9

الأعداد المركبة

الأعداد المركبة

الكفاءات المستهدفة

الكفاءات المستهدفة من خلال هذا المحور هي :

كتابة: الأستاذ بـــــخدة أمين

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

- الأستاذ : بخدة أمين
- المستوى : 3رياضيات
- المدة : 1 ساعة
- الوحدة التعلمية: الإحتمالات
- ميدان التعلم: التحليل
- موضوع الحصة : مجموعة الأعداد المركبة

- المكتسبات القبلية : مفاهيم أولية حول المجموعات
- الكفاءات المستهدفة : التعرف على بعض رموز و الإصطلاحات لعدد مركب
- المراجع : الكّاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة

مرحلة الإنطلاق

1 مناقشة النشاط رقم 2 صفحة 120

1 إثبات أن $a+b$ حل للمعادلة (1) إذا و فقط إذا : $a^3+b^3+3(ab-5)(a+b)-4=0\cdots 2$

- $a+b$ حل للمعادلة $x^3=15x+4\cdots(1)$ يعني $(a+b)^3=15(a+b)+4$

يعني $a^3+b^3+3ab^2+3ba^2=15a+15b+4$ يعني $a^3+b^3+3ab^2+3a^2b-15a-15b+4=0$

يعني $a^3+b^3+3(ab-5)(a+b)-4=0$

2 من أجل $ab=5$ فإن: (2) تكافئ $a^3+b^3-4=0$ أي $a^3+b^3=4$

- قيمة a^3b^3 هي125

3 التأكد أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $(x-a^3)(x-b^3)=x^2-4x+125$

لدينا: $(x-a^3)(x-b^3)=x^2-xb^3-xa^3+a^3b^3=x^2-x(a^3+b^3)-a^3b^3=x^2-4x+125$

4 التأكد أن المعادلة : $x^2-4x+125=0\cdots 3$ لا تقبل حلول حقيقية .

لدينا : $\Delta=(-4)^2-(4\times 1\times 125)=-484<0$ ومنه المعادلة (3) لا تقبل حلول في $\mathbb{R}$

مرحلة بناء المعارف

5 تخيل عدد نرمز له بـ i و يحقق $i^2=1$ ،إذن $\Delta=484i^2=(22i)^2$

إذن حلول المعادلة في هذه الحالة هي : $x_1=\dfrac{4-22i}{2}=2-11i$ و $x_2=\dfrac{4+22i}{2}=2+22i$

6 حساب $(2-i)^3$ و $(2+i)^3$

$(2-i)^3=(2-i)^2(2-i)=(4-1-4i)(2-i)=2-11i$ و

$(2+i)^3=(2+i)^2(2+i)=(2+11i$

لدينا: $(2+i)^3+(2-i)^3=4$ ومنه $(2-i)+(2+i)$ حل للمعادلة (1) أي 4 حل للمعادلة (1)

ومنه 4 جذر لكثير حدود $x^3-5x-4=0$

$$
\begin{array}{rr|l}
x^3 & -15x-4 & x-4 \\ \cline{3-3}
-x^3+4x^2 & & x^2+4x+1 \\ \hline
4x^2 & -15x & \\
-4x^2 & +16x & \\ \hline
 & x-4 & \\
 & -x+4 & \\ \hline
 & 0 &
\end{array}
$$

ومنه $x^3-15x-4=(x-4)(x^2+4x+1)$ إذن (1) تكافئ $x-4=0$ أو $x^2+4x+1=0$ يعني $x=4$

أو $x=-2-\sqrt{3}$ أو $x=-2+\sqrt{3}$

2 مجموعة الأعداد المركبة

تــعريف

أضف إلى مطويتك

نسمي عددا مركبا كل عدد z يكتب على الشكل : $\boxed{z = x + iy}$ حيث : x و y عددان حقيقيان و $i^2 = -1$

نرمز بـ : $\mathbb{C}$ إلى مجموعة الأعداد المركبة : $\mathbb{C} = \{x + iy \;\; ; a, b \in \mathbb{R}\}$

مـثال

كل من : $2+3i$, $1-i$, -3 , $5i$ هي عبارة عن أعداد مركبة

ملاحظة:

- العدد الحقيقي x يسمى الجزء الحقيقي للعدد المركب z ونرمز له بـ $Re(z)$
- العدد الحقيقي y يسمى الجزء التخيلي للعدد المركب z ونرمز له بـ $Im(z)$
- إذا كان $y = 0$ نقول إن العدد z حقيقي
- إذا كان $x = 0$ نقول إن z تخيلي صرف (أو تخيلي بحت أو تخيلي محض)
- يكون العدد المركب z معدوما إذا وفقط إذا كان جزؤه الحقيقي معدوم وجزؤه التخيلي معدوم أي $z = 0$ معناه : $x = 0$ و $y = 0$
- الكتابة $z = x + iy$ تسمى الشكل الجبري للعدد المركب z

تطبيق:

عيّن $Re(z)$ و $Im(z)$ في كل حالة

❶ $6+3i$ ❷ $7i$ ❸ 5 ❹ $-3+2i$

تطبيق:

z عدد مركب حيث $z = x^2 + x + i(x^2 + y - 1)$

✍ عيّن العددين الحقيقيين $(x;y)$ حتى يكون العدد المركب z معدوما

حـل

z معدوما يعني : $\begin{cases} x^2 + x = 0 \\ x^2 + y - 1 = 0 \end{cases}$ يعني $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$

إذن يكون z معدوما إذا كان $x = 0$ و $y = 1$ أو $x = -1$ و $y = 0$

ملاحظات حول سير الدرس

✍ ....

....

....

مرحلة بناء المعارف

التقويم

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

الأستاذ : بخدة أمين

المستوى : 3ريا

المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: الإحتمالات

ميدان التعلم: التحليل

موضوع الحصة : التمثيل الهندسي لعدد مركب

المكتسبات القبلية : مفاهيم أولية حول مجموعة الأعداد المركبة

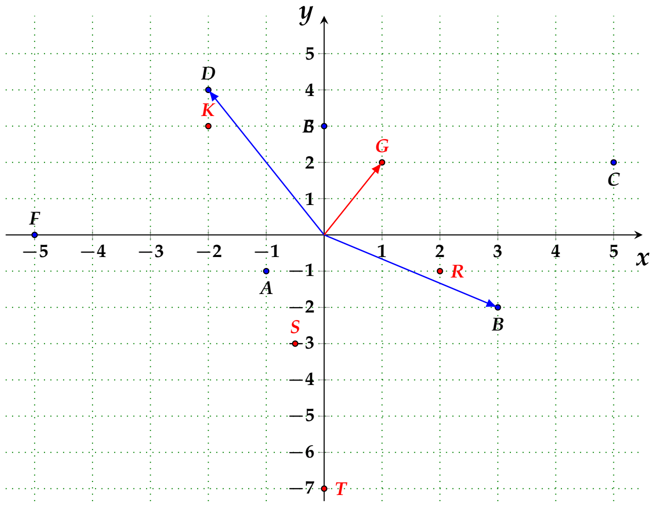
الكفاءات المستهدفة : التمثيل الهندسي لعدد مركب

المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة

مرحلة الانطلاق

1 مناقشة النشاط رقم 3 صفحة 120



حامل محور الفاواصل يمثل مجموعة الأعداد الحقيقية و عليه العدد الحقيقي α يمثل بالنقطة $p(x;0)$
نقبل أن كل نقطة أخرى من المستوي لا تنتمي إلى حامل محور الفواصل تمثل عددا و هذا العدد غير حقيقي نسميه عددا مركبا
و هكذا النقطة $j(0;1)$ تمثل العدد المركب i و النقطة $q(0;y)$ تمثل على حامل محور التراتيب و يسمى محور الأعداد التخيلية
بصفة عامة النقطة $M(x;y)$ تمثل العدد المركب $x+iy$ و نرمز له بالرمز z أي $z=x+iy$ حيث x و y عددين حقيقين

مرحلة بناء المعارف

1
- العدد المركب الذي تمثله النقطة A هو $Z_A=-1-i$
- العدد المركب الذي تمثله النقطة B هو $Z_B=3-2i$
- العدد المركب الذي تمثله النقطة C هو $Z_C=5+2i$
- العدد المركب الذي تمثله النقطة D هو $Z_D=-2+4i$
- العدد المركب الذي تمثله النقطة E هو $Z_E=3i$
- العدد المركب الذي تمثله النقطة F هو $Z_F=-5$

2 لدينا : $\overrightarrow{OB}(3;-2)$ ، $\overrightarrow{OD}(-2;4)$ ومنه $\overrightarrow{OG}(1;2)$ ومنه $Z_G=1+2i$

3 لدينا : $\overrightarrow{OE}(0;3)$ ، $\overrightarrow{OF}(-5;0)$ ومنه $\overrightarrow{OH}(-5;3)$ ومنه $Z_H=-5+3i$

4 لدينا : $\overrightarrow{AB}(4;-1)$ ، $\overrightarrow{CD}(-7;2)$ ومنه $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})(-3;1)$ ومنه $\overrightarrow{GK}(-3;1)$ ومنه $Z_K=-2+3i$

5 تمثيل النقط S ، R و T $R(2;-1)$ ، $S(-\frac{1}{2},-3)$ ، $T(0;-7)$

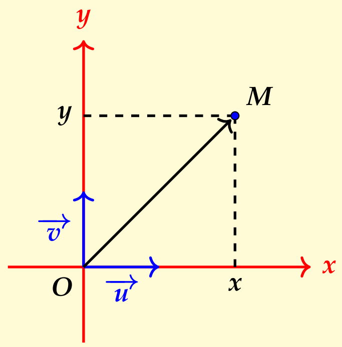
مرحلة بناء المعارف

2 التمثيل الهندسي لعدد مركب

تعريف

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

لكل نقطة $M(x;y)$ من المستوي نرفق العدد المركب : $z=x+iy$



نقول أن النقطة M هي صورة العدد المركب z، والشعاع $\overrightarrow{OM}$ يسمى كذلك صورة العدد المركب z

كل نقطة M هي صورة عدد مركب وحيد $z=x+iy$

ونقول أن z لاحقة النقطة M والشعاع $\overrightarrow{OM}$

محور الفواصل يسمى المحور الحقيقي ومحور التراتيب يسمى المحور التخيلي والمستوي يسمى المستوي المركب

التقويم

تطبيق:

لاحقة النقطة $A(1,-3)$ هي $z_A=1-3i$

إحداثيا النقطة B ذات اللاحقة $z_B=2+i\sqrt{3}$ هي : $B(2;\sqrt{3})$

الشعاع $\vec{u}\ (2;3)$ صورة العدد $z_C=2+3i$

تطبيق: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، x و y عددان حقيقيان

لتكن (S) مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي حيث : $\boxed{z=x^2+y(1+i)-i}$

عين ثم أنشئ المجموعة (S) في الحالتين الأتيتين: z حقيقيا ، z تخيلي صرف

حل

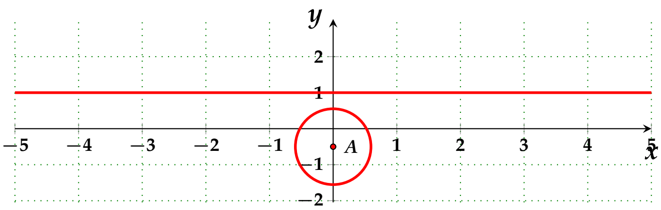
$$z=x^2+y^2+y(1+i)-i=x^2+y^2+y+yi-i=x^2+y^2+y+(y-1)i$$

الجزء الحقيقي لـ z هو (x^2+y^2+y) و الجزء التخيلي لـ z هو $y-1$

★ z حقيقي يعني الجزء التخيلي معدوم يعني $y-1=0$ أي $y=1$

إذن مجموعة النقط M هي المستقيم الذي معادلته $y=1$

★ z تخيلي صرف يعني الجزء الحقيقي معدوم يعني $x^2+y^2+y=0$ يعني $x^2+(y+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}=0$ يعني $x^2+(y+\frac{1}{2})^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2$ ، إذن مجموعة النقط S هي الدائرة التي مركزها $A\left(;-\frac{1}{2}\right)$ و نصف قطرها $\frac{1}{2}$



حل تمرين 2 و 4 صفحة 114

ملاحظات حول سير الدرس

....

....

....

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

الأستاذ : بخدة أمين
المستوى : 3ريا
المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: الإحتمالات
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : العمليات على الأعداد المركبة

المكتسبات القبلية : مفاهيم أولية حول مجموعة الأعداد المركبة
الكفاءات المستهدفة : العمليات الحسابية على الأعداد المركبة
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة

مرحلة الإنطلاق

① مجموع و جداء عددين مركبين

تعريف

z و z' عددان مركّبان حيث $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$ مع x', y, x و y' أعداد حقيقية

مجموع العددين z و z' هو العدد المركّب $\boxed{z + z' = x + x' + i(y + y')}$

جداء العددين z و z' هو العدد المركّب $\boxed{z.z' = xx' - yy' + i(xy' + x'y)}$

ملاحظة: قواعد الحساب المعروفة في $\mathbb{R}$ تبقى صحيحة في $\mathbb{C}$ مع الأخذبعين الإعتبار أن $i^2 = -1$

مثال

$(1 - i) + (3 + 2i) = 1 + 3 + i(-1 + 2) = 4 = i$

$(1 + 3i)(2 + i) = 2 = i + 6i - 3 = -1 + 7i$

مرحلة بناء المعارف

تطبيق:

★ أكتب الأعداد التالية على الشكل الجبري :

• $z_1 = (1 + i)^4$ • $z_2 = (-2 + i)(-3 + 5i)$ • $z_3 = \dfrac{3 + 2i}{4 - i}$

★ n عدد طبيعي غير معدوم .أكتب على الشكل الجبري كل من i^3 ، i^4 ، i^5 ، i^6 ، i^7 و i^8

★ ناقش تبعا لقيم n كتابة i^n على الشكل الجبري

② التفسير الهندسي لمجموع عددين مركبين :

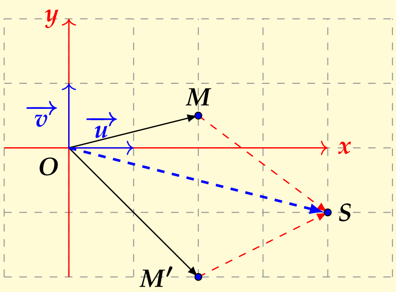
تعريف

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

z لاحقة النقطة M و z' لاحقة النقطة M'

المجموع $z + z'$ هو لاحقة النقطة S حيث: $\boxed{\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}}$

أي : $\overrightarrow{OS}$ هو محصلة الشعاعين $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{OM'}$



مرحلة بناء المعارف

ملاحظة:

- إذا كان z لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ وكان z' لاحقة الشعاع $\overrightarrow{CD}$ فإن $z+z'$ هو لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$
- إذا كان z لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ وكان k عدد حقيقيا فإن kz هو لاحقة الشعاع $k\overrightarrow{CD}$
- يكون شعاعن متساويان إذا كان لهما نفس اللاحقة

تطبيق:

z_A ، z_B و z_C هي على الترتيب لواحق النقط $A(\sqrt{3},1)$ ، $B(-\sqrt{3},-1)$ و $C(0,2)$

★ عين لاحقة النقطة D حتي يكون الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع

③ لاحقة شعاع - لاحقة مرجح :

خاصية

- المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$
A و B نقطتان من المستوي لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب.
- لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي z_B-z_A
- α و β عددان حقيقيان حيث : $\alpha+\beta\neq 0$ ، إذا كان G مرجح الجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$
فإن لاحقة النقطة G هي : $z_G=\dfrac{\alpha z_A+\beta z_B}{\alpha+\beta}$

تطبيق:

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$
A ، B و C ثلاث نقط من المستوي لواحقتها على الترتيب :
$Z_A=1-3i$ ، $Z_B=3+i$ و $Z_C=2+2i$
★ عيّن لواحق الأشعة : $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

تطبيق: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ ، x و y عددان حقيقيان
A ، B و C ثلاث نقط من المستوي لواحقها على الترتيب : $z_A=3i$ ، $z_B=-3i$ و $z_C=2-3i$
❶ عين لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A,1);(B,2);(C,-2)\}$

التقويم

حل تمرين 20 و 26 صفحة 145

حل تمرين 88 و 89 صفحة 150

ملاحظات حول سير الدرس

....

....

....

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

الأستاذ : بخدة أمين
المستوى : 3رياضيات
المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: الأعداد المركبة
ميدان التعلم: الهندسة
موضوع الحصة : مرافق عدد مركب

المكتسبات القبليـة : مفاهيم أولية حول مجموعات الأعداد
الكفاءات المستهدفة : استعمال خواص مرافق عدد مركب.
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة

مرحلة الإنطلاق

1 نشاط مقترح

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ و $M(x,y)$ نقطة من المسوي لاحقتها z ولتكن M' نظيرة M بالنسبة إلى محور الفواصل، نرمز للاحقتها بـ $\bar{z}$

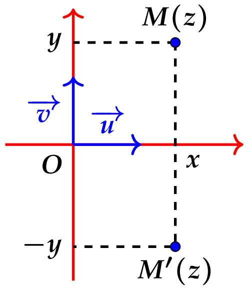
- أكتب z و $\bar{z}$ على الشكل الجبري ، ثم أحسب $z+\bar{z}$ ، $z-\bar{z}$ و $z\bar{z}$
- اجعل مقام العدد المركب $\dfrac{1+i}{2+3i}$ عددا حقيقيا ثم اكتبه على الشكل الجبري

مرحلة بناء المعارف

① مرافق عدد مركب

تعريف

z عدد مركب حيث : $z=x+iy$ $(x,y\in\mathbb{R})$
العدد المركب : $\boxed{x-iy}$ والذي نرمزله بـ : $\boxed{\bar{z}}$ يسمى مرافق العدد z



ملاحظة: للحصول على مرافق عدد مركب z نغير إشارة الجزء التخيلي.

مثال

$\overline{2+3i}=2-3i$ ، $\overline{1-i\sqrt{2}}=1+i\sqrt{2}$ ، $\overline{-i}=i$ ، $\overline{-3}=-3$

② مقلوب عدد مركب :

مبرهنة

كل عدد مركب غير معدوم z له مقلوب في $\mathbb{C}$ يرمز له بـ : $\dfrac{1}{z}$

③ خواص مرافق عدد مركب :

خواص

❶ $\bar{\bar{z}}=z$ ❷ $z+\bar{z}=2Re(z)$ ❸ $z-\bar{z}=2iIm(z)$ ❹ $z\bar{z}=(Re(z))^2+(Im(z))^2$

مرحلة بناء المعارف

④ المرافق و العمليات :

خـــواص

z عدد مركب و مرافقه $\overline{z}$، z' عدد مركب ومرافقه $\overline{z'}$

$\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$ * ، $\overline{zz'}=\overline{z}.\overline{z'}$* ، $\overline{z^n}=\overline{z}^n$ * مع $n\in\mathbb{N}^*$

$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\overline{z}}$* مع $z\neq 0$ ، $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$* مع $z'\neq 0$

البــرهــان

نضع $z_1=x_1+iy_1$ و $z_2=x_2+y_2$ حيث x_1 ، x_2 ، y_1 و y_2 أعداد حقيقية

❶ لدينا: $z_1+z_2=x_1+x_2+(y_1+y_2)i$

ومنه $\overline{z_1+z_2}=x_1+x_2-(y_1+y_2)i=x_1+x_2-y_1i-y_2i=x_1-y_1i+x_2-y_2i=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

❷ $\overline{z_1}\times\overline{z_2}=(x_1-y_1i)(x_2-y_2i)=(x_1x_2-y_1y_2)-(x_1y_2+x_2y_1)i$

$z_1\times z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)i$ ومنه $\overline{z_1\times z_2}=(x_1x_2-y_1y_2)-(x_1y_2+x_2y_1)i$

ومنه $\overline{z_1\times z_2}=\overline{z_1}\times\overline{z_2}$

❸ نستعمل البرهان بالتراجع

لتكن الخاصية $p(n)$: $\overline{z^n}=(\overline{z})^n$

من أجل $n=1$ لدينا: $\overline{z}=\overline{z}$ محققة

نفرض صحة الخاصية من أجل n عدد طبيعي كيفي أي نفرض: $\overline{z^n}=(\overline{z})^n$ و نبرهن صحة $p(n+1)$

أي $\overline{z^{n+1}}=(\overline{z})^{n+1}$

لدينا : $\overline{z^{n+1}}=\overline{z^n\times z}=\overline{z^n}\times\overline{z}$ ومنه $\overline{z^{n+1}}=(\overline{z})^n\times\overline{z}^1=\overline{z}^{n+1}$ ومنه $p(n+1)$ صحيحة .

إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $\overline{z^n}=(\overline{z})^n$

❹ نضع $z=\frac{z_2}{z_1}$ ومنه $z_2=z\times z_1$ ومنه $\overline{z_2}=\overline{z_1}\times\overline{z}$ ومنه $\overline{z}=\left(\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}}\right)$ ومنه $\left(\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}}\right)=\overline{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)}$

❺ نتيجة $\frac{1}{\overline{z}}=\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$

■

التقويم

تطبيق:

✍ a و b عددان مركبان نضع : $A=a\times\overline{b}+b\times\overline{a}$ حيث $\overline{a}$ و $\overline{b}$ مرافق لـ a و b على الترتيب :

★ أحسب $\overline{A}$

★ ماذا تستنتج ؟ نضع: $L=\frac{3-4i}{3-i}$

✍ أكتب L على شكله الجبري

تطبيق:

ليكن كثير الحدود P للمتغير المركب z المعرف بـ : $P(z)=z^3+z^2-2$

❶ أثبت أنه من أجل كل عدد مركب z : $\overline{P(z)}=P(\overline{z})$

❷ أحسب $P(1)$ و $P(-1-i)$

❸ عين جذور $P(z)$

ملاحظات حول سير الدرس

✍ ....

....

....

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

الأستاذ : بخدة أمين
المستوى : 3ريا
المدة : 1 ساعة
الوحدة التعلمية: الأعداد المركبة
ميدان التعلم: الهندسة
موضوع الحصة : طويلة عدد مركب

المكتسبات القبلية : مفاهيم أولية حول مجموعات الأعداد
الكفاءات المستهدفة : حساب طويلة عدد مركب
المراجع : الكتاب المدرسي،الأنترنت

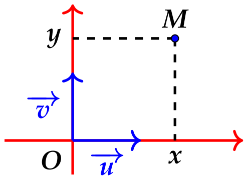
المراحل	عناصر الدرس	المدة

مرحلة الإنطلاق

1 نشاط مقترح

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$، M نقطة من المستوي صورة العدد المركب z.

أحسب المسافة OM بدلالة x و y



مرحلة بناء المعارف

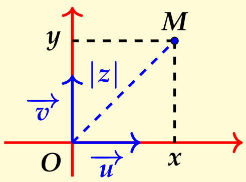
طويلة عدد مركب

تعريف

z عدد مركب حيث : $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$

نسمي طويلة العدد المركب z العدد الحقيقي الموجب الذي

نرمز له بـ : $\boxed{|z|}$ حيث : $\boxed{|z| = \sqrt{x^2+y^2}}$



التفسير الهندسي لطويلة عدد مركب

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$

z عدد مركب حيث $z = x + iy$ حيث x و y عددان حقيقيان

M صورة z. لدينا $M(x;y)$ ومنه $\overrightarrow{OM}(x;y)$ ومنه $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2+y^2}$ ومنه $|z| = \|\overrightarrow{OM}\|$

طويلة z هي المسافة بين M و O

مــــثال

$|2+3i| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ ، $|1-i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$

ملاحظة:

★ إذا كان z حقيقيا فإن طويلة z هي قيمة المطلقة له .
★ إذا كان $z = 0$ فإن : $|z| = 0$
★ لدينا : $|z|^2 = x^2 + y^2$ و مماسبق لدينا : $z \times \overline{z} = x^2 + y^2$ ومنه $|z|^2 = \overline{z} \times z$
★ A و B نقطتان لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب : $AB = |z_B - z_A|$

التقويم

خـــواص

من أجل كل عددين مركبين z و z'

❖ $|\overline{z}| = |z|$ ، ❖$|-z| = |z|$ ، ❖ $|z.z'| = |z|.|z'|$

❖ $|z^n| = |z|^n$ ، ❖$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ مع $z' \neq 0$ ، ❖ $|z+z'| \preceq |z| + |z'|$

تطبيق:

عيّن طويلة الأعداد المركبة التالية :

❶ $z_1 = (3-i)(-5+2i)$ ❷ $z_2 = (2-3i)^4$ ❸ $z_3 = \frac{\sqrt{2}-4i}{-3i}$ ❹ $z_4 = (3-2i)(3+2i)$

توظيف طويلة عدد مركب لتعيين مجموعة النقط :

تطبيق:

نعتبر النقط A ، B و C ذات اللواحق $z_1 = 2$ ، $z_2 = -i$ و $z_3 = 1+2i$ على الترتيب .

❶ أحسب $|z_2 - z_1|$ ، $|z_3 - z_1|$ و $|z_3 - z_2|$ ، ثم إستنتج طبيعة المثلث ABC

❷ عيّن في كل حالة من الحالتين التاليتين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z :

أ) $|z - z_1| = |z_2|$ ب) $|z - z_2| = |z - z_3|$

حل

❶ **حساب الطويلات**

$|z_2 - z_1| = |-i-2| = \sqrt{1+4}$ ومنه $|z_2 - z_1| = \sqrt{5}$

$|z_3 - z_1| = |-i+2i| = \sqrt{1+4}$ ومنه $|z_3 - z_1| = \sqrt{5}$

$|z_3 - z_2| = |1+3i| = \sqrt{1+9}$ ومنه $|z_3 - z_2| = \sqrt{10}$

إستنتاج طبيعة المثلث ABC

بما أن : $|z_2 - z_1| = |z_3 - z_1| = \sqrt{5}$ فإن $AB = AC = \sqrt{5}$ و $|z_2 - z_1|^2 + |z_3 - z_1|^2 = |z_3 - z_2|^2$

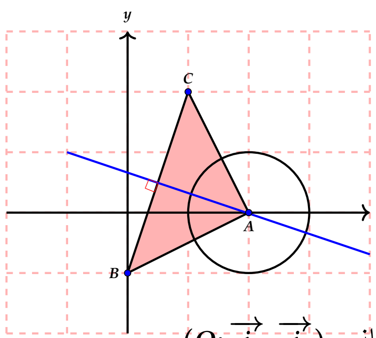
فإن : $AB^2 + AC^2 = BC^2$. إذن المثلث ABC قائم في A و متساوي الساقين

❷ **تعيين مجموعة النقط M**

★ لدينا $|z - z_1| = |z_2|$ أي : $AM = 1$ ومنه مجموعة النقط M هي الدائرة مركزها A و نصف قطرها 1

★ لدينا : $|z - z_2| = |z - z_3|$ أي $BM = CM$ ومنه مجموعة النقط M هي محور لبقطعة المستقيمة $[BC]$

تمثيل مجموعة النقط



تمرين منزلي

المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

✍ عين مجموعة النقط M ذات الاحقة z التي تحقق المساواة : $|z|^2 - 2Re(z) = 0$ ♣ $|-3z| = \sqrt{2}$

ملاحظات حول سير الدرس

✍ ....

....

....

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

الأستاذ : بخدة أمين
المستوى : 3ريا
المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: الأعداد المركبة
ميدان التعلم : الهندسة
موضوع الحصة : عمدة عدد مركب

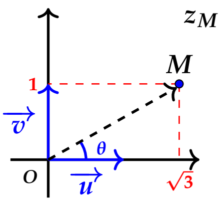
المكتسبات القبليــة : مفاهيم أولية حول مجموعات الأعداد
الكفاءات المستهدفة : حساب عمدة عدد مركب
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة

مرحلة الإنطلاق

1 نشاط مقترح

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ و M نقطة لاحقتها $z_M=\sqrt{3}+i$

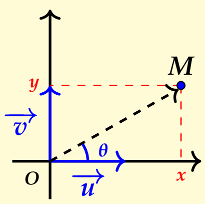


أحسب $|z_M|$ ثم استنتج $\cos(\vec{u};\overrightarrow{OM})$ و $\sin(\vec{u};\overrightarrow{OM})$

استنتج قيسا بالراديان للزاوية الموجهة $(\vec{u};\overrightarrow{OM})$

تــعـريـف

z عدد مركب حيث : $z=x+iy$ حيث x و y عددين حقيقين
في المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ولتكن M نقطة لاحقتها z
نسمي $\boxed{\text{عمدة العدد المركب } z}$ كل قيس بالراديان للزاوية الموجهة $(\vec{u};\overrightarrow{OM})$
ونرمز لها بالرمز : $\boxed{arg(z)}$



مرحلة بناء المعارف

ملاحظة:

كل عدد مركب غيرمعدوم له عدد غير منته من العمد ، أي إذا كانت θ عمدة لـ z فإن $\theta+2\pi$ عمدة له

العدد 0 ليس له عمدة لأن صورته هي مبدأ المعلم والزاوية $(\vec{u};\overrightarrow{OO})$ غير معروفة

A و B نقطتان لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب. $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})=(\vec{u};\overrightarrow{OB})-(\vec{u};\overrightarrow{OA})$
أي $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})=arg(z_B)-arg(z_A)$

$arg(z_B-z_A)=(\vec{u};\overrightarrow{AB})$

حساب عمدة عدد مركب غير معدوم بدلالة الجزء الحقيقي و الجزء التخيلي

ليكن z عدد مركب غير معدوم حيث $z=x+iy$ ، x و y عددان حقيقيان و لتكن θ عمدة لـ z و لتكن M صورة z
لدينا : $(x;y)$ إحداثيات الديكارتية لـ M و $(r;\theta)$ إحداثيات القطبية لـ M حيث : $r=\sqrt{x^2+y^2}$ أي $r=|z|$

و لدينا : $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} \cos\theta=\frac{x}{r} \\ \sin\theta=\frac{y}{r} \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} \cos\theta=\frac{x}{|z|} \\ \sin\theta=\frac{y}{|z|} \end{cases}$

مــثـال

عيّن طويلة و عمدة العددين المركبين z_1 و z_2 حيث $z_1=2-2i$ ، $z_2=-1-i\sqrt{3}$

التقويم	حل ❶ $\|z_1\| = \sqrt{(2)^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ و لتكن θ عمدة لـ z_1 لدينا : $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ ومنه $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$ ❷ $\|z_2\| = \sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2} = 2$ و لتكن θ' عمدة لـ z_1 لدينا : $\begin{cases} \cos\theta' = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\theta' = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ ومنه $\theta = \dfrac{\pi}{3} + \pi = \dfrac{4\pi}{3}$ **تطبيق:** ✍ عيّن عمدة الأعداد المركبة التالية : ❶ $z_A = 1+\sqrt{3}i$ $\quad z_B = 1+i$ $\quad z_B = \sqrt{3}-i$ ✍ إستنتج قيس لكل من الزاويتين الموجهتين $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ و $(\overline{u};\overrightarrow{AB})$ ملاحظات حول سير الدرس ✍	

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

- **الأستاذ :** بخدة أمين
- **المستوى :** 3ريا
- **المدة :** 1 ساعة
- **الوحدة التعلمية:** الأعداد المركبة
- **ميدان التعلم:** الهندسة
- **موضوع الحصة :** الشكل المثلي لعدد مركب غير معدوم

- **المكتسبات القبلية :** حساب عمدة و طويلة عدد مركب غير معدوم
- **الكفاءات المستهدفة :** الإنتقال من الشكل الجبري إلى المثلثي و العكس
- **المراجع :** الكتاب المدرسي،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة

مرحلة الإنطلاق

1 نشاط مقترح

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

و ليكن z عدد مركب غير معدوم: $z=x+iy$ حيث x و y عددان حقيقيان و لتكن θ عمدة له

1 أكتب x و y بدلالة $|z|$ و θ

2 إستنتج أن z يكتب على الشكل $|z|(cos\theta+i\sin\theta)$

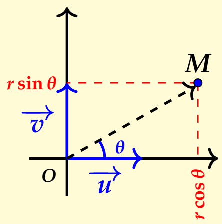
مرحلة بناء المعارف

تعريف

z عدد مركب غير معدوم

نسمي الكتابة $\boxed{r(cos\theta+i\sin\theta)}$ بالشكل المثلثي للعدد المركب z

حيث : $r=|z|$ و $\arg(z)=\theta$



ملاحظة:

إذا كان z و z' عددين مركبين حيث $z=r(cos\theta+isin\theta)$ و$z'=r'(cos\theta'+isin\theta')$

يكون z و z' متساويين إذاوفقط إذا كان : $r=r'$ و $\theta=\theta'+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$

إذا كان $z=L(\cos\theta+i\sin\theta)$ حيث $L>0$ فإن $|z|=L$ و $\arg(z)=\theta$

مـــثال تطبيقي

أكتب الشكل المثلثي للأعداد المركبة : ❶ $z_1=1+i$ ❷ $z_2=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$ ❸ $z_3=4$

تطبيق:

x عدد حقيقي و z عدد مركب حيث : $z=(x^2-4)\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

عيّن حسب قيم x الطويلة و العمدة لـ z

	تطبيق: أكتب على الشكل المثلثي للعدد المركب z في كل حالة : ❶ $z=4\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ❷ $z=-3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ ❸ $z=\sqrt{5}\left(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}\right)$ ❹ $z=-\sin\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$ **ملاحظات حول سير الدرس** ✍	التقويم

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

الأستاذ : بخدة أمين
المستوى : 3ريا
المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: الأعداد المركبة
ميدان التعلم: الهندسة
موضوع الحصة : خواص العمدة

المكتسبات القبلية : حساب عمدة و طويلة عدد مركب غير معدوم
الكفاءات المستهدفة : توظيف خواص العمدة لحل مسائل
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق	التهيئة النفسة التذكير بالشكل المثلثي لعدد مركب **خواص عمدة عدد مركب غير معدوم :** **خواص** — أضف إلى مطويتك z و z' عددان مركبان غير معدومين ❶ $arg(z.z') = arg(z) + arg(z')$ ❷ $arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg(z) - arg(z')$ ❸ $arg(z^n) = narg(z)$ مع : $n \in \mathbb{N}^*$ ❹ $arg(\overline{z}) = -arg(z)$ مع : $\overline{z}$ هو مرافق العدد المركب z ❺ $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -arg(z)$ ❻ $\arg(-z) = \arg(z) + \pi$	
مرحلة بـــنـــاء مـــعـــارف	**البـرهـان** ❶ نضع : $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ و$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ حيث : r_1 ، r_2 عددان حقيقيان موجبان و θ_1 و θ_2 أعداد حقيقية $z_1 \times z_2 = r_1 \times r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ $= r_1 \times r_2\left[(\cos\theta_1 \times \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \times \sin\theta_2) + i(\cos\theta_1 \times \sin\theta_2 + \sin\theta_1 \times \cos\theta_2)\right]$ $= r_1 \times r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$ لدينا : $r_1 \times r_2 > 0$ إذن $\|z_1 \times z_2\| = r_1 \times r_2$ و $\arg(z_1 \times z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ ❷ نضع $\frac{z_1}{z_2} = z$ ومنه $z_1 = z \times z_2$ ومنه $\arg(z_1) = \arg(z) + \arg(z_2)$ ومنه $\arg(z) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$ إذن $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$ ❸ لتكن الخاصية $p(n) : \arg(z^n) = n\arg(z)$ من أجل n عدد طبيعي غير معدوم من $n=1$ لدينا : $arg(z^1) = 1arg(z)$ ومنه $p(1)$ صحيحة نفرض صحة $p(n)$ من أجل n عدد طبيعي كيفي و نبرهن صحة $p(n+1)$ أي نبرهن أن: $\arg(z^{n+1}) = (n+1)\arg(z)$ $\arg(z^{n+1}) = \arg(z^n \times z) = \arg(z^n) + \arg(z) = n\arg(z) + \arg(z) = (n+1)\arg(z)$ ❹ ❺ ❻ إستنتاج ■	

التقويم

نتيجة — أضف إلى مطويتك

المستوي المركب المنسوب إلى المعام المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$
A ، B و C ثلاث نقط لواحقها z_A، z_B و z_C على الترتيب .
$$\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)=\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{AB}\right)-\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$$

تطبيق:

z_1 و z_2 عددين مركبين حيث : $z_1=1+i$ و $z_2=1-i\sqrt{3}$

❶ أكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي.

❷ أكتب $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الجبري ثم الشكل المثلثي .

❸ إستنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

تطبيق:

z عدد مركب حيث : $z=1-i$

❶ عيّن قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها z^n عددا حقيقيا .

❷ عيّن قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها z^n عدداتخيليا صرفا .

طريقة — أضف إلى مطويتك

✍ z^n حقيقي معناه $\arg(z^n)=k\pi$ مع : $k\in\mathbb{Z}$

✍ z^n تخيلي صرف معناه : $\arg(z^n)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ مع : $k\in\mathbb{Z}$

توظيف خواص العمدة لتعيين مجموعة النقط

تطبيق:

عيّن مجموعة النقط M ذات اللاحقة العدد المركب :z

❶ $\arg(z-2i)=\frac{\pi}{3}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}$ ❷ $\arg(z-1-i)=\frac{\pi}{4}+k\pi;k\in\mathbb{Z}$

❸ $\arg\left(\frac{z-i}{z+1-i}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ❹ $\arg(z)=\arg(\overline{z})$

حـل التطبيق

❶ لتكن A نقطة من المستوي لاحقتها $z_A=2i$
ومنه مجموعة النقط M هي نصف مستقيم $[AM)$ ما عدا النقطة A حيث : $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{AM}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$

حالات خاصة

★ $arg(z)=2k\pi$: M هي نصف مستقيم $[Ox)$ ماعدا النقطة O

★ $arg(z)=\pi+2k\pi$: M هي نصف مستقيم $[Ox')$ ماعدا النقطة O

★ $arg(z)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$: M هي نصف مستقيم $[Oy)$ ماعدا النقطة O

★ $arg(z)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$: M هي نصف مستقيم $[Oy')$ ماعدا النقطة O

❷ لتكن B نقطة من المستوي لاحقتها $z_B=1+i$
ومنه مجموعة النقط M هي المستقيم (BM) ماعدا النقطة B حيث : $\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{BM}\right)=\frac{\pi}{4}$

حالة خاصة

M : $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ هي النصف الأول بإستثناء النقطة O

❸ لتكن A و B نقطتان من المستوي لاحقتاهما $z_A = i$ و $z_B = 1 + i$

ومنه مجموعة النقط M هي دائرة قطرها $[AB]$ ماعدا النقطتين A و B

حالة خاصة

M : $\arg\left(\dfrac{z-i}{z+1-i}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ هي نصف دائرة قطرها $[AB]$ ما عدا النقطتين A و B

❹ $\arg(z) = \arg(\overline{z})$ أي $\arg(z) = -\arg(z)$ ومنه $2\arg(z) = 0 + 2kpi$ ومنه $\arg(z) = k\pi$ أي

$\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}\right) = k\pi$

ومنه مجموعة النقط M هي حامل محور الفواصل (xx') ماعدا المبدأ O

التقويم	**تطبيق:** أكتب الأعداد المركبة التالية على شكلها المثلي : $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ ، $z_2 = (\sqrt{3} - i)\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ ، $z_3 = \dfrac{1+i}{1-i}$ ، $z_4 = (\overline{z_3})^{2014}$

تمرين منزلي 46 صفحة 147 و تمرين 121 و 123 صفحة 154

ملاحظات حول سير الدرس

....

....

....

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

الأستاذ : بخدة أمين
المستوى : 3رياضيات
المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: الأعداد المركبة
ميدان التعلم: الهندسة
موضوع الحصة : الشكل الأسي لعدد مركب

المكتسبات القبلية : حساب عمدة و طويلة عدد مركب غير معدوم
الكفاءات المستهدفة : الإنتقال من الشكل الجبري إلى الأسي و العكس
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة

مرحلة الإنطلاق

1 نشاط

المستوى المركب منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$

z_0 عدد مركب طويلته 1 و لتكن θ عمدة له. إذن : $z_0 = \cos\theta + i\sin\theta$

لتكن الدالة f التي ترفق بكل عدد حقيقي θ العدد المركب z_0 أي $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$

✍ أحسب $f(\theta + \theta')$ و $f(\theta) \times f(\theta')$ حيث : θ و θ' عددان حقيقيان .

إرشاد إستخدم دستوري الجمع : $\cos(\theta+\theta') = \cos(\theta).\cos(\theta') - \sin(\theta).\sin(\theta')$

و $\sin(\theta+\theta') = \cos(\theta).\sin(\theta') + \sin(\theta).\cos(\theta')$

✍ ماذا تستنتج؟

تعريف(ترميز أولر) — أضف إلى مطويتك

نضع: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ هذا الترميز يسمى ترميزأولر.

حيث : $e^{i\theta}$ عدد مركب طويلته 1 و θ عمدة له

مرحلة بناء المعارف

الشكل الأسي لعدد مركب غير معدوم

تعريف — أضف إلى مطويتك

العدد المركب z غير المعدوم الذي طويلته r و θ عمدة له . يكتب $z = rei\theta$

هذه الكابة تسمى الشكل الأسي للعدد المركب z

مثال

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\right)$$

تطبيق:

أكتب z على الشكل الأسي في كل حالة من الحالات التالية :

❶ $z = -8i$ ❷ $z = 5$ ❸ $z = -2 + 2i$ ❹ $z = 2\left(\cos(\frac{\pi}{4}) - i\sin(\frac{\pi}{4})\right)$ ❺ $z = -e^{i\frac{\pi}{3}}$

تطبيق: أكتب على الشكل الجبري العدد المركب z في كل حالة :

❶ $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ❷ $z = 6e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ❸ $z = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}$

خــواص

أضف إلى مطويتك

θ و θ' عددان حقيقيان .

☜ $e^{i(\theta)}.e^{i(\theta')} = e^{i(\theta+\theta')}$ ، ☜ $\dfrac{e^{i(\theta)}}{e^{i(\theta')}} = e^{i(\theta-\theta')}$ ، ☜ $\overline{e^{i(\theta)}} = e^{-i(\theta)}$

مــثال

z_1 و z_2 عددين مركبين حيث : $z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$ و $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

لدينا : $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{4e^{i\frac{\pi}{2}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = 2e^{i(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3})} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

خاصية(دستور موافر)

أضف إلى مطويتك

✍ z عدد مركب طويلته 1 و θ عمدة له. من أجل كل عدد $n \in \mathbb{N}^*$

لدينا $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ أي $(cos\theta + i\,sin\theta)^n = cos\,n\theta + i\,sin\,n\theta$

مــثال

باستعمال دستور موافر أكتب الشكل الأسي للعدد المركب : $z = (1+i)^6$

ملاحظة:

★ يكون العدد المركب z^n حقيقي إذا و فقط إذا كان $n\theta = k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$

★ يكون العدد المركب z^n حقيقي سالب إذا و فقط إذا كان $n\theta = \pi + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$

★ يكون العدد المركب z^n حقيقي موجب إذا و فقط إذا كان $n\theta = 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$

★ يكون العدد المركب z^n تخيلي صرف إذا و فقط إذا كان $n\theta = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$

توظيف الشكل الأسي لتعيين مجموعة نقط :

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$

r عدد حقيقي موجب تماما و θ عدد حقيقي، M_0 نقطة لاحقتها z_0

✍ مجموعة النقط Mذات اللاحقة z حيث : $z = z_0 + re^{i\theta}$ هي :

① دائرة مركزها M_0 ونصف قطرها r من أجل r ثابت و θ متغير

② نصف مستقيم $[M_0M)$ ماعدا النقطة M_0 حيث : $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{M_0M}) = \theta$ من أجل r متغير و θ ثابت.

تطبيق:

عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث :

❶ $z = 1 + i + 2e^{i\theta}\ ,\theta \in \mathbb{R}$ ❷ $z = 1 + i + 2e^{i\theta}; \theta \in]0 : \pi]$

❸ $z = 2 - 2i + re^{i\frac{\pi}{3}}\ ,r \in \mathbb{R}_+^*$

حل تمرين 46 صفحة 147

ملاحظات حول سير الدرس

✍ ....

....

....

مرحلة بناء المعارف

التقويم

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

الأستاذ : بخدة أمين

المستوى : 3رياضيات

المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: الأعداد المركبة

ميدان التعلم: الهندسة

موضوع الحصة : توظيف خواص عمدة وطويلة عدد مركب

المكتسبات القبلية : حساب عمدة و طويلة عدد مركب غير معدوم

الكفاءات المستهدفة : توظيف خواص عمدة وطويلة عدد مركب لحل مسائل الهندسية

المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق		
مرحلة بناء معارف		

التهيئة النفسية

التذكير بالمكسبات السنة الماضية

توظيف حواص الطويلة و العمدة لحل مسائل في الهندسة

خاصية ❶

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$

الشعاعان $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{OM'}$ لاحقتاهما

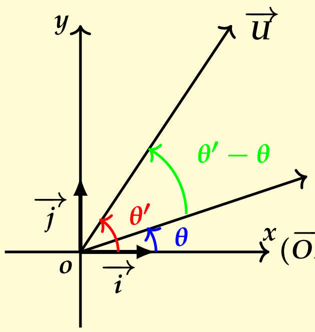
z و z' على الترتيب، حيث :

$z' = r'(cos\theta' + i\,sin\theta')$ و $z = r(cos\theta + i\,sin\theta)$

$(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM'}) = arg(z') = \theta'$ و $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM}) = arg(z) = \theta$

$(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{u}) + (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM'}) - (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM})$

إذن : $(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'}) = arg(z') - arg(z) = \theta' - \theta$



خاصية ❷

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$ لتكن A ، B ، C و D نقط لواحقها z_A ، z_B ، z_C و z_D على الترتيب

لدينا : $\left|\dfrac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right| = \dfrac{AB}{CD}$ و $arg\left(\dfrac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right) = (\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{AB})$

البـرهـان

$$\frac{AB}{CD} = \frac{|z_B - z_A|}{|z_D - z_C|} = \left|\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right|$$

$$arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right) = arg(z_B - z_A) - arg(z_D - z_C) = (\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{CD})$$

إذن: $arg\left(\dfrac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right) = (\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{AB})$ ■

نتيجة

☜تكون النقط A ، B و C في استقامية إذاكان العدد المركب : $\dfrac{z_B - z_A}{z_D - z_C}$ حقيقيا

☜يكون المستقيمان (AB) و (AC) متعامدين إذا كان العدد المركب $\dfrac{z_B - z_A}{z_D - z_C}$ تخيليا صرفا

التقويم

تطبيق:

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$

لتكن A،B،CوD نقط لواحقها $z_A = -i\sqrt{3}$ ، $z_B = 3+2i\sqrt{3}$ ، $z_C = -3+2i\sqrt{3}$ و $z_D = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ على الترتيب

❶ أكتب على الشكل الجبري ثم الأسي العدد المركب : $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$

❷ أعط تفسيرا هندسيا لطويلة وعمدة العدد المركب Z حيث : $Z = \frac{z_B - z_A}{z_C - z_D}$

❸ ماهي طبيعة المثلث ABC

❹ بين أن النقط A،B وD في إستقامية

حـل

❶

لدينا : $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ وعليه $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

❷

- $\frac{AB}{AC} = \frac{|z_B - z_A|}{|z_C - z_A|} = \left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right|$
- $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}) = \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right)$

❸

طبيعة المثلث ABC . لدينا $\frac{AB}{AC} = 1$ أي $AB = AC$ و $\left(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}\right) = -\frac{\pi}{3}$ إذن المثلث ABC متقايس الأضلاع .

❹ تبيان أن النقط A ، B و D في إستقامية

$\frac{z_B - z_A}{z_D - z_A} = 2$ أي $z_B - z_A = 2(z_D - z_A)$ أي $z_{\overrightarrow{AB}} = 2z_{\overrightarrow{AD}}$

إذن النقط A ، B و D في إستقامية

حل تمرين 116 صفحة 153

ملاحظات حول سير الدرس

....

....

....

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

الأستاذ : بخدة أمين — الوحدة التعلمية: الأعداد المركبة
المستوى : 3ريا — ميدان التعلم: الهندسة
المدة : 1 ساعة — موضوع الحصة : الجذران التربيعيان لعدد مركب

المكتسبات القبلية : حساب عمدة و طويلة عدد مركب غير معدوم
الكفاءات المستهدفة : حل معادلات من الدرجة
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق	**1 نشاط** ليكن z وω عددان مركبان حيث : $z = 3 + i4$ و $\omega = \alpha + i\beta$ أوجد α و β بحيث $\omega^2 = z$ إستنتج أن z يقبل جذرين تربيعين متناظرين **الجذران التربيعيان لعدد مركب** **تـعـريـف** z عدد مركب غير معدوم الجذر التربيعي للعدد المركب z هو العدد المركب ω حيث $\boxed{z = \omega^2}$	
مرحلة بناء معارف	**مــثال** • $(3i)^2 = -9$ و $(-3i)^2 = -9$ أي الجذران التربيعيان للعدد -9 هما : $\boxed{3i \text{ و} -3i}$ • الجذران التربيعيان للعدد $3 - 4i$ هما : $\boxed{2 + i \text{ و} -2 + i}$ **ملاحظة:** ❖ كل عدد مركب غير معدوم يقبل جذرين تربيعين متناظرين. ❖ تعيين الجذرين التربيعين لعدد مركب معناه حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $w^2 = z$ **البحث عن الجذرين التربيعيين لعدد مركب** **طريقة** : $z = a + ib$ عدد مركب و $\omega = x + iy$ جذر تربيعي له أي : $\omega^2 = z$ هذا معناه $\begin{cases} \|\omega^2\| = \|z\| \\ Re(\omega^2) = Re(z) \\ Im(\omega^2) = Im(z) \end{cases}$ معناه : $\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$ **تطبيق:** جد الجذور التربيعية للأعداد المركبة التالية : ① $L = -1 - i$ ② $W = 2 - 2i\sqrt{3}$	

التقويم

حل

- **تعيين الجذر التربيعي للعدد المركب L**

نفرض أن $\omega = \alpha + i\beta$ حيث α و β عددان حقيقيان ومنه $\omega^2 = \alpha^2 - \beta^2 + i2\alpha\beta$

ω جذر تربيعي لـ L يعني $\omega^2 = L$

يعني $\alpha^2 - \beta^2 + i2\alpha\beta = -1 - i$ يعني $\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{2} \\ \alpha^2 - \beta^2 = -1 \\ 2\alpha\beta = -1 \end{cases}$ يعني $\begin{cases} 2\alpha^2 = -1 + \sqrt{2} \\ \alpha\beta = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

يعني $\begin{cases} \alpha^2 = \dfrac{-1+\sqrt{2}}{2} \\ \alpha\beta = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ يعني $\begin{cases} \alpha = -\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}} \text{ أو } \alpha = \sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}} \\ \alpha\beta = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

يعني $\begin{cases} \alpha = \sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}} \\ \beta = \dfrac{-1}{2\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}}} \end{cases}$ أو $\begin{cases} \alpha = -\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}} \\ \beta = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}}} \end{cases}$ إذن الجذران التربيعيان لـ L هما:

$\omega_1 = \sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}} + i\dfrac{-1}{2\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}}}$ و $\omega_2 = -\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}} + i\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}}}$

- **تعيين الجذر التربيعي للعدد المركب W**

نضع $z = x + iy$ حيث x و y عددان حقيقيان

z جذر تربيعي لـ W يعني $z^2 = w$ يعني $x^2 - y^2 + i2xy = 2 - i2\sqrt{3}$

يعني $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 - y^2 = 2 \\ 2xy = -2\sqrt{3} \end{cases}$ يعني $\begin{cases} x^2 = 3 \\ xy = \sqrt{3} \end{cases}$ يعني $\begin{cases} x = -\sqrt{3} \text{ أو } x = \sqrt{3} \\ xy = -\sqrt{3} \end{cases}$ يعني $\begin{cases} x = -\sqrt{3} \text{ أو } x = \sqrt{3} \\ y = 1 \text{ أو } y = -1 \end{cases}$

ومنه الجذرين التربيعين لعدد المركب W هما : $z_1 = \sqrt{3} - i$ و $z_2 = -\sqrt{3} + i$

ملاحظات حول سير الدرس

....

....

....

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

الأستاذ : بخدة أمين	الوحدة التعلمية: الأعداد المركبة
المستوى : 3ريا	ميدان التعلم: الهندسة
المدة : 1 ساعة	موضوع الحصة : حل معادلة من الدرجة الثانية

المكتسبات القبلية : حساب عمدة و طويلة عدد مركب غير معدوم
الكفاءات المستهدفة : حل معادلات من الدرجة
المراجع : الكتاب المدرسي،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق / مرحلة بـــنـــاء مـــعـــارف	**تـــعـــريـــف** نسمي معادلة من الدرجة الثانية في $\mathbb{C}$ كل معادلة يمكن كتابتها من الشكل : $\boxed{az^2+bz+c=0}$ حيث a ، b ، c أعداد حقيقية و $a\neq 0$	

البـــرهـــان

$$az^2+bz+c = a\left[z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right]$$
$$= a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]$$
$$= a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$
$$= a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

إذن (1) $az^2+bz+c=0$ تكافئ $\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$

نضع $\Delta=b^2-4ac$ ، ليكن ω جذرا تربيعيا لـ Δ أي $\omega^2=\Delta$

(1) تكافئ $\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\omega}{2a}\right)^2=0$ تكافئ $\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\omega}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\omega}{2a}\right)=0$

تكافئ $\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\omega}{2a}\right)=0$ أو $\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\omega}{2a}\right)=0$ تكافئ $z=\frac{-b+\omega}{2a}$ أو $z=\frac{-b-\omega}{2a}$ ■

المعادلات من الدرجة الثانية بمعاملات حقيقية :

مـــبرهنة

لتكن المعادلة ذات المجهول المركب z: $az^2+bz+c=0$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية و $a\neq 0$
لدينا : $\Delta=b^2-4ac$ مميز هذه المعادلة

- إذا كان $\Delta=0$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا : $\boxed{z_0=\frac{-b}{2a}}$
- إذا كان $\Delta>0$ المعادلة تقبل حلين حقيقين متمايزين هما : $\boxed{z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$
- إذا كان $\Delta<0$ المعادلة تقبل حلين مركبين مترافقين هما : $\boxed{z_1=\frac{-b-\omega}{2a} \text{ و } z_2=\frac{-b+\omega}{2a}}$

حيث : ω جذر تربيعي لـ : Δ

التقويم

تطبيق:

حل في $\mathbb{C}$ كل من المعادلات التالية :

1. $2z^2-6z+5=0$
2. $z^2+3=0$
3. $z^2-8\sqrt{3}z+64=0$
4. $z^2-2\sin(\theta)z+1=0$ حيث θ عدد حقيقي.

حــل

1. $\Delta=(-6)^2-(4\times5\times2)=-4=(2i)^2$ ومنه $\sqrt{\Delta}=2i$ أو $\sqrt{\Delta}=-2i$ ومنه المعادلة (1) تقبل حلين z_1 و z_2 حيث : $z_1=\dfrac{6-2i}{4}=\dfrac{3-i}{2}$ و $z_2=\dfrac{6+2i}{4}=\dfrac{3+i}{2}$ ومنه $s=\left\{\dfrac{3-i}{2};\dfrac{3+i}{2}\right\}$

2. $z^2+3=0$ تكافئ $z^2=-3=(\sqrt{3}i)^2$ تكافئ $z=i\sqrt{3}$ أو $z=-i\sqrt{3}$ ومنه $s=\left\{i\sqrt{3};-i\sqrt{3}\right\}$

3. $\Delta=(-8\sqrt{3})^2-(4\times64)=-64=(8i)^2$ ومنه المعادلة (3) تقبل حلين هما z_1 و z_2 حيث : $z_1=\dfrac{8\sqrt{3}+8i}{2}=4\sqrt{3}+4i$ و $z_2=\dfrac{8\sqrt{3}-8i}{2}=4\sqrt{3}-4i$ ومنه $S=\left\{4\sqrt{3}+4i;4\sqrt{3}-4i\right\}$

4. $\Delta=(-2\sin\theta)^2-4=4\sin^2\theta-4=4(\sin^2-1)$
لدينا $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ ومنه $\sin^2\theta-1=-\cos^2\theta$ ومنه $\Delta=-4\cos^2\theta=(2i\cos\theta)^2$
ومنه المعادلة (4) تقبل حلين هما z_1 و z_2 حيث $z_1=\dfrac{2\sin\theta+2i\cos\theta}{2}=\sin\theta+i\cos\theta$
و $z_1=\dfrac{2\sin\theta-2i\cos\theta}{2}=\sin\theta-i\cos\theta$ ومنه $s=\{\sin\theta+i\cos\theta;\sin\theta-i\cos\theta\}$

معادلات يؤول حلها إلى معادلات من الدرجة الثانية :

تطبيق:

$p(z)$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث : $p(z)=z^3-12z^2+48z-72$

1. تحقق أن 6 جذر لكثير حدود $p(z)$
2. جد العددين الحقيقين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z $p(z)=(z-6)(z^2+\alpha z+\beta)$
3. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $p(z)=0$

حــل

1. التحقق أن 6 جذر لكثير حدود $p(z)$
$p(6)=6^3-12\times6^2+48\times6-72=216-432+288-72=0$ ومنه 6 جذر لكثير الحدود $p(z)$

2. ومنه : $p(z)=(z-6)(z^2-6z+12)$
و بالمطابقة نجد: $\alpha=-6$ و $\beta=12$

$$
\begin{array}{r|l}
z^3-12z^2+48z-72 & z-6 \\
\cline{2-2}
\underline{-z^3+6z^2} & z^2-6z+12 \\
-6z^2+48z & \\
\underline{6z^2-36z} & \\
12z-72 & \\
\underline{-12z+72} & \\
0 &
\end{array}
$$

3. $p(z)=0$ تكافئ $(z-6)(z^2-6z+12)=0$ تكافئ $z=6$
أو $z^2-6z+12=0$، إذن لنحل المعادلة $z^2-6z+12=0$
$\Delta=(-6)^2-4\times12=-12=(i2\sqrt{3})^2$ ومنه للمعادلة حلين z_1 و z_2 حيث :
$z_1=\dfrac{6+i2\sqrt{3}}{2}=3+i\sqrt{3}$ و $z_2=\dfrac{6-i2\sqrt{3}}{2}=3-i\sqrt{3}$
ومنه : $S=\left\{6;3-i\sqrt{3};3-i\sqrt{3}\right\}$

التقويم

تطبيق:

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : (1) $\quad z=\dfrac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$

حيث $z\neq 2-3i$. حل في $\mathbb{C}$ هذه المعادلة .

حـل

(1) تكافئ $z^2-2z+3iz=3iz-6$ تكافئ $z^2-2z-6=0$

$\Delta=4-4\times1\times(-6)=-20=(i2\sqrt{5})^2$

ومنه المعادلة تقبل حلين z_1 و z_2 حيث : $z_1=\dfrac{2+i2\sqrt{5}}{2}=1+i\sqrt{5}$ و $z_2=\dfrac{2-i2\sqrt{5}}{2}=1-i\sqrt{5}$

إذن مجموعة الحلول S هي $S=\left\{1+i\sqrt{5};1-i\sqrt{5}\right\}$

تطبيق:

$p(z)$ كثير حدود للمتغير المركب z جيث : $p(z)=z^4-2\sqrt{3}z^3+8z^2-8\sqrt{3}z+16$

1 تحقق أن $p(z)=(z^2+4)(z^2-2\sqrt{3}z+4)$

2 حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $p(z)=0$.

حـل

1 التحقق أن $p(z)=(z^2+4)(z^2-2\sqrt{3}z+4)$

$$\begin{aligned}(z^2+4)(z^2-2\sqrt{3}z+4)&=z^4-2\sqrt{3}z^3+4z^2+4z^2-8\sqrt{3}z^3+16\\&=z^4-2\sqrt{3}z^3+8z^2-8\sqrt{3}z+16\\&=p(z)\end{aligned}$$

2 $p(z)=0$ تكافئ $(z^2+4)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$ تكافئ $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$ أو $z^2+4=0$

لنحل المعادلة (1) $\quad z^2+4=0$

(1) تكافئ $z^2=-4=(2i)^2$ ومنه $z=2i$ أو $z=-2i$

لنحل المعادلة (2) $\quad z^2-2\sqrt{3}z+4=0$ ، $\Delta=-4=(2i)^2$

ومنه المعادلة تقبل حلين z_1 و z_2 حيث : $z_1=\dfrac{2\sqrt{3}+2i}{2}=\sqrt{3}+i$ و $z_2=\dfrac{2\sqrt{3}-2i}{2}=\sqrt{3}-i$

إذن مجموعة الحلول S هي : $S\left\{2i;-2i;\sqrt{3}+i;\sqrt{3}-i\right\}$

حل تمرين صفــ{152}ــحة رقـ{105}ـــم

لدينا: $Z=X+iY$ و $z=x+iy$

$$\begin{aligned}Z&=\frac{2+\bar{z}}{1+\bar{z}}\\&=\frac{2+x-iy}{1+x-iy}\\&=\frac{(2+x-iy)(1+x+iy)}{(1+x)^2+y^2}\\&=\frac{2+3x+x^2+u^2+i(2y+xy-y-xy)}{(1+x)^2+y^2}\\&=\frac{2+3x+x^2+u^2}{(1+x)^2+y^2}+i\frac{2y+xy-y-xy}{(1+x)^2+y^2}\end{aligned}$$

ومنه $X=\dfrac{2+3x+x^2+u^2}{(1+x)^2+y^2}$

و $Y=\dfrac{2y+xy-y-xy}{(1+x)^2+y^2}$

Z حقيقي يعني $Im(Z)=0$

يعني $\begin{cases}y=0\\(1+x)^2+y^2\neq0\end{cases}$

يعني $\begin{cases}y=0\\(x,y)\neq(-1,0)\end{cases}$

إذن مجموعة النقط M هي حامل محور الفواصل بإستثناء النقطة $A\,(-1,0)$

ملاحظات حول سير الدرس

....

....

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

الأستاذ : بخدة أمين

المستوى : 3ريا

المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: المتتاليات

ميدان التعلم: الهندسة

موضوع الحصة : تحويلات النقطية -تذكير-

المكتسبات القبلية : مفاهيم أولية حول التحويلات النقطية و الأعداد المركبة

الكفاءات المستهدفة : التذكير بالتحويلات النقطية المدروسة سابقا

المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

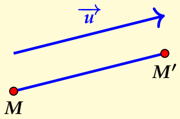
المراحل	عناصر الدرس	المدة

مرحلة الإنطلاق

الإنسحاب

تعريف

الإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{u}$ هو التحويل النقطي الي يرفق بكل نقطة M من المستوي النقطة M' من المستوي حيث : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$



خـــــواص — أظف إلى مطويتك

$t_{\overrightarrow{u}}$ إنسحاب شعاعه $\overrightarrow{u}$ غير معدوم

◄ الإنسحاب لا يقبل أية نقطة صامدة

◄ صورة ثنائية نقطة $(A;B)$ هي ثنائية $(A';B')$ تحقق: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$

◄ الإنسحاب تقايس (يحافظ على المسافات)

◄ الإنسحاب يحافظ على الإستقامية ، أقياس الزوايا، المرجح و التوازي.

★ الإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{o}$ هو تحويل مطابق

مرحلة بـــــناء و الترسيخ

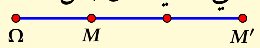
التحاكي

تعريف

Ω نقطة ثابتة و k عدد حقيقي غير معدوم .

التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته k هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي النقطة M' من المستوي

حيث: $\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\Omega M}$ مع $k \in \mathbb{R}^* - \{1\}$



خـــــواص — أظف إلى مطويتك

◄ للتحاكي نقطة صامدة وحيدة هي المركز Ω

◄ صورة ثنائية $(A;B)$ بالتحاكي الذي مركزه Ω ونسبته k هي ثنائية $(A';B')$ تحقق: $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{A'B'}$

◄ صورة دائرة (C) مركزها ω و نصف قطرها r بواسطة تحاكي h نسبته k

هي : دائرة (c') مركزها $\omega' = h(\omega)$ و نصف قطرها $r' = |k| \cdot r$

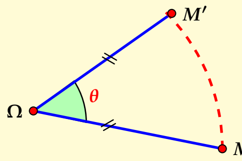
◄ إذا كانت M' صورة M بالتحاكي الذي مركزه Ω و نسبته k فإن النقط M ، M' و Ω في إستقامية .

◄ نلاحظ أنه إذا كان $|k| \neq 1$ فإن : $A'B' \neq AB$ إذن التحاكي ليس تقايسا .

◄ صورة شكل هندسي مساحته S بتحاك نسبته k هو شكل هندسي مساحته S' حيث $S' = k^2 S$

الدوران

تعريف



Ω نقطة ثابتة و θ عدد حقيقي .
الدوران الذي مركزه Ω و زاويته θ هو التحويل النقطي الذي يرفق النقطة Ω بنفسها و يرفق بكل نقطة M من المستوي تختلف عن Ω النقطة M' من المستوي حيث : $\Omega M = \Omega M'$
و $\left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta$

خـــــواص

أظف إلى **مطويتك**

- ◄ صورة كل ثنائية $(A;B)$ بالدوران الذي مركزه Ω و زاويته θ هي الثنائية $(A'B')$ تحقق: $A'B' = AB$ و $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}\right) = \theta$
- ◄ الدوران هو تقايس (يحافظ على المسافات)
- ◄ الدوران يحافظ على الإستقامية ،أقياس الزوايا و إتجاهها و المرجح
- ◄ الدوران الذي مركزه Ω و زاويته غير معدومة له نقطة صامدة وحيدة هي Ω
- ◄ إذا كان $\theta = 0$ فإن كل نقط صامدة بالدوران الذي مركزه Ω و الزاوية θ و في هذه الحالة هو التحويل المطابق
- ◄ صورة الدائرة (C) مركزها ω ونصف قطرها r بواسطة دوران R هي : دائرة (C') مركزها $\omega' = R(\omega)$ ونصف قطرها r.

مرحلة بنـــــاء و الترسيخ

حل تمرين 68 و 71 و 77 صفحة 149−148

التقويم

ملاحظات حول سير الدرس

....

....

....

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

الأستاذ : بخدة أمين
المستوى : 3رياضيات
المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: المتتاليات
ميدان التعلم: التحليل
موضوع الحصة : الإنسحاب و الأعداد المركبة

المكتسبات القبلية : مفاهيم أولية حول التحويلات النقطية و الأعداد المركبة
الكفاءات المستهدفة : تعيين العبارة المركبة للإنسحاب
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق	**التهيئة النفسية** التذكير بمكتسبات السنة الماضية **الأعداد المركبة و الإنسحاب** في كل مايلي المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ **نشاط** نعتبر الإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{u}$ ذو اللاحقة $z_{\overrightarrow{u}}$ ، لتكن M نقطة لاحقتها z وM' ذات اللاحقة z' هي صورة M بالإنسحاب $t_{\overrightarrow{u}}$ 1 عيّن لاحقة الشعاع $\overrightarrow{MM'}$ بدلالة $z_{\overrightarrow{u}}$. 2 أكتب z' بدلالة z . **مناقشة نشاط** 1 $t_{\overrightarrow{u}}$ إنسحاب يحول النقطة $M(z)$ إلى النقطة $M'(z')$ معناه $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{MM'}$ تكافئ $z_{\overrightarrow{u}}=z_{\overrightarrow{MM'}}$ 2 $z_{\overrightarrow{u}}=z_{\overrightarrow{MM'}}$ تكافئ $z'-z=z_{\overrightarrow{u}}$ تكافئ $z'=z+z_{\overrightarrow{u}}$ و هي العبارة المركبة للإنسحاب	
مرحلة بناء المعارف	**خاصية** — أظف إلى مطويتك التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لا حقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z'=z+b$ (b عدد مركب) هو إنسحاب شعاعه $\overrightarrow{u}$ صورة b **مثال ❶** طبيعة التحويل الذي عبارته المركبة $z'=z+1+i$ هو إنسحاب شعاعه $\overrightarrow{u}\ (1;-1)$ **مثال ❷** العبارة المركبة للإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{u}\ (2;3i)$ هي: $z'=z+2+3i$	

التقويم	**تطبيق:** A و B لاحقتاهما $1+2i$ و $3+5i$ **1** عين الكتابة المركبة للإنسحاب t الذي يحول A إلى B. **2** E نقطة لاحقتها $i-2$ ، عيّن لاحقة النقطة E' صورة E بالإنسحاب t. **3** عيّن معادلة لصورة الدائرة (C) التي مركزها A و نصف قطرها 3 بالإنسحاب t **حل تمرين 70 و 71 صفحة 149** ملاحظات حول سير الدرس	

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

- **الأستاذ :** بخدة أمين
- **المستوى :** 3ريا
- **المدة :** 1 ساعة
- **الوحدة التعلمية:** الأعداد المركبة
- **ميدان التعلم:** الهندسة
- **موضوع الحصة :** التحاكي و الأعداد المركبة

- **المكتسبات القبليـة :** العبارة الشعاعية للتحاكي
- **الكفاءات المستهدفة :** الكتابة المركبة للتحاكي
- **المراجع :** الكتاب المدرسي ،الأنترنت

<table>
<tr><th>المراحل</th><th>عناصر الدرس</th><th>المدة</th></tr>
<tr><td>مـرحـلة الإنطلاق</td><td>
التهيئة النفسية
التذكير بمكتسبات السنة الماضية
الأعداد المركبة و التحاكي
في كل مايلي المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$
</td><td>5د</td></tr>
<tr><td>مرحلة تشخيص و إكتشاف المعارف</td><td>
نشاط
M و Ω نقطتان متمايزتان من المستوي لاحقتيهما Z_Ω و a على الترتيب
f تحويل نقطي، M' نقطة من المستوي لاحقتها Z' ، M' صورة M بالتحويل f أي $f(M)=M'$
حيث أنه من أجل $a\in\mathbb{R}^*$ فإن : $\overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$
1 عيّن حسب قيم العدد الحقيقي الغير المعدوم a طبيعة التحويل f لما $a=1$ ، $a=-1$ و $a\in\mathbb{R}^*-\{1\}$
2 بوضع $a\in\mathbb{R}^*-\{1\}$
أ) عيّن لاحقة الشعاع $\overrightarrow{\Omega M'}$ بدلالة لاحقة الشعاع $\overrightarrow{\Omega M}$
ب) أكتب Z' بدلالة Z
حـل نشاط
1 تحديد طبيعة التحويل f لدينا : $\overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$
★ إذا كان $a=-1$ فإن : $\overrightarrow{\Omega M'}=-\overrightarrow{\Omega M}$ أي أن التحويل f هو التناظر المركزي بالنسبة للنقطة Ω
أو يمكننا أن نقول تحاكي نسبته $a=-1$ و مركزه Ω
★ إذا كان $a=1$ فإن : $\overrightarrow{\Omega M'}=\overrightarrow{\Omega M}$ أي أن $M'=M$. إذن f تحويل تطابقي .
★ إذا كان $a\in\mathbb{R}^*-\{1\}$ فإن التحويل f هو تحاكي مركزه Ω و نسبته a
2 تعيّن لاحقة الشعاع $\overrightarrow{\Omega M'}$ بدلالة لاحقة الشعاع $\overrightarrow{\Omega M}$
$f(M)=M'$ معناه $\overrightarrow{\Omega M'}=a\overrightarrow{\Omega M}$ تكافئ $Z'-Z_\Omega=a(Z-Z_\Omega)$ و هي العبارة المختصرة للتحاكي
3 لدينا $Z'-Z_\Omega=a(Z-Z_\Omega)$ ومنه $Z'=aZ+(1-a)Z_\Omega$ و بوضع $b=(1-a)Z_\Omega$
نجد $Z'=aZ+b$ و هي العبارة المركبة للتحاكي.
</td><td>20د</td></tr>
</table>

العبارة المختصرة للتحاكي

خاصية ❷

أظف إلى مطويتك

a عدد حقيقي غير معدوم و يختلف عن 1 ، Ω نقطة ثابتة من المستوي لاحقتها z_Ω .
M نقطة لاحقتها z و M' نقطة لاحقتها z'
العبارة المختصرة للتحاكي الذي مركزه Ω و نسبته a و الذي يحول M إلى M' هي : $z' - z_\Omega = a(z - z_\Omega)$

5د

مثال ❶

A نقطة لاحقتها $z_A = 2 + i$

أكتب العبارة المختصرة للتحاكي الذي مركزه A و نسبته 3

العبارة المختصرة للتحاكي الذي مركزه A و نسبته 3 هي : $z' - z_A = 3(z - z_A)$
أي $z' - 2 - i = 3(z - 2 - i)$

5د

ملاحظة:
التحاكي h ذو المركز Ω يقبل نقطة صامدة وحيدة و هي المركز Ω أي أن $h(\Omega) = \Omega$

العبارة المركبة للتحاكي

خاصية❶

أظف إلى مطويتك

التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث :
$z' = az + b$ مع : a عدد حقيقي غير معدوم و يختلف عن1 و b عدد مركب هو التحاكي الذي مركزه Ω ذات اللاحقة $z_\Omega = \dfrac{b}{1-a}$ ونسبته a

5د

مثال ❷

عيّن طبيعة التحويل النقطي الذي عبارته المركبة $z' = -\dfrac{3}{2}z - 2 + 3i$

طبيعة التحويل النقطي الذي عبارته المركبة $z' = -\dfrac{3}{2}z - 2 + 3i$ هو تحاكي نسبته $-\dfrac{3}{2}$
ولاحقة مركزه العدد المركب $\dfrac{-2+3i}{1+\dfrac{3}{2}} = -\dfrac{4}{5} + \dfrac{6}{5}i$

5د

تطبيق:
A ، B و C ثلاث نقط لواحقها $z_A = i$ ، $z_B = 3 - 2i$ و $z_C = -1 + 2i$ على الترتيب
1 عيّن العبارة المركبة للتحاكي h الذي مركزه A و يحول B إلى C .

2 عيّن z_D لاحقة النقطة D صورة C بالتحاكي h

15د

عمل منزلي: حل تمرين 79 و82 صفحة 150

ملاحظات حول سير الدرس

....
....
....

سير الدرس — التقويم

مــذكــرة رقـــم 16

الأستاذ :بــخدة أمــين

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

الأستاذ : بخدة أمين

الوحدة التعلمية: الأعداد المركبة

المستوى : 3ريا

ميدان التعلم: الهندسة

المدة : 1 ساعة

موضوع الحصة : الدوران و الأعداد المركبة

المكتسبات القبلية : مفاهيم أولية حول التحويلات النقطية و الأعداد المركبة

الكفاءات المستهدفة : تعيين العبارة المركبة للدوران

المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق / مرحلة بناء المعارف	(انظر أدناه)	

مرحلة الإنطلاق

التذكير بمكتسبات السنة الماضية

الأعداد المركبة و الدوران

في كل مايلي المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$

نشاط

نعتبر الدوران R الذي مركزه Ω ذات اللاحقة z_Ω و زاويته θ مع $\theta\in\mathbb{R}$

لتكن M نقطة لاحقتها z و M' ذات اللاحقة z' هي صورة M بالدوران R.

1 عيّن طويلة و عمدة العدد المركب $a=\dfrac{z'-z_\Omega}{z-z_\Omega}$ ، ثم أكتبه على الشكل الأسي .

2 أكتب z' بدلالة z

مناقشة نشاط

مرحلة بناء المعارف

1 $\Omega M'=\Omega M$ تكافئ $\overrightarrow{\Omega M}=\overrightarrow{\Omega M'}$ تكافئ $|z'-z_\Omega|=|z-z_\Omega|$ تكافئ $\dfrac{|z'-z_\Omega|}{|z-z_\Omega|}=1$

ومنه $\left|\dfrac{z'-z_\Omega}{z-z_\Omega}\right|=1$ و بالتالي : $|a|=1$

من جهة أخرى لدينا $\left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right)=\theta$ معناه $\arg\left(\dfrac{z'-z_\Omega}{z-z_\Omega}\right)=\theta$ ومنه $\arg(a)=\theta$. إذن $a=e^{i\theta}$

2 لدينا: $\dfrac{z'-z_\Omega}{z-z_\Omega}=e^{i\theta}$ تكافئ $z'-z_\Omega=e^{i\theta}(z-z_\Omega)$ و هي العبارة المختصرة للدوران

ومنه $z'=e^{i\theta}z+(1-e^{i\theta})z_\Omega$ بوضع : $b=(1-e^{i\theta})z_\Omega$ نجد $z'=az+b$ حيث : $a=e^{i\theta}$

و هي العبارة المركبة للدوران R ذي الزاوية θ

خاصية 1 — أظف إلى مطويتك

التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لا حقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z'

حيث : $z'=az+b$ مع : a عدد مركب غير حقيقي طويلته 1 و b عدد مركب

هو الدوران الذي مركزه Ω ذات اللاحقة $z_\Omega=\dfrac{b}{1-a}$ و زاويته $\arg(a)$

خاصية 2 — أظف إلى مطويتك

a عدد مركب غير حقيقي طويلته 1 ، Ω نقطة ثابتة من المستوي لاحقتها z_Ω

M نقطة لاحقتها z و M' نقطة لاحقتها z'

العبارة المختصرة للدوران الذي مركزه Ω و زاويته $\arg(a)$ و الذي يحول النقطة M إلى النقطة M'

هي : $z'-z_\Omega=a(z-z_\Omega)$ حيث : $a=e^{i\theta}$

مرحلة بناء المعارف

ملاحظة:
$z'-z_\Omega=a(z-z_\Omega)$ معناه : $z'=az+(1-a)z_\Omega$ معناه $z'=az+b$ حيث $b=(1-a)z_\Omega$

مثال ❶

طبيعة التحويل الذي عبارته المركبة : $z'=iz+2-i$
هو دوران زاويته $\arg(i)=\dfrac{\pi}{2}$ ومركزه Ω ذات اللاحقة $z_\Omega=\dfrac{2-i}{1-i}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i$

مثال ❷

العبارة المركبة للدوران الذي مركزه Ω ذات اللاحقة $z_\Omega=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$ و زاويته $\dfrac{\pi}{3}$
هي : $z'=e^{i\frac{\pi}{3}}z+b$ ومنه : $z'=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z-i$ حيث : $b=(1-a)z_\Omega$
(يمكن إستعمال العبارة المختصرة للحصول على المطلوب)

تطبيق: A و B نقطتان لاحقتاهما $z_A=1-2i$ و $z_B=4+2i$ على الترتيب .
★ لنعين z'_B لاحقة النقطة B' صورة B بالدوران R الذي مركزه A و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$.
لدينا : $R(B)=B'$ معناه $z'_B-z_A=e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B-z_A)$ ومنه $z'_B=i(z_B-z_A)+z_A$
إذن : $z'_B=i(4+2i-1+2i)+1-2i=-3+i$

التقويم

تطبيق:
A ، B و C ثلاث نقط لواحقها $z_A=3+3i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=-1+2i$ على الترتيب

1. أعط العبارة المركبة للدوران R الذي مركزه O و يحول A إلى B
2. إستنتج طبيعة المثلث ABO
3. عيّن z_D لاحقة النقطة D صورة C بالدوران R
4. عيّن (C) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $z=2+i+e^{i\theta}$ مع $\theta\in\mathbb{R}$
5. عيّن صورة (C) بالدوران R

حل تمرين 80 و83 صفحة 150

ملاحظات حول سير الدرس

....
....
....

الأعداد المركبة

ملخص دروس

السنة الدراسية : 2018-2019

$z = x + iy$

توظيف الأعداد المركبة في حل مسائل هندسية

استقامية النقط

- إذا كان $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = k, k \in \mathbb{R}$ حيث $A \neq B$ نستنتج أن النقط C,B,A على استقامية.
- إذا كان $\frac{z_B}{z_A} = k, k \in \mathbb{R}$ حيث $A \neq O$ نستنتج أن النقط O,B,A على استقامية.

تداور النقط

- إذا كان: $|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = r$ نستنتج أن النقط C,B,A و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O ونصف القطر r.
- إذا كان: $|z_A - z_\omega| = |z_B - z_\omega| = |z_C - z_\omega| = |z_D - z_\omega| = r$ نستنتج أن النقط C,B,A و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز ω ونصف القطر r .

توازي شعاعين أو مستقيمين :

- إذا كان $\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A} = k, k \in \mathbb{R}^*$ حيث $B \neq D$ و $A \neq C$ نستنتج أن $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{BD}$ أو $(AC) \parallel (BD)$.

تعامد شعاعين أو مستقيمين :

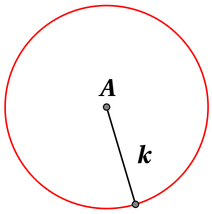
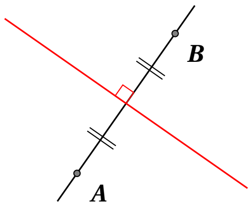
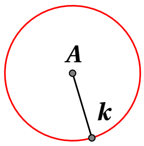
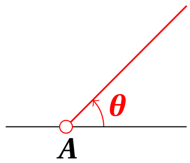
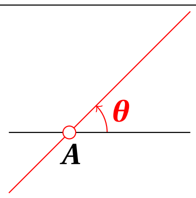
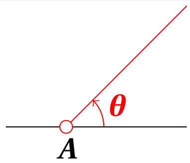
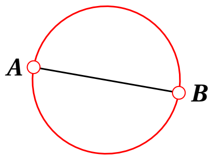
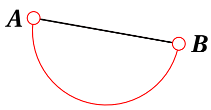
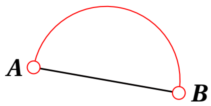
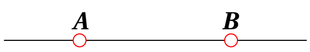
- إذا كان $\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A} = iy, y \in \mathbb{R}^*$ حيث $B \neq D$ و $A \neq C$ نستنتج أن $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$ أو $(AC) \perp (BD)$.

تعيين الأعداد الطبيعية n بحيث z^n عدد مركب خاص :

ليكن الشكل الأسي $z = re^{i\theta}$ إذن $z^n = r^n e^{in\theta}$ ، تذكر أن :

- z^n حقيقي يعني : $n\theta = k\pi$.
- z^n حقيقي موجب يعني : $n\theta = 2k\pi$.
- z^n حقيقي سالب يعني : $n\theta = (2k+1)\pi$.
- z^n تخيلي صرف يعني : $n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
- z^n تخيلي صرف و $\mathrm{Im}(z^n) > 0$ يعني : $n\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.
- z^n تخيلي صرف و $\mathrm{Im}(z^n) < 0$ يعني : $n\theta = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi$.

مجموعة النقط في الأعداد المركبة

العبارة المركبة	مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z	التمثيل البياني
$\|z-z_A\|=k$	• $k<0$: مجموعة خالية. • $k=0$: مجموعة النقط هي النقطة A . • $k>0$: مجموعة النقط هي دائرة مركزها A ونصف قطرها k.	
$\|z-z_A\|=\|z-z_B\|$	مجموعة النقط هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$	
$z-z_A=ke^{i\theta}$ k ثابت موجب تماماً $\theta\in\mathbb{R}$	مجموعة النقط هي دائرة مركزها A ونصف قطرها k.	
$z-z_A=ke^{i\theta}$ θ ثابت $k\in\mathbb{R}_+^*$	مجموعة النقط هو نصف مستقيم $[AM)$ باستثناء النقطة A حيث $\left(\vec{i};\overrightarrow{AM}\right)=\theta$	
$\arg(z-z_A)=\theta+k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$	مجموعة النقط هو المستقيم (AM) باستثناء النقطة A حيث $\left(\vec{i};\overrightarrow{AM}\right)=\theta$	
$\arg(z-z_A)=\theta+2k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$	مجموعة النقط هو نصف المستقيم $[AM)$ باستثناء النقطة A حيث $\left(\vec{i};\overrightarrow{AM}\right)=\theta$	
$\arg\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right)=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$	مجموعة النقط هي الدائرة التي قطرها $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B .	
$\arg\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$	مجموعة النقط هي نصف الدائرة التي قطرها $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B .	
$\arg\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right)=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$	مجموعة النقط هي نصف الدائرة التي قطرها $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B .	
$k\in\mathbb{Z}$, $\arg\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right)=k\pi$	مجموعة النقط هو المستقيم (AB) باستثناء النقطتين A و B.	
$\arg\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right)=\pi+2k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$	مجموعة النقط هو القطعة المستقيمة $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B.	
$\arg\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right)=2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$	مجموعة النقط هو المستقيم (AB) باستثناء القطعة $[AB]$.	

التعرف على طبيعة المثلث ABC	
العلاقة المركبة	**التفسير الهندسي**
$\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{i\theta}$	$AB = AC$ المثلث ABC متساوي الساقين.
$\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{\pm\frac{\pi}{2}} = \pm i$	• $AB = AC$ • $\arg\left(\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \pm\dfrac{\pi}{2}$ أي $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right) = \pm\dfrac{\pi}{2}$ أي $(AC) \perp (AB)$ • المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين.
$\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = re^{\pm\frac{\pi}{2}} = ai$	• $\arg\left(\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \pm\dfrac{\pi}{2}$ أي $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right) = \pm\dfrac{\pi}{2}$ أي $(AC) \perp (AB)$ • المثلث ABC قائم في A.
$\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{\pm\frac{\pi}{3}i}$	• $AB = AC$ • $\arg\left(\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \pm\dfrac{\pi}{3}$ أي $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right) = \pm\dfrac{\pi}{3}$ • المثلث ABC متقايس الأضلاع.
$\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\pm\frac{\pi}{4}i}$	• $CA = CB$ • $\arg\left(\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \pm\dfrac{\pi}{4}$ أي $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right) = \pm\dfrac{\pi}{4}$ • المثلث ABC قائم في C ومتساوي الساقين.

التعرف على طبيعة الرباعي $ABCD$	
الرباعي $ABCD$ يكون	**التعليل**
متوازي الأضلاع	• $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ • $z_B - z_A = z_C - z_D$ • الأقطار متناصفة $\dfrac{z_A + z_C}{2} = \dfrac{z_B + z_D}{2}$
المعين	• $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ و $AB = AD$ • $z_B - z_A = z_C - z_D$ و $\|z_B - z_A\| = \|z_D - z_A\|$ • الأقطار متناصفة ومتعامدة $\dfrac{z_A + z_C}{2} = \dfrac{z_B + z_D}{2}$ و $(AC) \perp (BD)$
المستطيل	• $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ، $AB \neq AD$ و $(AB) \perp (AD)$ أي $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ • الأقطار متناصفة ومتقايسة $\dfrac{z_A + z_C}{2} = \dfrac{z_B + z_D}{2}$ و $\|z_C - z_A\| = \|z_D - z_B\|$
المربع	• $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ، $AB = AD$ و $(AB) \perp (AD)$ أي $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ • $z_B - z_A = z_C - z_D$ ، $\|z_B - z_A\| = \|z_D - z_B\|$ و $(AB) \perp (AD)$ • الأقطار متناصفة ومتقايسة ومتعامدة $\dfrac{z_A + z_C}{2} = \dfrac{z_B + z_D}{2}$ و $\|z_C - z_A\| = \|z_D - z_B\|$ و $(AC) \perp (BD)$.