تصحيح مقترح للبكالوريا التجريبي لمدارس أشبال الأمة

الشعبة : رياضيات — دورة : ماي 2018

التَصْحِيح النموذجي للبكالُوريَا التجْرِيبي دَورة مَايٍ 2018 — الموضوع 01

تصحيح التمرين الأول (05 نقاط) (الأعداد المركبة)	التنقيط

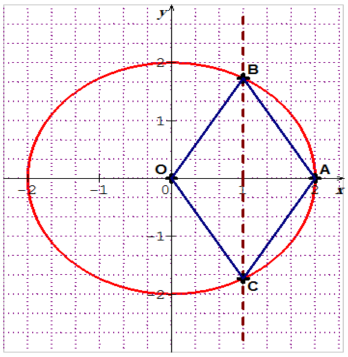
أ)1) إعطاء الكتابة الأسية لـ z_B ثم z_C : --

لدينا : $z_B = 1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، و : $z_C = \overline{z_B} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

2) بيان أن النقط $A;B;C$ تنتمي إلى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها :---------------

نلاحظ أنّ : $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 2$ ، أي : $OA = OB = OC = 2$ ، و منه فإن النقط $A;B;C$ تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها O وَ نصف قطرها 2 .

3) إنشاء النقط $A;B;C$ ، ثم تعيين طبيعة الرباعي $OBAC$: --



أنظر الشكل المقابل .

لدينا : $OB = OC$ ، و $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC}$ ، أي : $OB = OC = 2$ و $z_B = z_A - z_C$

و منه فإنّ الرباعي $OBAC$ هو **معيّن .** (يمكن إستعمال خواص أخرى) .

$z_C = 2+\sqrt{3}-i$ ، إذن C هي صورة B بالدوران r .

ج) تعيين ثم إنشاء مجموعة النقط M حيث $|z| = |z-2|$:--------------

لدينا : $|z| = |z-2|$ معناه : $|z - z_O| = |z - z_A|$ ، أي : $OM = AM$ ،

و منه مجموعة النقط M هي المستقيم المحوري للقطعة $[OA]$.

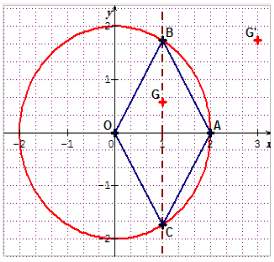
الإنشاء : أنظر الشكل المقابل .

ب) 1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z = \dfrac{-4}{z-2}$ ، ثم استنتاج صورتي B و C بالتحويل T : --------------------

لدينا : $z^2 - 2z + 4 = 0$ ، $\Delta = -12$ ، و منه : $\begin{cases} z_1 = \dfrac{2-2\sqrt{3}i}{2} = 1-\sqrt{3}i \\ z_2 = \dfrac{2+2\sqrt{3}i}{2} = 1+\sqrt{3}i \end{cases}$.

نلاحظ أنّ : $T(B) = B$ وَ $T(C) = C$.

2) تعيين ثم إنشاء النقطة G' صورة النقطة G بالتحويل T : ---------------------------------------



لدينا : $z_G = \dfrac{z_O + z_A + z_B}{3} = \dfrac{3+i\sqrt{3}}{3} = 1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ، و منه : $z_{G'} = 3+i\sqrt{3}$.

الإنشاء : أنظر الشكل المقابل .

3) أ) بيان من أجل كل نقطة M تختلف عن A $AM' = \dfrac{2\times OM}{AM}$:------------

لدينا : $z' = \dfrac{-4}{z-2}$ ، أي : $z'-2 = \dfrac{-4}{z-2} - 2$ ، و منه : $z'-2 = \dfrac{-2z}{z-2}$ ، أي : $|z'-2| = \dfrac{-2|z|}{|z-2|}$ ، و منه :

$|z' - z_A| = \dfrac{-2|z - z_O|}{|z - z_A|}$ ، أي : $AM' = \dfrac{2\times OM}{AM}$ ، و هو المطلوب .

ب) لدينا : $M \in (E)$ معناه أنّ : $OM = AM$ ، فينتج : $AM' = 2$.

و منه مجموعة النقط M' هي دائرة مركزها A وَ نصف قطرها 2 .

التنقيط	(المتتاليات العددية) تصحيح التمرين الثاني (04 نقاط)

أ) 1) كتابة الحد العام u_n بدلالة n ---

لدينا : $u_0=5$ وَ $r=4$ ، ومنه : $u_n=5+4n$.

2) حساب قيمة المجموع S_n : ---

لدينا : $S_n=u_0+u_1+...+u_n$ ، أي : $S_n=\frac{n+1}{2}(10+4n)$ ، و منه : $S_n=(n+1)(5+2n)$.

3): ---

نضع الحد الأول هو u_p ، أي : $2025=\frac{5}{2}(u_p+u_{p+5})$ ، أي : $810=(2u_p+16)$ ، و منه : $u_p=397$.

أي : $u_p=5+4p$ ، و منه : $397=5+4p$ ، أي : $p=98$ ، إذن الحد الأول من هذه الحدود هو : $u_{98}=397$

ب) (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=(2n+1)\times 2^{(4n+5)}$.

1) تعيين تبعا لقيم n بواقي القسمة للعدد 2^n على 7 : ---

$2^{3k}\equiv 1[7]$ ، $2^{3k+1}\equiv 2[7]$ ، $2^{3k+2}\equiv 4[7]$. أي بواقي القسمة الإقليدية 2^n على 7 هي : 1 ، 2 وَ 4 .

2) تعيين قيم n حتى يكون باقي قسمة v_n على 7 هو 3 : --

لدينا : $v_n\equiv 3[7]$ ، أي : $(2n+1)\times 2^{(4n+5)}\equiv 3[7]$ ، أي : $4(2n+1)\times 2^n\equiv 3[7]$. نميز حالتين :

إذا كان n مضاعفا لـ 3 ، أي : $n=3k$ ، أي : $24k+4\equiv 3[7]$ ، أي : $k=7L+3$ ، **ومنه** : $n=21L+9$.

إذا كان n ليس مضاعفا لـ 3 ، أي : $n=3k+1$ ، و منه : $n=21L+1$. **أو** $n=3k+2$ ، أي : $n=21L+2$

3) البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $1\times 3\times 5\times ...\times(2n+1)=\frac{(2n+1)!}{2^n\times n!}$: ----------------------

من أجل $n=0$ لدينا : $1=1$ ، و منه الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض صحة الخاصية من أجل n ، أي : $1\times 3\times 5\times ...\times(2n+1)=\frac{(2n+1)!}{2^n\times n!}$.

نبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ ، أي : $1\times 3\times 5\times ...\times(2n+1)\times(2n+3)=\frac{(2n+3)!}{2^{n+1}\times(n+1)!}$.

لدينا : $1\times 3\times 5\times ...\times(2n+1)=\frac{(2n+1)!}{2^n\times n!}$ ، أي : $1\times 3\times 5\times ...\times(2n+1)\times(2n+3)=\frac{(2n+1)!}{2^n\times n!}\times(2n+3)$

و منه : $1\times 3\times 5\times ...\times(2n+1)\times(2n+3)=\frac{(2n+3)!}{2^{n+1}\times(n+1)!}$ ، أي المساواة صحيحة .

إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $1\times 3\times 5\times ...\times(2n+1)=\frac{(2n+1)!}{2^n\times n!}$.

4) إستنتاج قيمة الجداء P_n بدلالة n : --

لدينا : $P_n=v_0\times v_1\times ...\times v_n$ ، أي : $P_n=(1\times 3\times 5\times ...\times(2n+1))\times(2^5\times 2^9\times ...\times 2^{4n+5})$ ،

أي : $P_n=\frac{(2n+1)!}{2^n\times n!}\times 2^{(5+3+...+4n+5)}$ ، و منه : $P_n=\frac{(2n+1)!}{2^n\times n!}\times 2^{(n+1)(5+2n)}$.

تصحيح التمرين الثالث (04 نقاط) (الإحتمالات)	التنقيط

1) أ) إحتمال أن يصيب المنطقة (C) في كل رمية : ---

بما أنّ الرميات مستقلة ، فإنّ : $p_1=\left(p(C)\right)^3=\left(\frac{7}{12}\right)^3=\frac{343}{1728}$.

ب) إحتمال أن يصيب المناطق $(C-B-A)$ بهذا الترتيب : --

$p_2=p(C)\times p(B)\times p(C)=\left(\frac{7}{12}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{12}\right)=\frac{7}{432}$.

ج) إحتمال أن يصيب المناطق $(C-B-A)$: --

$p_3=3!\times\left[p(C)\times p(B)\times p(C)\right]=6\times\left(\frac{7}{12}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{12}\right)=\frac{42}{432}=\frac{7}{72}$.

2) أ) إحتمال أن تصيب هذه الرمية المنطقة (C) : ---

لدينا إحتمال إختيار عمر هو ضعف إحتمال إختيار حمزة أي : $p(O)=\frac{2}{3}$ و $p(H)=\frac{1}{3}$.

إذن : $p(C)=\left(\frac{2}{3}\times\frac{7}{12}\right)+\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{14}{36}+\frac{1}{9}=\frac{9}{18}=\frac{1}{2}$.

ب) حساب الإحتمال الشرطي $p_C(O)$: --

$p_C(O)=\frac{p(C\cap O)}{p(C)}=\frac{\frac{7}{18}}{\frac{1}{2}}=\frac{7}{18}\times 2=\frac{7}{9}$.

تصحيح التمرين الرابع (07نقاط) (الدالة اللوغاريتمية)	التنقيط

الجزء الأول:

1) حساب نهايات الدالة f ، ثم دراسة إتجاه تغيرها و تشكيل جدول تغيراتها : --------------------------

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\overset{<}{\to}-\frac{1}{2}}f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\overset{>}{\to}-\frac{1}{2}}f(x)=+\infty$.

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+2)\left[1-2\frac{\ln(2x+1)}{x+2}\right]=\lim_{x\to+\infty}(x+2)\left[1-\frac{2\ln(2x+1)}{x+2}\times\frac{\ln(2x+1)}{(2x+1)}\right]=+\infty$.

لدينا من أجل كل $x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$: $f'(x)=\frac{2x-3}{2x+1}$.

جدول التغيرات : أنظر الشكل المقابل .

x	$-\infty$	$\frac{-1}{2}$		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	||	−	0	+
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$ || $+\infty$	↘	$f\left(\frac{3}{2}\right)$	↗ $+\infty$

2) إثبات أنّ (C) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه -3**:** ------

نضع: $f'(x)=-3$ ، أي : $2x-3=-6x-3$ و منه :

$x=0$ ، إذن: (C) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه -3 عند

النقطة ذات الفاصلة 0 ، أي: $(T):y=f'(0)(x-0)+f(0)$ ، و منه : $(T):y=-3x+2$.

3) الوضع النسبي للمنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (D): --

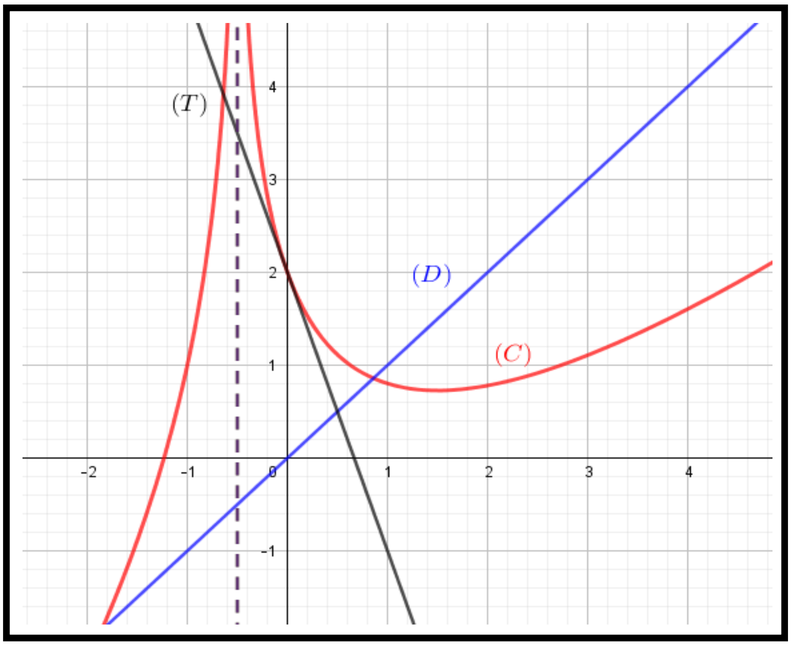
$f(x)-y=2\left[1-\ln|2x+1|\right]$ ، أي : $\ln|2x+1|=1$ ، و سنلخص المناقشة في الجدول التالي :

x	$-\infty$		$\frac{-e-1}{2}$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{e-1}{2}$		$+\infty$
$f(x)-y$		$-$		$+$	||	$+$		$-$	
الوضعية		(C) يقع تحت (D)	(C) يقطع (D)	(C) يقع فوق (D)	||	(C) يقع فوق (D)	(C) يقطع (D)	(C) يقع تحت (D)	

4) إثبات أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α، حيث $-1{,}3<\alpha<1{,}2$: ----------------------------

f مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[-1{,}3;-1{,}2]$ و $f(-1{,}3)\times f(-1{,}2)<0$ ، و منه و حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α ، حيث $\alpha\in[-1{,}3;-1{,}2]$.

5) رسم (T) و (D) ، ثم إنشاء (C): --



6) أ) تعيين دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln(2x+1)$ على $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ و التي تنعدم من أجل $x=0$: ----------

$\int\ln(2x+1)dx=\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln(2x+1)-x$.

ب) حساب مساحة الحيز:---

$S(\lambda)=2\ln4-\frac{3}{2}-\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\ln(2\lambda+1)+\lambda$.

حساب : $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}-\frac{1}{2}}S(\lambda)$: $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}-\frac{1}{2}}2\ln4-\frac{3}{2}-\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\ln(2\lambda+1)+\lambda=-2+4\ln2$.

7) المناقشة البيانية حسب قيم m لعدد و إشارة حلول المعادلة: $f(x)=-3x+m$: -------------------

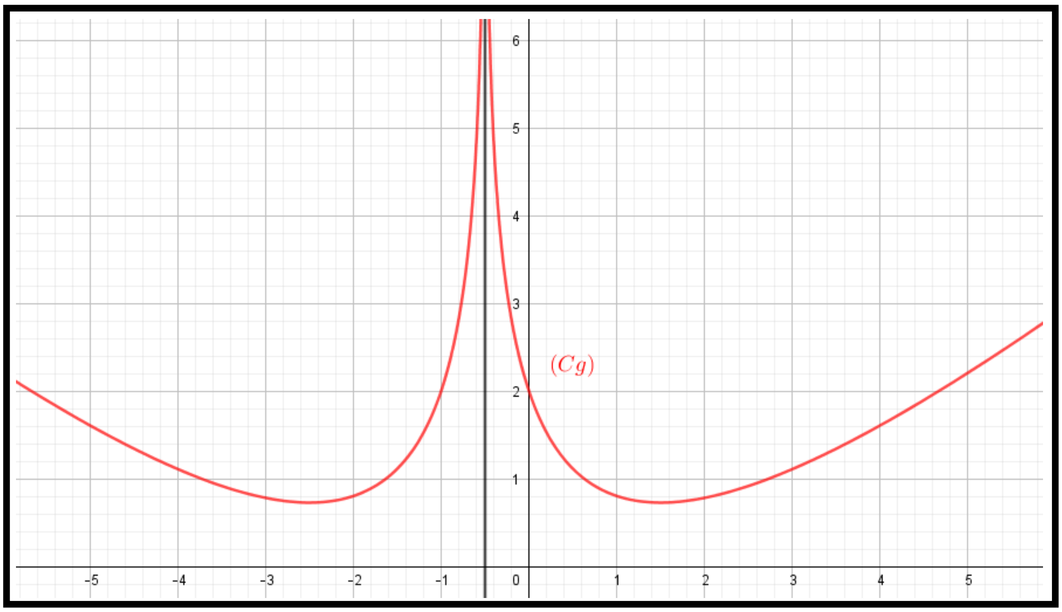
- لما : $m=2$ ، أي : $f(x)=-3x+2$ ، المعادلة تقبل حلين أحدهما معدوم و الآخر سالب .
- لما : $m<2$ ، المعادلة تقبل حل وحيد سالب .
- لما : $m>2$ ، للمعادلة حلان مختلفان في الإشارة .

8) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ **كما يلي :** $g(x)=\frac{3}{2}+\left|x+\frac{1}{2}\right|-2\ln|2x+1|$: -------------

- لدينا : D_g مجال متناظر بالنسبة إلى 0 ، وَ لدينا : $g(-1-x)=g(x)$ ، و منه فإنّ : $x=-\frac{1}{2}$ هو محور تناظر للمنحني (C_g) .

- المنحني (C_g) ينطبق على (C) في المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ ، أماّ الجزء الآخر يرسم بالتناظر بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $x=-\frac{1}{2}$ في المجال $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$.

إنشاء المنحني (C_g) : --



كتابة الاستاذ : بلقاسم عبدالرزاق

التَصْحِيح النموذجي للبكالُوريَا التجْريبي دَورة مَايٍْ 2018	الموضوع 02
تصحيح التمرين الأول (05 نقاط) (الأعداد المركبة)	التنقيط

I) 1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $L(z)=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$: ----------------------------------

$\frac{z-i}{z-1}=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$ ، أي : $z=\frac{-4+8i}{1+3i}$ ، أي : $z=\frac{20+20i}{10}$ ، و منه : $z_0=2+2i$.

2) كتابة z_0 على الشكل الأسي ، ثم تعيين قيم العدد الطبيعي n :--

$z_0=2+2i=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

لدينا : $z_0^{3n}=2^{\frac{9n}{2}}$ ، أي : $\left((2\sqrt{2})^{3n}.e^{i\frac{3\pi n}{4}}\right)=2^{\frac{9n}{2}}$ ، أي : $2^{3n+\frac{3n}{2}}.e^{i\frac{3\pi n}{4}}=2^{\frac{9n}{2}}$ ، أي : $2^{\frac{9n}{2}}.e^{i\frac{3\pi n}{4}}=2^{\frac{9n}{2}}$ ،

ومنه : $e^{i\frac{3\pi n}{4}}=1$ ، أي : $\frac{\pi n}{4}\equiv 0[2\pi]$ ، أي : $\frac{\pi n}{4}=2k\pi$ ، أي : $\frac{n}{4}=2k$ ، و منه : $n=8k$.

3) تعيين العدد المركب z_1 ، ثم بيان أنّ : $z_1^{2015}=2^{1007}(1-i)$:---

لدينا : $|L(z_1)|=1$ وَ $\arg[L(z_1)]=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ ، معناه أنّ : $L(z_1)=\frac{z_1-i}{z_1-1}=-i$ ، (يمكن إستعمال خواص الزوايا الموجهة) . و منه بعد الحساب نجد : $z_1=\frac{2+2i}{2}$ ، إذن : $z_1=1+i$.

لنبيّن أنّ : $z_1^{2015}=2^{1007}(1-i)$ ، لدينا : $z_1=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$ ، أي :

$z_1^{2015}=\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{2015}=\left(\sqrt{2}\right)^{2015}e^{i\frac{2015\pi}{4}}=2^{1007}\times\sqrt{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{4}\right)}=2^{1007}\times\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$ ،

و منه : $z_1^{2015}=2^{1007}\times\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2^{1007}(1-i)$.

4) برهان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $z_0^{4n}+z_1^{4n}$ حقيقي --

لدينا: $z_0^{4n}+z_1^{4n}=\left(2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{4n}+\left(2e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{4n}=e^{i\pi n}\left[\left(2\sqrt{2}\right)^{4n}+\left(\sqrt{2}\right)^{4n}\right]=\cos(\pi n)\left[\left(2\sqrt{2}\right)^{4n}+\left(\sqrt{2}\right)^{4n}\right]$

و بالتالي فإنّ : $z_0^{4n}+z_1^{4n}$ حقيقي .

II) 1) أ) كتابة العدد $\frac{z_D-z_C}{z_A-z_C}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي : ---------------------------

لدينا : $\frac{z_D-z_C}{z_A-z_C}=3-3i$ وَ $\frac{z_D-z_C}{z_A-z_C}=3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

ب) لدينا : $\frac{CD}{CA}=3\sqrt{2}$ ، وَ $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CD})=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ، و منه يوجد S **التشابه المباشر** الذي مركزه C ، و نسبته $3\sqrt{2}$ ، و زاويته $-\frac{\pi}{4}$.

2) أ) التحقق أنّ النقطة C تنتمي إلى المجموعة (S) : ---

لدينا : $L(z)=\frac{z-i}{z-1}=-i$ ، أي : $L(z_C)=\frac{(1+i)-i}{(1+i)-1}=\frac{1}{i}=-i$ ، و منه : $C\in(S)$.

ب) لدينا : $\arg[L(z)]$ ، معناه : $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

و منه مجموعة النقط M هي **نصف دائرة** قطرها $[AB]$ و تشمل النقطة C باستثناء A و B .

التنقيط	(الهندسة الفضائية)	تصحيح التمرين الثاني (04 نقاط)

1) أ) تعيين المعادلة الديكارتية لسطح الكرة (S) : ---

لدينا : (S) مركزها B و نصف قطرها 3 ، و منه : $(S):(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=3^2$.

ب) تعيين تقاطع المستوي (P) و سطح الكرة (S) : --

نحسب : $d(B;(P))=\frac{|2+2-13|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{9}{3}=3$ ، أي : $d(B;(P))=3=r$ ، و منه (P) **يمس** (S) .

2) أ) إعطاء تمثيل وسيطي للمستقيم (D) : --

لدينا : (D) يشمل النقطة A و عمودي على (P) ، أي : $\overrightarrow{n_{(P)}}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (D) ، أي :

$(D):\begin{cases}x=2+2\lambda\\y=2+\lambda\\z=-1+2\lambda\end{cases};\ \lambda\in\mathbb{R}$ هو التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) .

ب) دراسة الوضع النسبي للمستقيم (D) و سطح الكرة (S) : ---------------------------------------

بعد التعويض و التبسيط نجد : $9\lambda^2+4\lambda=0$ ، أي : $\lambda=0$ ، أو $\lambda=-\frac{4}{9}$. و منه (D) يقطع (S) في **نقطتين**

3) أ) بيان أن (S_t) سطح كرة مركزها H_t و نصف قطرها r : --------------------------------------

لدينا : $(S):x^2+y^2+z^2-2tx-2tz+2t^2-9=0$ ، أي : $(S):(x-t)^2+y^2+(z-t)^2=3^2$.

و منه : (S) هي سطح كرة مركزها $H_t(t;0;t)$ ، و نصف قطرها 3 ، حيث : $\begin{cases}x=t\\y=0\ ;\ t\in\mathbb{R}\\z=t\end{cases}$.

ب) مجموعة النقط M هي **المستقيم** الذي يشمل المبدأ و شعاع توجيهه $\vec{v}(1;0;1)$.

ج) دراسة حسب قيم t الوضع النسبي لـ (S_t) و (P) : ---

لدينا : $d(H_t;(P))=\frac{|4t-13|}{3}$ ، الآن نناقش حسب قيم t :

- لما : $1<t<\frac{11}{2}$ ، فإنّ : (S_t) و (P) يتقاطعان وفق دائرة .
- لما : $t=\frac{11}{2}$ أو $t=1$ ، فإنّ : (S_t) يمسّ (P) .
- لما : $t\in]-\infty;1[\cup]\frac{11}{2};+\infty[$ ، فإنّ : $(S_t)\cap(P)=\varnothing$.

التنقيط	(الحساب + الهندسة الفضائية)	تصحيح التمرين الثالث (04 نقاط)

1) أ) التحقق أنّ $b=2a+1$: --

لدينا : $\begin{cases}2a=4n+2\\b=4n+3\end{cases}$ ، بالطرح نجد : $b-2a=1$ ، و منه : $b=2a+1$ ، و هو المطلوب .

ب) إستنتاج أن a و b أوليان فيما بينهما ، وَ $PGCD(a;b;c)=1$: ---------------------------------

- لدينا : $b=2a+1$ ، أي : $b-2a=1$ ، و منه حسب مبرهنة **بيزو** فإنّ a و b أوّليان فيما بينهما .
- و منه : $PGCD(a;b)=1$ ، و عليه : $PGCD(a;b;c)=PGCD(1;c)=1$. و هو المطلوب .

2) تعيين تبعا لقيم العدد الطبيعي n القاسم المشترك الأكبر للعددين b و c : ---------------------------

لدينا : d/c وَ d/b ، إذن : $d/b-2c$ ، أي : $d/3$ ، و منه : $d/1$ ، أو $d/3$.

أي : لما n مضاعف لـ 3 فإنّ : $PGCD(b;c)=3$ ، و لما n ليس مضاعف لـ 3 فإنّ : $PGCD(b;c)=1$.

لدينا : $\begin{cases} c \equiv 0[3] \\ b \equiv 0[3] \end{cases}$ و ، أي : $\begin{cases} 2n+3 \equiv 0[3] \\ 4n+3 \equiv 0[3] \end{cases}$ و ، أي : $\begin{cases} 2n \equiv 0[3] \\ 4n \equiv 0[3] \end{cases}$ ، و منه : $n \equiv 0[3]$.

- إذا كان : $n = 3k$ ، فإنّ : $d = 3$.
- إذا كان : $n = 3k+1$ أو $n = 3k+2$ ، فإنّ : $d = 1$.

3) تعيين قيم n : --

لدينا : $PGCD(b;c) = 3$ و $PPCM(b;c) = 1305$ ، أي : $bc = 3915$ ، و منه : $(4n+3)(2n+3) = 3915$

أي : $8n^2 + 18n - 3906 = 0$ ، إذن : $n = 21$.

4) كتابة العدد b^2 **في نظام العد الذي أساسه** a : --

لدينا : $b^2 = 16n^2 + 24n + 9$ ، أي : $b^2 = 4(2n+1)^2 + 4(2n+1)^1 + (2n+1)^0$ ، و منه : $b^2 = \overline{444}^a$.

5) أ) بيان أنّ النقطة D **تنتمي إلى** (Δ) **يطلب تعيين تمثيله الوسيطي :** --------------------------------

لدينا: $D(a;b;c)$ ، أي : $D(2n+1;4n+3;2n+3)$ ، ومنه D تنتمي للمستقيم : $(\Delta): \begin{cases} x = 2n+1 \\ y = 4n+3 \ ; \ n \in \mathbb{R} \\ z = 2n+3 \end{cases}$.

ب) كتابة تمثيل وسيطي للمستوي (P) : --

-

لدينا : (P) يشمل O و $A(1;3;3)$ ، $B(3;7;5)$. $M(x;y;z)$ ، $M \in (P)$ معناه : $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$

و منه : $(P): \begin{cases} x = \alpha + 3\beta \\ y = 3\alpha + 7\beta \ ; \ \alpha;\beta \in \mathbb{R} \\ z = 3\alpha + 5\beta \end{cases}$.

إستنتاج معادلة ديكارتية لـ (P) : $(P): \begin{cases} 3x - y = 2\beta \\ y - z = 2\beta \end{cases}$ ، بالطرح نجد : $(P): 3x - 2y + z = 0$.

تصحيح التمرين الرابع (07نقاط) (الدالة اللوغاريتمية) — التنقيط

I(1) برهان أنّ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ، **ثم حساب** $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ **و تفسير النتائج هندسيا :** ------------------------

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2 = 0$ ، و منه : $y = 0$ مستقيم مقارب للمنحنى (C) .

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{(\ln x)^2}{x} = +\infty$ ، و منه : $x = 0$ مستقيم مقارب للمنحنى (C) .

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة f **و تشكيل جدول تغيّراتها :** --

الدالة f قابلة للإشتقاق على : $]0;+\infty[$ و دالتها المشتقة هي : $f'(x) = \frac{\ln x(2 - \ln x)}{x^2}$.

و منه الإشارة من إشارة : $\ln x(2 - \ln x)$ ، و عليه سنلخص إتجاه التغيّر في الجدول التالي :

جدول التغيرات :

x	0		1		e^2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0

3) بيان أنه من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $f''(x)=\frac{2\left[(\ln x)^2-3\ln x+1\right]}{x^3}$**:** ------------------------------

$f''(x)=\frac{\left(\frac{2-2\ln x}{x}\right)x^2-2x\left[\ln x\left(2-\ln x\right)\right]}{x^4}=\frac{x\left(2-2\ln x\right)-2x\left(-2\ln x-(\ln x)^2\right)}{x^4}$ ، و منه :

$f''(x)=\frac{2\left[(\ln x)^2-3\ln x+1\right]}{x^3}$ ، و هو المطلوب .

نلاحظ أنّ المشتقة الثانية تنعدم و تغيّر إشارتها ، و عليه فإنّ المنحني (C) يقبل نقطتي إنعطاف هما :

$A\left(e^{\frac{3-\sqrt5}{2}};\frac{7-3\sqrt5}{2}e^{\frac{-3+\sqrt5}{2}}\right)$ ، $B\left(e^{\frac{3+\sqrt5}{2}};\frac{7+3\sqrt5}{2}e^{\frac{-3-\sqrt5}{2}}\right)$.

4) أ) بيان أنّ (T_α) **يمر بالمبدأ إذا وافقط إذا كان** $f(\alpha)-\alpha f'(\alpha)=0$ **:** ------------------------------

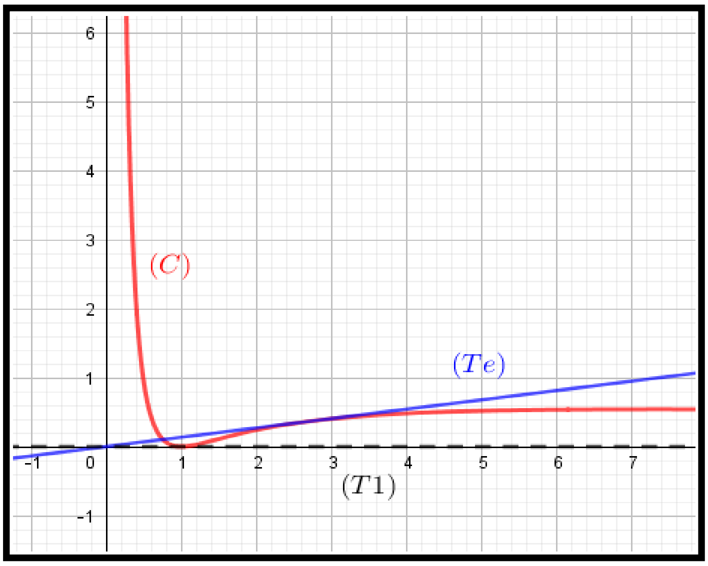
لدينا : $(T_\alpha):y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$ ، (T_α) يمر بالمبدأ معناه أنّ : $f(\alpha)-\alpha f'(\alpha)=0$.

ب) إستنتاج وجود مماسين (T_a) **و** (T_b) **:** --

لدينا : $f(\alpha)-\alpha f'(\alpha)=0$ ، معناه : $\alpha=1$ **أو** $\alpha=e$ **.** و منه يوجد مماسين يمران بالمبدأ O .

معادلتهما : $(T_1):y=0$ ، **وَ** $(T_e):y=\frac{1}{e^2}x$.

5) رسم المماسين (T_1) **و** (T_e) **، ثم إنشاء المنحني** (C)**:** ---



3) المناقشة البيانية حسب قيم m **حلول المعادلة** $f(x)=mx$**:** --------------------------------------

- لما $m=0$ ، المعادلة تقبل حلا مضاعفا هو : $x=1$.
- لما $0<m<\frac{1}{e^2}$، المعادلة تقبل ثلاث حلول .
- لما $m=\frac{1}{e^2}$ ، المعادلة تقبل ثلاث حلول أحدهم مضاعف .
- لما $m>\frac{1}{e^2}$ ، المعادلة تقبل حل وحيد .

I) 1) باستعمال المكاملة بالتجزئة نبين أن: $I_1 = 1 - \frac{3}{e^2}$: --

لدينا : $\mathrm{I}_n = \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^n}{x^2}$ ، أي : $\mathrm{I}_1 = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x^2}$ ، أي : $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x^2} \to u(x) = -\frac{1}{x} \\ v(x) = \ln x \to v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$ ، و منه :

$\mathrm{I}_1 = -\frac{\ln x}{x} - \int_1^{e^2} \frac{1}{x^2}\,dx$ ، أي : $\mathrm{I}_1 = \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^{e^2} = 1 - \frac{3}{e^2}$.

2) باستعمال المكاملة بالتجزئة ، نبين أن : $\mathrm{I}_{n+1} = \frac{-2^{n+1}}{e^2} + (n+1) I_n$ حيث $n \geq 1$: ---------------------

لدينا : $\mathrm{I}_{n+1} = \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^{n+1}}{x^2}\,dx$ ، أي : $\begin{cases} v'(x) = \frac{1}{x^2} \to v(x) = -\frac{1}{x} \\ u(x) = (\ln x)^{n+1} \to u'(x) = (n+1)(\ln x)^n \times \frac{1}{x} \end{cases}$.

لدينا : $n \geq 1$ ، (بعد الحساب) نجد : $\mathrm{I}_{n+1} = -\frac{2^{n+1}}{e^2} + (n+1) I_n$. و هو المطلوب

3) إستنتاج القيمة المضبوطة لـ I_2 ، و تفسير النتيجة هندسيا : --

$\mathrm{I}_2 = \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^2}{x^2}\,dx = -\frac{2^2}{e^2} + 2I_1 = -\frac{10 + 2e^2}{e^2}(u.a)$.

و منه : I_2 هي مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحني (C) ، و المستقيمين اللذين معادلتهما : $x = 1$ ، $x = e^2$

و المستقيم ذو المعادلة $x = 0$.

كتابة الأستاذ : بلقاسم عبدالرزاق