pi}{2}$

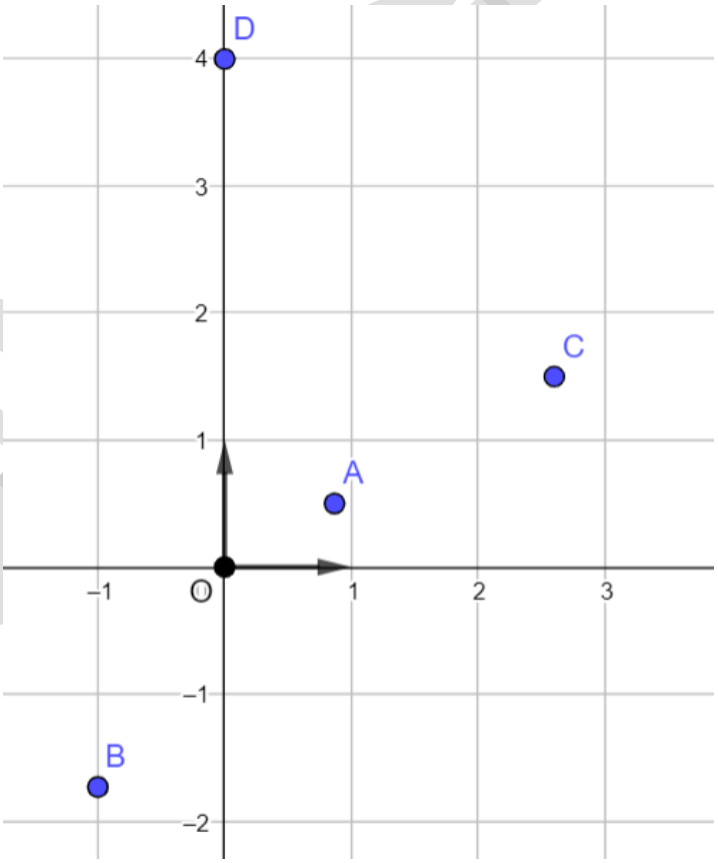
ومنه:

$$\begin{cases} x=4\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ y=4\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases}$$

إذن:

$$\boxed{D(0;4)}$$

ومنه:



حل التمرين 14

حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلتين ذات المجهول x ، التاليتين:

☒ $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos x=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ \text{أو} \qquad /k\in\mathbb{Z} \\ x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \end{cases}$$

إذن:

الخليل للرياضيات

$$S = \boxed{\left\{\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right); \left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) / k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

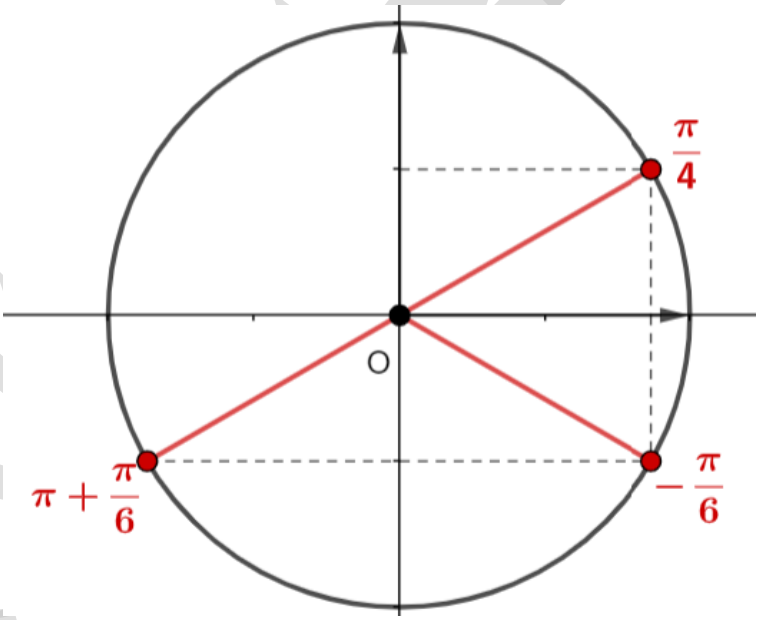
$\sin x = -\frac{1}{2}$ ☒

$$\sin x = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{أو} \qquad /k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

إذن:

$$S = \boxed{\left\{\left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right); \left(\pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) / k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

تمثيل الحلول:



حل التمرين 15

تعيين قيس الزوايا الموجهة التالية:

لدينا:

$$(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{\pi}{3}$$

ومنه:

- $(\vec{v}; \vec{u}) = -(\vec{u}; \vec{v}) = -\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{\frac{\pi}{3}}$
- $(5\vec{u}; 3\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) = \boxed{-\frac{\pi}{3}}$
- $(-6\vec{u}; 5\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \boxed{\frac{2\pi}{3}}$
- $(2\vec{v}; -\vec{u}) = (\vec{v}; \vec{u}) + \pi = -(\vec{u}; \vec{v}) + \pi = -\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi = \boxed{\frac{4\pi}{3}}$

الخليل للرياضيات

حل التمرين 16

تعيين قيمة كل من $\cos x$ و $\sin x$ للزاوية x في كل حالة مما يلي:

❶ $x = -\dfrac{945\pi}{2}$

لدينا:

$$x = -\frac{945\pi}{2} = -\frac{-\pi + 946\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 473\pi = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$$

ومنه:

- $\cos x = \cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$
- $\sin x = \sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$

❷ $x = \dfrac{-5\pi}{6}$

لدينا:

$$x = \frac{-5\pi}{6} = \frac{-6\pi + \pi}{6} = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

ومنه:

- $\cos x = \cos\left(-\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right)\right) = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sin x = \sin\left(-\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right)\right) = -\sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$

❶ $x = \dfrac{-17\pi}{4}$

لدينا:

$$x = \frac{-16\pi - \pi}{4} = -4\pi - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$$

ومنه:

- $\cos x = \cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\sin x = \sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

❷ $x = \dfrac{2\pi}{3}$

لدينا:

$$x = \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi - \pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$$

ومنه:

- $\cos x = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$
- $\sin x = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

حل التمرين 17

تبسيط العبارات التالية:

$$\begin{aligned} A &= \sin x + \cos(\pi - x) + \cos(\pi + x) \\ &= \sin x - \cos x - \cos x \end{aligned}$$

الخليل للرياضيات

$$= \boxed{\sin x - 2\cos x}$$

$$B = \sin x + \sin(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos x$$
$$= \sin x + \sin x + \cos x - \cos x$$
$$= \boxed{2\sin x}$$

$$C = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \sin(x + 5\pi) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$= \sin\left(\frac{2\pi + \pi}{2} - x\right) + \sin(x + \pi) + \sin x$$
$$= \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) - \sin x + \sin x$$
$$= -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$= \boxed{-\cos x}$$

$$D = \cos(\pi - x) + \cos x + \sin(\pi + x) + \cos\left(x + \frac{7\pi}{2}\right)$$
$$= -\cos x + \cos x - \sin x + \cos\left(x + \frac{6\pi + \pi}{2}\right)$$
$$= -\sin x + \cos\left(x + 3\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= -\sin x + \cos\left(x + \pi + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= -\sin x - \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= -\sin x + \sin x$$
$$= \boxed{0}$$

$$E = \sin(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(\pi - x) + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= -\sin x - \sin x - \cos x + \cos x$$
$$= \boxed{-2\sin x}$$

$$F = \tan(\pi + x) + \tan\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{cotan}(2x)$$
$$= \frac{\sin(\pi + x)}{\cos(\pi + x)} + \frac{\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)} + \operatorname{cotan}(2x)$$
$$= \frac{\sin(\pi + x)}{\cos(\pi + x)} + \frac{-\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)} + \operatorname{cotan}(2x)$$
$$= \frac{-\sin x}{-\cos x} + \frac{-\cos(2x)}{\sin(2x)} + \operatorname{cotan}(2x)$$
$$= \tan x - \operatorname{cotan}(2x) + \operatorname{cotan}(2x)$$
$$= \boxed{\tan x}$$

حل التمرين 18

اثبات العبارات الآتية:

1. $\sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) - 2\cos\left(\frac{21\pi}{2} - x\right) - 3\sin(x - 3\pi) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin x$

الخليل للرياضيات

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)-2\cos\left(\frac{21\pi}{2}-x\right)-3\sin(x-3\pi)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\cdots$$
$$=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{2}+x\right)-2\cos\left(10\pi+\frac{\pi}{2}-x\right)-3\sin(-(\pi-x))+\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}+x\right)$$
$$=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-2\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+3\sin(\pi-x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$
$$=\cos(x)-2\sin(x)+3\sin(x)-\cos(x)$$
$$=\sin(x)$$

❷ $\cos x+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0$

$$\cos x+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=\cos x+\cos\left(x+\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\pi+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\cos x-\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\cos x-\left[\cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]-\left[\cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$=\cos x-\left[\frac{1}{2}\cos(x)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)\right]-\left[\frac{1}{2}\cos(x)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)\right]$$
$$=\cos x-\frac{1}{2}\cos(x)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)-\frac{1}{2}\cos(x)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)$$
$$=0$$

❸ $\sin x+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0$

$$\sin x+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=\sin x+\sin\left(x+\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\pi+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\sin x-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\sin x-\left[\sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\cos(x)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]-\left[\sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\cos(x)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$=\sin x-\left[\frac{1}{2}\sin(x)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)\right]-\left[\frac{1}{2}\sin(x)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)\right]$$
$$=\sin x-\frac{1}{2}\sin(x)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)-\frac{1}{2}\sin(x)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)$$
$$=0$$

❹ $\frac{\sin^2 x-\sin^4 x}{\cos^2 x-\cos^4 x}=1$

$$\frac{\sin^2 x-\sin^4 x}{\cos^2 x-\cos^4 x}=\frac{\sin^2 x\,(1-\sin^2 x)}{\cos^2 x\,(1-\cos^2 x)}$$
$$=\frac{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}$$
$$=1$$

حل التمرين 19

حل في المجال I المعادلات التالية:

❶ $\cos x=\frac{1}{2}$ ، $I=]-\pi;\pi]$

$$\cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\\ \text{أو}\qquad /k\in\mathbb{Z}\\ x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases}$$

الخليل للرياضيات

لدينا: $-\pi < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$

ومنه: $\frac{-1-\frac{1}{3}}{2} < k \leq \frac{1-\frac{1}{3}}{2}$

ومنه: $-0.6 < k \leq 0.3$

ومنه: $k = 0$

ولدينا: $-\pi < -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$

ومنه: $\frac{-1+\frac{1}{3}}{2} < k \leq \frac{1+\frac{1}{3}}{2}$

ومنه: $-0.3 < k \leq 0.6$

ومنه: $k = 0$

إذن:

$$\boxed{S = \left\{\left(\frac{\pi}{3}\right); \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}}$$

❷ $\cos x - 2 = 0$ ، $I = \mathbb{R}$

$$\cos x - 2 = 0 \Rightarrow \cos x = 2$$

المعادلة لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$ لأنّ $2 \notin [-1; 1]$

❸ $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $I =]-\pi; \pi]$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{أو} \qquad /k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

لدينا: $-\pi < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$

ومنه: $-\frac{2}{3} < k \leq \frac{1}{3}$

ومنه: $-0.6 < k \leq 0.3$

ومنه: $k = 0$

ولدينا: $-\pi < \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$

ومنه: $-\frac{5}{6} < k \leq \frac{1}{6}$

ومنه: $-0.83 < k \leq 0.16$

ومنه: $k = 0$

إذن:

$$\boxed{S = \left\{\left(\frac{\pi}{3}\right); \left(\frac{2\pi}{3}\right)\right\}}$$

❹ $2\cos 2x = -\sqrt{2}$ ، $I = [0; 2\pi[$

$$2\cos 2x = -\sqrt{2} \Rightarrow \cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Rightarrow \cos 2x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

الخليل للرياضيات

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{أو} \qquad /k \in \mathbb{Z} \\ 2x = -\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{8} + k\pi \\ \text{أو} \qquad /k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{3\pi}{8} + k\pi \end{cases}$$

لدينا: $0 \leq \frac{3\pi}{8} + k\pi < 2\pi$

ومنه: $-\frac{3}{8} \leq k < \frac{16}{8}$

ومنه: $-0.37 < k \leq 1.62$

ومنه: $k = \{0; 1\}$

ولدينا: $0 \leq -\frac{3}{8} + k\pi < 2\pi$

ومنه: $\frac{3}{8} \leq k < \frac{19}{8}$

ومنه: $0.37 < k \leq 2.3$

ومنه: $k = \{1; 2\}$

إذن:

$$\boxed{S = \left\{\left(\frac{3\pi}{8}\right); \left(\frac{11\pi}{8}\right); \left(\frac{5\pi}{8}\right); \left(\frac{13\pi}{8}\right)\right\}}$$

❺ $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ ، $I = \mathbb{R}$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \dots (*) \\ \text{أو} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \dots (**) \end{cases}$$

نحل المعادلة $(*)$:

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{أو} \qquad /k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

نحل المعادلة $(**)$:

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{أو} \qquad /k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

إذن:

الخليل للرياضيات

$$S=\left\{\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right);\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right);\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right);\left(-\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)/k\in\mathbb{Z}\right\}$$

❻ $2\sqrt{2}\sin x+2=0$ ، $I=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$

$$2\sqrt{2}\sin x+2=0\Rightarrow\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow\begin{cases}x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi\\ \text{أو}\\ x=\pi+\frac{\pi}{4}+2k\pi\end{cases}/k\in\mathbb{Z}$$

لدينا: $-\frac{\pi}{2}\le-\frac{\pi}{4}+2k\pi\le\frac{5\pi}{2}$

ومنه: $-0.125\le k\le 1.375$

ومنه: $k=\{0;1\}$

ولدينا: $-\frac{1}{2}\le\pi+\frac{\pi}{4}+2k\pi\le\frac{5}{2}$

ومنه: $-0.875\le k\le 0.625$

ومنه: $k=0$

إذن:

$$S=\left\{\left(-\frac{\pi}{4}\right);\left(\frac{7\pi}{4}\right);\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right\}$$

❼ $\cos 2x=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ ، $I=\mathbb{R}$

$$\cos 2x=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow\begin{cases}2x=x-\frac{\pi}{3}+2k\pi\\ \text{أو}\\ 2x=-\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi\end{cases}/k\in\mathbb{Z}\Rightarrow\begin{cases}x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\\ \text{أو}\\ x=\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}k\pi\end{cases}/k\in\mathbb{Z}$$

إذن:

$$S=\left\{\left(-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right);\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}k\pi\right)/k\in\mathbb{Z}\right\}$$

❽ $\cos x\left(\sqrt{2}\sin x-1\right)=0$ ، $I=[-\pi;2\pi[$

$$\cos x\left(\sqrt{2}\sin x-1\right)=0\Rightarrow\begin{cases}\cos x=0\\ \text{أو}\\ \sqrt{2}\sin x-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos x=0\quad\ldots(*)\\ \text{أو}\\ \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\ldots(**)\end{cases}$$

نحل المعادلة $(*)$:

$$\cos x=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi\quad/k\in\mathbb{Z}$$

لدينا: $-\pi\le\frac{\pi}{2}+k\pi<2\pi$

ومنه: $-1.5\le k<1.5$

ومنه: $k=\{-1;0;1\}$

الخليل للرياضيات

نحل المعادلة (**):

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{أو} \qquad /k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

لدينا: $-\pi \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi < 2\pi$

ومنه: $-0.625 \leq k < 0.875$

ومنه: $k = 0$

ولدينا: $-\pi \leq \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi < 2\pi$

ومنه: $-0.875 \leq k < 0.625$

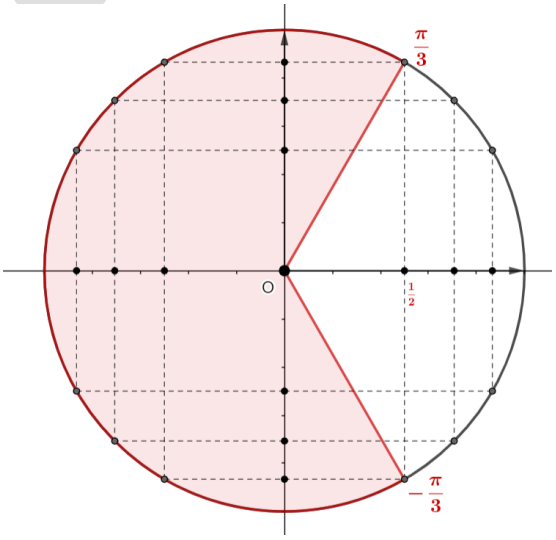
ومنه: $k = 0$

إذن:

$$\boxed{S = \left\{\left(\frac{-\pi}{2}\right); \left(\frac{\pi}{2}\right); \left(\frac{3\pi}{2}\right); \left(\frac{\pi}{4}\right); \left(\frac{3\pi}{4}\right)\right\}}$$

حل التمرين 20

❶ $\cos x \leq \frac{1}{2}$ ، $I =]-\pi; \pi]$



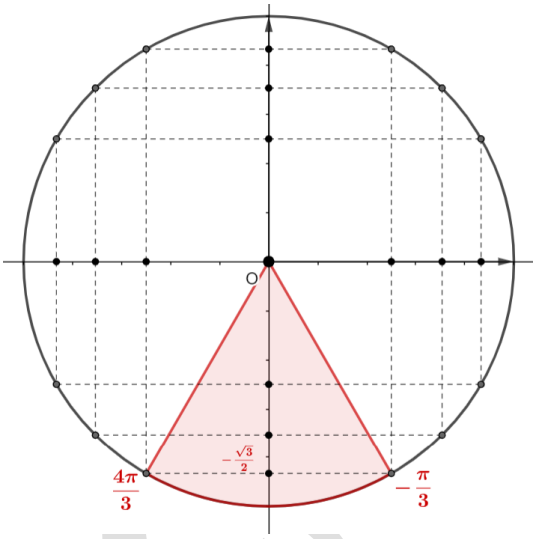
ومنه:

$$\boxed{S_{]-\pi;\pi]} =]-\pi; -\frac{\pi}{3}] \cup [\frac{\pi}{3}; \pi]}$$

❷ $2\sin x + \sqrt{3} \leq 0$ ، $I = [0; 3\pi]$

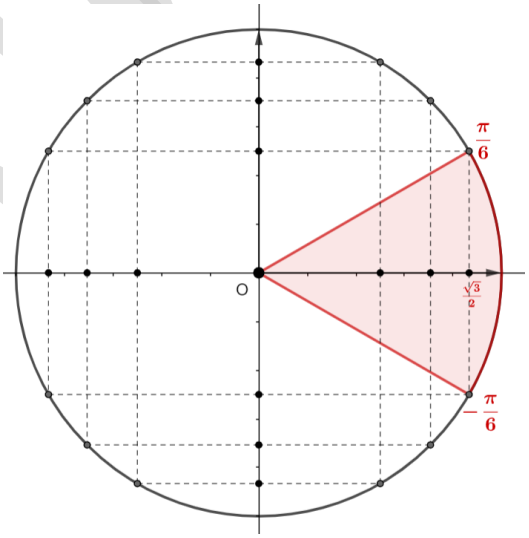
$$2\sin x + \sqrt{3} \leq 0 \Longrightarrow \sin x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

الخليل للرياضيات



$$S_{[0;3\pi]} = \left[\frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{3} + 2\pi\right] = \left[\frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right]$$

❸ $I = \left]-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ ، $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$



$$S_{]-\frac{\pi}{2};2\pi]} = \left]-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{6} + 2\pi; 2\pi\right] = \left]-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{11\pi}{6}; 2\pi\right]$$

❹ $I = [0; 2\pi[$ ، $-2\cos 2x + \sqrt{3} \leq 0$

$$-2\cos 2x + \sqrt{3} \geq 0 \Longrightarrow \cos 2x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

نضع: $2x = y$

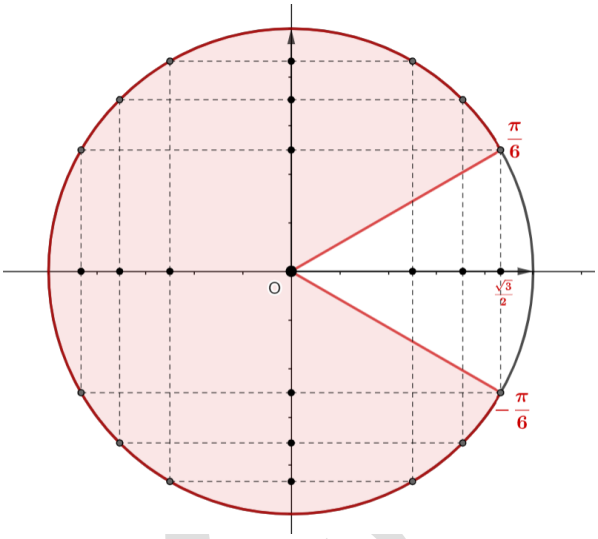
ومنه:

$$\cos 2x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \cos y \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

لدينا: $x \in [0; 2\pi[$ **ومنه** $2x = [0; 4\pi[$

أي: $y = [0; 4\pi[$

الخليل للرياضيات



$$S'_{[0;4\pi[} = \left[\frac{\pi}{6};-\frac{\pi}{6}+2\pi\right] \cup \left[\frac{\pi}{6}+2\pi;-\frac{\pi}{6}+4\pi\right]$$
$$= \left[\frac{\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{13\pi}{6};\frac{23\pi}{6}\right]$$

ومنه:

$$\boxed{S_{[0;2\pi[} = \left[\frac{\pi}{12};\frac{11\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{13\pi}{12};\frac{23\pi}{12}\right]}$$

❺ $2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-1 \leq 0$ ، $I =]0;\pi]$

$$2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-1 \leq 0 \Rightarrow \sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{1}{2}$$

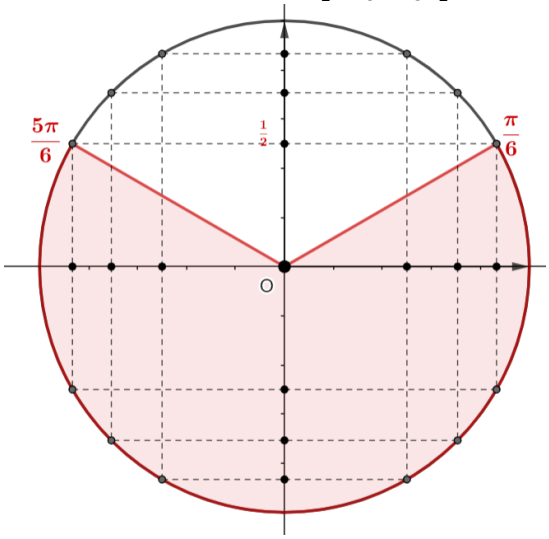
نضع: $y = 2x-\frac{\pi}{6}$

ومنه:

$$\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \sin y \leq \frac{1}{2}$$

لدينا: $x \in]0;\pi]$ **ومنه:** $2x \in]0;2\pi]$ **ومنه:** $\left(2x-\frac{\pi}{6}\right) \in \left]-\frac{\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right]$

ومنه: $y = \left]-\frac{\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right]$



$$S'_{\left]-\frac{\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right]} = \left]-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right]$$

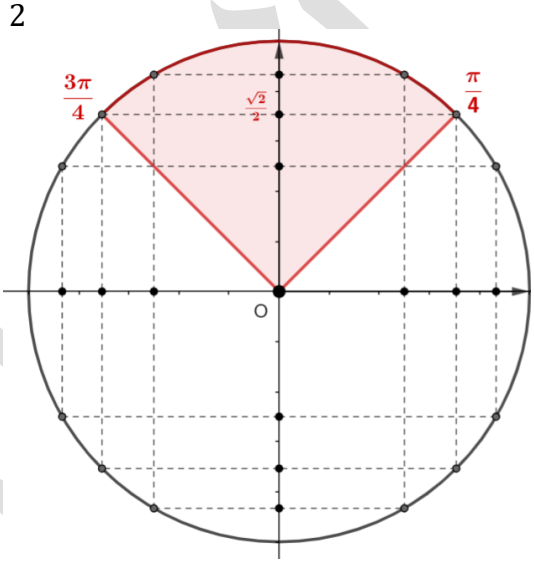
ومنه:

الخليل للرياضيات

$$S_{]0;\pi]} = \left]\frac{-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}}{2};\frac{\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}}{2}\right] \cup \left[\frac{\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{6}}{2};\frac{\frac{11\pi}{6}+\frac{\pi}{6}}{2}\right]$$
$$= \boxed{\left]0;\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2};\pi\right]}$$

❻ $\sqrt{2}\sin x - 1 > 0$ ، $I = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$

$$\sqrt{2}\sin x - 1 > 0 \Rightarrow \sin x > \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\Rightarrow \sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$S_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]} = \left]\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4}+2\pi;\frac{5\pi}{2}\right] = \boxed{\left]\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{9\pi}{4};\frac{5\pi}{2}\right]}$$

حل التمرين 21

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

❶ $\cos x = \sin x$

$$\cos x = \sin x \Rightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \\ \text{أو} \qquad /k \in \mathbb{Z} \\ x = -\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \text{أو} \qquad /k \in \mathbb{Z} \\ 0 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (\text{مرفوض}) \end{cases}$$
$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ /k \in \mathbb{Z}$$

إذن:

$$\boxed{S = \left\{\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)/k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

الخليل للرياضيات

❷ $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$\Rightarrow\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{\pi}{3}-x=2x+\frac{\pi}{3}+2k\pi\\ \text{أو}\\ \frac{\pi}{3}-x=-\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi\end{cases}\quad/k\in\mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x=-\frac{2}{3}k\pi\\ \text{أو}\\ x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\end{cases}\quad/k\in\mathbb{Z}$$

إذن:

$$\boxed{S=\left\{\left(-\frac{2}{3}k\pi\right);\left(-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)\ /k\in\mathbb{Z}\right\}}$$

❸ $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$\Rightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}-3x+2k\pi\\ \text{أو}\\ x-\frac{\pi}{4}=-\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)+2k\pi\end{cases}\quad/k\in\mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{5\pi}{48}+\frac{1}{2}k\pi\\ \text{أو}\\ x=-\frac{\pi}{24}-k\pi\end{cases}\quad/k\in\mathbb{Z}$$

إذن:

$$\boxed{S=\left\{\left(\frac{5\pi}{48}+\frac{1}{2}k\pi\right);\left(-\frac{\pi}{24}-k\pi\right)\ /k\in\mathbb{Z}\right\}}$$

حل التمرين 22

❶ تعيين قيسا للزوايا الموجهة التالية: $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})$ ، $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB})$ ، $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD})$ و $(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA})$:

- $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})$:

$$\boxed{(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})=\frac{\pi}{3}}$$

- $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB})$:

الخليل للرياضيات

لدينا:

$$2(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})+(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC})=\pi \Longrightarrow (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})=\frac{\pi-(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC})}{2}$$
$$\Longrightarrow (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})=\frac{\pi-\frac{\pi}{2}}{2}$$
$$\Longrightarrow (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})=\frac{\pi}{4}$$

ولدينا:

$$(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})=(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})+(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}) \Longrightarrow (\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB})=(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})-(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})$$
$$\Longrightarrow (\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB})=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$$
$$\Longrightarrow \boxed{(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB})=\frac{\pi}{12}}$$

- $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD})$:

$$(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB})=\boxed{(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD})=\frac{\pi}{12}}$$

- $(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA})$:

$$\boxed{(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA})=-\frac{\pi}{2}}$$

❷ حساب مجموع هذه الأقياس:

$$(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD})+(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA})=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{2}=\boxed{0}$$

حل التمرين 23

❶ حساب $P(1)$:

$$P(1)=2(1)^3-7(1)^2-7(1)-2=\boxed{0}$$

نستنتج أنّ 1 **جذر** لـ P

❷ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x)=0$:

$$P(x)=0 \Longrightarrow 2x^3-7x^2+7x-2=0$$
$$\Longrightarrow (x-1)(ax^2+bx+c)=0$$
$$\Longrightarrow ax^3+bx^2+cx-ax^2-bx-c=0$$
$$\Longrightarrow ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c=0$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a=2 \\ b-a=-7 \\ c-b=7 \\ -c=-2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-5 \\ c=2 \end{cases}$$

ومنه:

$$P(x)=0 \Longrightarrow (x-1)(2x^2-5x+2)=0$$
$$\Longrightarrow (x-1)(2x^2-5x+2)$$
$$\Longrightarrow 2(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)=0$$

الخليل للرياضيات

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ \text{أو} \\ x-\frac{1}{2}=0 \\ \text{أو} \\ x-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ \text{أو} \\ x=\frac{1}{2} \\ \text{أو} \\ x=2 \end{cases}$$

إذن:

$$\boxed{S=\left\{\frac{1}{2};1;2\right\}}$$

❸ استنتاج حلول المعادلة: $Q(x)=0$

$$Q(x)=0 \Rightarrow P(\sin x)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x=1 \\ \text{أو} \\ \sin x=\frac{1}{2} \\ \text{أو} \\ \sin x=2 \end{cases}$$

لدينا: $\sin x=2$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$ لأن $2 \notin [-1;1]$

ومنه:

$$Q(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x=1 \ldots (*) \\ \text{أو} \\ \sin x=\frac{1}{2} \ldots (**) \end{cases}$$

نحل المعادلة $(*)$:

$$\sin x=1 \Rightarrow \sin x=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) \ ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \ ; k \in \mathbb{Z}$$

نحل المعادلة $(**)$:

$$\sin x=\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \ ; k \in \mathbb{Z}$$

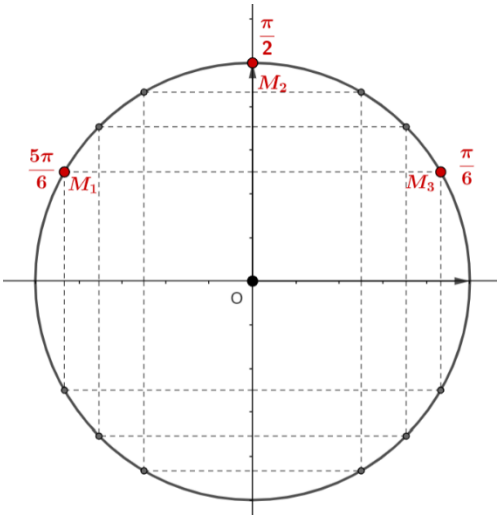
$$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ \text{أو} \quad ; k \in \mathbb{Z} \\ x=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi \end{cases}$$

إذن:

$$\boxed{S=\left\{\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right);\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right);\left(\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right) \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

تمثيل صور الحلول على الدائرة المثلثية:

الخليل للرياضيات

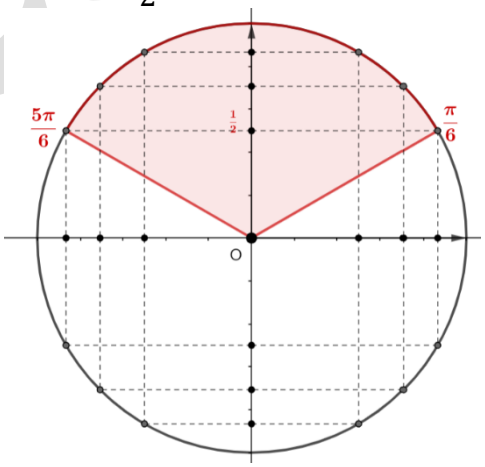


حل التمرين 24

I) حل في المجال $]-\pi;\pi]$ المتراجحات التالية:

❶ $2\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-1\geq 0$

$$2\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-1\geq 0\Longrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\geq\frac{1}{2}\Longrightarrow \sin x\geq\frac{1}{2}$$



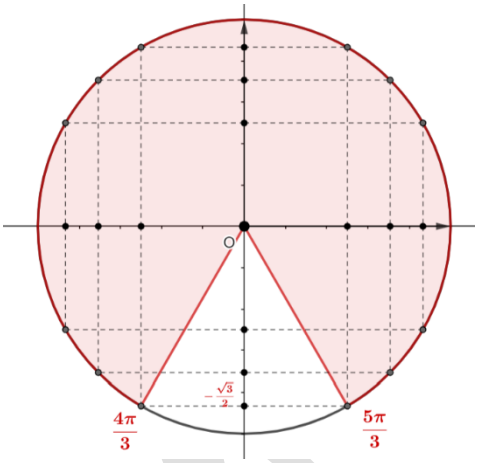
ومنه:

$$\boxed{S=\left]\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]}$$

❷ $-2\sin x-\sqrt{3}\geq 0$

$$-2\sin x-\sqrt{3}\geq 0\Longrightarrow \sin x\geq-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

الخليل للرياضيات



ومنه:

$$\boxed{S = \left]-\pi;\frac{4\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3};\pi\right]}$$

❸ $-\frac{1}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \geq \sqrt{2}$

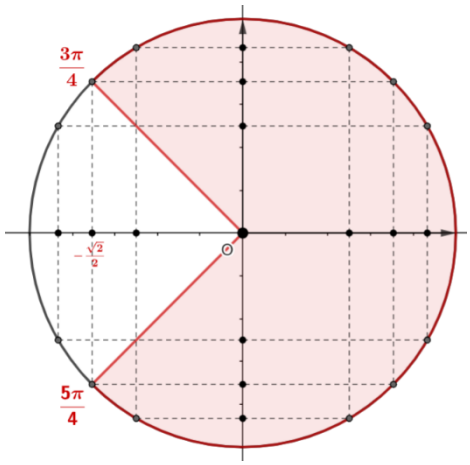
$$-\frac{1}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \geq \sqrt{2} \Rightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

نضع: $y = x - \frac{\pi}{3}$

ومنه:

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos(y) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

لدينا: $x \in]-\pi;\pi]$ **ومنه:** $\underbrace{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}_{y} \in \left]-\pi-\frac{\pi}{3};\pi-\frac{\pi}{3}\right]$ **أي:** $y \in \left]-\frac{4\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]$



$$S'_{\left]-\frac{5\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]} = \left[-\frac{4\pi}{3};\frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4};\frac{2\pi}{3}+2\pi\right] = \left[-\frac{4\pi}{3};\frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4};\frac{8\pi}{3}\right]$$

ومنه:

$$S_{]-\pi;\pi]} = \left[-\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{3};\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{3};\frac{8\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right]$$

$$= \boxed{\left[-\pi;\frac{13\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{19\pi}{12};3\pi\right]}$$

II) **حساب كلا من:**

❶ $\cos x + \sin x$

لدينا:

الخليل للرياضيات

$$(\cos x+\sin x)^2=\underbrace{\cos^2 x+\sin^2 x}_{1}+\underbrace{2\cos x\sin x}_{1}=2$$

ومنه:

$$(\cos x+\sin x)^2=2\Rightarrow\boxed{\begin{cases}\cos x+\sin x=\sqrt{2}\\ \text{أو}\\ \cos x+\sin x=-\sqrt{2}\end{cases}}$$

❷ $\cos x-\sin x$

لدينا:

$$(\cos x-\sin x)^2=\underbrace{\cos^2 x+\sin^2 x}_{1}-\underbrace{2\cos x\sin x}_{1}=0$$

أي:

$$(\cos x+\sin x)^2=0\Rightarrow\boxed{\cos x+\sin x=0}$$

❸ $\cos^2 x-\sin^2 x$

$$\cos^2 x-\sin^2 x=(\cos x+\sin x)\underbrace{(\cos x-\sin x)}_{0}=$$

إذن:

$$\boxed{\cos^2 x-\sin^2 x=0}$$

{هذا من فضل ربي}

♥ زكاة العلم نشره ♥

الأستاذ: قويسم الخليل

الخليل للرياضيات