تمرين 002

θ عدد حقيقي بحيث $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$.

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 2\cos\theta$ و بالعلاقة $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

1. عبِّر بدلالة θ عن الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية (u_n).
2. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$.
3. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة و حدد نهايتها.

التمرين 001 : https ://fikradz.com/download/1533220

الحل

نذكّر أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ أي $1 + \cos(2x) = 2\cos^2 x$.

1. لدينا : (من المعطيات) $u_0 = 2\cos\theta$

$$u_1 = \sqrt{2+u_1} = \sqrt{2+2\cos\theta} = \sqrt{2(1+\cos\theta)} = \sqrt{2\times 2\cos\frac{\theta}{2}} = \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}} = 2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$$

و بما أن $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ فإن $\frac{\theta}{2} \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ منه $\cos\frac{\theta}{2} > 0$ إذن $u_1 = 2\cos\frac{\theta}{2}$

$$u_2 = \sqrt{2+u_1} = \sqrt{2+2\cos\frac{\theta}{2}} = \sqrt{2\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)} = \sqrt{2\times 2\cos^2\frac{\theta}{4}} = \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{4}} = 2\left|\cos\frac{\theta}{4}\right|$$

و بما أن $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ فإن $\frac{\theta}{4} \in \left[0; \frac{\pi}{8}\right]$ منه $\cos\frac{\theta}{4} > 0$ إذن $u_2 = 2\cos\frac{\theta}{4}$

2. • من أجل $n = 0$، لدينا : $u_0 = 2\cos\theta = 2\cos\frac{\theta}{2^0}$ إذن العلاقة محققة.

• نفرض أن العلاقة محققة في الرتبة k أي $u_k = 2\cos\frac{\theta}{2^k}$ و نبرهن أن $u_{k+1} = 2\cos\frac{\theta}{2^{k+1}}$. لدينا :

$$u_{k+1} = \sqrt{2+u_k} = \sqrt{2+2\cos\frac{\theta}{2^k}} = \sqrt{2\left(1+\cos\frac{\theta}{2^k}\right)} = \sqrt{4\cos^2\left(\frac{\theta}{2^{k+1}}\right)} = 2\left|\cos\frac{\theta}{2^{k+1}}\right|$$

مع $\frac{\theta}{2^{k+1}} \in \left[0; \frac{\pi}{2^{k+1}}\right]$ منه $\cos\frac{\theta}{2^{k+1}} > 0$ إذن $u_{k+1} = 2\cos\frac{\theta}{2^{k+1}}$

حسب مبدأ البرهان بالتراجع، نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$.

3. من أجل كل عدد طبيعي n، لدينا : $\frac{\theta}{2^{n+1}} < \frac{\theta}{2^n}$.

الدالة $\cos$ متناقصة تماما على $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ إذن $\cos\frac{\theta}{2^{n+1}} > \cos\frac{\theta}{2^n}$ أي $u_{n+1} > u_n$.

هذا يعني أن المتتالية (u_n) متزايدة.

بما أن $\cos\frac{\theta}{2^n} \leqslant 1$ فإن $u_n \leqslant 2$ إذن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى.

المتتالية (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى فهي متقاربة.

حساب نهايتها :

بما أن $2^n \longrightarrow +\infty$ فإن $\frac{\theta}{2^n} \longrightarrow 0$ منه $\cos\frac{\theta}{2^n} \longrightarrow \cos 0 = 1$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.