06) النهايات

السلوك التقاربي لمنحنى دالة

1. نهاية غير منتهية عند عدد حقيقي

مبرهنة: نقبل دون برهان النتائج التالية:

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{(x-a)^2}=+\infty \quad ، \quad \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}}\frac{1}{x-a}=-\infty \quad ، \quad \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}}\frac{1}{x-a}=+\infty$$

المستقيم المقارب الموازي لمحور التراتيب

تعريف: ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس وليكن a عدد حقيقي.
إذا كانت النهاية (أو النهاية من اليمين أو من اليسار) للدالة f عند العدد a هي $+\infty$ أو $-\infty$ نقول أن المستقيم الموازي لمحور التراتيب ذو المعادلة $x=a$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f).

2. نهاية منتهية عند مالانهاية

مبرهنة: نقبل دون برهان النتائج التالية: $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+a}=0$ ، $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x+a}=0$ حيث a عدد حقيقي.

المستقيم المقارب الموازي لمحور الفواصل

تعريف: ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم متعامد ومتجانس وليكن b عدد حقيقي.
القول أن المستقيم الموازي لمحور الفواصل ذو المعادلة $y=b$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$) يعني أن $\lim_{x\to+\infty}f(x)=b$ (على الترتيب $\lim_{x\to-\infty}f(x)=b$)

3. مفهوم النهاية

تعريف 1: القول أن نهاية الدالة f عند x_0 هي l يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما e ، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما α بحيث: إذا كان $0<|x-x_0|<\alpha$ يكون $0\le|f(x)-l|<e$ ونكتب:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=l$$

ملاحظة: $0<|x-x_0|<\alpha$ تعني $x\in]x_0-\alpha;x_0[\cup]x_0;x_0+\alpha[$
$0\le|f(x)-l|<e$ تعني $f(x)\in]l-e;l+e[$

تعريف 2: القول إن نهاية الدالة f عند $+\infty$ هي l يعني انه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما e ، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما B بحيث: إذا كان $x>B$ يكون $0\le|f(x)-l|<e$ ونكتب: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=l$

تعريف 3: القول أن نهاية الدالة f عند $+\infty$ هي $+\infty$ يعني انه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A ، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما B بحيث: إذا كان $x>B$ يكون $f(x)>A$ ونكتب: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

تعريف 4: القول أن نهاية الدالة f عند $-\infty$ هي $+\infty$ يعني انه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A ، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما B بحيث: إذا كان $x<-B$ يكون $f(x)>A$ ونكتب: $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

تعريف 5: القول إن نهاية الدالة f عند x_0 بقيم أكبر هي $+\infty$ يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما α بحيث: إذا كان $0 < x - x_0 < \alpha$ يكون $f(x) > A$

و نكتب: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = +\infty$

تعريف 6: القول أن نهاية الدالة f عند x_0 بقيم أصغر هي $+\infty$ يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما α بحيث: إذا كان $0 < x_0 - x < \alpha$ يكون $f(x) > A$

ونكتب: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = +\infty$

ملاحظة: يمكنك الحصول على بقية التعاريف بإتباع نفس المبدأ السابق.

4. عمليات على النهايات

ملاحظات

- يتم بصفة عامة حساب نهاية دالة عند كل حد من حدود مجموعة تعريفها.
- إذا كانت دالة f قابلة للاشتقاق عند عدد حقيقي a من مجموعة تعريفها فإن $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- إذا قبلت دالة f نهاية عند عدد حقيقي a تكون هذه النهاية وحيدة.
- يمكن لدالة ألا تقبل نهاية عند حد من حدود مجموعة تعريفها ونذكر على سبيل المثال الدالة: $x \to \sin x$ والتي لا تقبل نهاية لما يؤول x إلى $+\infty$.

المبرهنات الأولية على النهايات

f و g دالتان. a يمثل عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$. نقبل دون برهان المبرهنات التالية:

نهاية مجموع دالتين

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to a}(f(x)+g(x))$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	$-\infty$

نهاية جداء دالتين

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to a}(f(x) \times g(x))$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت

نهاية حاصل قسمة دالتين

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$	$\frac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت

ملاحظة: تسمى الحالات التي لا تسمح فيها النظريات السابقة من استنتاج النهاية بحالات "عدم التعيين"

5. المستقيم المقارب المائل

تعريف: ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f في معلم وليكن (Δ)المستقيم ذو المعادلة: $y = ax + b$
نقول أن المستقيم (Δ) مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$) يعني أن:
$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ (على الترتيب $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$)

ملاحظة: إذا كانت f دالة بحيث: $f(x)=ax+b+g(x)$ مع $\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$
فإنه من الواضح أن: $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ لأن $f(x)-(ax+b)=g(x)$
وبالتالي فالمستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y=ax+b$ مستقيم مقارب للمنحنى(C_f) لما يؤول x إلى $+\infty$.
(نفس الملاحظة لما يؤول x إلى $-\infty$)

6. البحث عن المستقيم المقارب المائل

نعتبر في معلم $(o,\vec{i},\vec{j})$ للمستوي المنحنى (C_f) الممثل للدالة f و ليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ مع $a\neq 0$
نفرض أن: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ أو $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ أو $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ أو $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$
نفرض أن (Δ) مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$
ومنه حسب التعريف $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$
نضع: $g(x)=f(x)-(ax+b)$ ومنه $f(x)=g(x)+ax+b$ حيث $\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$
لدينا من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 0

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{g(x)+ax+b}{x}=\frac{1}{x}\times g(x)+a+\frac{b}{x}$$

بما أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\times g(x)=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{b}{x}=0$ فإن $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$
ولدينا من جهة ثانية $f(x)-ax=g(x)+b$ و بما أن $\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$ فإن $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b$

خلاصة 1: إذا كان المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y=ax+b$ $(a\neq 0)$ مستقيما مقاربا للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ فإن $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ و $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b$
نفرض أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ و $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b$
من الواضح أن $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ و منه فإن المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y=ax+b$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

خلاصة 2: إذا كانت $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ و $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b$ فإن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=ax+b$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.
ملاحظة: ننجز برهانا مماثلا لما يؤول x إلى $-\infty$

نتيجة ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم وليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $y=ax+b$ $(a\neq 0)$
يكون المستقيم (Δ) مستقيما مقاربا للمنحنى(C_f) عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$) إذا و فقط إذا تحقق
الشرطين: $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ و $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b$ (على الترتيب $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ و $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-ax]=b$)

مخطط دراسة دالة

- مجموعة التعريف
  - تحديد مجموعة تعريف الدالة إذا لم تكن قد أعطيت في النص.
  - دراسة شفعية الدالة أو دوريتها (في الحالات الممكنة) قصد تقليص مجموعة الدراسة وتحديد مراكز أو محاور تناظر المنحني الممثل للدالة.
- حساب النهايات عند حدود مجموعة الدراسة.
- دراسة اتجاه تغير الدالة
  - حساب المشتقة على المجالات التي تقبل عليها الدالة الاشتقاق
  - دراسة إشارة المشتقة واستنتاج اتجاه تغير الدالة.
  - تحديد القيم الحدية في حالة وجودها.
- تشكيل جدول تغيرات الدالة.
- تحديد المستقيمات المقاربة.
- التمثيل البياني للدالة
  - رسم المستقيمات المقاربة.
  - تمثيل بعض النقط المساعدة من خلال حساب إحداثياتها ونذكر بصفة خاصة النقط الحدية و نقط تقاطع المنحني مع محوري الإحداثيات.
  - رسم المماسات عند القيم الحدية وأخرى مطلوبة في النص.
  - استغلال عناصر تناظر المنحني إن وجدت.

115. تمرين رقم 01

احسب نهايات وإزالة حالة عدم التعيين بشرح مفصل للسنة الثانية ثانوي:

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}[x^2+x+1]$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}[x^2+x+1]$

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}[-x^3+x]$

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x+\frac{1}{x+1}\right]$

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{2x+1}{x+1}\right]$

(6) $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}}\left[\frac{x+2}{x^2-1}\right]$

(7) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\left[\frac{x+2}{x^2-1}\right]$

(8) $\lim\limits_{x\to1}\left[\frac{1}{(x-1)^2}\right]$

(9) $\lim\limits_{x\to-1}\left[\frac{x^2-1}{x+1}\right]$

(10) $\lim\limits_{x\to1}\left[\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}\right]$

(11) $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{\cos(x)-1}{x}\right]$

(12) $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{\sin(x)}{x}\right]$

(13) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+1}-x\right]$

(14) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2+1}+x\right]$

(15) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{2x^2+1}-x\right]$

(16) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\left[\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}\right]$

الحل

حالات عدم التعين

$+\infty-\infty$ ، $\frac{\infty}{\infty}$

$0(\infty)$ ، $\frac{0}{0}$

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}[x^2+x+1]$

$$\lim_{x\to-\infty}[x^2+x+1]=\lim_{x\to-\infty}[x^2]=+\infty$$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}[x^2+x+1]$

$$\lim_{x\to+\infty}[x^2+x+1]=\lim_{x\to+\infty}[x^2]=+\infty$$

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}[-x^3+x]$

$$\lim_{x\to-\infty}[-x^3+x]=\lim_{x\to-\infty}[-x^3]=+\infty$$

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x+\frac{1}{x+1}\right]$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[x+\frac{1}{x+1}\right]=-\infty$$

لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x+1}\right]=0$

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{2x+1}{x+1}\right]$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x+1}{x+1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x}{x}\right]=2$$

(6) $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}}\left[\frac{x+2}{x^2-1}\right]$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\<}}\left[\frac{x+2}{x^2-1}\right]=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

(7) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\left[\frac{x+2}{x^2-1}\right]$

$$\lim_{\substack{x\to1\\>}}\left[\frac{x+2}{x^2-1}\right]=\frac{3}{0^+}=+\infty$$

(8) $\lim\limits_{x\to1}\left[\frac{1}{(x-1)^2}\right]$

$$\lim_{x\to1}\left[\frac{1}{(x-1)^2}\right]=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

(9) $\lim\limits_{x\to-1}\left[\frac{x^2-1}{x+1}\right]$

$$\lim_{x\to-1}\left[\frac{x^2-1}{x+1}\right]=\lim_{x\to-1}\left[\frac{(x-1)(x+1)}{x+1}\right]$$
$$=\lim_{x\to-1}(x-1)=-2$$

(10) $\lim\limits_{x\to1}\left[\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}\right]$

$$\lim_{x\to1}\left[\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}\right]$$
$$=\lim_{x\to1}\left[\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}\right]$$
$$=\lim_{x\to1}\left[\frac{(\sqrt{x+3})^2-(2)^2}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}\right]$$
$$=\lim_{x\to1}\left[\frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}\right]$$
$$=\lim_{x\to1}\left[\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}\right]$$
$$=\lim_{x\to1}\left[\frac{1}{(\sqrt{x+3}+2)}\right]=\frac{1}{\sqrt{1+3}+2}$$

$$= \frac{1}{4}$$

11) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\cos(x)-1}{x}\right]$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\cos(x)-1}{x}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right] = f'(0)$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\cos(x)-1}{x}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right]$$

حيث $f(x)=\cos(x)$ ، $f(0)=1$ والدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 ومنه $f'(x)=-\sin(x)$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\cos(x)-1}{x}\right] = -\sin(0)$$
$$= 0$$

12) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\sin(x)}{x}\right]$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right] = f'(0)$$

$$f(0)=0 \quad ، \quad f(x)=\sin(x)$$
$$f'(x)=\cos(x)$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right] = \cos(0)$$
$$= 1$$

13) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+1}-x\right]$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+1}-x\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+1-x^2}{(\sqrt{x^2+1}+x)}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{(\sqrt{x^2+1}+x)}\right] = 0$$

14) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2+1}+x\right]$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2+1}+x\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{(\sqrt{x^2+1}-x)}\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{(\sqrt{x^2+1}-x)}\right]$$
$$= 0$$

15) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{2x^2+1}-x\right]$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{2x^2+1}-x\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}-x\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[|x|\sqrt{\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}-x\right]$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$|x| = \begin{cases} x, & x>0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[x\sqrt{\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}-x\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}-1\right)\right]$$
$$= +\infty$$

16) $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 1}}\left[\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\right]$

$$\lim_{\substack{>\\ x\to 1}}\left[\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\right] = \lim_{\substack{>\\ x\to 1}}\left[\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-1)}\right]$$
$$= \lim_{\substack{>\\ x\to 1}}\left[\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right] = \frac{1}{0^+}$$
$$= +\infty$$

116. تمرين رقم 02

اليوتيوب: حساب النهايات للسنة الثانية والثالثة ثانوي (فيديو رائع و مهم)

ادرس نهاية الدالة f في كل حالة من الحالات:

1) $f(x)=4x^3-2x-1$ عند $-\infty$ و $+\infty$

2) $f(x)=-x^4+3x^2+7$ عند $-\infty$ و $+\infty$

3) $f(x)=\frac{x+2}{x-2}$ عند $-\infty$ ، $+\infty$ و 2.

4) $f(x)=\frac{x^2+3x}{x+3}$ عند $-\infty$ و $+\infty$ و -3

5) $f(x)=2x+1-\frac{1}{x-2}$ عند $-\infty$ و $+\infty$ و 2

6) $f(x)=x^2+2-\frac{2}{(x-4)^2}$ عند $-\infty$ ، $+\infty$ و 4

7) $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+x-2}$ عند $-\infty$ ، $+\infty$ و 1 ، -2

الحل

حساب النهايات

$f(x) = 4x^3 - 2x - 1$ (1

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim_{x\to-\infty}[4x^3 - 2x - 1] = \lim_{x\to-\infty}[4x^3] = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}[4x^3 - 2x - 1] = \lim_{x\to+\infty}[4x^3] = +\infty$$

$f(x) = -x^4 + 3x^2 + 7$ (2

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim_{x\to-\infty}[-x^4 + 3x^2 + 7] = \lim_{x\to-\infty}[-x^4] = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}[-x^4 + 3x^2 + 7] = \lim_{x\to+\infty}[-x^4] = -\infty$$

$f(x) = \frac{x+2}{x-2}$ (3

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x+2}{x-2}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{x}\right] = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x+2}{x-2}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{x}\right] = 1$$

$$\lim_{\substack{x\to2\\<}}[f(x)] = \lim_{\substack{x\to2\\<}}\left[\frac{x+2}{x-2}\right] = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to2\\>}}[f(x)] = \lim_{\substack{x\to2\\>}}\left[\frac{x+2}{x-2}\right] = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$f(x) = \frac{x^2+3x}{x+3}$ (4

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2+3x}{x+3}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2}{x}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+3x}{x+3}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{x}\right] = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to-3\\<}}[f(x)] = \lim_{\substack{x\to-3\\<}}\left[\frac{x^2+3x}{x+3}\right] = \lim_{\substack{x\to-3\\<}}\left[\frac{x(x+3)}{x+3}\right] = \lim_{\substack{x\to-3\\<}}[x] = -3$$

$$\lim_{\substack{x\to-3\\>}}[f(x)] = \lim_{\substack{x\to-3\\>}}\left[\frac{x^2+3x}{x+3}\right] = \lim_{\substack{x\to-3\\>}}\left[\frac{x(x+3)}{x+3}\right] = \lim_{\substack{x\to-3\\>}}[x] = -3$$

$f(x) = 2x + 1 - \frac{1}{x-2}$ (5

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim_{x\to-\infty}\left[2x+1-\frac{1}{x-2}\right] = -\infty$$

لأن $\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x-2}\right] = 0$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[2x+1-\frac{1}{x-2}\right] = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to2\\<}}[f(x)] = \lim_{\substack{x\to2\\<}}\left[2x+1-\frac{1}{x-2}\right] = 4+1-\frac{1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to2\\>}}[f(x)] = \lim_{\substack{x\to2\\>}}\left[2x+1-\frac{1}{x-2}\right] = 4+1-\frac{1}{0^+} = -\infty$$

$f(x) = x^2 + 2 - \frac{2}{(x-4)^2}$ (6

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim_{x\to-\infty}\left[x^2+2-\frac{2}{(x-4)^2}\right] = +\infty$$

لأن $\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{2}{(x-4)^2}\right] = 0$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim_{x\to-\infty}\left[x^2+2-\frac{2}{(x-4)^2}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\to4}[f(x)] = \lim_{x\to4}\left[x^2+2-\frac{2}{(x-4)^2}\right] = -\infty$$

لأن $\lim_{x\to a}\left[\frac{2}{(x-a)^2}\right] = +\infty$

$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+x-2}$ (7

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2-1}{x^2+x-2}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2}{x^2}\right] = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2-1}{x^2+x-2}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{x^2}\right] = 1$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\<}}[f(x)] = \lim_{\substack{x\to1\\<}}\left[\frac{x^2-1}{x^2+x-2}\right]$$

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{x^2-1}{x^2+x-2}\right]=\lim_{x\to 1}\left[\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)}\right]$$
$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{(x+1)}{(x+2)}\right]=\frac{2}{3}$$
$$\lim_{\substack{x\to -2\\ <}}[f(x)]=\lim_{\substack{x\to -2\\ <}}\left[\frac{x^2-1}{x^2+x-2}\right]=\frac{3}{0^+}=+\infty$$
$$\lim_{\substack{x\to -2\\ >}}[f(x)]=\lim_{\substack{x\to -2\\ >}}\left[\frac{x^2-1}{x^2+x-2}\right]=\frac{3}{0^-}=-\infty$$

لأن:

x	$-\infty$		-2		1	$+\infty$
x^2+x-2	$+$	0	$-$	0	$+$	

117. تمرين رقم 03

الموضوع: النهايات للدوال العددية للسنة الثانية ثانوي

في كل حالة احسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها وعين المستقيمات المقاربة لمنحنى الدالة f.

1) $f(x)=\frac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3}$ والمعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;3\}$

2) $f(x)=\frac{x^3+2x^2}{x^2-1}$ والمعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$

3) $f(x)=\frac{-4x+5}{x^2-x}$ والمعرفة على $\mathbb{R}-\{0;1\}$

4) $f(x)=\frac{x^2-4x+5}{(x+1)^2}$ والمعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$

الحل

حساب النهايات

نعلم أن

$$\lim_{\substack{x\to a\\ <}}\left[\frac{1}{x-a}\right]=-\infty$$
$$\lim_{\substack{x\to a\\ >}}\left[\frac{1}{x-a}\right]=+\infty$$
$$\lim_{x\to a}\left[\frac{1}{(x-a)^2}\right]=+\infty$$
$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{1}{x^n-a}\right]=0$$

1) $f(x)=\frac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3}$

$D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;3[\cup]3;+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2}{x^2}\right]$$
$$=1$$

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ <}}[f(x)]=\lim_{\substack{x\to -1\\ <}}\left[\frac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3}\right]$$
$$=\lim_{\substack{x\to -1\\ <}}\left[\frac{x^2-2x-15}{(x-3)}\times\frac{1}{x+1}\right]$$
$$=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ >}}[f(x)]=\lim_{\substack{x\to -1\\ >}}\left[\frac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3}\right]$$
$$=\lim_{\substack{x\to -1\\ >}}\left[\frac{x^2-2x-15}{(x-3)}\times\frac{1}{x+1}\right]=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ <}}[f(x)]=\lim_{\substack{x\to 3\\ <}}\left[\frac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3}\right]$$
$$=\lim_{\substack{x\to 3\\ <}}\left[\frac{x^2-2x-15}{(x+1)}\times\frac{1}{(x-3)}\right]=-3(-\infty)$$
$$=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ >}}[f(x)]=\lim_{\substack{x\to 3\\ >}}\left[\frac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3}\right]$$
$$=\lim_{\substack{x\to 3\\ >}}\left[\frac{x^2-2x-15}{(x+1)}\times\frac{1}{(x-3)}\right]=-3(+\infty)$$
$$=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{x^2}\right]$$
$$=1$$

2) $f(x)=\frac{x^3+2x^2}{x^2-1}$

$D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3+2x^2}{x^2-1}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3}{x^2}\right]$$
$$=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ <}}[f(x)]=\lim_{\substack{x\to -1\\ <}}\left[\frac{x^3+2x^2}{x^2-1}\right]$$
$$=\lim_{\substack{x\to -1\\ <}}\left[\frac{x^3+2x^2}{(x-1)(x+1)}\right]$$
$$=\lim_{\substack{x\to -1\\ <}}\left[\frac{x^3+2x^2}{(x-1)}\times\frac{1}{(x+1)}\right]$$
$$=-\frac{1}{2}(-\infty)$$
$$=+\infty$$

$$\lim_{\substack{>\\ x\to 0}}[f(x)] = \lim_{\substack{>\\ x\to 0}}\left[\frac{-4x+5}{x^2-x}\right]$$
$$= \lim_{\substack{>\\ x\to 0}}\left[\frac{-4x+5}{(x-1)}\times\frac{1}{x}\right]$$
$$= (-5)(+\infty)$$
$$= -\infty$$

$$\lim_{\substack{<\\ x\to 1}}[f(x)] = \lim_{\substack{<\\ x\to 1}}\left[\frac{-4x+5}{x^2-x}\right]$$
$$= \lim_{\substack{<\\ x\to 1}}\left[\frac{-4x+5}{x}\times\frac{1}{(x-1)}\right] = (1)(-\infty)$$
$$= -\infty$$

$$\lim_{\substack{>\\ x\to 1}}[f(x)] = \lim_{\substack{>\\ x\to 1}}\left[\frac{-4x+5}{x^2-x}\right]$$
$$= \lim_{\substack{>\\ x\to 1}}\left[\frac{-4x+5}{x}\times\frac{1}{(x-1)}\right]$$
$$= (1)(+\infty)$$
$$= +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-4x+5}{x^2-x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-4x}{x^2}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-4}{x}\right]$$
$$= 0$$

$f(x) = \frac{x^2-4x+5}{(x+1)^2}$ (4

$$D_f =]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2-4x+5}{(x+1)^2}\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2}{x^2}\right]$$
$$= 1$$

$$\lim_{x\to-1}[f(x)] = \lim_{x\to-1}\left[\frac{x^2-4x+5}{(x+1)^2}\right]$$
$$= \lim_{x\to-1}\left[(x^2-4x+5)\times\frac{1}{(x+1)^2}\right]$$
$$= (10)(+\infty)$$
$$= +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2-4x+5}{(x+1)^2}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{x^2}\right]$$
$$= 1$$

$$\lim_{\substack{>\\ x\to -1}}[f(x)] = \lim_{\substack{>\\ x\to -1}}\left[\frac{x^3+2x^2}{x^2-1}\right]$$
$$= \lim_{\substack{>\\ x\to -1}}\left[\frac{x^3+2x^2}{(x-1)(x+1)}\right]$$
$$= \lim_{\substack{>\\ x\to -1}}\left[\frac{x^3+2x^2}{(x-1)}\times\frac{1}{(x+1)}\right]$$
$$= -\frac{1}{2}(+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{<\\ x\to 1}}[f(x)] = \lim_{\substack{<\\ x\to 1}}\left[\frac{x^3+2x^2}{x^2-1}\right]$$
$$= \lim_{\substack{<\\ x\to 1}}\left[\frac{x^3+2x^2}{(x-1)(x+1)}\right]$$
$$= \lim_{\substack{<\\ x\to 1}}\left[\frac{x^3+2x^2}{(x+1)}\times\frac{1}{(x-1)}\right]$$
$$= \left(\frac{3}{2}\right)(-\infty)$$
$$= -\infty$$

$$\lim_{\substack{>\\ x\to 1}}[f(x)] = \lim_{\substack{>\\ x\to 1}}\left[\frac{x^3+2x^2}{x^2-1}\right]$$
$$= \lim_{\substack{>\\ x\to 1}}\left[\frac{x^3+2x^2}{(x-1)(x+1)}\right]$$
$$= \lim_{\substack{>\\ x\to 1}}\left[\frac{x^3+2x^2}{(x+1)}\times\frac{1}{(x-1)}\right]$$
$$= \left(\frac{3}{2}\right)(+\infty)$$
$$= +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3+2x^2}{x^2-1}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3}{x^2}\right]$$
$$= +\infty$$

$f(x) = \frac{-4x-5}{x^2-x}$ (3

$$D_f =]-\infty;0[\cup]0;1[\cup]1;+\infty[$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-4x+5}{x^2-x}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-4x}{x^2}\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-4}{x}\right] = 0$$

$$\lim_{\substack{<\\ x\to 0}}[f(x)] = \lim_{\substack{<\\ x\to 0}}\left[\frac{-4x+5}{x^2-x}\right]$$
$$= \lim_{\substack{<\\ x\to 0}}\left[\frac{-4x+5}{(x-1)}\times\frac{1}{x}\right]$$
$$= (-5)(-\infty)$$
$$= +\infty$$

118. تمرين رقم 04

الموضوع: نفس الحصر الثلاثي في الرياضيات للسنة الثانية ثانوي (نموذج رقم 02)

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بما يلي $f(x)=\frac{x^2+x-2}{x+1}$ وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1) عين الأعداد الحقيقية a و b و c بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{-1\}$

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$$

2) احسب النهايات عند حدود مجموعة التعريف الدالة.

3) بين من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{-1\}$ أن: $f'(x)=\frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}$.

4) ادرس إشارة $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

5) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.

ب) ادرس الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

6) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') معامل توجيه كل منهما يساوي 3 يطلب تعيين معادلة لكل منهما.

7) احسب $f(-2)$، $f(0)$، $f(1)$، ثم ارسم (Δ)، (T)، (T')، (C_f).

8) بين أن $f(-2-x)+f(x)=-2$، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f)؟

الحل

1) تعيين الأعداد a و b و c حيث $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$$

نستعمل القسمة الاقليدية لإيجاد a و b و c:

x^2+x-2	$x+1$
$-x^2-x$	x
$0-2$	

$$x^2+x-2=(x+1)(x)-2$$

بما أن $x\neq -1$ فإن $\frac{x^2+x-2}{x+1}=\frac{(x+1)(x)-2}{x+1}$

$$f(x)=\frac{(x+1)(x)}{x+1}-\frac{2}{x+1}$$

$$f(x)=x-\frac{2}{x+1}$$

بالمطابقة نجد:

$a=1\cdot b=0\cdot c=-2$

$$f(x)=x-\frac{2}{x+1}$$

2) حساب النهايات

$D_f=\mathbb{R}-\{-1\}=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x-\frac{2}{x+1}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x+1}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{2}{x+1}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\left(x-\frac{2}{x+1}\right)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}=+\infty\ ،\ \lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}x+(-2).\frac{1}{x-(-1)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}x+(-2).\frac{1}{x-(-1)}=-\infty$$

التفسير البياني

$x=-1$ مستقيم مقارب عمودي للمنحنى (C_f).

3) البرهان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{-1\}$ $f'(x)=\frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u.v'+u'v}{v^2}$$

الدالة f قابلة للاشتقاق من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{-1\}$

$$f(x)=\frac{(2x+1)(x+1)-1(x^2+x-2)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{2x^2+2x+x+1-x^2-x+2}{(x+1)^2}$$

ومنه: $f'(x)=\frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}$

4) دراسة اشارة $f'(x)$

لدينا: $f'(x)=\frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}$

$(x+1)^2>0$ على $\mathbb{R}-\{-1\}$ إذن إشارة $f'(x)$ من إشارة x^2+2x+3

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4(1)(3) = 4 - 12$$
$$= -8 < 0$$

لا يوجد جذور للمعادلة إذن إشارتها من إشارة a أي
$a = 1 > 0$ ومنه $x^2 + 2x + 3 > 0$
ومنه $f'(x) > 0$ على المجال $\mathbb{R} - \{-1\}$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f

بما أن $f'(x) > 0$ فإن الدالة f متزايدة تماما على المجالين $]-1;+\infty[$ و $]-\infty;-1[$

تشكيل جدول التغيرات للدالة f

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\|\|$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$	$\|\|$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

5) البرهان أن المستقيم (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

حتى يكون المستقيم (Δ) م.م. مائل بجوار $+\infty$ و $-\infty$ يكفي أن نبرهن أن:

$$\lim_{|x|\to+\infty}[f(x) - y] = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[x - \frac{2}{x+1} - x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-2}{x+1}\right] = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left[x - \frac{2}{x+1} - x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-2}{x+1}\right] = 0$$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

ب دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ)

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$ على المجال $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

$$f(x) - y = x - \frac{2}{x+1} - x = -\frac{2}{x+1}$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
-2	$-$		$-$
$x+1$	$-$	0	$+$
$-\frac{2}{x+1}$	$+$	$\|\|$	$-$
الوضعية	(C_f) يقع فوق (Δ)	$\|\|$	(C_f) يقع أسفل (Δ)

6) البرهان ان المنحنى (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') معامل توجيه كل منهما يساوي 3

حل المعادلة $f'(x) = 3$

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{(x+1)^2} = 3$$
$$\frac{x^2 + 2x + 3 - 3(x+1)^2}{(x+1)^2} = 0$$

أي: $x^2 + 2x + 3 - 3(x^2 + 2x + 1) = 0$
لأن $(x+1)^2 > 0$
$$x^2 + 2x + 3 - 3x^2 - 6x - 3 = 0$$
$$-2x^2 - 4x = 0$$
$$x^2 + 2x = 0$$
$$x(x+2) = 0$$
$$\begin{cases} x = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases} \text{ أو}$$

إذن $x = 0$ و $x = -2$

ومنه المنحنى (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') معامل توجيه كل منهما يساوي 3 عند النقطتين ذات الفاصلتين $x = 0$ و $x = -2$ على الترتيب.

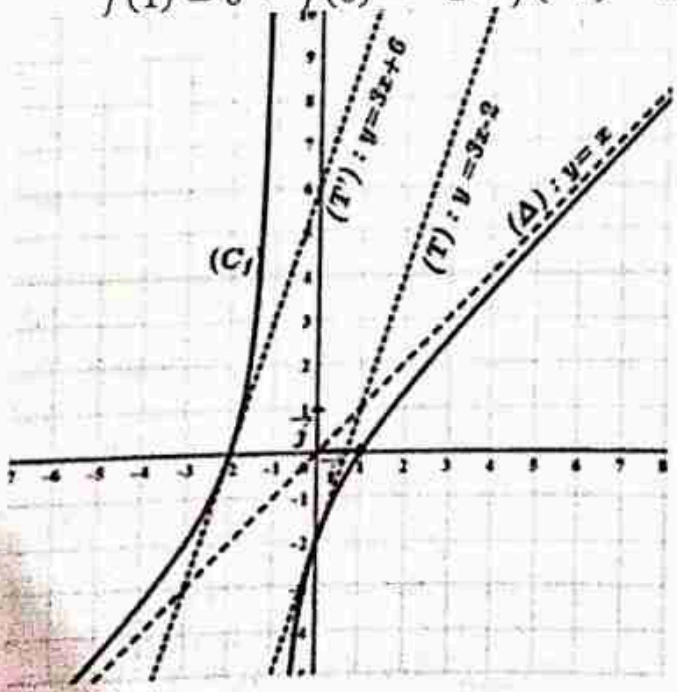
- تعيين معادلة لكل منهما

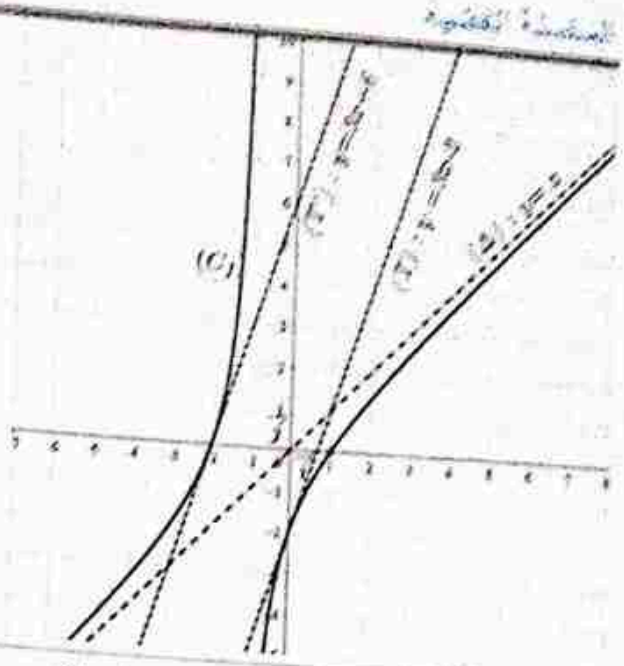
معادلة (T) عند النقطة ذات الفاصلة $x = 0$:
$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$
$$y = 3x - 2$$
$$(T): y = 3x - 2$$

معادلة (T') عند النقطة ذات الفاصلة $x = -2$:
$$y = f'(-2)(x + 2) + f(-2)$$
$$y = 3(x + 2)$$
$$(T'): y = 3x + 6$$

7) حساب الصور والرسم

$f(-2) = 0$ ، $f(0) = -2$ ، $f(1) = 0$





8) البرهان أن $f(-2-x)+f(x)=-2$

$$f(-2-x)+f(x)$$
$$=-2-x-\frac{2}{-2-x+1}+x-\frac{2}{x+1}$$
$$=-2+\frac{2}{x+1}-\frac{2}{x+1}$$

ومنه: $f(-2-x)+f(x)=-2$

- الاستنتاج: إذا كان $x\in D_f$ و $(2a-x)\in D_f$ ، $f(2a-x)+f(x)=2b$

فإن $\omega(a;b)$ مركز تناظر لـ (C_f)

وجدنا سابقا $f(-2-x)+f(x)=-2$

وبالمقارنة مع $f(2a-x)+f(x)=2b$ نجد:

$2a=-2$ أي $a=-1$

و $2b=-2$ أي $b=-1$ ومنه النقطة

$\omega(-1;-1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

119. تمرين رقم 05

اليوتيوب: اختبار الفصل الثاني في الرياضيات لسنة ثانية ثانوي(النهايات والدوال) رقم05

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=\frac{3x^2}{x^2+x+1}$$

نسمي (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1- احسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$ ثم فسر النتيجتين هندسيا.

2- عين الأعداد الحقيقية a ، b ، c بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x)=a+\frac{bx+c}{x^2+x+1}$

3- احسب $f'(x)$ عبارة الدالة المشتقة الأولى لـ f ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

4- اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x=-1$.

5- ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=3$.

6- ارسم (Δ) ، (T) ، (C_f).

7- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x)=\frac{3x^2}{x^2-|x|+1}$$

أ- بين أن الدالة g زوجية.

ب- اكتب عبارة $g(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة.

ج- بين أنه من أجل كل $x\in]-\infty;0[$: $g(x)=f(x)$

د- اشرح كيفية رسم المنحنى (C_g) انطلاقا من (C_f) ثم ارسم (C_g).

الحل

1- حساب النهايات

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{3x^2}{x^2+x+1}\right]$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2(3)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}\right]=3$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2(3)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}\right]=3$$

التفسير الهندسي: المستقيم ذو المعادلة $y=3$ مستقيم مقارب أفقي (موازي لمحور الفواصل) للمنحنى (C_f)

2- تعيين الأعداد الحقيقية a ، b ، c

1b باستعمال القسمة الاقليدية نجد:

$3x^2$	x^2+x+1
$-3x^2-3x-3$	3
$0-3x-3$	

$$3x^2=3(x^2+x+1)+(-3x-3)$$

بما أن $x\in\mathbb{R}$:

$$\frac{3x^2}{x^2+x+1}=\frac{3(x^2+x+1)}{x^2+x+1}+\frac{-3x-3}{x^2+x+1}$$

$$f(x) = 3 + \frac{-3x-3}{x^2+x+1}$$

$c = -3$ ، $b = -3$ ، $a = 3$ ومنه:

$$a + \frac{bx+c}{x^2+x+1} = \frac{a(x^2+x+1)+bx+c}{x^2+x+1}$$
$$= \frac{ax^2+ax+a+bx+c}{x^2+x+1}$$

بالمطابقة نجد:

$$a = 3$$
$$\begin{cases} a+b=0 \\ 3+b=0 \\ b=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} a+c=0 \\ 3+c=0 \\ c=-3 \end{cases}$$

ومنه: $f(x) = 3 + \frac{-3x-3}{x^2+x+1}$

2. حساب $f'(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها دالة ناطقة ودالتها المشتقة:

$$f'(x) = \frac{6x(x^2+x+1) - (2x+1)(3x^2)}{(x^2+x+1)^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x^3+6x^2+6x-6x^3-3x^2}{(x^2+x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2+6x}{(x^2+x+1)^2}$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f

لمعرفة اتجاه تغير الدالة f ندرس إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$

$(x^2+x+1)^2 > 0$ على $\mathbb{R}$

$f'(x) = 0$ أي $3x^2+6x = 0$

$$x(3x+6) = 0$$
$$\begin{cases} x = 0 \\ 3x+6 = 0 \end{cases} \text{ او}$$
$$\begin{cases} x = 0 \\ 3x = -6 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-2		0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	

الدالة f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;-2]$ و $[0;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $[-2;0]$

جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$

$f(-2) = \frac{12}{3} = 4$ $f(0) = \frac{3(0)}{0+0+1} =$

x	$-\infty$		-2		0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		4		0		3
	3					

4- معادلة المماس (T)

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$
$$y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$$
$$f'(-1) = \frac{3(-1)^2+6(-1)}{((-1)^2-1+1)^2} = 3-6$$
$$= -3$$
$$f(-1) = \frac{3(-1)^2}{(-1)^2+(-1)+1} = 3$$
$$y = -3(x+1)+3$$
$$y = -3x-3+3$$
$$(T): y = -3x$$

5-دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) بالنسبة لـ (Δ)

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$ على $\mathbb{R}$

$$f(x)-y = 3 + \frac{-3x-3}{x^2+x+1} - 3$$
$$= \frac{-3x-3}{x^2+x+1}$$

$\Delta = b^2-4a.c = 1-4(1)(1) = -3 < 0$

فإن إشارة x^2+x+1 من إشارة $a = 1$

أي $x^2+x+1 > 0$ ومنه إشارة $f(x)-y$ من إشارة:

$$-3x-3 = 0$$
$$-3x = 3$$
$$x = -1$$

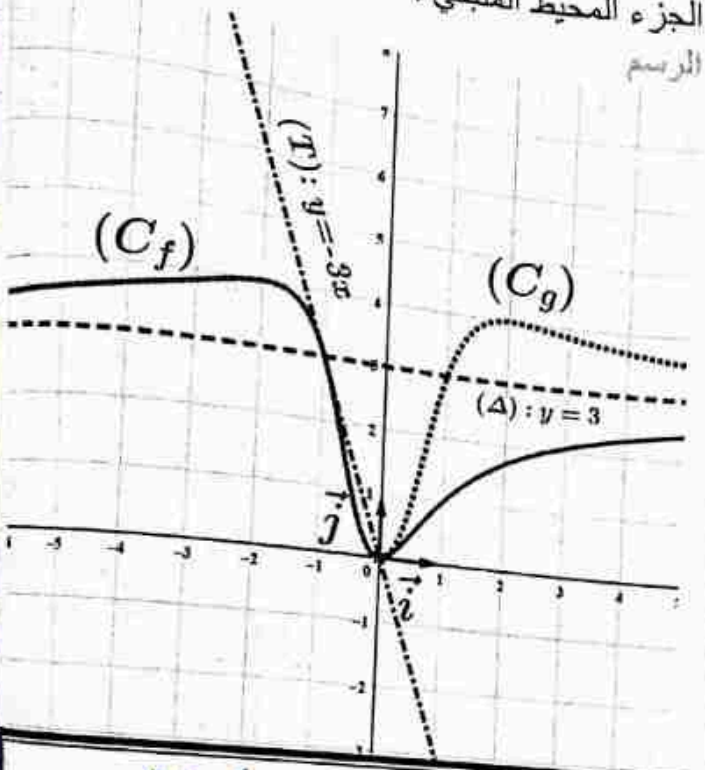
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$-3x-3$	$+$	0	$-$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) أسفل (Δ)

د- شرح كيفية رسم (C_g) انطلاقا من (C_f)

رسمه

لما $x \in]-\infty;0]$ فإن $g(x) = f(x)$ أي (C_g) ينطبق على (C_f) في المجال $]-\infty;0]$
وبما ان الدالة g دالة زوجية فإن الجزء المتبقي يكون متناظرا بالنسبة الى $(y'y)$
أي نرسم (C_g) في المجال $]-\infty;0]$ ونتناظر الجزء المحيط المتبقي بالنسبة $(y'y)$.

الرسم



120. تمرين رقم 06

اليوتيوب: اختبار الفصل الثاني في الرياضيات للسنة الثانية ثانوي رقم 9:

الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$$

يرمز (C_f) إلى المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

I) 1- عين الأعداد الحقيقية a ، b ، c بحيث يكون من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

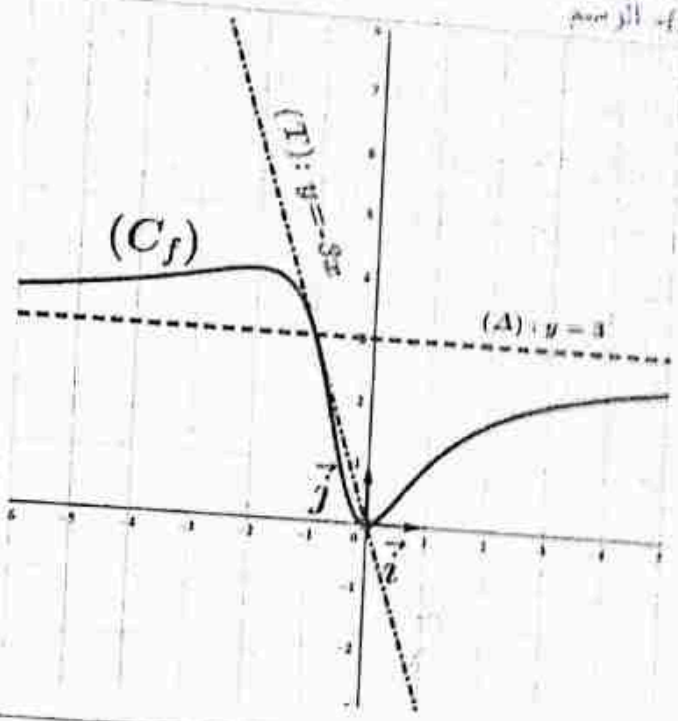
2- احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجالي مجموعة تعريفها.

3- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب يطلب تعيين معادلة له.

4- بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x-1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

5- ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

ب- الرسم



7- أ- البرهان ان الدالة g زوجية

تكون الدالة g زوجية إذا كان $x \in \mathbb{R}$ و $-x \in \mathbb{R}$ أي D_f تكون متناظرة بالنسبة إلى O أي محور التراتيب

$$g(-x) = g(x)$$

$$g(-x) = \frac{3(-x)^2}{(-x)^2 - |-x| + 1} = \frac{3x^2}{x^2 - |x| + 1} = g(x)$$

$$|-x| = |x| \quad ، \quad (-x)^2 = x^2$$

ومنه الدالة g دالة زوجية ومنحناها البياني (C_g) يكون متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب.

ب- كتابة عبارة $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

$$|x| = \begin{cases} x; & x > 0 \\ -x; & x \leq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{x^2 - x + 1} ; & x > 0 \\ \dfrac{3x^2}{x^2 + x + 1} ; & x \leq 0 \end{cases}$$

ج- البرهان ان من أجل كل $x \in]-\infty;0]$ ، $g(x) = f(x)$

وجدنا سابقا لما $x \in]-\infty;0]$ فإن:

$$g(x) = \frac{3x^2}{x^2 + x + 1}$$

إذن من أجل كل $x \in]-\infty;0]$:

$$g(x) = \frac{3x^2}{x^2 + x + 1} = f(x)$$

I) 1- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$ فإن $f'(x)=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$ و f' هي الدالة المشتقة للدالة f.

2- عين اتجاه تغير الدالة f على مجالي مجموعة تعريفها وشكل جدول تغيراتها.

3- اكتب معادلة المماس (D) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

II) 1- بين أن النقطة $A(-1;-2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

2- ارسم كلا من (Δ) ، (D)، (C_f).

3- عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة $f(x)=m$ حلان مختلفان.

الحل

I) 1- تعيين a ، b ، c

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}=\frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1}$$
$$=\frac{ax^2+ax+bx+b+c}{x+1}$$
$$=\frac{ax^2+(a+b)x+b+c}{x+1}$$
$$=\frac{x^2+3}{x+1}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a=1 \\ a+b=0 \\ b+c=3 \end{cases}$$
$$\begin{cases} a=1 \\ 1+b=0 \\ b+c=3 \end{cases}$$
$$\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ -1+c=3 \end{cases}$$
$$\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=4 \end{cases}$$

ومنه $f(x)=x-1+\frac{4}{x+1}$

2- حساب النهايات

$D_f=\mathbb{R}-\{-1\}=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x-1+\frac{4}{x+1}\right)=-\infty$$

(لأن $\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x+1}=0$)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-1+\frac{4}{x+1}\right)=+\infty$$

لدينا $\lim_{\substack{x\to a \\ <}}\left(\frac{1}{x-a}\right)=-\infty$

$$\lim_{\substack{x\to-1 \\ <}}\left(\frac{4}{x+1}\right)=\lim_{\substack{x\to-1 \\ <}}\left(4.\frac{1}{x+1}\right)=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to-1 \\ <}}\left(x-1+\frac{4}{x+1}\right)=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to-1 \\ >}}\left(x-1+\frac{4}{x+1}\right)=+\infty$$

3-البرهان أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$$

م. م. عمودي $x=a$

$$\lim_{\substack{x\to-1 \\ <}} f(x)=-\infty$$
$$\lim_{\substack{x\to-1 \\ >}} f(x)=+\infty$$

ومنه $x=-1$ مستقيم مقارب عمودي (شاقولي) لـ (C_f) موازي لمحور التراتيب.

4- البرهان ان المستقيم (Δ) م م مائل لـ (C_f)

حتى يكون (Δ) م م مائل يجب أن يكون

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-y]=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[x-1+\frac{4}{x+1}-x+1\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{4}{x+1}\right]$$
$$=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y]=0$$

ومنه (Δ) م م مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$ و $+\infty$

5-دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

ندرس إشارة الفرق بين $f(x)-y$ على D_f

$$f(x)-y=x-1+\frac{4}{x+1}-x+1$$
$$f(x)-y=\frac{4}{x+1}$$

$4>0$

$x+1\neq 0$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0 $+$	
$f(x)-y$	$-$	$\|$	$+$
الوضعية	(C_f) يقع أسفل (Δ)	$\|$	(C_f) يقع فوق (Δ)

II) 1- البرهان انه من اجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$ فإن $f'(x)=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f لأنها دالة ناطقة ودالتها المشتقة هي:

$$f'(x)=\frac{2x(x+1)-1(x^2+3)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{2x^2+2x-x^2-3}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$

$$\Delta=4-4(1)(-3)=16$$

$$\sqrt{\Delta}=4$$

$$x_1=\frac{-2-4}{2}=-3$$

$$x_2=\frac{-2+4}{2}=1$$

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

$$x^2+x-3=1(x-1)(x+3)$$

ومنه $f'(x)=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$

2- تعيين اتجاه تغير الدالة f على D_f

لدينا $f'(x)=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$

إشارة المشتقة من إشارة البسط لأن المقام موجب تماما على D_f

$(x+1)^2>0$ على $\mathbb{R}-\{-1\}$

أي ندرس إشارة $(x-1)(x+3)$

x	$-\infty$	-3		-1		1	$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$(x-1)(x+3)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-3]\cup[1;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $[-3;-1[\cup]-1;1]$

- جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}-\{-1\}$

$f(-3)=-6$ $\quad f(1)=2$

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$ ‖	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	-6 ↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘ 2	↗ $+\infty$

3- معادلة المماس (D) عند $x=0$ للمنحنى (C_f)

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$y=f'(0)(x-0)+f(0)$$

$$(D):\ y=-3x+3$$

III) 1- البرهان أن النقطة $A(-1;-2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

$A(a;b)$ مركز تناظر لـ (C_f) إذا تحقق

$$f(2a-x)+f(x)=2b$$

أي $f(-2-x)+f(x)=-4$

$$f(-2-x)+f(x)=-2-x-1+\frac{4}{(-2-x)+1}+x-1+\frac{4}{x+1}$$

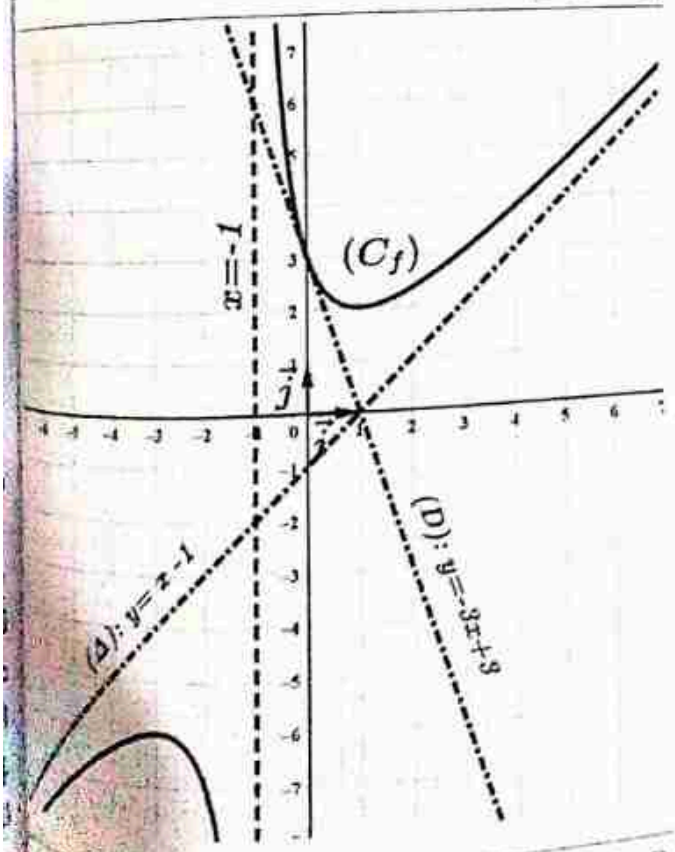
$$=-3+\frac{4}{-1-x}-1+\frac{4}{x+1}$$

$$=-4-\frac{4}{1+x}+\frac{4}{x+1}$$

$$=-4$$

ومنه النقطة $A(-1;-2)$ مركز تناظر لـ (C_f).

2- الرسم



3- تعيين قيم m حتى يكون للمعادلة $f(x)=m$ حلان مختلفان

الحلول البيانية للمعادلة $f(x)=m$ هي فواصل تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=m$

$m\in]-\infty;-6[\cup]2;+\infty[$

121. تمرين رقم 07

[illegible] دالة عددية قابلة للاشتقاق على كل مجال [illegible] مجموعة تعريفها، لها جدول التغيرات التالي:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

[illegible] عبارة $f(x)$ على الشكل:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$$

حيث a ، b ، c أعداد حقيقية.

1- احسب $f'(x)$.

2- اعتمادا على جدول تغيرات الدالة f.

أ- عين الأعداد الحقيقية a ، b ، c.

ب- عين $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا.

ج- قارن بين صورتي العددين $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$ بالدالة f معللا إجابتك.

3- نأخذ فيما يلي $a = 1$ ، $b = 1$ ، $c = \frac{1}{4}$ وليكن (C) المنحنى البياني الممثل لتغيرات الدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

أ- بين أنه عندما يؤول x إلى $(+\infty)$ و $(-\infty)$ فإن المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) معادلته $y = x + 1$.

ب- ادرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

ج- اثبت أن النقطة $\omega(1;2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C).

د- عين نقط تقاطع المنحنى (C) مع حامل محور الفواصل ثم ارسم المنحنى (C)

4- λ عدد حقيقي، عين بيانيا حسب قيم λ عدد حلول المعادلة $f(x) = |\lambda|$.

الحل

1- حساب $f'(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{1\}$ ودالتها المشتقة هي:

$$f'(x) = a + 0 + \frac{0(x-1) - 1(c)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = a - \frac{c}{(x-1)^2}$$

2-أ- تعيين الأعداد الحقيقية a ، b ، c

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \quad ; \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad ; \quad f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = a\left(\frac{1}{2}\right) + b + \frac{c}{\frac{1}{2} - 1} = 1$$

$$\frac{a}{2} + b + \frac{c}{-\frac{1}{2}} = 1$$

$$2\left(\frac{a}{2} + b - 2c\right) = 2(1)$$

$$a + 2b - 4c = 2 \ldots\ldots (1)$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3a}{2} + b + \frac{c}{\frac{1}{2}} = 3$$

$$2\left(\frac{3a}{2} + b + 2c\right) = 2(3)$$

$$3a + 2b + 4c = 6 \ldots\ldots (2)$$

$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = a - \frac{c}{\left(\frac{3}{2} - \frac{2}{2}\right)^2} = 0$$

$$a - 4c = 0 \ldots\ldots (3)$$

$$a = 4c$$

نعوض قيمة a في(1)

$$4c + 2b - 4c = 2$$

$$2b = 2$$

$$b = 1$$

نعوض قيمة b في (1) وفي (2)

$$\begin{cases} a + 2(1) - 4c = 2 \\ 3a + 2 + 4c = 6 \end{cases}$$

بالجمع نجد:

$$4a + 4 = 8$$

$$4a = 4$$

$$a = 1$$

$$a = 4c$$

$$c = \frac{a}{4}$$

$$c = \frac{1}{4}$$

إذن $f(x) = x + 1 + \frac{1}{4(x-1)}$

2-ب- تعيين النهايات من الجدول

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = -\infty$$

التفسير البياني

المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C)

2-ج- المقارنة بين صورتي العددين $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$

حساب صورتي العددين $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \quad f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

لدينا $\frac{3}{4} > \frac{1}{2}$

والدالة f متناقصة تماما على المجال $\left]\frac{1}{2}; 1\right[$

اي $f\left(\frac{3}{4}\right) < f\left(\frac{1}{2}\right)$

3- أ- البرهان ان (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$ و $-\infty$

حتى يكون (Δ) مستقيما مقاربا مائلا لـ (C) بجوار $+\infty$ و $-\infty$ يجب أن يكون:

$$\lim_{|x|\to+\infty}[f(x) - y] = 0$$

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left(x+1+\frac{\frac{1}{4}}{x-1}-x-1\right) = \lim_{|x|\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{4}}{x-1}\right)$$
$$= 0$$

ومنه يكون المستقيم (Δ) مستقيما مقاربا مائلا لـ (C) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

ب- دراسة وضعية المنحنى (C) بالنسبة (Δ)

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$

$$f(x) - y = x + 1\frac{\frac{1}{4}}{x-1} - x - 1$$
$$= \frac{\frac{1}{4}}{x-1} = \frac{0.25}{x-1}$$

$0.25 > 0$ إذن إشارة الفرق من إشارة $x - 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$
$f(x)-y$	$-$	$\|\|$	$+$
الوضعية	(C) يقع تحت (Δ)		(C) يقع فوق (Δ)

ج- اثبات ان $\omega(1;2)$ مركز تناظر للمنحنى (C)

تكون $\omega(a;b)$ مركز تناظر لـ (C) إذا كان

$2a - x \in \mathbb{R} - \{1\}$ و $x \in \mathbb{R} - \{1\}$

$$f(2-x) + f(x) = 4$$

$$f(2-x) + f(x)$$
$$= 2 - x + 1 + \frac{\frac{1}{4}}{2-x-1} + x + 1 + \frac{\frac{1}{4}}{x-1}$$
$$= 4 + \frac{-\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{\frac{1}{4}}{x-1}$$
$$= 4$$

ومنه $\omega(1;2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C)

د- تعيين نقط تقاطع (C) مع حامل محور الفواصل

نحل المعادلة $f(x) = 0$

$$\frac{(x-1)(x+1)+\frac{1}{4}}{x-1} = 0$$
$$\frac{x^2-1+\frac{1}{4}}{x-1} = 0$$

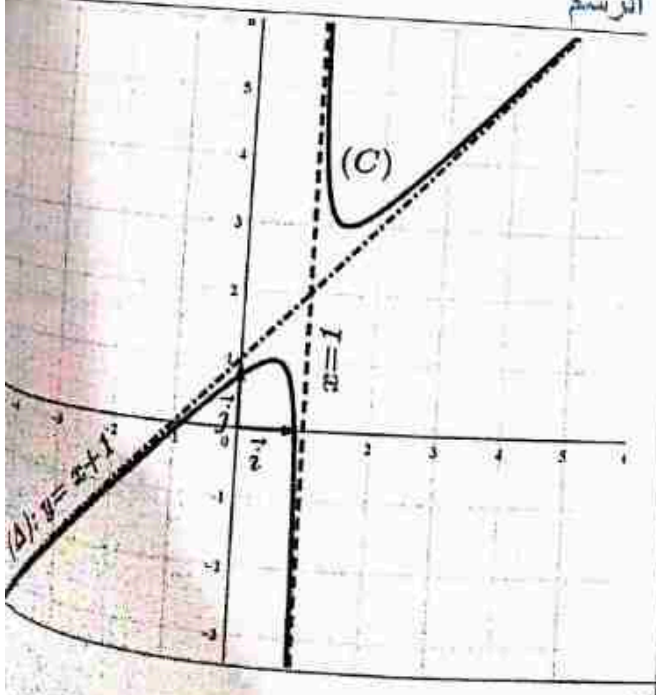
إذن $x - 1 \neq 0$

$$x^2 - 1 + \frac{1}{4} = 0$$
$$x^2 - \frac{3}{4} = 0$$
$$x^2 = \frac{3}{4}$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x = -\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$(C) \cap (xx') = \left\{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)\right\}$$

الرسم



حلول المعادلة $f(x) = |\lambda|$

حلول المعادلة $f(x) = |\lambda|$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم الأفقي ذو المعادلة $y = |\lambda|$

(1) $y < 1$

$|\lambda| < 1$

$\lambda \in]-1;1[$ للمعادلة حلان متمايزان

(2) $y = 1$

$|\lambda| = 1$

$\begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -1 \end{cases}$ أو

$x = \frac{1}{2}$ المعادلة حل مضاعف

$y = |\lambda|$

$a < |x|$

$x \in]-\infty; -a[\cup]a; +\infty[$

$1 < |\lambda|$

$\lambda \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

$|x| < a$

$x \in]-a; a[$

$|\lambda| < 3$

$\lambda \in]-3; 3[$

$\lambda \in]-3; -1[\cup]1; 3[$

يوجد حلول للمعادلة

$|\lambda| = 3$

$\begin{cases} \lambda = -3 \\ \lambda = 3 \end{cases}$

المعادلة حل مضاعف $x = 1.5$

$|\lambda| < 3$

$]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$

المعادلة حلان متمايزان

122. تمرين رقم 08

التوجيه: مراجعة شاملة و كافية لاختبار الفصل الثاني للثانية ثانوي في الرياضيات
(مسألة شاملة)

دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 3x + 1}{x^2 + 1}$$

(C_f) منحنى الدالة f في م.م.م $(o; \vec{i}; \vec{j})$

عين الأعداد الحقيقية a ، b و c :

$$f(x) = ax + b + \frac{cx}{x^2 + 1}$$

استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا
لا (Δ) يطلب تعيين معادلة له ثم ادرس وضعية
(C_f) مع (Δ)

ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4- بين أنه يوجد مماسين (T) و (T') لـ (C_f) يوازيان (Δ) ثم اكتب المعادلة الديكارتية لكل واحد منهما

5- احسب $f(x) + f(-x)$ ثم فسّر النتيجة المحصل عليها هندسيا.

6- اكتب معادلة المماس (d) عند النقطة $A(0;1)$ ثم ادرس وضعيته بالنسبة إلى المنحنى (C_f) وماذا نقول عن النقطة A؟

7- بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $-1 < x_0 < 0$

8- ارسم (T) ، (T') ، (Δ) ثم (C_f)

9- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $\frac{2x}{x^2+1} = m - 1$

الحل

1- تعيين الأعداد a ، b و c

$x^3 + x^2 + 3x + 1$	$x^2 + 1$
$-x^3 - x$	$x + 1$
$x^2 + 2x + 1$	
$-x^2 - 1$	
$2x$	

$$f(x) = \text{الحاصل} + \frac{\text{الباقي}}{\text{القاسم}}$$

$$f(x) = x + 1 + \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$a = 1$ ، $b = 1$ ، $c = 2$

2-استنتاج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ)

$$\lim_{|x| \to +\infty} \left[x + 1 + \frac{2x}{x^2 + 1} - (x + 1) \right] = 0$$

إذن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ)

معادلته هي: $y = x + 1$

- دراسة وضعية المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ)

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$

$$f(x) - y = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

إشارة $f(x) - y$ من إشارة $2x$

$2x = 0$

$x = 0$

المماسة الفاصلة

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-y$	$-$		0	$+$	
الوضعية	(C_f) يقع تحت (Δ)	(Δ) يقطع (C_f)		(C_f) يقع فوق (Δ)	

3- دراسة تغيرات الدالة f

- النهايات

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

- المشتقة

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة

$$f'(x) = \frac{(3x^2+2x+3)(x^2+1)-2x(x^3+x^2+3x+1)}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{3x^4+3x^2+2x^3+2x+3x^2+3-2x^4-2x^3-6x^2-2x}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{x^4+3}{(x^2+1)^2} > 0$$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

4- البرهان أنه يوجد مماسين (T) و (T')

يوازي ← المشتقة = معامل التوجيه

نحل المعادلة $f'(x)=1$

$f'(x)=1$ يكافئ

$$\frac{x^4+3}{(x^2+1)^2} = 1$$
$$\frac{x^4+3}{(x^2+1)^2} - 1 = 0$$
$$\frac{x^4+3-(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2} = 0$$
$$\frac{x^4+3-(x^4+2x^2+1)}{(x^2+1)^2} = 0$$
$$\frac{x^4+3-x^4-2x^2-1}{(x^2+1)^2} = 0$$
$$\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} = 0$$
$$-2x^2+2=0$$
$$x^2=1$$
$$x=1$$

ومنه المنحنى (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') يوازيان (Δ) عند النقطتين ذات الفاصلتين 1 و -1

- كتابة معادلتي المماسين

- معادلة (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1

$$(T): y = f'(1)(x-1)+f(1)$$
$$= x-1+3$$
$$(T): y = x+2$$

- معادلة (T') عند النقطة ذات الفاصلة -1

$$(T'): y = f'(-1)(x+1)+f(-1)$$
$$= x+1-1$$
$$(T'): y = x$$

5- حساب $f(x)+f(-x)$ وتفسير النتيجة

$$f(x)+f(-x) = \frac{x^3+x^2+3x+1}{x^2+1} + \frac{-x^3+x^2-3x+1}{x^2+1}$$
$$= \frac{x^3+x^2+3x+1-x^3+x^2-3x+1}{x^2+1}$$
$$= \frac{2x^2+2}{x^2+1} = \frac{2(x^2+1)}{x^2+1} = 2$$

$f(2a-x)+f(x)=2b$

بالمطابقة

$$2a=0$$
$$a=0$$

$$2b=2$$
$$b=1$$

التفسير الهندسي

(C_f) يقبل مركز تناظر في النقطة $A(0;1)$

6- معادلة المماس (d) عند $A(0;1)$

$$(d): y = f'(0)(x-0)+f(0)$$
$$(d): y = 3x+1$$

وضعية المنحنى (C_f) مع المنحنى (d):

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$

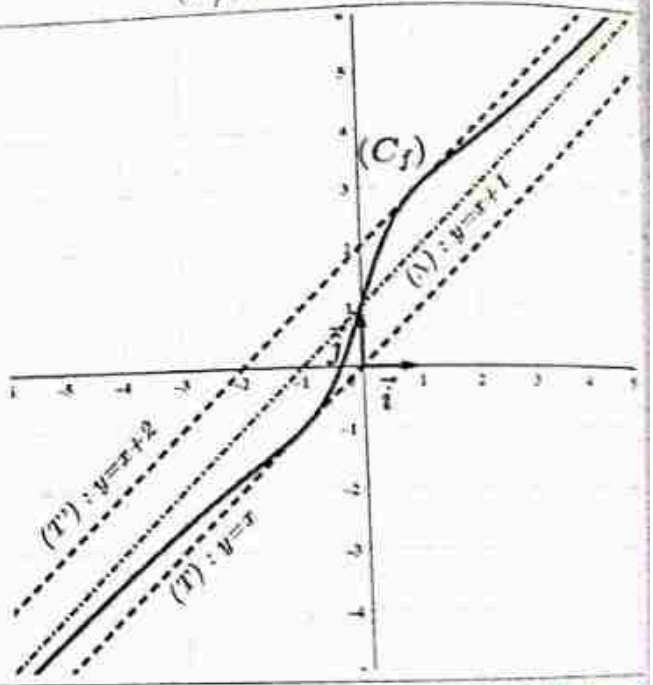
$$f(x)-y = \frac{x^3+x^2+3x+1}{x^2+1} - 3x - 1$$
$$= \frac{x^3+x^2+3x+1-(3x+1)(x^2+1)}{x^2+1}$$
$$= \frac{x^3+x^2+3x+1-3x^3-3x-x^2-1}{x^2+1}$$
$$= \frac{-2x^3}{x^2+1}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-y$	$+$		0		$-$
الوضعية	(C_f) يقع فوق (d)		(d) يقطع (C_f)		(C_f) يقع تحت (d)

7- البرهان أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $-1 < x_0 < 0$

بما أن الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $]-1;0[$: $f(0)=1$ و $f(-1)=-1$
$f(0)\times f(-1)<0$
حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $-1<x_0<0$
ومنه (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $-1<x_0<0$

8- رسم (T) ، (T') ، (Δ) ثم (C_f)



9- تشكيل جدول تغيرات الدالة f

10- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+1$ مستقيما مقاربا مائلا لـ (C_f) عند $-\infty$ و $+\infty$

11- استنتج وضعية (C_f) مع (Δ)

12- احسب $f(-x)+f(x)$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل مركز تناظر يطلب تعيينه

13- ارسم (Δ) ، (T) ثم (C_f).

14- نقاش بيانيا عدد حلول المعادلة $f(x)=x+m$ مع m وسيط حقيقي.

الحل

1- تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c

x^3+x^2-1	x^2-1
$-x^3+x$	$x+1$
x^2+x-1	
$-x^2+1$	
x	

$\frac{2x}{x^2+1}=m-1$

حسفة $x+1$ للطرفين نجد:

$x+1+\frac{2x}{x^2+1}=m-1+x+1$

$f(x)=x+m$

حلول المعادلة $f(x)=x+m$ هي فواصل نقط تقاطع المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y=x+m$ مع (C_f)

$m<0$ لا يوجد حلول للمعادلة

$m=0$ حل وحيد مضاعف سالب

$0<m<1$ - حلان سالبان

$m=1$ - حل وحيد معدوم

$1<m<2$ - حلان موجبان

$m=2$ - حل وحيد مضاعف موجب

$2<m$ - لا يوجد حلول للمعادلة

تمرين رقم 09 .123

اليوتيوب: اختبار الفصل الثاني في الرياضيات الثانية ثانوي (الاشتقاقية مع النهايات روووعة)

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ بـ: $f(x)=\frac{x^3+x^2-1}{x^2-1}$ ، (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

1- عين الأعداد الحقيقية a ، b و c من اجل كل x من D_f : $f(x)=ax+b+\frac{cx}{x+1}$

2- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3- احسب $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ وفسر النتائج المحصل عليها بيانيا.

4- احسب $\lim\limits_{h\to0}\left[\frac{f(h)-1}{h}\right]$ ثم فسر النتيجة هندسيا

5- اكتب معادلة المماس (T) عند النقطة $A(0;1)$.

6- ادرس الوضعية النسبية لـ (C_f) مع (T).

7- استنتج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف.

8- احسب $f'(x)$ ثم ادرس اتجاه تغير الدالة f

9- شكل جدول تغيرات الدالة f.

10- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+1$ مستقيما مقاربا مائلا لـ (C_f) عند $-\infty$ و $+\infty$

11- استنتج وضعية (C_f) مع (Δ)

12- احسب $f(-x)+f(x)$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل مركز تناظر يطلب تعيينه

13- ارسم (Δ) ، (T) ثم (C_f).

14- نقاش بيانيا عدد حلول المعادلة $f(x)=x+m$ مع m وسيط حقيقي.

$$f(x) = \text{الحاصل} + \frac{\text{الباقي}}{\text{القاسم}}$$

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{x^2-1}$$

$$a = 1 \cdot b = 1 \cdot c = 1$$

2- حساب النهايات

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3+x^2-1}{x^2-1}\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3}{x^2}\right] = \lim_{x\to-\infty}[x]$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

3- حساب $\lim_{x\to-1} f(x) \cdot \lim_{x\to-1} f(x)$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\ x<-1}} f(x) = -\frac{1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\ x>-1}} f(x) = -\frac{1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\ x<1}} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\ x>1}} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

التفسير الهندسي

المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لحامل محور الترتيب معادلتاهما $x=-1$ و $x=1$

4- حساب $\lim_{h\to0}\left[\frac{f(h)-1}{h}\right]$

$$\lim_{h\to0}\left[\frac{f(h+0)-f(0)}{h}\right] = f'(0)$$

$$\lim_{h\to0}\left[\frac{f(h)-1}{h}\right] = \lim_{h\to0}\left[\frac{\frac{h^3+h^2-1}{h^2-1}-1}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to0}\left[\frac{\frac{h^3+h^2-1-h^2+1}{h^2-1}}{h}\right]$$

$$\lim_{h\to0}\left[\frac{\frac{h^3}{h^2-1}}{h}\right] = \lim_{h\to0}\left[\frac{h^3}{h^2-1}\times\frac{1}{h}\right]$$

$$= \frac{0}{-1} = 0$$

إذن

$$\lim_{h\to0}\left[\frac{f(h)-1}{h}\right] = f'(0) = 0$$

التفسير الهندسي

المنحنى (C_f) يقبل مماسا معامل توجيهه يساوي 0 عند النقطة ذات الفاصلة 0

5- معادلة المماس (T) عند النقطة $A(0;1)$

$$(T): y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$(T): y = 1$$

6- دراسة وضعية (C_f) مع (T)

ندرس إشارة الفرق $(f(x)-y)$ على D_f:

$$f(x) - y = \frac{x^3}{x^2-1}$$

$$x^3 = 0$$

$$x = 0$$

x	$-\infty$		-1		0		1	$+\infty$
x^3	$-$		$-$		0	$+$		$+$
x^2-1	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x^3}{x^2-1}$	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖		$+$
الوضعية	(C_f) يقع تحت (T)	‖	(C_f) يقع فوق (T)	(T) يخترق (C_f)	(C_f) يقع تحت (T)	‖	(C_f) يقع فوق (T)	

7- استنتاج أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف

بما أن (T) يخترق (C_f) في النقطة $A(0;1)$ فإنها نقطة انعطاف

8- حساب $f'(x)$

الدالة f تقبل الاشتقاق على المجالات $]-\infty;-1[$ و $]-1;1[$ و $]1;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي:

$$f'(x) = \frac{(3x^2+2x)(x^2-1)-2x(x^3+x^2-1)}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$$

$x^4 - 3x^2 = 0$ يكافئ $f'(x) = 0$
$x^2(x^2 - 3) = 0$
$x^2 - 3 = 0$ أو $x^2 = 0$
$x^2 = 3$
$x = -\sqrt{3}$ ، $x = \sqrt{3}$ $x = 0$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
x^2	+	+	+	0	+	+	+
x^2-3	+	0	−	−	−	0	+
$f'(x)$	+	0	−	0	−	0	+

- دراسة اتجاه تغير الدالة f

الدالة f متزايدة تماما على المجالين
$[\sqrt{3}\,;+\infty[$ ، $]-\infty,-\sqrt{3}]$
ومتناقصة تماما على المجالات
$]1,\sqrt{3}]$ ، $]-1;1[$ ، $[-\sqrt{3};-1[$

- جدول التغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	− 0 −		− 0	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(-\sqrt{3})$	$-\infty$	$+\infty$ 0 $-\infty$	$+\infty$	$f(\sqrt{3})$	$+\infty$

10- البرهان أن (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (C_f)

$$f(x) - y = \frac{x}{x^2-1}$$
$$\lim_{|x|\to+\infty}\left[\frac{x}{x^2-1}\right] = \lim_{|x|\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\right] = 0$$

ومنه (Δ) م. م مائل لـ (C_f) عند $-\infty$ و $+\infty$

11- استنتاج وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$ على D_f

$$f(x) - y = \frac{x}{x^2-1}$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x	−	−	0	+	+
x^2-1	+	0 −	−	0	+
$f(x)-y$	−	+	0 −		+
الوضعية	(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقع فوق (Δ)	(Δ) يخترق (C_f)	(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقع فوق (Δ)

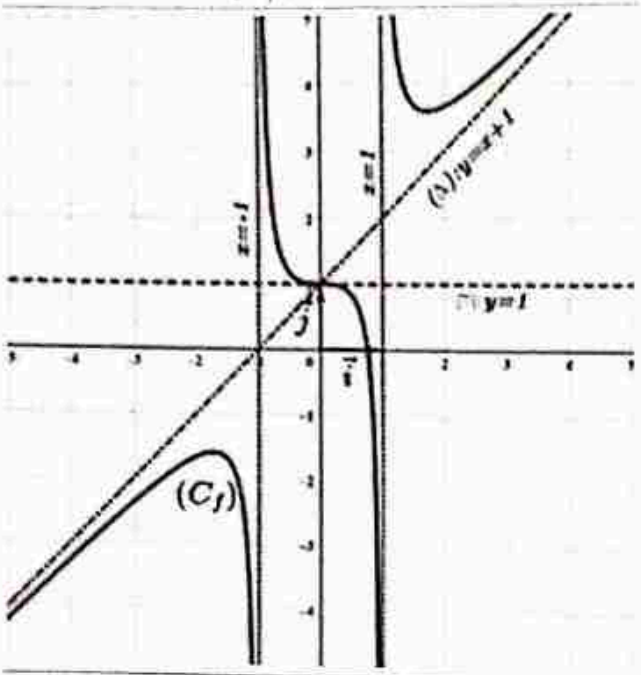
12- حساب $f(x) + f(-x)$

$$f(-x) + f(x) = \frac{-x^3+x^2-1}{x^2-1} + \frac{x^3+x^2-1}{x^2-1}$$
$$= \frac{2x^2-2}{x^2-1} = \frac{2(x^2-1)}{x^2-1} = 2$$

- استنتاج مركز التناظر

$x \in D_f$ و $(2a-x) \in D_f$
تكون النقطة $A(a;b)$ مركز تناظر لـ (C_f) إذا كان $f(2a-x) + f(x) = 2b$
وجدنا سابقا
$f(-x) + f(x) = 2$
إذن: $2a = 0$ أي $a = 0$
$2b = 2$ أي $b = 1$
ومنه $A(0;1)$ مركز تناظر لـ (C_f)

13- رسم (Δ) ، (T) ثم (C_f)



14- المناقشة البيانية

حلول المعادلة $f(x) = x + m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = x + m$
لما $m < 1$ يكون للمعادلة حلان متمايزان
$m = 1$ للمعادلة حل وحيد معدوم
$m > 1$ للمعادلة حلان متمايزان

124. تمرين رقم 10

اليوتيوب: اختبار الفصل الثاني في الرياضيات للثانية ثانوي رقم 1 (النهايات)

I-
نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1;2\}$ بالعبارة $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2-3x+2}$ ، (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$
1- بين أنه من اجل كل x من D_f $f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2}$ حيث a ، b ، c اعداد

حقيقية يطلب تعيينها.
2- احسب نهايات الدالة f على أطراف مجموعة تعريفها وفسّر النتائج المحصل عليها بيانيا.
3- ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) مع المستقيم المقارب الأفقي (Δ).
4- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
5- اكتب معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 0.
6- ارسم (T) والمستقيمات المقاربة ثم (C_f)
7- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)=m$.

II-
لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{1;2\}$ بـ:
$h(x)=f(|x|)$.
1- بين أن h دالة زوجية.
2- اشرح كيف يتم رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم ارسمه.

الحل

1- البرهان انه من اجل كل x من D_f
$f(x)=a+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x-2}$

من اجل كل x من D_f فإن

$$f(x)=a+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x-2}$$
$$=\frac{a(x^2-3x+2)+b(x-2)+c(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$
$$=\frac{ax^2-3ax+2a+bx-2b+cx-c}{x^2-3x+2}$$
$$=\frac{ax^2+(-3a+b+c)x+2a-2b-c}{x^2-3x+2}$$

ولدينا من جهة أخرى

$$f(x)=\frac{(x+1)^2}{x^2-3x+2}$$

بالمطابقة نجد:

$a=1$ ،

$$\begin{cases}-3+b+c=2\\2-2b-c=1\end{cases}$$

بالجمع:

$$-1-b=3$$
$$-1-3=b$$
$$b=-4$$

$$-3-4+c=2$$
$$c=9$$

$$f(x)=1-\frac{4}{x-1}+\frac{9}{x-2}$$

2-حساب النهايات

$$D_f=]-\infty;1[\cup]1;2[\cup]2;+\infty[$$
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=1$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$$

التفسير البياني

المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا افقيا معادلته $y=1$

$$\lim_{\substack{x\to1\\<}}f(x)=\lim_{\substack{x\to1\\<}}\left[1-\frac{4}{x-1}+\frac{9}{x-2}\right]$$
$$=1-\frac{4}{0^-}+\frac{9}{1-2}=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\>}}f(x)=\lim_{\substack{x\to1\\>}}\left[1-\frac{4}{x-1}+\frac{9}{x-2}\right]$$
$$=1-\frac{4}{0^+}+\frac{9}{1-2}=-\infty$$

التفسير الهندسي

المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=1$

$$\lim_{\substack{x\to2\\<}}f(x)=\lim_{\substack{x\to2\\<}}\left[1-\frac{4}{x-1}+\frac{9}{x-2}\right]$$
$$=1-\frac{4}{2-1}+\frac{9}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to2\\>}}f(x)=\lim_{\substack{x\to2\\>}}\left[1-\frac{4}{x-1}+\frac{9}{x-2}\right]$$
$$=1-\frac{4}{2-1}+\frac{9}{0^+}=+\infty$$

التفسير الهندسي

المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=2$

3- دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$ على D_f

$$f(x)-y=-\frac{4}{x-1}+\frac{9}{x-2}$$

$$= \frac{-4(x-2)+9(x-1)}{x^2-3x+2}$$

$$= \frac{-4x+8+9x-9}{x^2-3x+2} = \frac{5x-1}{x^2-3x+2}$$

$$5x-1=0$$

$$x=\frac{1}{5}$$

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{5}$		1		2	
$5x-1$	$-$	0	$+$		$+$			
x^2-3x+2	$+$		$+$	0	$-$	0		
$f(x)-y$	$-$	0	$+$		$-$			
الوضعية	(C_f) يقع تحت (Δ)		(C_f) يقطع (Δ)		(C_f) يقع فوق (Δ)		(C_f) يقع تحت (Δ)	

دراسة اتجاه تغير الدالة f

الدالة f تقبل الاشتقاق على $]-\infty;1[\cup]1;2[\cup]2;+\infty[$ ودالتها المشتقة

$$f'(x)=\frac{2(x+1)(x^2-3x+2)-(2x-3)(x+1)^2}{(x^2-3x+2)^2}$$

$$=\frac{(x+1)[(2(x^2-3x+2)-(2x-3)(x+1)]}{(x^2-3x+2)^2}$$

$$=\frac{(x+1)[2x^2-6x+4-2x^2-2x+3x+3]}{(x^2-3x+2)^2}$$

$$=\frac{(x+1)(-5x+7)}{(x^2-3x+2)^2}$$

x	$-\infty$		-1		1		$\frac{7}{5}$		2	
$-5x+7$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$
$x+1$	$-$		0	$+$		$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$-$		0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$

الدالة f متناقصة تماما على المجالات $]-\infty;-1]$ و $[\frac{7}{5};2[$ و $]2;+\infty[$

ومتزايدة تماما على المجالين $[-1;1[$ و $]1;\frac{7}{5}]$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		-1		1		$\frac{7}{5}$		2	
$f'(x)$	$-$		0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$
$f(x)$	1	↘	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-24	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘

5- كتابة معادلة المماس (T)

معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 0

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

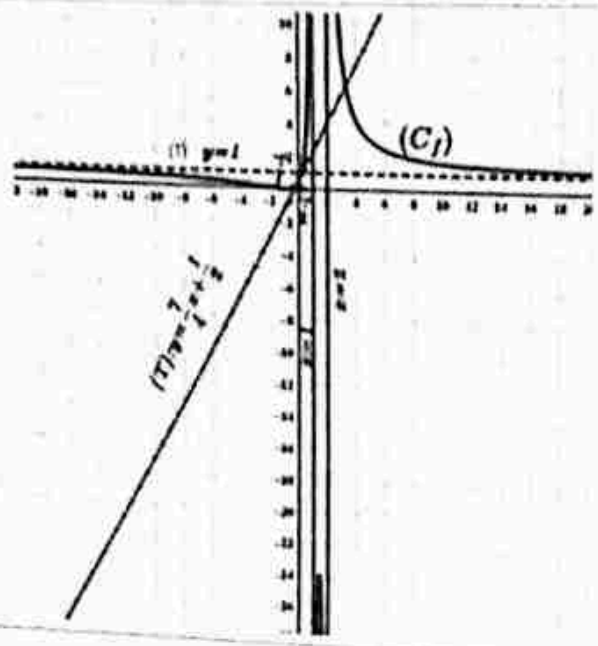
$$y=f'(0)(x-0)+f(0)$$

$$f'(0)=\frac{7}{4}$$

$$f(0)=\frac{1}{2}$$

$$(T): y=\frac{7}{4}x+\frac{1}{2}$$

6- الرسم



7- المناقشة البيانية

الحلول البيانية للمعادلة $f(x)=m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=m$

لما

- $m<-24$ للمعادلة حلان متمايزان
- $-24<m<0$ لا يوجد حلول للمعادلة
- $m=0$ للمعادلة حل مضاعف
- $0<m<1$ للمعادلة حلان مختلفان
- $m=1$ للمعادلة حل وحيد موجب
- $m>1$ للمعادلة حلان متمايزان

II - 1- البرهان أن h دالة زوجية

$x\in D_h$ ، $-x\in D_h$

تكون h دالة زوجية إذا كان $h(-x)=h(x)$

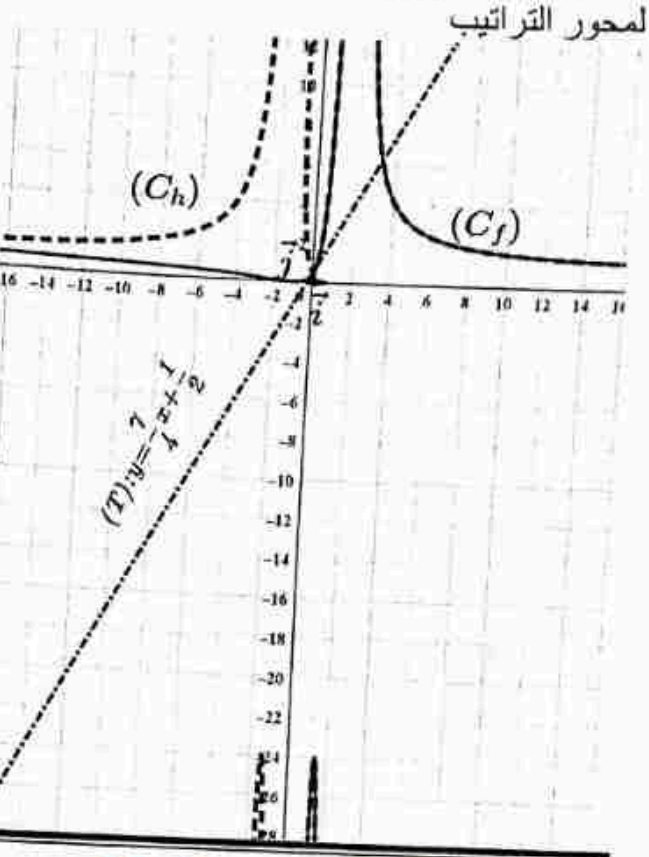
$h(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=h(x)$

ومنه h دالة زوجية حيث (C_h) متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب.

2- شرح كيفية رسم (C_h) انطلاقا من (C_f)

$$h(x)=\begin{cases} f(x)\,;x\in[0;1[\cup]1;2[\cup]2;+\infty[\\ f(-x)\,;x\in]-\infty;-2[\cup]-2;-1[\cup]-1;0] \end{cases}$$

أي (C_h) ينطبق على (C_f) على المجال
$[0;1[\cup]1;2[\cup]2;+\infty[$
وبما أن h دالة زوجية نناظر هذا الجزء بالنسبة لمحور التراتيب



125. تمرين رقم 11

اليوتيوب: اقوى مراجعة في الاشتقاقية .النهايات و المرجح و مجموعة النقط للثانية ثانوي (رووووعة بروفيتي)

-I

A ، B و C ثلاث نقط من المستوي ليست في استقامية، وليكن العدد الحقيقي k حيث $-1\le k\le 1$ وليكن G_k مرجح الجملة

$$\{(A,k^2+1);(B,k);(C,-k)\}$$

1- مثّل النقط A، B و C و I منتصف $[BC]$ وأنشئ G_1 و G_{-1} .

2- بين ان النقط A ، G_1 و G_{-1} في استقامية

3- بين أنه من أجل كل k من $[-1;1]$ فإن

$$\overrightarrow{AG_k}=\frac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$$

4- لتكن N نقطة من (BC) ، هل يمكن لـ N أن تنطبق على G_k ؟ علل.

5- عين المجموعة (Γ_1) مجموعة النقط M من المستوي حيث $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=4$

6- عين المجموعة (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي حيث $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$

-II

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-\frac{x}{x^2+1}$

(C_f) منحناها البياني في م.م.م $(o;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

1- احسب نهايتي الدالة f وفسّر النتائج بيانيا.

2- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3- بين أن الدالة f فردية واستنتج أن الدالة f يقبل مركز تناظر يطلب تعيينه.

4- اكتب معادلة للمماس (T) عند المبدأ O .

5- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T) وماذا يمكن القول عن النقطة O ؟

6- ارسم (T) و (C_f) .

7- عين قيم الوسيط الحقيقي m بحيث يكون للمعادلة $f(x)=m$ حلين متمايزين.

8- بالاستعانة بجدول تغيرات الدالة f استنتج مجموعة النقط G_k عندما يمسح k المجال $[-1;1]$.

الحل

1- تمثيل النقط

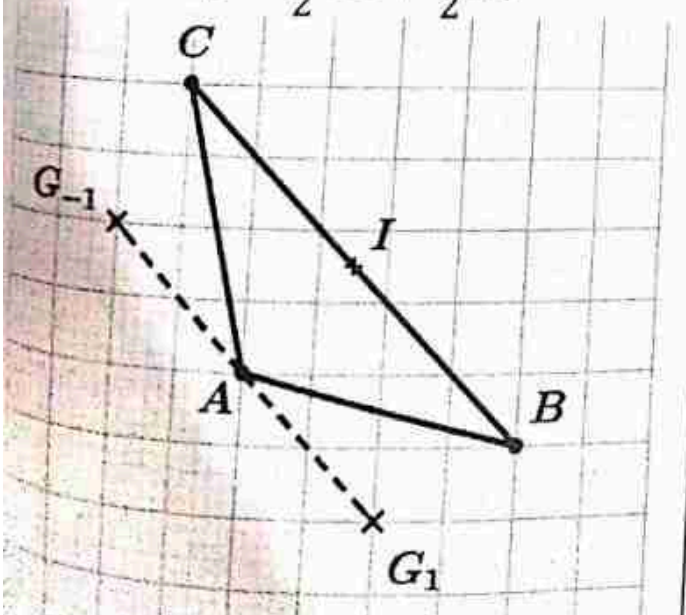
G_1 مرجح الجملة $\{(A;2),(B;1),(C;-1)\}$

G_{-1} مرجح الجملة $\{(A;2),(B;-1),(C;1)\}$

$$\overrightarrow{AG_1}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AG_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AG_{-1}}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$



2- البرهان أن النقط A ، G_1 و G_{-1} في استقامية

يكفي أن نبرهن أن $\overrightarrow{AG_1} = k\overrightarrow{AG_{-1}}$

لدينا:

$$\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \dots (1)$$

$$\overrightarrow{AG_{-1}} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \dots (2)$$

بضرب (1) و (2) في 2 نجد:

$$2\overrightarrow{AG_1} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \dots (3)$$

$$2\overrightarrow{AG_{-1}} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \dots (4)$$

بضرب (4) في -1 نجد:

$$-2\overrightarrow{AG_{-1}} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \dots (5)$$

نلاحظ أن (3) و (5) متساويان أي

$$2\overrightarrow{AG_1} = -2\overrightarrow{AG_{-1}}$$

$$\overrightarrow{AG_1} = -\overrightarrow{AG_{-1}}$$

ومنه $k = -1$

إذن الشعاعان $\overrightarrow{AG_{-1}}$ و $\overrightarrow{AG_1}$ مرتبطان خطيا أي النقط A ، G_1 و G_{-1} في استقامية

3- البرهان أن $\overrightarrow{AG_k} = \frac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$

G_k مرجح الجملة

$$\{(A, k^2+1); (B, k); (C, -k)\}$$

$$k^2 + 1 + k - k = k^2 + 1 \neq 0$$

ومنه $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$$(k^2+1)\overrightarrow{G_kA} + k\overrightarrow{G_kB} - k\overrightarrow{G_kC} = \vec{0}$$

$$(k^2+1)\overrightarrow{G_kA} + k\overrightarrow{G_kB} - k\overrightarrow{G_kB} - k\overrightarrow{BC} = \vec{0}$$

$$(k^2+1)\overrightarrow{G_kA} = k\overrightarrow{BC}$$

$$-(k^2+1)\overrightarrow{AG_k} = k\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{AG_k} = \frac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$$

4- معرفة ما إذا كانت N تنطبق على G_k

لا يمكن أن N تنطبق G_k لأن $\overrightarrow{AG_k}$ و BC مرتبطان خطيا والنقط A ، B و C ليست في استقامية

5- تعيين مجموعة (Γ_1)

$$\left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = 4$$

$$\left\|2\overrightarrow{MG_1} + 2\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{MG_1} + \overrightarrow{G_1B} - \overrightarrow{MG_1} - \overrightarrow{G_1C}\right\| = 4$$

$$\left\|2\overrightarrow{MG_1} + \overrightarrow{MG_1} - \overrightarrow{MG_1} + 2\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1B} - \overrightarrow{G_1C}\right\| = 4$$

ونعلم أن G_1 مرجح الجملة

$$\{(A, 2); (B, 1); (C, -1)\}$$ أي

$$\left\|2\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1B} - \overrightarrow{G_1C}\right\| = \vec{0}$$

إذن

$$\left\|2\overrightarrow{MG_1}\right\| = 4$$

$$2MG_1 = 4$$

$$MG_1 = 2$$

ومنه مجموعة النقط (M) دائرة مركزها G_1 ونصف قطرها 2

6- تعيين (Γ_2)

$$\left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$$

نعلم أن G_1 مرجح الجملة

$$\{(A, 2); (B, 1); (C, -1)\}$$ أي

$$\left\|2\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1B} - \overrightarrow{G_1C}\right\| = \vec{0}$$

أي

$$\left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MG_1}\right\|$$

نعلم أن G_{-1} مرجح الجملة

$$\{(A, 2); (B, -1); (C, 1)\}$$ أي

$$\left\|2\overrightarrow{G_{-1}A} - \overrightarrow{G_{-1}B} + \overrightarrow{G_{-1}C}\right\| = \vec{0}$$

أي

$$\left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MG_{-1}}\right\|$$

إذن

$$\left\|2\overrightarrow{MG_1}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MG_{-1}}\right\|$$

$$2MG_1 = 2MG_{-1}$$

$$MG_1 = MG_{-1}$$

مجموعة النقط (Γ_2) هي محور القطعة المستقيمة $[G_1G_{-1}]$

II -

1- حساب النهايات

$$\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-x}{x^2+1}\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-x}{x^2}\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-1}{x}\right]$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-x}{x^2+1}\right] = 0$$

المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا افقيا (موازي لمحور الفواصل) معادلته $y=0$ عند $-\infty$ و $+\infty$

2- دراسة اتجاه التغير و تشكيل جدول التغيرات

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - v'u}{v^2}$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي:

$$f'(x) = \frac{-1(x^2+1) - 2x(-x)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 1 + 2x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$$

$f'(x) = 0$ تكافئ $x^2 - 1 = 0$

$x^2 = 1$

$\begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

الدالة f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;-1]$ و $[1;+\infty[$

ومتناقصة تماما على المجال $[-1;1]$

-جدول التغيرات

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow \frac{1}{2}$		$\searrow \frac{-1}{2}$	$\nearrow 0$

3- البرهان أن f دالة فردية

بما أن $x \in D_f$ و $-x \in D_f$

$$f(-x) = \frac{-(-x)}{(-x)^2+1} = -\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = -f(x)$$

ومنه f دالة فردية

- استنتاج مركز التناظر

بما أن f دالة فردية فإن المنحنى (C_f) متناظر بالنسبة للمبدأ O أي O مركز تناظر لـ (C_f)

$O(0;0)$

4- معادلة المماس (T) عند $O(0;0)$

$$(T): y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$f'(0) = -1$$

$$f(0) = 0$$

$$(T): y = -x$$

5- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة الى (T)

لدراسة إشارة الفرق $f(x) - y$

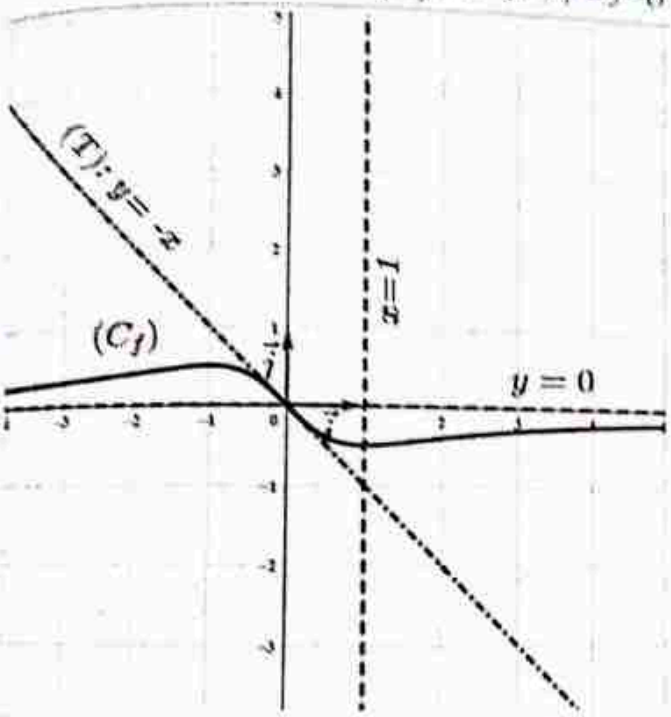
$$f(x) - y = \frac{-x}{x^2+1} + x = \frac{x^3}{x^2+1}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^3	$-$		0	$+$	
x^2+1	$+$		$\|$	$+$	
$f(x)-y$	$-$		0	$+$	
الوضعية	(C_f) يقع تحت (T)		(T) يخترق (C_f)	(C_f) يقع فوق (T)	

- الاستنتاج

بما أن (T) يخترق المنحنى (C_f) فإن النقطة O تمثل نقطة انعطاف لـ (C_f)

6- رسم (T) و (C_f)



7- المناقشة البيانية

قيم m حتى يكون للمعادلة $f(x) = m$ حلين متمايزين هي

$$m \in \left]\frac{-1}{2};0\right[\cup \left]0;\frac{1}{2}\right[$$

8- استنتاج مجموعة النقط G_k

$$f(x) = \frac{-x}{-x^2+1}$$

$$\overrightarrow{AG_k} = \frac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{AG_{-1}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{AG_1} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{BC}$$

مجموعة النقط G_k هي القطعة المستقيمة $[G_{-1}G_1]$ لما k يمسح $[-1;1]$

126. تمرين رقم 12

المستوى منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بالعبارة $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$ و (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- بين أنه من أجل كل x من D_f : $f(x)=a+\frac{b}{x-1}$ حيث a و b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما.

2- احسب النهايات على أطراف D_f ثم فسر النتائج المحصل عليها بيانيا.

3- احسب $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f.

4- شكل جدول تغيرات الدالة f.

5- بين أن (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') معامل توجيه كل منهما -3

6- اكتب معادلة المماس لكل من (T) و (T').

7- عين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حاملي محوري الاحداثيات.

8- ارسم (T) و (T') ثم (C_f).

9- عين قيم الوسيط الحقيقي m بحيث يكون للمعادلة $f(x)=-3x+m$ حلان متمايزان

II- g دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ عبارتها $g(x)=|f(x)|$

اشرح كيف يتم رسم (C_g) (منحنى الدالة g) انطلاقا من (C_f) ثم ارسمه في نفس المعلم.

الحل

1- تبيين أن $f(x)=a+\frac{b}{x-1}$ وتعيين a و b

من أجل كل x من D_f

$$f(x)=a+\frac{b}{x-1}=\frac{ax-a+b}{x-1}$$

بالمطابقة مع $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$ نجد:

$$a=2$$
$$-a+b=1$$
$$b=3$$

2- حساب النهايات

$$D_f=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2x+1}{x-1}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2x}{x}\right]=2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x+1}{x-1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x}{x}\right]=2$$

المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا أفقيا معادلته $y=2$ عند $+\infty$ و $-\infty$

$$\lim_{\substack{x\to1\\<}} f(x)=\lim_{\substack{x\to1\\<}}\left[\frac{2x+1}{x-1}\right]=\left[\frac{3}{0}\right]$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

بما أن $x\overset{<}{\to}1$

$$\lim_{\substack{x\to1\\<}} f(x)=\left[\frac{3}{0^-}\right]=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x)=\lim_{\substack{x\to1\\>}}\left[\frac{2x+1}{x-1}\right]=\left[\frac{3}{0^-}\right]=-\infty$$

بما أن $x\overset{>}{\to}1$

$$\lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x)=\left[\frac{3}{0^+}\right]=+\infty$$

المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا شاقوليا معادلته $x=1$

3- حساب $f'(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجالين $]-\infty;1[$ و $]1;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي

$$f'(x)=\frac{2(x-1)-(2x+1)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x-2-2x-1}{(x-1)^2}=\frac{-3}{(x-1)^2}$$

- استنتاج اتجاه تغير الدالة f

$f'(x)<0$

ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجالين $]-\infty;1[$ و $]1;+\infty[$

4- جدول التغيرات

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	2	$\searrow$	‖	$\searrow$	2
		$-\infty$	‖	$+\infty$	

5- البرهان أن (C_f) يقبل مماسين (T) و (T')

معامل التوجيه = العدد المشتق

$$f'(x) = -3$$
$$\frac{-3}{(x-1)^2} = -3$$

بالقسمة على -3 نجد:

$$\frac{1}{(x-1)^2} = 1$$
$$\frac{1}{(x-1)^2} - 1 = 0$$
$$\frac{1-(x-1)^2}{(x-1)^2} = 0$$

لما يكون $\frac{\text{البسط}}{\text{المقام}} = 0$ يكون البسط $= 0$

$$1-(x-1)^2 = 0$$
$$1^2-(x-1)^2 = 0$$
$$[1-(x-1)] \times [1+(x-1)] = 0$$
$$\begin{cases} 1-(x-1)=0 \\ 1+(x-1)=0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 1-x+1=0 \\ 1+x-1=0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x=2 \\ x=0 \end{cases}$$

ومنه المنحنى (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') عند النقطتين ذات الفاصلتين 0 و 2

6- معادلة المماسين (T) و (T')

معادلة المماس (T) عند $x = 0$

$$(T) : y = f'(0)(x-0) + f(0)$$
$$f'(0) = -3 \quad \text{و} \quad f(0) = -1$$
$$(T) : y = -3x - 1$$

معادلة المماس (T') عند $x = 2$

$$(T') : y = f'(2)(x-2) + f(2)$$
$$f'(2) = -3 \quad \text{و} \quad f(2) = 5$$
$$(T') : y = -3(x-2) + 5$$
$$(T') : y = -3x + 11$$

7- تعيين نقاط التقاطع مع حاملي المحورين

نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل

نحل المعادلة $f(x) = 0$

$f(x) = 0$ تكافئ $2x + 1 = 0$

$$x = -\frac{1}{2}$$

نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور التراتيب

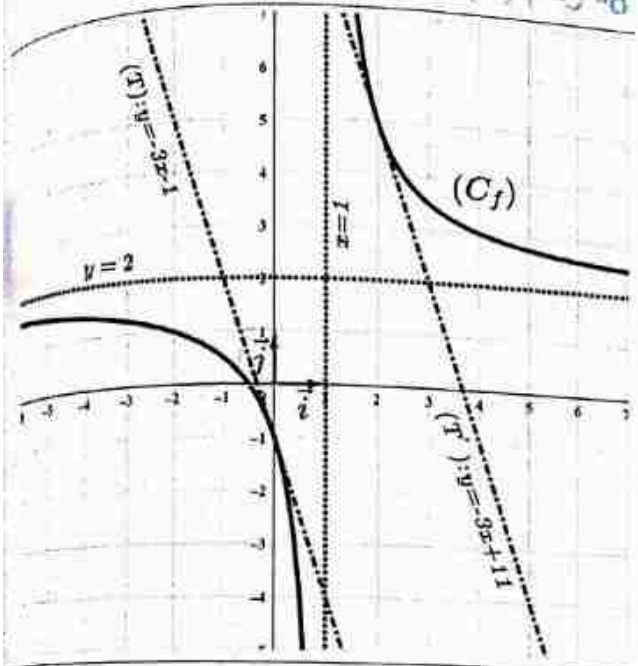
نحسب $f(0)$

$$f(0) = -1$$
$$y = -1$$

إذن:

$$(C_f) \cap (xx') = \left\{\left(-\frac{1}{2}; 0\right)\right\}$$
$$(C_f) \cap (yy') = \{(0; -1)\}$$

8- رسم (T) و (T') ثم (C_f)



9- المناقشة البيانية

يكون للمعادلة $f(x) = -3x + m$ حلان متمايزان لما $m \in]-\infty; -1[\cup]11; +\infty[$

-II

- شرح كيفية رسم (C_g) انطلاقا من (C_f)

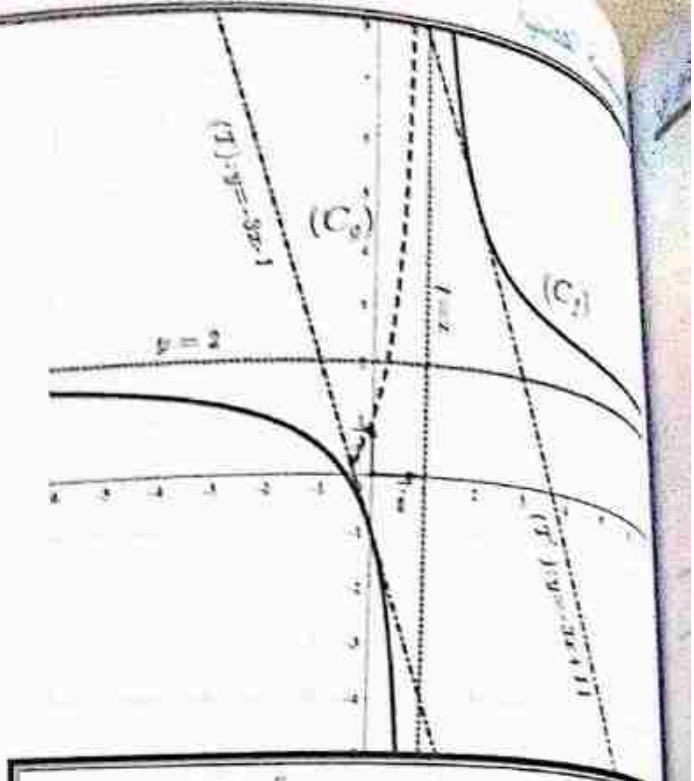
$$g(x) = |f(x)|$$

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -f(x), & f(x) < 0 \\ f(x), & f(x) \geq 0 \end{cases}$$

(C) ينطبق على (C_f) لما يكون (C_f) فوق محور الفواصل

(C_g) يناظر (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل لما يكون (C_f) تحت محور الفواصل



تمرين رقم 13 .127

توجد مرجعة شاملة و دراسة في النهايات و الاشتقاقية للثانوي إضغط لتنزيل في الصفحة

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ بالعبارة $f(x) = \frac{x^3+x^2-1}{x^2-1}$ ، (C_f) منحناها في م.م.م $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

1- عين الأعداد الحقيقية a ، b ، c حيث $f(x) = ax + b + \frac{c}{x^2-1}$.

2- احسب النهايات وفسّر النتائج المحصل عليها بيانيا.

3- احسب $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) - x$ وفسّر النتيجة بيانيا.

4- ادرس وضعية (C_f) مع المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x + 1$

5- احسب $\lim_{h\to 0} \left[\frac{f(h)-1}{h}\right]$ وفسّر النتيجة بيانيا.

6- اكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) عند النقطة $A(0; 1)$.

7- ادرس وضعية (C_f) مع (T) وماذا تمثل النقطة A بالنسبة لـ (C_f)

8- احسب $f'(x)$ وادرس اتجاه تغير الدالة f.

9- شكل جدول تغيرات الدالة f.

10- احسب $f(x) + f(-x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

11- بين أن (C_f) يقطع (xx') في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $\alpha \in]-1; 1[$ ثم تحقق أن $0.6 < \alpha < 0.8$

12- تحقق أن $\alpha^3 + \alpha^2 = 1$

13- ارسم (T) ، (Δ) ثم (C_f).

14- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلات التالية:

-I

1- $x^3 - mx^2 + m = 0$

2- $f(x) = x + m$

3- $f(x) = mx + 1$

-II

لتكن الدالتين g_1 و g_2 حيث $g_1(x) = |f(x)|$ و $g_2(x) = f(|x|)$

$D_{g_1} = D_{g_2}$ مع

1- بين أن $g_2(x)$ دالة زوجية.

2- اشرح كيف يتم رسم (C_{g_2}) ، (C_{g_1}) انطلاقا من (C_f).

-III k دالة عددية ؛ $D_k = \mathbb{R}_+ - \{1\}$

$k(x) = f(\sqrt{x})$ و $k(0) = 1$

1- ادرس قابلية اشتقاق الدالة k عند 0 من اليمين ثم فسّر النتيجة بيانيا.

2- ادرس اتجاه تغير الدالة k.

3- شكل جدول تغيرات الدالة k

4- (P) منحنى معادلته $y = \sqrt{x} + 1$ في المجال $[0; +\infty[$

- احسب $\lim_{x\to+\infty} [k(x) - \sqrt{x} - 1]$ ثم فسّر النتيجة بيانيا. (علما أن (C_k) منحنى الدالة k

-IV f_m دالة عددية، m وسيط حقيقي موجب تماما، f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{\sqrt{m}}; \frac{1}{\sqrt{m}}\right\}$ بالعبارة

$f_m(x) = \frac{x^3+mx^2-1}{mx^2-1}$

(C_m) منحنيات الدالة f_m

1- برهن أن جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة وحيدة يطلب تعيين احداثياتها.

2- ادرس اتجاه تغير الدالة f_m ثم شكل جدول تغيراتها

الحل

1- تعيين a ، b و c

نستعمل القسمة الاقليدية

$x^3 + x^2 - 1$	$x^2 - 1$
$-x^3 + x$	$x + 1$
$x^2 + x - 1$	
$-x^2 + 1$	
x	

$$f(x) = \text{الحاصل} + \frac{\text{الباقي}}{\text{القاسم}}$$

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{x^2+1}$$

بالمطابقة نجد : $a = 1$ ، $b = 1$ ، $c = 1$

2- حساب النهايات

$$D_f =]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3}{x^2}\right] = \lim_{x\to-\infty}[x] = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3}{x^2}\right] = \lim_{x\to+\infty}[x] = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\ <}} f(x) = -\frac{1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x) = -\frac{1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\ <}} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\ >}} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

التفسير الهندسي

المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين شاقوليين معادلاتهما $x = -1$ و $x = 1$

3- حساب $\lim_{|x|\to+\infty}[f(x)-x]$

$$\lim_{|x|\to+\infty}[f(x)-x] = \lim_{|x|\to+\infty}\left[x+1+\frac{x}{x^2-1}-x\right] = \lim_{|x|\to+\infty}\left[1+\frac{x}{x^2-1}\right] = 1$$

التفسير البياني

لدينا

$$\lim_{|x|\to+\infty}[f(x)-x] = 1$$

$$\lim_{|x|\to+\infty}[f(x)-x-1] = 0$$

$$\lim_{|x|\to+\infty}[f(x)-(x+1)] = 0$$

$$\lim_{|x|\to+\infty}[f(x)-y] = 0$$

ومنه المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا عند $+\infty$ و $-\infty$ معادلته $y = x+1$

4- دراسة وضعية (C_f) مع المستقيم (Δ)

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$:

$$f(x)-y = \frac{x}{x^2-1}$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x	$-$		$-$		0	$+$			$+$
x^2-1	$+$		0	$-$		$-$	0		$+$
$f(x)-y$	$-$		$+$		0	$-$			$+$
الوضعية	(C_f) يقع تحت (Δ)		(C_f) يقع فوق (Δ)		(C_f) يقطع (Δ)		(C_f) يقع تحت (Δ)		(C_f) يقع فوق (Δ)

5- حساب $\lim_{h\to0}\left|\frac{f(h)-1}{h}\right|$

$$\lim_{h\to0}\left[\frac{f(h+x_0)-f(x_0)}{h}\right] = f'(x_0)$$

$$\lim_{h\to0}\left[\frac{\frac{h^3+h^2-1}{h^2-1}-1}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to0}\left[\frac{\frac{h^3+h^2-1-h^2+1}{h^2-1}}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to0}\left[\frac{h^3}{h(h^2-1)}\right]$$

$$= \lim_{h\to0}\left[\frac{h^2}{(h^2-1)}\right]$$

$$= \frac{0}{-1} = 0 = f'(0)$$

التفسير الهندسي

المنحنى (C_f) يقبل مماسا معامل توجيهه 0 عند النقطة ذات الفاصلة 0

6- كتابة معادلة المماس (T)

$$(T): y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$y = f'(0)(x-0)+f(0)$$

$$y = 0(x-0)+1$$

$$(T): y = 1$$

7- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T)

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$ على D_f

$$f(x)-y=\frac{x^3+x^2-1}{x^2-1}-1=\frac{x^3}{x^2-1}$$

$x^3=0$

$x=0$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
x^3	$-$	$-$		0	$+$		$+$
x^2-1	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)-y$	$-$		$+$	0	$-$		$+$
الوضعية	(C_f) يقع تحت (T)		(C_f) يقع فوق (T)		(C_f) يقع تحت (T)		(C_f) يقع فوق (T)

A نقطة انعطاف لأن (T) يخترق (C_f) عند

- حساب $f'(x)$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

f قابلة للاشتقاق على $D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$ ودالتها المشتقة

$$f'(x)=\frac{(3x^2+2x)(x^2-1)-2x(x^3+x^2-1)}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{3x^4-3x^2+2x^3-2x-2x^4-2x^3+2x}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{3x^4-3x^2-2x^4}{(x^2-1)^2}=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^2[x^2-3]}{(x^2-1)^2}$$

$f'(x)=0$ تكافئ $x^2[x^2-3x]=0$

$$\begin{cases}x^2=0\\x^2-3=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=0\\x^2=3\end{cases}$$

$x=-\sqrt{3}$ ، $x=\sqrt{3}$

جدول الاشارة

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1		0		1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
x^2	$+$		$+$		$+$	0	$+$	$+$	
x^2-3	$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$-$	0	$+$

- دراسة اتجاه تغير الدالة f

الدالة f متزايدة تماما على المجالين

$[\sqrt{3};+\infty[$ ، $]-\infty;-\sqrt{3}]$

ومتناقصة تماما على المجالات

$]1;\sqrt{3}]$ ، $]-1;1[$ ، $[-\sqrt{3};-1[$

9- جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1		0		1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$f(-\sqrt{3})$		$+\infty$		0	$-\infty$	$+\infty$	$f(\sqrt{3})$

10- حساب $f(-x)+f(x)$

$$f(-x)+f(x)=\frac{-x^3+x^2-1}{x^2-1}+\frac{x^3+x^2-1}{x^2-1}$$

$$=\frac{2x^2-2}{x^2-1}=\frac{2(x^2-1)}{x^2-1}$$

$$f(-x)+f(x)=2$$

التفسير البياني

$$f(-x)+f(x)=2$$

$$x\in D_f \ ،\ (2a-x)\in D_f$$

$$f(2a-x)+f(x)=2b$$

$$\begin{cases}2b=2\\2a=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}b=1\\a=0\end{cases}$$

المنحنى (C_f) يقبل مركز تناظر عند النقطة $A(0;1)$

قاعدة محور التناظر: لما $f(2a-x)=f(x)$

يقبل (C_f) محور تناظر معادلته $x=a$

11- البرهان ان المنحنى (C_f) يقطع (xx') في نقطة وحيدة فاصلتها α

بما أن الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $]-1;1[$

$$\lim_{x\to-1}f(x)\times\lim_{x\to1}f(x)<0$$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in]-1;1[$

- التحقق أن $0.6<\alpha<0.8$

$$0.6<\alpha<0.8 \text{ ومنه } \begin{cases}f(0.6)=0.67\\f(0.8)=-0.4\end{cases}$$

12- التحقق أن $\alpha^3+\alpha^2=1$

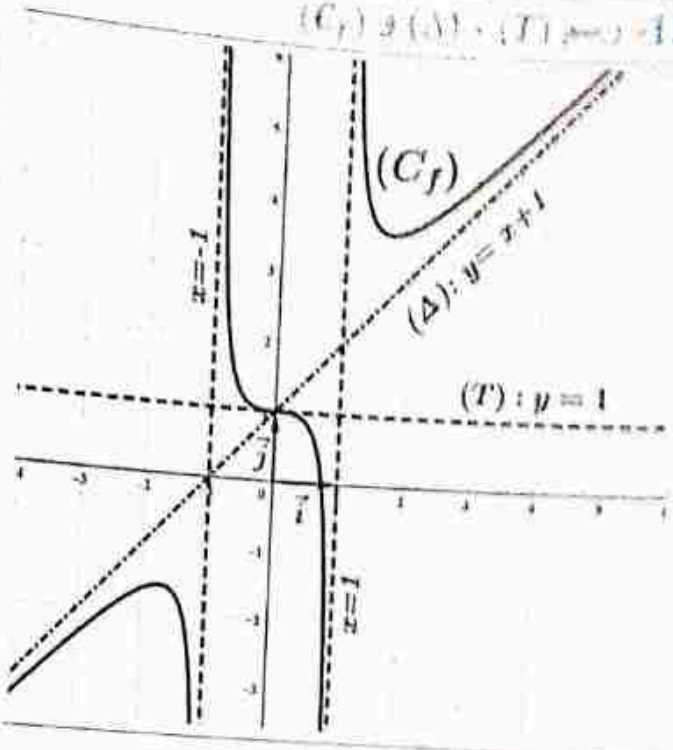
$f(\alpha)=0$ أي $\frac{\alpha^3+\alpha^2-1}{\alpha^2-1}=0$

$$\alpha^3 + \alpha^2 - 1 = 0$$

ومنه:

$$\alpha^3 + \alpha^2 = 1$$

13- رسم (T) ، (Δ) و (C_f)



14- المناقشة البيانية

- مناقشة أفقية

$$f(x) = h(m)$$

- مناقشة مائلة

$$f(x) = ax + h(m)$$
$$f(x) = x + m$$

- مناقشة دورانية

$$f(x) = h(m)x + b$$
$$f(x) = |m|x$$
$$f(x) = mx - m$$

الحالة الأولى: $x^3 - mx^2 + m = 0$

$$x^3 = mx^2 - m$$
$$x^3 = m(x^2 - 1)$$

بإضافة $x^2 - 1$ للطرفين نجد:

$$x^3 + x^2 - 1 = m(x^2 - 1) + x^2 - 1$$

بالقسمة على $x^2 - 1$ نجد:

$$\frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{m(x^2 - 1)}{x^2 - 1} + \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}$$
$$f(x) = m + 1$$

مناقشة أفقية

الحلول البيانية للمعادلة $f(x) = m + 1$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = m + 1$

$$y < f(-\sqrt{3})$$
$$m + 1 < f(-\sqrt{3})$$
$$m < f(-\sqrt{3}) - 1$$

ثلاثة حلول

$$m + 1 = f(-\sqrt{3})$$
$$m = f(-\sqrt{3}) - 1$$

حلان أحدهما مضاعف

$$f(-\sqrt{3}) < m + 1 < f(\sqrt{3})$$
$$f(-\sqrt{3}) - 1 < m < f(\sqrt{3}) - 1$$

حل وحيدا

$$m + 1 = f(\sqrt{3})$$
$$m + 1 = f(\sqrt{3})$$

حلان أحدهما مضاعف

$$m > f(\sqrt{3}) - 1$$

3 حلول متمايزة

الحالة الثانية $f(x) = x + m$

الحلول البيانية للمعادلة $f(x) = x + m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (d_m) ذو المعادلة $y = x + m$

$(\Delta): y = x + 1$

$(d_m): y = x + m$

$m < 1$ للمعادلة حلان مختلفان

$m = 1$ للمعادلة حل وحيد معدوم

$m > 1$ للمعادلة حلان مختلفان

الحالة الثالثة $f(x) = mx + 1$

$(d_m): y = mx + 1$

$A(x_0; y_0)$ نقطة ثابتة من d_m

$$y_0 = mx_0 + 1$$
$$mx_0 + 1 - y_0 = 0$$
$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

لما $m < 0$ للمعادلة 3 حلول

$0 \le m \le 1$ للمعادلة حل وحيد

$1 < m$ للمعادلة 3 حلول

2- البرهان أن g_2 دالة زوجية

$x \in D_{g_2}$ و $-x \in D_{g_2}$

$g_2(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = g_2(x)$

g_2 دالة زوجية

منحنى (C_{g_2}) متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب

3- شرح كيفية رسم (C_{g_1}) ، (C_{g_2})

$g_1(x) = |f(x)| \geq 0$

(C_{g_1}) يقع فوق محور الفواصل

(C_{g_1}) ينطبق على (C_f) في الجزء الواقع فوق محور الفواصل والجزء السفلي نناظره بالنسبة إلى محور الفواصل

$$g_2(x) = \begin{cases} f(x) : x \in [0;1[\cup]1;+\infty[\\ f(-x) : x \in]-\infty;-1[\cup]-1;0] \end{cases}$$

(C_{g_2}) ينطبق على (C_f) في المجال

$[0;1[\cup]1;+\infty[$

وهذا الجزء نناظره بالنسبة إلى محور التراتيب لأن g_2 دالة زوجية

III-

1- دراسة قابلية اشتقاق $k(x)$

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{k(x)-k(0)}{x-0}\right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{\frac{x\sqrt{x}+x-1}{x-1}-1}{x}\right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{x\sqrt{x}+x-1-x+1}{x(x-1)}\right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{x\sqrt{x}}{x(x-1)}\right] = \lim_{x \to 0} \left[\frac{\sqrt{x}}{(x-1)}\right] = \frac{0}{-1}$$

$$= 0$$

الدالة k تقبل الاشتقاق عند 0 من اليمين

التفسير البياني: منحنى الدالة k يقبل نصف مماس معادلته

$$y = k'(0)(x-0) + k(0)$$

$$y = 1$$

2- دراسة اتجاه تغير الدالة k

$$(f[h(x)])' = h'(x).f'(h(x))$$

k قابلة للاشتقاق على $]0;1[$ و $]1;+\infty[$

ودالتها المشتقة $k'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} f'(\sqrt{x})$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$$

إذن إشارة $k'(x)$ من إشارة $f'(\sqrt{x})$:

$f'(x) \geq 0$ لما $x \leq -\sqrt{3}$ أو $x \geq \sqrt{3}$

$f'(\sqrt{x}) \geq 0$ لما $\sqrt{x} \geq \sqrt{3}$ أو

$\sqrt{x} \leq \sqrt{-\sqrt{3}}$ مستحيل...

إذن: $f'(\sqrt{x}) \geq 0$ لما $x \geq 3$

3- جدول التغيرات

x	0	1		3	$+\infty$
$k'(x)$	$-$	‖	$-$	0	$+$
$k(x)$	1 ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$f(\sqrt{3})$	↗ $+\infty$

4- حساب $\lim_{x \to +\infty} [k(x) - \sqrt{x} - 1]$

$$\lim_{x \to +\infty} [k(x) - \sqrt{x} - 1]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x\sqrt{x}+x-1}{x-1} - \sqrt{x} - 1\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x\sqrt{x}+x-1-x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}+1}{x-1}\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{\sqrt{x}}{x-1}\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}\right]$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{1}{\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}\right] = 0$$

التفسير البياني: المنحنى (C_k) يقبل منحنى مقارب (P) عند $+\infty$

IV-

1- البرهان أن جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة وحيدة

$w(\alpha;\beta)$

$$\frac{\alpha^3+m\alpha^2-1}{m\alpha^2-1}=\beta$$
$$\frac{\alpha^3+m\alpha^2-1}{m\alpha^2-1}-\beta=0$$
$$\frac{\alpha^3+m\alpha^2-1-m\alpha^2\beta+\beta}{m\alpha^2-1}=0$$
$$\alpha^3+m\alpha^2-1-m\alpha^2\beta+\beta=0$$
$$\alpha^3-1+\beta+m(\alpha^2-\alpha^2\beta)=0$$
$$\begin{cases}\alpha^2-\alpha^2\beta=0\\ \alpha^3-1+\beta=0\end{cases}$$
$$\alpha^2(1-\beta)=0$$
$$\alpha^2=0$$
$$\alpha=0$$
$$\beta-1=0$$
$$\beta=1$$

ومنه إحداثيات النقطة w هي $(0\,;\,1)$

2- دراسة تغيرات الدالة f_m

الدالة f_m قابلة للاشتقاق على D_{f_m} ودالتها المشتقة

$$f'_m(x)=\frac{(3x^2+2mx)(mx^2-1)-2mx(x^3+mx^2-1)}{(mx^2-1)^2}$$
$$=\frac{3mx^4-3\ ^2+2m^2x^3-2mx-2mx^4-2m^2x^3+2mx}{(mx^2-1)^2}$$
$$=\frac{mx^4-3x^2}{(mx^2-1)^2}=\frac{x^2(mx^2-3)}{(mx^2-1)^2}$$

$f'_m(x)=0$ تكافئ $x^2(mx^2-3)=0$

$x=0$ أو $mx^2-3=0$

$$x^2=\frac{3}{m}$$
$$x=\sqrt{\frac{3}{m}}$$
$$x=-\sqrt{\frac{3}{m}}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{m}}$		$-\frac{1}{\sqrt{m}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{m}}$		$\sqrt{\frac{3}{m}}$		$+\infty$
x^2	$+$		$+$		$+$		0		$+$		$+$		
mx^2-3	$+$		0		$-$		$-$		$-$		0		$+$
$f'_m(x)$	$+$		0		$-$		0		$-$		0		$+$
$f_m(x)$	$-\infty$	↗	$f_m\left(-\sqrt{\frac{3}{m}}\right)$	↘	$+\infty$	↘	$-\infty$	↘	$+\infty$	↗	$f_m\left(\sqrt{\frac{3}{m}}\right)$	↗	$+\infty$

عكاشة
BOOKSTORE
أكثر من مجرد دار نشر