07) الزوايا الموجهة

1. الزوايا الموجهة لشعاعين

زاوية موجهة لشعاعين غير معدومين

في المستوي توجيها مباشرا (أو توجيها موجبا) ويسمى الاتجاه الآخر الاتجاه غير المباشر (أو الاتجاه السلبي).
عطلاحا نختار الاتجاه المباشر الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة.
في المستوي الموجه نسمي دائرة مثلثية كل دائرة موجهة في الاتجاه المباشر والتي نصف قطرها 1.
في كل ما يأتي نعتبر المستوي الموجه
تعريف ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين غير معدومين.
ثنائية $(\vec{u},\vec{v})$ تسمى زاوية موجهة لشعاعين.

2. خواص الزوايا الموجهة

الزوايا الموجهة المتقايسة

خاصية $\vec{u}$، $\vec{v}$، $\vec{u}'$ و $\vec{v}'$ أشعة غير معدومة من المستوي، ليكن α قيسا للزاوية $(\vec{u},\vec{v})$ و α' قيسا للزاوية $(\vec{u}',\vec{v}')$
تكون الزاويتان $(\vec{u},\vec{v})$ و $(\vec{u}',\vec{v}')$ متقايستين إذا وفقط إذا وجد عدد صحيح k حيث $\alpha' = \alpha + 2k\pi$.
ملاحظة وجود عدد صحيح k حيث $\alpha' = \alpha + 2k\pi$ معناه $\alpha' - \alpha$ مضاعف لـ2π.
إذا كان $\alpha' = \alpha + 2k\pi$ نقول أن α و α' قيسان لنفس الزاوية أو قيسان لزاويتين متقايستين.

الزوايا الموجهة والارتباط الخطي لشعاعين.

خاصية: $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان غير معدومين من المستوي.
يكون الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا إذا وفقط إذا كان: $(\vec{u},\vec{v}) = 2k\pi$ أو $(\vec{u},\vec{v}) = \pi + 2k\pi$. $k \in \mathbb{Z}$
ملاحظة إذا كان $(\vec{u};\vec{v}) = 2k\pi$ يكون للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ نفس الاتجاه
إذا كان $(\vec{u},\vec{v}) = \pi + 2k\pi$ يكون للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ اتجاهين متعاكسين
خاصية $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان غير معدومان من المستوي، ليكن k و k' عددين حقيقيين غير معدومين .
- إذا كان k و k' من نفس الإشارة فإن $(k\vec{u},k'\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v})$
- إذا كان k و k' من إشارتين مختلفتين فإن $(k\vec{u},k'\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v}) + \pi$.

الزاوية المحيطية

(C) دائرة مثلثية مركزها O و A ، B و M ثلاث نقط متمايزة مثنى مثنى من الدائرة (C). الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})$ تسمى زاوية محيطية.
مبرهنة إذا كانت A ، B و M ثلاث نقط متمايزة مثنى مثنى من دائرة مثلثية (C) مركزها O وإذا كان α قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$. فإن $\frac{\alpha}{2}$ قيس للزاوية $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})$.

أقيس الزاوية موجهة

ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين غير معدومين ولتكن (C) دائرة مثلثية مركزها O لتكن M و N النقطتين من المستوي حيث $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ و $\overrightarrow{ON} = \vec{v}$ المستقيم (OM) يقطع (C) في A والمستقيم (ON) يقطع (C) في B ، قيس بالراديان للزاوية الموجهة $(\vec{u},\vec{v})$ هو كذالك قيس بالراديان للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON})$.

تعريف ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين غير معدومين.
إذا كان x قيسا للزاوية الموجهة $(\vec{u},\vec{v})$ فإن كل الأعداد من الشكل $x+2k\pi$ هي أقياس للزاوية $(\vec{u},\vec{v})$ مع $k\in\mathbb{Z}$

تعبير نقبل التجاوز في التعبير الذي نعبر به على الزاوية وقيس لها في نفس الوقت ونقول الزاوية $(\vec{u},\vec{v})$ تساوي x.

خاصية من بين أقياس الزاوية الموجهة $(\vec{u},\vec{v})$ يوجد قيس وحيد على المجال $]-\pi,\pi]$ يسمى القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{u},\vec{v})$.

نتائج

1) القيس الرئيسي للزاوية المعدومة $(\vec{u},\vec{u})$ هو 0
2) القيس الرئيسي للزاوية المستقيمة $(\vec{u},-\vec{u})$ هو π
3) القيس الرئيسي للزاوية القائمة المباشرة هو $\frac{\pi}{2}$.
4) القيس الرئيسي للزاوية القائمة غير المباشرة هو $-\frac{\pi}{2}$
5) إذا كان x القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{u},\vec{v})$ فإن $|x|$ هو قيس للزاوية الهندسية المكونة من $\vec{u}$ و $\vec{v}$

◆ علاقة شال

مبرهنة (تقبل بدون برهان) من أجل كل ثلاثة أشعة غير معدومة $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ لدينا .

$$(\vec{u},\vec{v})+(\vec{v},\vec{w})=(\vec{u},\vec{w})$$

نتائج

من أجل كل شعاعين غير معدومين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ لدينا :

- $(\vec{v},\vec{u})=-(\vec{u},\vec{v})$
- $(\vec{u},-\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})+\pi$
- $(-\vec{u},\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})+\pi$
- $(-\vec{u},-\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})$

❖ 3. حساب المثلثات

◆ معلم متعامد ومتجانس مباشر

تعريف إذا كان $(o,\vec{i},\vec{j})=\frac{\pi}{2}$ نقول أن المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ من المستوى مباشر
إذا كان $(\vec{i},\vec{j})=-\frac{\pi}{2}$ نقول أن المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ من المستوى غير مباشر.

◆ جيب تمام و جيب زاوية موجهة لشعاعين

تذكير و تعريف (C) دائرة مثلثية مركزها O ، لتكن A و B نقطتين من الدائرة (C) حيث أن $(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ معلم متعامد و متجانس مباشر

نضع $\overrightarrow{OA}=\vec{i}$ و $\overrightarrow{OB}=\vec{j}$ ، لكل عدد حقيقي x صورة M على الدائرة (C) حيث x قيس بالراديان للزاوية الموجهة $(\vec{i},\overrightarrow{OM})$ ، نعلم أن جيب تمام العدد x هو فاصلة النقطة M ونكتب $\cos x$ وأن جيب العدد x هو ترتيب النقطة M ونكتب $\sin x$.

إذا كان x قيسا بالراديان للزاوية الموجهة $(\vec{i},\overrightarrow{OM})$ فإن كل عدد من الشكل $x+2k\pi$ حيث k عدد صحيح هو كذلك قيس بالراديان للزاوية الموجهة $(\vec{i},\overrightarrow{OM})$ ومنه x و $x+2k\pi$ لهما نفس الصورة M على الدائرة (C) وبالتالي: $\cos(x+2k\pi)=\cos x$ و $\sin(x+2k\pi)=\sin x$ مع $k\in\mathbb{Z}$
نقول أن الدالتين دوريتان و 2π دور لهما.

نتائج من أجل كل عدد حقيقي x : $-1\le\cos x\le 1$ ، $-1\le\sin x\le 1$

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1$$

جدول القيم الشهيرة

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

تعريف

- جيب تمام زاوية موجهة $(\vec{u},\vec{v})$ هو جيب تمام أحد أقياسها بالراديان و نرمز له بالرمز $\cos(\vec{u},\vec{v})$.
- جيب زاوية موجهة $(\vec{u},\vec{v})$ هو جيب أحد أقياسها بالراديان ونرمز له بالرمز $\sin(\vec{u},\vec{v})$.

4. جيب تمام وجيب الزوايا المرفقة

تعريف نسمي الزوايا المرفقة بزاوية موجهة حيث x قيس لها، الزوايا الموجهة التي أحد أقياسها:
$-x$ ، $\pi - x$ ، $\pi + x$ ، $\frac{\pi}{2} - x$ ، $\frac{\pi}{2} + x$.

في ما يلي نأخذ xعددا حقيقيا و M صورته على دائرة مثلثية المرفقة بالمعلم المتعامد و المتجانس$(O;\vec{i},\vec{j})$.

مبرهنة 1 من أجل كل عدد حقيقي x لدينا

$$(1)\ \begin{cases}\cos(\pi + x) = -\cos x\\ \sin(\pi + x) = -\sin x\end{cases}$$

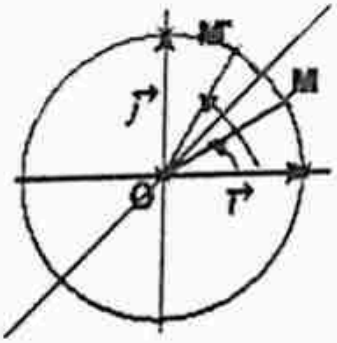
$$(2)\ \begin{cases}\cos(\pi - x) = -\cos x\\ \sin(\pi - x) = \sin x\end{cases}$$

$$(3)\ \begin{cases}\cos(-x) = \cos x\\ \sin(-x) = -\sin x\end{cases}$$

ملاحظة من الجملة (3) نستنتج أن الدالة $\cos$ (جيب تمام) دالة زوجية و أن الدالة $\sin$ (جيب) دالة فردية

مبرهنة 2 من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

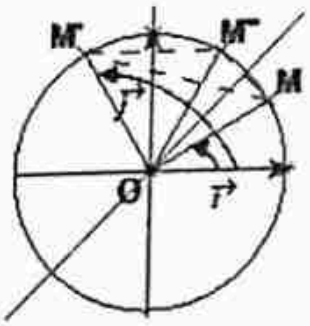
$$\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x\\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x\end{cases} \text{ و } \begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x\\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x\end{cases}$$



في الشكل المقابل: M و M' نقطتان من الدائرة المثلثية.M و M' متناظرتان بالنسبة إلى المنصف الأول للمعلم. فاصلة M هي ترتيب M' وفاصلة M' هي ترتيب M.

$\left(\vec{i},\overrightarrow{OM'}\right) = \frac{\pi}{2} - x$ و $\left(\vec{i},\overrightarrow{OM}\right) = x$

منه: $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ و $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$



في الشكل المقابل النقطة M' صورة العدد $x + \frac{\pi}{2}$ على الدائرة المثلثية وهي نظيرة M بالنسبة إلى محور التراتيب، و"M هي صورة $\frac{\pi}{2} - x$ على الدائرة المثلثية

منه M' و"M لهما نفس الترتيب وفاصلتان متعاكستان.$\left(\vec{i},\overrightarrow{OM}\right) = x$ ،

$\left(\vec{i},\overrightarrow{OM''}\right) = \frac{\pi}{2} - x$ $\left(\vec{i},\overrightarrow{OM''}\right) = \frac{\pi}{2} - x$، $\left(\vec{i},\overrightarrow{OM'}\right) = \frac{\pi}{2} +$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ، $\sin\left(\frac{\pi}{2} +\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

منه: $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ و $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

5. معادلات مثلثية

عددين حقيقيين لهما نفس الجيب تمام ونفس الجيب

ليكن a و b عددين حقيقيين.

$\sin a = \sin b$ معناه $a = b + 2k\pi$ أو $a = \pi - b + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$

$\cos a = \cos b$ معناه $a = b + 2k\pi$ أو $a = -b + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$

المعادلات المثلثية الأساسية

- **المعادلات من الشكل $\cos x = a$**: حيث a عدد حقيقي.
- إذا كان $a < -1$ أو $a > 1$ المعادلة لا تقبل حلولا.
- إذا كان $-1 \leq a \leq 1$ يوجد عدد حقيقي c حيث $a = \cos c$ والحلول هي $[x = c + 2k\pi$ أو $x = -c + 2k\pi]$
- **المعادلات من الشكل $\sin x = a$** حيث a عدد حقيقي.
- إذا كان $a < -1$ أو $a > 1$ المعادلة لا تقبل حلولا.
- إذا كان $-1 \leq a \leq 1$ يوجد عدد حقيقي c حيث $a = \sin c$ والحلول هي $[x = c + 2k\pi$ أو $x = \pi - c + 2k\pi]$.

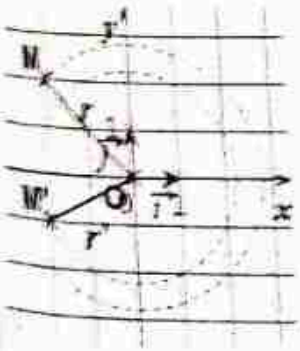
6. الإحداثيات القطبية

التعليم القطبي

ليكن $(O; \vec{i}, \vec{j})$ معلم مباشر متعامد ومتجانس. لتكن (C) الدائرة المثلثية التي مركزها O.

تعريف من أجل كل نقطة M غير منطبقة على O، الثنائية (r, θ)، حيث $OM = r$ و $\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{OM})$، تسمى ثنائية إحداثيات قطبية في المستوي للنقطة M ونرمز $M(r, \theta)$ (r عدد حقيقي موجب تماما و θ عدد حقيقي)

النقطة O تسمى القطب، $(O; \vec{i})$ يسمى المحور القطبي، نقول أن r هو نصف القطر القطبي و θ إحدى الزوايا القطبية.



في الشكل $OM = 2\sqrt{2}$ و $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = \frac{3\pi}{4}$ إذا الإحداثيات القطبية للنقطة M هي: $\left(2\sqrt{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$.

في الشكل $OM' = \sqrt{5}$ و $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = \frac{5\pi}{6}$ إذا الإحداثيات القطبية للنقطة M هي: $\left(\sqrt{5}; \frac{5\pi}{6}\right)$.

ملاحظة: الثنائية $M(r, \theta)$ تعرف نقطة وحيدة M.

العلاقة بين الإحداثيات القطبية والإحداثيات الديكارتية

مبرهنة في معلم مباشر متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ لتكن (C) الدائرة المثلثية، إذا كانت النقطة M غير منطبقة على O و كانت إحداثياها الديكارتية $(x; y)$ و إحداثياها القطبية (r, θ) فإن:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \quad x = r\cos\theta \quad ; \quad y = r\sin\theta$$

128. تمرين رقم 01

نموذج: الزوايا الموجهة وتطبيقاتها للثانية ثانوي رقم 2

ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ أشعة غير معدومة بحيث:

$(\vec{u};\vec{v}) = \dots$ و $(\vec{u};\vec{w}) = \frac{\pi}{6}$

احسب أقياس الزوايا الموجهة التالية: $(\vec{u};-\vec{v})$ ، $(\vec{u};4\vec{u})$ ، $(\vec{v};\vec{w})$ ، $(-2\vec{w};-5\vec{v})$

الحل

حساب أقياس الزوايا

- حساب قيس الزاوية $(\vec{u};-\vec{v})$:

$$(\vec{u};-\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v}) + \pi = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$$

- حساب قيس الزاوية $(\vec{u};4\vec{u})$:

$$(\vec{u};4\vec{u}) = (\vec{u};\vec{u}) = 0$$

- حساب قيس الزاوية $(\vec{v};\vec{w})$

$$(\vec{u};\vec{v}) = (\vec{u};\vec{w}) + (\vec{w};\vec{v})$$
$$(\vec{w};\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v}) - (\vec{u};\vec{w})$$
$$-(\vec{w};\vec{v}) = -(\vec{u};\vec{v}) + (\vec{u};\vec{w})$$
$$(\vec{v};\vec{w}) = -(\vec{u};\vec{v}) + (\vec{u};\vec{w})$$
$$(\vec{v};\vec{w}) = -\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{6}$$
$$(\vec{v};\vec{w}) = -\frac{\pi}{6}$$

- حساب قيس الزاوية $(-2\vec{w};-5\vec{v})$:

$(k\vec{u};k'\vec{v})$ مع k و k' لهما نفس الإشارة

$$(k\vec{u};k'\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v})$$

أما إذا لم يكونا من نفس الإشارة

$$(k\vec{u};k'\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v}) + \pi$$

إذن

$$(-2\vec{w};-5\vec{v}) = (\vec{w};\vec{v}) = \frac{\pi}{6}$$

129. تمرين رقم 02

نموذج: الزوايا الموجهة وتطبيقاتها للثانية ثانوي رقم 3

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان غير معدومان بحيث $(\vec{u};\vec{v}) = \frac{\pi}{6}$

- عين قيس الزوايا الموجهة التالية:

$(\vec{u};2016\vec{u})$ ، $(\vec{u};-\vec{v})$ ، $(-\vec{u};\vec{v})$ ، $(-\vec{u};-\vec{v})$ ، $(-\vec{v};\vec{u})$ ، $(\vec{v};\vec{u})$ ، $(-\vec{v};-\vec{u})$ ، $(2\vec{u};3\vec{v})$ ، $(-2\vec{u};-3\vec{v})$ ، $(2\vec{v};-3\vec{u})$ ، $(2016\vec{v};1437\vec{u})$ ، $(1437\vec{v};-2016\vec{v})$

الحل

- $(\vec{u};2016\vec{u})$

$$(\vec{u};2016\vec{u}) = (\vec{u};\vec{u}) = 0$$

- $(\vec{u};-\vec{v})$

$$(\vec{u};-\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v}) + \pi = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$$

- $(-\vec{u};\vec{v})$

$$(-\vec{u};\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v}) + \pi = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$$

- $(-\vec{u};-\vec{v})$

$$(-\vec{u};-\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v}) = \frac{\pi}{6}$$

- $(-\vec{v};\vec{u})$

$$(-\vec{v};\vec{u}) = -(\vec{u};-\vec{v}) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

- $(\vec{v};\vec{u})$

$$(\vec{v};\vec{u}) = -(\vec{u};\vec{v}) = -\frac{\pi}{6}$$

- $(-\vec{v};-\vec{u})$

$$(-\vec{v};-\vec{u}) = (\vec{v};\vec{u}) = -\frac{\pi}{6}$$

- $(2\vec{u};3\vec{v})$

$$(2\vec{u};3\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v}) = \frac{\pi}{6}$$

- $(-2\vec{u};-3\vec{v})$

$$(-2\vec{u};-3\vec{v}) = (2\vec{u};3\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v}) = \frac{\pi}{6}$$

- $(2\vec{v};-3\vec{u})$

$$(2\vec{v};-3\vec{u}) = (\vec{v};-\vec{u}) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

- $(2016\vec{v};1437\vec{u})$

$$(2016\vec{v};1437\vec{u}) = (\vec{v};\vec{u}) = -(\vec{u};\vec{v}) = -\frac{\pi}{6}$$

- $(1437\vec{v};-2016\vec{v})$

$$(1437\vec{v};-2016\vec{v}) = (\vec{v};-\vec{v}) = \pi$$

130. تمرين رقم 03

اليوتيوب: الزوايا الموجهة و تطبيقاتها للثانية ثانوي رقم 4

ABC مثلث متساوي الساقين رأسه C حيث $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{6}$ ، J نقطة من $[AC]$ بحيث :

$$(\overrightarrow{BJ},\overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{4}$$

-عين القيس الرئيسي لكل من الزاويتين الموجهتين $(\overrightarrow{BJ},\overrightarrow{CA})$ و $(\overrightarrow{JB};\overrightarrow{BC})$

الحل

- تعيين القيس الرئيسي لـ $(\overrightarrow{BJ};\overrightarrow{CA})$

$$(\overrightarrow{BJ};\overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{BJ};\overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA};\overrightarrow{CA})$$
$$= \frac{\pi}{4} + (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$$

المثلث ABC متساوي الساقين اي:

$$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) = \alpha$$

نعلم أن مجموع زوايا المثلث هي π :

ومنه $\alpha + \alpha + \frac{\pi}{6} = \pi$

$$2\alpha = \pi - \frac{\pi}{6}$$
$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$$

وعليه

$$(\overrightarrow{BJ};\overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{BJ};\overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA};\overrightarrow{CA})$$
$$= \frac{\pi}{4} + (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{12}$$
$$= \frac{2\pi}{3}$$
$$(\overrightarrow{BJ};\overrightarrow{CA}) = \frac{2\pi}{3}$$

- تعيين القيس الرئيسي لـ $(\overrightarrow{JB};\overrightarrow{BC})$

$$(\overrightarrow{JB};\overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{JB};\overrightarrow{BJ}) + (\overrightarrow{BJ};\overrightarrow{BC})$$
$$(\overrightarrow{JB};\overrightarrow{BJ}) = \pi$$
$$(\overrightarrow{BJ};\overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{B};\overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{12}$$
$$= -\frac{\pi}{6}$$

ومنه:

$$(\overrightarrow{JB};\overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{JB};\overrightarrow{BJ}) + (\overrightarrow{BJ};\overrightarrow{BC}) = \pi - \frac{\pi}{6}$$
$$= \frac{5\pi}{6}$$

$$(\overrightarrow{JB};\overrightarrow{BC}) = \frac{5\pi}{6}$$

131. تمرين رقم 04

اليوتيوب: اختبار الفصل الثاني في الرياضيات للسنة الثانية ثانوي الزوايا الموجهة رقم 5

1- حل في المجال $[-\pi;\pi]$ المعادلة :

$$\sqrt{2}\sin(x) + 1 = 0$$

2- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $2y^2 + 7y + 3 = 0$ ثم استنتج حلول المعادلة:

$$2\cos^2(x) + 7\cos(x) + 3 = 0$$

3- بين أن:

$$\sin\left(\frac{95\pi}{100}\right) + \sin\left(\frac{97\pi}{100}\right) + \sin\left(\frac{103\pi}{100}\right) + \sin\left(\frac{105\pi}{100}\right) = 0$$

الحل

1- حل المعادلة $\sqrt{2}\sin(x) + 1 = 0$

$$\sqrt{2}\sin(x) + 1 = 0$$
$$\sqrt{2}\sin(x) = -1$$
$$\sin(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\sin(x) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$
$$x = -\frac{3\pi}{4} \text{ أو } x = -\frac{\pi}{4}$$
$$S = \left\{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right\}$$

2- حل المعادلة $2y^2 + 7y + 3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 49 - 4(2)(3) = 49 - 24$

$\Delta = 25 > 0$ إذن للمعادلة حلان متمايزان

$$\sqrt{\Delta} = 5$$
$$y_1 = \frac{-7-5}{2(2)} = -\frac{12}{4} = -3$$
$$y_2 = \frac{-7+5}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$
$$S' = \left\{-3, -\frac{1}{2}\right\}$$

- استنتاج حلول المعادلة

$$2\cos^2(x) + 7\cos(x) + 3 = 0$$

بوضع $y = \cos(x)$

$$2(\cos(x))^2 + 7\cos(x) + 3 = 0$$
$$2y^2 + 7y + 3 = 0 \ldots\ldots (*)$$

ومنه حلول المعادلة $(*)$ هي $\begin{cases} y = -3 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

هذا مستحيل $\cos(x) = -3$ ،

أي: $-1 \leq \cos(x) \leq 1$

$\cos(x) = -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

$$\cos(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{أو} \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$S'' = \{-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\ ,\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

3- البرهان ان

$\sin\left(\frac{95\pi}{100}\right) + \sin\left(\frac{97\pi}{100}\right) + \sin\left(\frac{103\pi}{100}\right) + \sin\left(\frac{105\pi}{100}\right) = 0$

$$\sin\left(\frac{95\pi}{100}\right) = \sin\left(\frac{95\pi + 5\pi - 5\pi}{100}\right)$$
$$= \sin\left(\frac{100\pi}{100} - \frac{5\pi}{100}\right)$$
$$= \sin\left(\pi - \frac{5\pi}{100}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{100}\right)$$

$$\sin\left(\frac{97\pi}{100}\right) = \sin\left(\frac{97\pi + 3\pi - 3\pi}{100}\right)$$
$$= \sin\left(\frac{100\pi - 3\pi}{100}\right)$$
$$= \sin\left(\pi - \frac{3\pi}{100}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{100}\right)$$

$$\sin\left(\frac{103\pi}{100}\right) = \sin\left(\frac{103\pi + 3\pi - 3\pi}{100}\right)$$
$$= \sin\left(\frac{100\pi + 3\pi}{100}\right)$$
$$= \sin\left(\pi + \frac{3\pi}{100}\right)$$
$$= -\sin\left(\frac{3\pi}{100}\right)$$

$$\sin\left(\frac{105\pi}{100}\right) = \sin\left(\frac{105\pi + 5\pi - 5\pi}{100}\right)$$
$$= \sin\left(\frac{100\pi + 5\pi}{100}\right)$$
$$= \sin\left(\pi + \frac{5\pi}{100}\right)$$
$$= -\sin\left(\frac{5\pi}{100}\right)$$

ومنه:

$$\sin\left(\frac{5\pi}{100}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{100}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{100}\right) - \sin\left(\frac{5\pi}{100}\right) = 0$$

132. تمرين رقم 05

الموضوع: الزوايا الموجهة وتطبيقاتها للتمرين رقم 5

لتكن A و B نقطتين من الدائرة المثلثية حيث:

$(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = \frac{3\pi}{5}$

-اذكر من بين الاقيسة التالية ما هي التي تمثل قيسا للزاوية : $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$

$$\frac{13\pi}{5}; -\frac{13\pi}{5}; -\frac{12\pi}{5}; -\frac{4\pi}{5}; \frac{4\pi}{5}$$

الحل

- تحديد قيس الزاوية

يكون x و y قيسين لزاوية موجهة معينة فان $(x - y)$ مضاعف لـ 2π

$$\frac{3\pi}{5} - \frac{4\pi}{5} = -\frac{\pi}{5}$$

ومنه $-\frac{\pi}{5}$ ليس من مضاعفات 2π اي $\frac{4\pi}{5}$ ليس قيسا لزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$.

$$\frac{3\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} = \frac{7\pi}{5}$$

ومنه $\frac{7\pi}{5}$ ليس من مضاعفات 2π اي $-\frac{4\pi}{5}$ ليس قيسا من اقياس الزاوية $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$

$$\frac{3\pi}{5} + \frac{12\pi}{5} = \frac{15\pi}{5} = 3\pi$$

ومنه 3π ليس من مضاعفات 2π اي $-\frac{12\pi}{5}$ ليس قيسا من اقياس الزاوية $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$

$$\frac{3\pi}{5} + \frac{13\pi}{5} = \frac{16\pi}{5}$$

ومنه $\frac{16\pi}{5}$ ليس من مضاعفات 2π اي $-\frac{13\pi}{5}$ ليس قيسا من اقياس الزاوية $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$

$$\frac{3\pi}{5} - \frac{13\pi}{5} = -\frac{10\pi}{5} = -2\pi$$

ومنه (-2π) من مضاعفات 2π اي $\frac{13\pi}{5}$ قيسا من اقياس الزاوية $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$

133. تمرين رقم 06

الموضوع: الزوايا الموجهة و تطبيقاتها للتمرين رقم 7

A و B و C و D و E نقط من المستوي حيث :

$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AE}) = -\frac{2\pi}{3}$ ، $(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AC}) = -\frac{5\pi}{12}$

$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = \frac{3\pi}{4}$

-بين أن الشعاعين $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطين خطيا، ثم استنتج ان النقط A و C و E في استقامية.

الحل

-البرهان ان الشعاعين $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطيا

حتى يكون الشعاعين $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطيا يجب ان يكون $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE}) = k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$

$$(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE}) = (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AE})$$
$$= -(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AC}) - (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AE})$$
$$= \frac{5\pi}{12} - \frac{3\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi - 9\pi - 8\pi}{12}$$
$$= \frac{-12\pi}{12} = -\pi$$

اي $k = -1$

ومنه: $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE}) = -\pi$

ومنه الشعاعان $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطيا.

وعليه نستنتج أن النقط A و C و E في استقامية

لأن: $\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AC}$ و $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE}) = -\pi$

134. تمرين رقم 07

اليوتيوب: الزوايا الموجهة و تطبيقاتها للثانية ثانوي رقم 8

برهن انه اذا كان $\sin(x) \neq 0$ و $\cos(x) \neq -1$ فإن :

$$\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = 0$$

الحل

البرهان ان $\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = 0$

$$\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$$
$$= \frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x)) - \sin^2(x)}{[\sin(x)][1+\cos(x)]}$$
$$= \frac{1-\cos^2(x) - \sin^2(x)}{[\sin(x)][1+\cos(x)]}$$
$$= \frac{1-[\cos^2(x)+\sin^2(x)]}{[\sin(x)][1+\cos(x)]}$$
$$= \frac{1-1}{[\sin(x)][1+\cos(x)]}$$
$$= \frac{0}{[\sin(x)][1+\cos(x)]} = 0$$

ومنه : $\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = 0$

135. تمرين رقم 08

اليوتيوب: الزوايا الموجهة و تطبيقاتها للثانية ثانوي رقم 9

بدون استعمال الألة الحاسبة عين القيم المضبوطة لكل من:

1) $\cos\frac{9\pi}{4}$

2) $\sin\frac{25\pi}{6}$

3) $\sin\left(-\frac{11\pi}{3}\right)$

4) $\cos\left(-\frac{31\pi}{4}\right)$

الحل

- تعيين القيم المضبوطة

$$\cos\frac{9\pi}{4} = \cos\left(\frac{8\pi+\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{8\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \cos\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\frac{25\pi}{6} = \sin\left(\frac{24\pi+\pi}{6}\right) = \sin\left(4\pi+\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\sin\left(-\frac{11\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{-11\pi-\pi+\pi}{3}\right)$$
$$= \sin\left(-\frac{12\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= \sin\left(-4\pi+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ط 1 :

$$\cos\left(-\frac{31\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{-31\pi-\pi+\pi}{4}\right)$$
$$= \cos\left(-\frac{32\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ط 2 :

$$\cos\left(-\frac{31\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{-((4\times7)+3)\pi}{4}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{-4\times7\pi+3\pi}{4}\right)$$

$$= \cos\left(-\frac{4\times 7\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(-7\pi+\frac{3\pi}{4}\right)$$
$$= \cos\left(-6\pi-\pi+\frac{3\pi}{4}\right)$$
$$= \cos\left(-\pi+\frac{3\pi}{4}\right)$$
$$= \cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

136. تمرين رقم 09

الموضوع: تمرين الفصل الثالث في الرياضيات للسنة الثانية ثانوي رقم 08

1- احسب كلا من $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}$.

2- احسب القيم المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ ، $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ ، $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ ، $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ ، $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ ، $\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

الحل

1- حساب كلا من $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}$

$$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6} = \frac{3\pi+2\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$$

$$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3} = \frac{3\pi+4\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$$

2- حساب القيم المضبوطة

تذكير: (دساتير التحويل)

$$\cos(a+b) = \cos(a)\times\cos(b) - \sin(a)\times\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\times\cos(b) + \sin(b)\times cos(a)$$

$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}$$
$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

$$\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$
$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}$$
$$= \frac{8+2\sqrt{12}}{6-2} = \frac{8}{4}+\frac{4\times\sqrt{3}}{4}$$
$$\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2+\sqrt{3}$$

$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

$$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$$
$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

$$\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$$
$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{6})(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{(\sqrt{2}-\sqrt{6})(\sqrt{2}+\sqrt{6})}$$
$$= \frac{8+4\sqrt{12}}{2-6} = \frac{8}{-4}+\frac{4\times\sqrt{3}}{-4} = -2-\sqrt{3}$$

137. تمرين رقم 10

(البوتوب: الفصل الثاني في الرياضيات للسنة الثانية ثانوي (الرياضيات) رقم 7)

1- اثبت صحة ما يلي:

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin(x+\pi)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\cos(\pi-x)=-2\sin(x)$$

2- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة :

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin(x+\pi)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\cos(\pi-x)=-1$$

3- حل في $[0,2\pi[$ المتراجحة:

$$2\cos(x)-1\leq 0$$

الحل

1- إثبات العبارة

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin(x+\pi)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\cos(\pi-x)=-2\sin(x)$$

لدينا

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(x)$$
$$\sin(x+\pi)=-\sin(x)$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin(x)$$
$$\cos(\pi-x)=-\cos(x)$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin(x+\pi)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\cos(\pi-x)$$
$$=\cos(x)-\sin(x)-\sin(x)-\cos(x)$$
$$=-2\sin(x)$$

2- حل المعادلة

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin(x+\pi)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\cos(\pi-x)=-1$$

وجدنا سابقا:

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin(x+\pi)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\cos(\pi-x)=-2\sin(x)$$

إذن $-2\sin(x)=-1$

$$\sin(x)=\frac{-1}{-2}$$
$$\sin(x)=\frac{1}{2}$$
$$\sin(x)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\begin{cases} x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ x=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi \end{cases}$$ أو

$S=\{\frac{5\pi}{6}+2k\pi\,,\frac{\pi}{6}+2k\pi\}$ مع $k\in\mathbb{Z}$

3- حل المتراجحة $2\cos(x)-1\leq 0$ في المجال $[0,2\pi[$:

$$2\cos(x)\leq 1$$
$$\cos(x)\leq\frac{1}{2}$$
$$\cos(x)\leq\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

ومنه قيم x $S=\left[\frac{\pi}{3}\,,\frac{5\pi}{3}\right]$

في المجال $]-\pi,\pi]$

$$\cos(x)\leq\frac{1}{2}$$
$$S=\left]-\pi,-\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$$