

ميدان التعلم : هندسة

ثانوية: محمد حسين بن زيان-واد الجمعة

المحور : الزوايا الموجهة

المستوى : السنة الثانية علوم تجريبية

الموضوع : زاوية موجهة

المدة : 2 ساعة

المكتسبات القبلية :

المكتسبات المستهدفة : التعرف على زاوية موجهة لشعاعين

المراجع : الكتاب المدرسي ، مراجع أنترنت ، المنهاج

المدة	عناصر الدرس	المراحل
	<p><b>نشاط 1-2 صفحة 210</b></p> <p><b>زاوية موجهة لشعاعين غير معدومين</b></p> <p><b>تمهيد:</b></p> <p>- يوجه المستوى توجيهاً مباشراً (أو توجيئها موجباً) ويسمى الاتجاه الآخر الاتجاه غير المباشر (أو الاتجاه السالب)</p> <p>- اصطلاحاً نختار الاتجاه المباشر الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة</p> <p>في المستوى الموجه نسمي دائرة مثلثية كل دائرة موجهة في الاتجاه المباشر و التي نصف قطرها 1</p> <p><b>تعريف:</b> في المستوى الموجه ليكن <math>\vec{u}</math> و <math>\vec{v}</math> شعاعين غير معدومين . الثنائية <math>(\vec{u}; \vec{v})</math> تسمى زاوية موجهة للشعاعين <math>\vec{u}</math> و <math>\vec{v}</math></p> <p>قيس زاوية موجهة لشعاعين في المستوى الموجه ليكن <math>\vec{u}</math> و <math>\vec{v}</math> شعاعين غير معدومين.</p> <p>(C) هي الدائرة المثلثية التي مركزها O و لتكن M و N نقطتين من المستوى حيث <math>\vec{OM} = \vec{u}</math> و <math>\vec{ON} = \vec{v}</math> .</p> <p>المستقيم (OM) يقطع (C) في A و المستقيم (ON) يقطع (C) في B . قيس الزاوية الموجهة <math>(\vec{u}; \vec{v})</math> في B .</p> <p>بالراديان هو كذلك قيس للزاوية الموجهة <math>(\vec{OM}; \vec{ON})</math> بالراديان.</p> <p><b>تعريف:</b> في المستوى الموجه ليكن <math>\vec{u}</math> و <math>\vec{v}</math> شعاعين غير معدومين. اذا كان <math>x</math> قياساً للزاوية الموجهة <math>(\vec{u}; \vec{v})</math> فان كل الاعداد من الشكل <math>k + 2\pi k</math> هي اقياس ايضاً للزاوية <math>(\vec{u}; \vec{v})</math> حيث <math>k \in \mathbb{Z}</math></p>	<p>مرحلة انطلاق</p> <p>بناء المفاهيم</p>

**خاصية:** من بين اقياس الزاوية الموجة  $(\bar{u}; \bar{v})$  يوجد قيس وحيد ينتمي الى المجال  $[\pi; -\pi]$  يسمى القيس الرئيسي للزاوية الموجة  $(\bar{u}; \bar{v})$

**نتائج:** 1) القيس الرئيسي للزاوية المعدومة  $(\bar{u}; \bar{v})$  هو 0

2) القيس الرئيسي للزاوية المستقيمة  $(\bar{u}; -\bar{u})$  هو  $\pi$

3) القيس الرئيسي للزاوية القائمة المباشرة هو  $\frac{\pi}{2}$

4) القيس الرئيسي للزاوية القائمة غير المباشرة هو  $\frac{-\pi}{2}$

5) اذا كان  $x$  هو القيس الرئيسي للزاوية الموجة  $(\bar{u}; \bar{v})$  فان  $|x|$  هو قيس الزاوية الهندسية المكونة من  $\bar{u}$  و  $\bar{v}$

### تمرين 1:

اوجد القيس الرئيسي للزاوية الموجة  $(\bar{u}; \bar{v})$  التي قيسها  $\alpha$  في كل حالة :

$$\alpha = \frac{65\pi}{8} \quad (3) \quad \alpha = -\frac{189\pi}{4} \quad (2) \quad \alpha = 2007\text{rad} \quad (1)$$

**طريقة:** إذا كان عدد حقيقي  $\alpha$  قيس لزاوية موجة  $(\bar{u}, \bar{v})$  فإنه يوجد عدد صحيح وحيد  $k$  حيث :

$\pi < \alpha + 2k\pi \leq \pi$  - يكفي إيجاد  $k$  إنطلاقاً من هذا الحصر لإيجاد القيس الرئيسي لزاوية موجة  $(\bar{u}, \bar{v})$

### تمرين 27 ص 288

### خواص الزوايا الموجة

#### 1. الزوايا الموجة المتقاربة:

**خاصية:**  $\bar{u}$  و  $\bar{v}$  و  $'\bar{u}$  و  $'\bar{v}$  أشعة غير معدومة من المستوى. ليكن  $\alpha$  قيساً للزاوية الموجة  $(\bar{u}; \bar{v})$  و  $\alpha'$  قيساً للزاوية الموجة  $('\bar{u}; '\bar{v})$ . تكون الزاويتان  $(\bar{u}; \bar{v})$  و  $('\bar{u}; '\bar{v})$  متقاربتان اذا وفقط اذا وجد عدد صحيح

حيث :  $\alpha' = \alpha + 2k\pi$   $k$

**ملاحظات:** 1)  $\alpha' = \alpha + 2k\pi$  معناه  $\alpha - \alpha'$  مضاعف لـ  $2\pi$

2) اذا كان  $\alpha' = \alpha + 2k\pi$  نقول ان  $\alpha$  و  $\alpha'$  قيسان لنفس الزاوية او قيسان لزاويتين متقاربتين

**تطبيق:** هل العددان  $\frac{7\pi}{12}$  و  $\frac{127\pi}{12}$  قيسان لنفس الزاوية ؟ هل  $\frac{170\pi}{4}$  و  $\frac{135\pi}{3}$  قيسان لنفس الزاوية ؟

### الزاوية الموجة و الارتباط الخطى لشعاعين

**خاصية:**  $\bar{u}$  و  $\bar{v}$  شعاعان غير معدومين من المستوى. يكون الشعاعين  $\bar{u}$  و  $\bar{v}$  مرتبطان خطياً اذا وفقط

اذا كان  $\pi = 2k\pi$  او  $(\bar{u}; \bar{v}) = \pi + 2k\pi$  حيث  $k$  عدد صحيح

**ملاحظة:** - اذا كان  $\pi = 2k\pi$  يكون للشعاعين  $\bar{u}$  و  $\bar{v}$  نفس الاتجاه

- اذا كان  $\pi = \pi + 2k\pi$  يكون للشعاعين  $\bar{u}$  و  $\bar{v}$  اتجاهين متعاكسين

**علاقة شال:**

**مبرهنة:** من أجل كل ثلاثة أشعة غير معدومة:  $\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}$  لدينا:  $(\vec{u}; \vec{v}) + (\vec{v}; \vec{w}) = (\vec{u}; \vec{w})$

**نتائج:**

من أجل كل شعاعين غير معدومين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  لدينا:

$$(\vec{v}; \vec{u}) = -(\vec{u}; \vec{v}) \quad (1)$$

$$(\vec{u}; -\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) + \pi \quad (2)$$

$$(-\vec{u}; \vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) + \pi \quad (3)$$

$$(-\vec{u}; -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) \quad (4)$$

**خاصية:**  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  شعاعان غير معدومين من المستوى. ليكن  $k$  و  $k'$  عددين حقيقيين غير معدومين.

$$(1) \text{ اذا كان } k \text{ و } k' \text{ من نفس الاشارة فان: } (k\vec{u}; k'\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v})$$

$$(2) \text{ اذا كان } k \text{ و } k' \text{ من اشارتين مختلفتين فان: } (k\vec{u}; k'\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) + \pi$$

**تمرين(1):**

مربع غير مباشر من المستوى حيث  $ABCD$  حيث  $E$  نقطة خارج المربع  $ABCD$ .

مثلث متقارن الأضلاع و لتكن النقطة  $F$  داخل المربع  $ABCD$  حيث  $AFD$  مثلث متقارن الأضلاع  $ECD$

(1) أثبت أن المثلث  $ABF$  متقارن الساقين.

(2) عين قيسا للزاوية الموجهة  $(\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{FA})$ .

(3) عين قيسا للزاوية الموجهة  $(\overrightarrow{FD}, \overrightarrow{FE})$ . استنتج قيسا للزاوية الموجهة  $(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF})$ .

(4) عين قيسا للزاوية الموجهة  $(\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{FE})$ .

(5) استنتاج أن النقط  $E$  ،  $F$  و  $B$  على استقامة واحدة.

**تمرين(2):**

(C) دائرة مئوية مرفقة بعلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .  $A$  و  $B$  نقطتين من (C) حيث:

$(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OB}) = \frac{3\pi}{4}$  و  $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{6}$  و  $I$  و  $J$  نقطتا تقاطع (C) مع المحورين.

عين قيسا للزوايا الموجهة: (1)  $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$  (3)  $(\overrightarrow{OJ}; \overrightarrow{OB})$  (2)  $(\overrightarrow{OJ}; \overrightarrow{OA})$

**تمرين 29 ص 288 للحل**

**تمرين 31 ص 288 منزلي.**

تقويم

ميدان التعلم : هندسة

ثانوية: محمد حسين بن زيان-واد الجمعة

المحور : الزوايا الموجة

المستوى : السنة الثانية علوم تجريبية

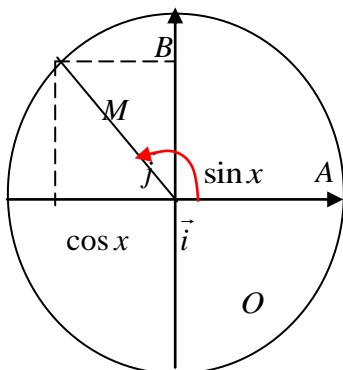
الموضوع: جيب و جيب تمام زوايا مرفقة

المدة : 2 ساعة

المكتسبات القبلية : جيب و جيب تمام زوايا الموجة

المكتسبات المستهدفة : توظيف دساتير التحويل المتعلقة بجيب تمام و جيب في حل مسائل المثلثية

المراجع : الكتاب المدرسي ، مراجع انترنت ، المنهاج

المدة	عناصر الدرس	المراحل
	<p><b>نشاط 4 صفحة 211</b>  <b>حساب المثلثات</b></p> <p><b>1. المعلم المتعامد و المتاجنس</b></p> <p><u>تعريف:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>* اذا كان <math>\vec{i}; \vec{j} = \frac{\pi}{2}</math> نقول ان المعلم المتعامد و المتاجنس <math>(\vec{i}; \vec{j}; O)</math> من المستوى مباشر.</li> <li>* اذا كان <math>\vec{i}; \vec{j} = -\frac{\pi}{2}</math> نقول ان المعلم المتعامد و المتاجنس <math>(\vec{i}; \vec{j}; O)</math> من المستوى غير مباشر.</li> </ul> <p><b>2. جيب و جيب تمام زاوية موجهة لشعاعين</b></p> <p><u>تعريف:</u> <math>(C)</math> دائرة مثلثية مركزها <math>O</math> لتكن <math>A</math> و <math>B</math> نقطتين من <math>(C)</math> بحيث <math>(O; \vec{OA}; \vec{OB})</math> معلم متعامد و متاجنس مباشر . نضع <math>\vec{OB} = \vec{i}</math> و <math>\vec{OA} = \vec{j}</math></p> <p>- لكل عدد حقيقي <math>x</math> صورة <math>M</math> على الدائرة <math>(C)</math> حيث <math>x</math> قيس بالراديان للزاوية الموجهة <math>(\vec{i}; \vec{OM})</math>.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. جيب تمام العدد <math>x</math> هو فاصلة النقطة <math>M</math> و يرمز له بالرمز <math>\cos x</math></li> <li>2. جيب العدد <math>x</math> هو ترتيب النقطة <math>M</math> و يرمز له بالرمز <math>\sin x</math></li> <li>3. اذا كان <math>x</math> قيس بالراديان للزاوية الموجهة <math>(\vec{i}; \vec{OM})</math> فان كل عدد من الشكل <math>x + 2\pi k</math> حيث <math>k \in \mathbb{Z}</math> هو كذلك قيس بالراديان للزاوية الموجهة <math>(\vec{i}; \vec{OM})</math>.</li> </ol> <p>و منه <math>x</math> و <math>x + 2\pi k</math> لهما نفس الصورة <math>M</math> على الدائرة <math>(C)</math> و بالتالي:</p> 	مرحلة انطلاق

$$k \in \mathbb{Z} \text{ مع } \sin(x + 2\pi k) = \sin x \text{ و } \cos(x + 2\pi k) = \cos x$$

4. نقول ان الدالتين  $\cos$  و  $\sin$  دوريتين و  $2\pi$  هو دور لهما

**نتائج:** من اجل كل عدد حقيقي  $x$  فان:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (3) \quad -1 \leq \sin x \leq 1 \quad (2) \quad -1 \leq \cos x \leq 1 \quad (1)$$

### جدول القيم الشهيرة:

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

**تعريف:**

1. جيب تمام زاوية موجهة  $(\vec{u}; \vec{v})$  هو جيب تمام احد اقياسها بالراديان و يرمز له بالرمز  $\cos(\vec{u}; \vec{v})$

2. جيب زاوية موجهة  $(\vec{u}; \vec{v})$  هو جيب احد اقياسها بالراديان و يرمز له بالرمز  $\sin(\vec{u}; \vec{v})$

**تمرين (1):** بدون استعمال الحاسبة عين القيم المضبوطة لكل من الاعداد التالية:

$$\sin\left(-\frac{17\pi}{4}\right) \text{ و } \cos(-2007\pi) \text{ و } \sin\left(\frac{25\pi}{4}\right) \text{ و } \cos\left(\frac{14\pi}{3}\right)$$

**تمرين (2):**

بدون استعمال الحاسبة عين القيمة المضبوطة لـ  $\sin x$  اذا علمت ان:  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  و  $\cos x = \frac{4}{5}$

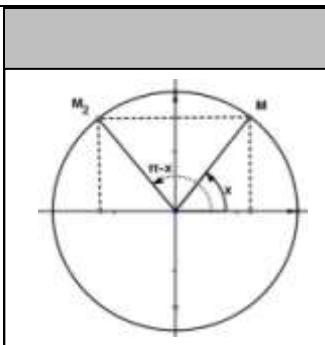
### جيب تمام و جيب الزوايا المرفقة:

**تعريف:** نسمى الزوايا المرفقة بزاوية موجهة حيث  $x$  قيس لها، الزوايا الموجهة التي أحد اقياسها:  $-x$ ،

$$\frac{\pi}{2} + x, \frac{\pi}{2} - x, \pi + x, \pi - x$$

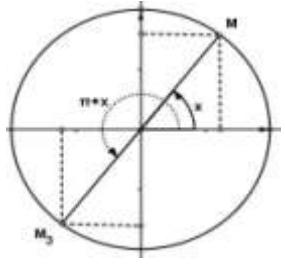
**مبرهنة:** من اجل كل عدد حقيقي  $x$ :

	$M_4$ و $M$ متناظرتان بالنسبة إلى محور الفاصل		$M_1$ و $M$ متطابقتان و ذلك بعد عدة دورات $k$
$\begin{cases} \cos(-x) = \cos(x) \\ \sin(-x) = -\sin(x) \end{cases}$		$\begin{cases} \cos(2k\pi + x) = \cos(x) \\ \sin(2k\pi + x) = \sin(x) \end{cases}$	



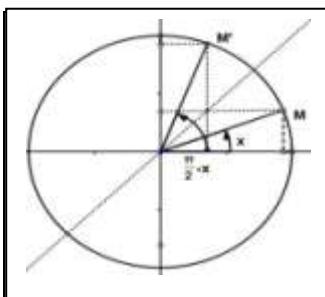
$M_2$  و  $M$   
متناهيرتان  
بالنسبة إلى  
محور  
التراتيب

$$\begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos(x) \\ \sin(\pi - x) = \sin(x) \end{cases}$$



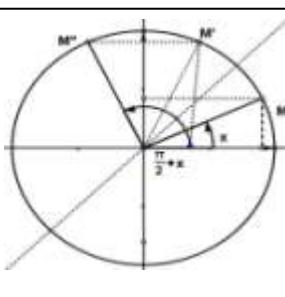
$M_3$  و  $M$   
متناهيرتان  
بالنسبة إلى  
المبدأ

$$\begin{cases} \cos(\pi + x) = -\cos(x) \\ \sin(\pi + x) = -\sin(x) \end{cases}$$



$M''$  و  $M$   
متناهيرتان  
بالنسبة إلى  
المنصف  
الأول

$$\begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x) \\ \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x) \end{cases}$$



$M'$  و  $M'$   
متناهيرتان  
بالنسبة إلى  
محور  
التراتيب

$$\begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin(x) \\ \sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x) \end{cases}$$

:تمرين(1)

$$A = \sin(\pi + x) - 2\cos(\frac{\pi}{2} + x) + \cos(\pi - x) + \sin(\frac{\pi}{2} + x)$$

:تمرين(2)

$$(1) \text{ تحقق أن } \left( \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \right)^2 = \frac{\sqrt{3} + 2}{4}$$

$$(2) \text{ علماً أن } \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \text{ عين القيمة المضبوطة لـ } \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$(3) \text{ تتحقق أن } \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \text{ و } \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \text{ ثم استنتج } \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$$

تقويم

تمرين : من رقم 36 إلى رقم 41 صفة 229

تمرين: من رقم 51 إلى رقم 53 صفة 230

تمرين رقم 57+56 صفة 230

ميدان التعلم : هندسة

ثانوية: محمد حسين بن زيان-واد الجمعة

المحور : الزوايا الموجة

المستوى : السنة الثانية علوم تجريبية

الموضوع : حل المعادلات المثلثية

المدة : 2 ساعة

**المكتسبات القبلية :** جيب و جيب تمام زوايا الشهيرة**المكتسبات المستهدفة :** القدرة على المعادلات المثلثية و مثيلها على الدائرة**المراجع :** الكتاب المدرسي ، مراجع انترنت ، المنهاج

المدة	عناصر الدرس	المراحل
	<p><b>تمهيد</b></p> <p><b>المعادلات المثلثية</b></p> <p><b>1. الأعداد الحقيقية التي لها نفس الجيب و نفس جيب التمام</b></p> <p><math>a, b</math> عددين حقيقيين</p> <p><math>k \in \mathbb{Z}</math> معناه <math>(a = -b + 2\pi k)</math> او <math>(a = b + 2\pi k)</math> حيث <math>(\cos a = \cos b)</math> (1)</p> <p><math>k \in \mathbb{Z}</math> معناه <math>(a = \pi - b + 2\pi k)</math> او <math>(a = b + 2\pi k)</math> حيث <math>(\sin a = \sin b)</math> (2)</p> <p><b>مثال</b></p> <p><math>x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi</math> أو <math>x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi</math> و منه <math>\cos x = \cos \frac{\pi}{6}</math></p> <p><math>x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi</math> أو <math>x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi</math> و منه <math>\sin x = \sin \left(\frac{\pi}{6}\right)</math></p> <p><b>2. المعادلات المثلثية الأساسية</b></p> <p><b>المعادلات من الشكل:</b> <math>\cos x = a</math> حيث <math>a</math> عدد حقيقي</p> <p>1. اذا <math>-1 &lt; a &lt; 1</math> فان المعادلة لا تقبل حلول</p> <p>2. اذا كان <math>1 \leq a \leq 1</math> فانه يوجد عدد حقيقي <math>c</math> بحيث <math>a = \cos c</math> و حلول المعادلة هي الاعداد</p> <p>الحقيقية من الشكل <math>x = -c + 2\pi k</math> او <math>x = c + 2\pi k</math> حيث</p> <p><b>مثال</b></p> <p><math>x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi</math> أو <math>x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi</math> و منه <math>\cos x = \cos \frac{\pi}{3}</math> و منه <math>\cos x = \frac{1}{2}</math></p>	<p><b>مرحلة انطلاق</b></p> <p><b>بناء المفاهيم</b></p>

المعادلات من الشكل:  $\sin x = a$  حيث  $a$  عدد حقيقي

3. اذا  $-1 < a < 1$  او  $a > 1$  فان المعادلة لا تقبل حلول

4. اذا كان  $-1 \leq a \leq 1$  فانه يوجد عدد حقيقي  $c$  بحيث  $a = \cos c$  و حلول المعادلة هي الاعداد

ال حقيقيّة من الشكل  $x = \pi - c + 2\pi k$  او  $x = c + 2\pi k$  حيث  $k \in \mathbb{Z}$

تمرين (1)

حل في  $R$  المعادلات التالية ذات المجهول  $x$  :

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

مثل صور حلول كل معادلة على دائرة مثلثية

تمرين (2)

حل في  $R$  المعادلة التالية ذات المجهول  $x$  :

$$\cos x \sin^2 x + \cos x \sin x - 2 \cos x = 0$$

حل المعادلات من الشكل

تمرين: حل في المجموعة  $\mathbb{R}$  المعادلة ذات المجهول الحقيقي  $x$  :  $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$

ثم مثل الحلول على الدائرة المثلثية .

إرشادات للحل: لحل معادلة من الشكل  $\cos u = \sin v$  يجب تحويل  $\sin$  إلى  $\cos$  أو العكس علماً أن:

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \end{cases}$$

لتمثيل الحلول على الدائرة المثلثية نعتمد على أقیاس الزوايا الشهيرة . نشير إلى أن القيم التي يأخذها

في العبارة  $\frac{2k\pi}{n}$  هي من  $0$  إلى  $n-1$  ( $k$  عدد صحيح و  $n$  عدد طبيعي غير معدوم

تمرين 56.57 صفحة 230

ميدان التعلم : هندسة

ثانوية: محمد حسين بن زيان-واد الجمعة

المحور : الزوايا الموجة

المستوى : السنة الثانية علوم تجريبية

الموضوع : حل متراجحات مثلثية

المدة : 2 ساعة

المكتسبات القبلية : جيب و جيب تمام زوايا الشهيرة

المكتسبات المستهدفة : القدرة على حل متراجحات المثلثية و تمثيلها

المراجع : الكتاب المدرسي ، مراجع أنترنت ، المنهاج

المدة	عناصر الدرس	المراحل
	<p><b>تمهيد</b></p> <p><b>حل المتراجحات المثلثية:</b></p> <p><b>1. المتراجحات من الشكل: <math>\cos x &lt; a</math>:</b></p> <p><b>تمرين:</b> في المجموعة <math>[0, 2\pi]</math> لتكن المتراجحة ذات المجهول الحقيقي <math>x: \cos x &lt; a</math> (<math>a</math> عدد حقيقي).</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>(1) أثبت أنه إذا كان <math>-1 \leq a</math> فإن المتراجحة (1) ليس لها حلول في <math>[0, 2\pi]</math>.</li> <li>(2) أثبت أنه إذا كان <math>a \geq 1</math> فإن <math>[0, 2\pi]</math> هي مجموعة الحلول للمtragحة (1).</li> <li>(3) أثبت أنه إذا كان <math>-1 &lt; a &lt; 1</math> فإنه يوجد عددين متعاكسان <math>\alpha</math> و <math>\beta</math> من المجال <math>[0, 2\pi]</math> حيث أن <math>\cos \alpha = \cos \beta = a</math>. نسمي <math>M</math> صورة <math>\alpha</math> على الدائرة المثلثية و نسمي <math>M'</math> صورة <math>\beta</math> على الدائرة المثلثية، أثبت أن <math>M</math> و <math>M'</math> متاظرتان بالنسبة إلى محور الفواصل.</li> </ol> <p>استنتج مجموعة نقط الدائرة المثلثية التي فواصلها أصغر من <math>a</math>.</p> <p>استنتاج حلول المتراجحة (1) على المجال <math>[0, 2\pi]</math>.</p> <p><b>ملاحظة:</b> في المتراجحات من الشكل <math>\cos x \leq a</math> الحالتان <math>-1 &lt; a &lt; 1</math> تدرس على حدى.</p> <p><b>تطبيق:</b> حل في المجموعة <math>[0, 2\pi]</math> المتراجحات ذات المجهول الحقيقي <math>x</math> ثم مثل الحلول على الدائرة المثلثية.</p> <p>في كل حالة من الحالات الآتية:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>. <math>\sqrt{2} \cos 3x + 2 \leq 0</math> (2) . <math>2 \cos x &lt; 1</math> (1)</li> <li>. <math>\cos 4x - \frac{1}{2} &gt; 0</math> (4) . <math>2 \cos 2x - \sqrt{3} \geq 0</math> (3)</li> </ol> <p><b>2. المتراجحات من الشكل: <math>\sin x &lt; b</math>:</b></p> <p><b>تمرين:</b> في المجموعة <math>[-\pi, \pi]</math> لتكن المتراجحة ذات المجهول الحقيقي <math>x: \sin x &lt; b</math> (<math>b</math> عدد حقيقي).</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>(1) أثبت أنه إذا كان <math>-1 \leq b</math> فإن المتراجحة (1) ليس لها حلول في <math>[-\pi, \pi]</math>.</li> </ol>	<p>مرحلة انطلاق</p> <p>بناء المفاهيم</p>

(2) أثبت أنه إذا كان  $b \geq 1$  فإن  $[-\pi, \pi]$  هي مجموعة الحلول للمتراجحة (1).

(3) أثبت أنه إذا كان  $-1 < b < 1$  – فإنه يوجد عدوان  $\alpha$  و  $\beta$  من المجال  $[-\pi, \pi]$  حيث أن

نسمى  $M$  صورة  $\alpha$  على الدائرة المثلثية و نسمى '  $M$  صورة  $\beta$  على الدائرة المثلثية ، أثبت أن  $M$  و '  $M$  متناظران بالنسبة إلى محور التربيع.

استنتج مجموعة نقط الدائرة المثلثية التي تراثييها أصغر من  $b$ .

استنتاج حلول المتراجحة (1) على المجال  $[\pi, -\pi]$ .

**ملاحظة:** في المتراجحات من الشكل  $\sin x \leq b$  الحالتين  $b = 1$  و  $b = -1$  تدرس على حدٍ .

**تطبيق:** حل في المجموعة  $[0, 2\pi]$  المعادلة ذات المجهول الحقيقي  $x$  ثم مثل الحلول على الدائرة المثلثية .

في كل حالة من الحالات الآتية :

$$\cdot \sqrt{2} \sin 4x - 1 \leq 0 \quad (2) \quad \cdot \sin x < -\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\cdot 2 \sin 4x - \sqrt{2} > 0 \quad (4) \quad \cdot 2 \sin 5x + \sqrt{3} \geq 0 \quad (3)$$

الحل

$$\sin x < -\sin \frac{\pi}{6} = \sin \frac{7\pi}{6} \text{ ومنه: } \sin x < -\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$S_1 = \left] \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right[ \text{ ومنه: } x \in \left] \frac{7\pi}{6}; 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} \right[ \text{ أي:}$$

$$4x \in [0; \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}; 2\pi] \text{ أي: } \sin 4x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \text{ ومنه: } \sqrt{2} \sin 4x - 1 \leq 0 \quad (2)$$

$$S_2 \in [0; \frac{\pi}{16}] \cup [\frac{3\pi}{16}; \frac{\pi}{2}] \text{ ومنه: } x \in [0; \frac{\pi}{16}] \cup [\frac{3\pi}{16}; \frac{\pi}{2}] \text{ ومنه:}$$

$$5x \in [0; \frac{4\pi}{3}] \cup [\frac{5\pi}{3}; 2\pi] \text{ أي: } \sin 5x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \text{ أي: } 2 \sin 5x + \sqrt{3} \geq 0 \quad (3)$$

$$S_3 = [0; \frac{4\pi}{15}] \cup [\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{5}] \text{ ومنه: } x \in [0; \frac{4\pi}{15}] \cup [\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{5}] \text{ ومنه:}$$

$$x \in [\frac{\pi}{16}; \frac{3\pi}{16}] \text{ ومنه: } 4x \in [\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}] \text{ أي: } \sin 4x > \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \text{ ومنه: } 2 \sin 4x - \sqrt{2} > 0 \quad (4)$$

$$S_4 = [\frac{\pi}{16}; \frac{3\pi}{16}] \text{ ومنه:}$$

تقويم