

على المترشح ان يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول (5 ن)

المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

نعتبر النقط A, B, C ذات اللواحق $z_A = 2, z_B = 1 + i\sqrt{3}, z_C = \overline{z_B}$ على الترتيب

(1) أعط الكتابة الأسية للعدد z_B ثم للعدد z_C

(2) بين أن النقط A, B, C تنتمي إلى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها

(3) أنشئ النقط A, B, C ثم عين طبيعة الرباعي $OBAC$.

(4) عين ثم أنشئ المجموعة (E) للنقط M من المستوي ذات اللاحق z حيث $|z| = |z - 2|$

(ب) التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ذات اللاحق z وتختلف عن النقطة A بالنقطة M'

ذات اللاحق z' حيث $z' = \frac{-4}{z-2}$

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة $\frac{-4}{z-2} = z$ ثم أستنتج صورتي B و C بالتحويل T

(2) G مركز ثقل المثلث OAB ، عين ثم أنشئ النقطة G' صورة النقطة G بالتحويل T

(3) (أ) من أجل كل نقطة M تختلف عن A بين أن : $AM' = \frac{2 \times OM}{AM}$

(ب) نفرض أن النقطة M تنتمي إلى المجموعة (E) ما هي مجموعة النقط M' ؟

التمرين الثاني (4 ن)

أ - (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = 5$ و أساسها 4.

(1) أكتب الحد العام u_n بدلالة n

(2) أحسب قيمة المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ بدلالة n .

(3) إذا كان مجموع خمسة حدود متعاقبة من (u_n) هو 2025 فما هو الحد الأول من هذه الحدود

ب - (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = (2n+1) \times 2^{(n+1)}$

(1) عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7

(2) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون باقي قسمة v_n على 7 هو 3

(3) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{(2n+1)!}{2^n \times n!} = 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)$

(4) استنتج قيمة الجداء $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$ بدلالة n .

التمرين الثالث (4 ن)

عمر و حمزة راميا قوس، كل منهما يسدد سهما نحو هدف مقسم الى ثلاث مناطق $(C-B-A)$ نفرض أن كل رامي يصيب في كل رمية منطقة واحدة و واحدة فقط.

إذا علمت أن : - احتمالات إصابة الرامي عمر المناطق $(C-B-A)$ على الترتيب هو $(\frac{7}{12}, \frac{1}{3}, \frac{1}{12})$

- احتمالات إصابة الرامي حمزة المناطق $(C-B-A)$ متساوية.

(1) الرامي عمر يسدد سهمه ثلاث مرات متتابة :

أ - ما احتمال أن يصيب في كل رمية المنطقة (C) ؟

ب - ما احتمال أن يصيب المناطق $(C-B-A)$ بهذا الترتيب ؟

ج - ما احتمال أن يصيب المناطق $(C-B-A)$ ؟

(2) نختار أحد الراميين مع العلم أن احتمال اختيار الرامي عمر ضعف احتمال اختيار الرامي حمزة.

أ - في حالة تسديد رمية واحدة. ما احتمال أن تصيب هذه الرمية المنطقة (C) ؟

ب - علما أن رمية واحدة قد سُددت و أصابت المنطقة (C) ، ما احتمال أن تكون هذه الرمية للرامي عمر ؟

التمرين الرابع (7 ن)

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ بـ : $f(x) = (x+2) - 2 \ln |2x+1|$

و (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x)$ ثم أدرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

(2) أثبت أن (C) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه 3- ثم أكتب معادلته.

(3) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$.

(4) أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1.2 < \alpha < -1.3$

(5) أرسم (T) و (D) ثم أنشئ المنحنى (C) . (علما أن (C) لا يقبل نقطة إنعطاف)

(6) ا) باستعمال المكاملة بالتجزئة عين دالة أصلية للدالة $h: x \mapsto \ln(2x+1)$ على المجال $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ والتي

تتعدم من أجل $x=0$

ب) λ عدد حقيقي حيث $-\frac{1}{2} < \lambda \leq \frac{3}{2}$. احسب $S(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) والمستقيمات

التي معادلاتها $x = \frac{3}{2}$ ، $x = \lambda$ و $y = 0$. ثم احسب $\lim_{\lambda \rightarrow \frac{1}{2}^+} S(\lambda)$

(7) ناقش بيانا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = -3x + m$.

(8) g دالة عددية معرفة على $R - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ بـ: $g(x) = \frac{3}{2} + \left|x + \frac{1}{2}\right| - 2 \ln|2x+1|$

- برهن أن المستقيم (K) الذي معادلته $x = -\frac{1}{2}$ محور تناظر للمنحنى (C_g) الممثل للدالة g

- اشرح كيفية إنشاء المنحنى (C_g) انطلاقا من المنحنى (C) ثم أنشئه.

الموضوع الثاني

التمرين الأول (05 ن)

نعتبر العدد المركب $L(z) = \frac{z-i}{z-1}$ حيث $z \neq 1$

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة $L(z) = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$ وليكن z_0 حل هذه المعادلة.

(2) أكتب z_0 على الشكل الأسّي ثم عين قيم العدد الطبيعي $n : z_0^{2n} = 2^{\frac{9n}{2}}$.

(3) عين العدد المركب z_1 بحيث $|L(z_1)| = 1$ و $\arg[L(z_1)] = \frac{3\pi}{2} [2\pi]$ ثم بين أن $z_1^{2015} = 2^{1007} (1-i)$.

(4) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $z_0^{2n} + z_1^{2n}$ حقيقي.

(II) المستوى المركب منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

نعتبر النقط A, B, C, D و M ذات اللواحق $1, i, i, 1, -2-2i$ و z على الترتيب

(1) * أكتب العدد $\frac{z_D - z_C}{z_A - z_C}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسّي.

* استنتج أنه يوجد تحويل نقطي يحول النقطة A إلى النقطة D يطلب تحديد عناصره المميزة.

(2) لتكن (S) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث $\arg[L(z)] = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

* تحقق من أن النقطة C تنتمي إلى المجموعة (S) .

* أعط تفسيرا هندسيا لـ $\arg[L(z)]$ ثم عين المجموعة (S) .

التمرين الثاني (04 ن)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقطتان $A(2, 2, -1)$ و $B(1, 0, 1)$

و المستوي (P) الذي معادلته: $2x + y + 2z - 13 = 0$.

(1) أ) عين المعادلة الديكارتية لسطح الكرة (S) التي مركزها B ونصف قطرها 3.

(ب) حدد تقاطع المستوي (P) و سطح الكرة (S).

(2) (D) المستقيم المار من النقطة A و العمودي على المستوي (P)

(أ) أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D).

(ب) أدرس الوضع النسبي للمستقيم (D) و سطح الكرة (S).

(3) (S_t) مجموعة النقط (x, y, z) من الفضاء التي تحقق المعادلة الديكارتية

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2tx - 2tz + 2t^2 - 9 = 0 \text{ حيث } t \in \mathbb{R}$$

(أ) بين أن (S_t) معادلة سطح كرة مركزها H_t ونصف قطرها r.

(ب) عين مجموعة النقط H_t عندما t يسمح R.

(ج) أدرس حسب قيم t الوضع النسبي لـ (P) و (S_t).

التمرين الثالث (04 ن)

نعتبر الأعداد الطبيعية: $a = 2n + 1$, $b = 4n + 3$, $c = 2n + 3$ حيث n عدد طبيعي أكبر تماما من 2

(1) تحقق من أن: $b = 2a + 1$ ثم أستنتج أن a و b أوليان فيما بينهما و $PGCD(a, b, c) = 1$.

(2) عين تبعا لقيم العدد n القاسم المشترك الأكبر للعددين b و c.

(3) عين قيمة n بحيث يكون $PGCD(b, c) = 3$ و $PPCM(b, c) = 1305$.

(4) أكتب العدد b^2 في نظام العد الذي أساسه a.

(5) نفرض أن (a, b, c) هي إحداثيات نقطة D في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

(أ) بين أن النقطة D تنتمي إلى مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيلا وسيطيا له.

(ب) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي (P) الذي يشمل المبدأ O و يحوي المستقيم (Δ)، ثم أستنتج معادلة المستوي (P).

التمرين الرابع (07 ن)

f دالة عددية معرفة على المجال $]0, +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$ و (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى

معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) برهن أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و فسر النتائج بيانيا.

(2) أدرس إتجاه تغير الدالة f على المجال $]0, +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) بين أنه من أجل كل $x \in]0, +\infty[$: $f''(x) = \frac{2[(\ln x)^2 - 3\ln x + 1]}{x^3}$ ثم أستنتج أن المنحنى (C) يقبل نقطتي

انعطاف يطلب تعيينهما.

(4) $\alpha \in]0, +\infty[$ ، نقطة من (C) فاصلتها α و (T_α) المماس للمنحنى (C) في A .

(1°) بين أن (T_α) يمر بالمبدأ O إذا وفقط إذا كان $f(\alpha) - \alpha f'(\alpha) = 0$.

(2°) أستنتج وجود مماسين (T_a) و (T_b) يمران بالمبدأ O ثم عيّن معادلة كل من (T_b) و (T_a) .

(5) أرسم المماسين (T_a) ، (T_b) ثم إنشئ المنحنى (C) .

(6) ناقش بيانها حسب قيم الوسيط الحقيقي m حلول المعادلة $f(x) = mx$.

(II) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع : $I_n = \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$

(1) باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن : $I_1 = 1 - \frac{3}{e^2}$.

(2) باستعمال المكاملة بالتجزئة برهن أن : $I_{n+1} = \frac{-2^{n+1}}{e^2} + (n+1)I_n$ حيث $n \geq 1$

(3) أستنتج القيمة المضبوطة لـ I_2 و فسر النتيجة هندسيا.

بالتوفيق ...