تمرين شامل رقم 01: محور القسمة في $\mathbb{Z}$

المستوى: ثالثة ثانوي
الأستاذ: قويسم الخليل

I) n عدد طبيعي:

1. ادرس حسب قيم n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على 7
2. $k \in \mathbb{N}$، عيّن باقي القسمة الاقليدية على 7 لكل من الأعداد:

5^{2023} ، 2023^{1444} ، $2021^{2023^{2025}}$ ، 5^{12k+6} ، 19^{18k+4} ، 40^{1962} ، 1962^{509} ، 125^{2k+1}

3. نضع: $A_n = 4 \times 5^{6n+3} + 5^{2966} + 2022^{2n+1} + 1$
   - برهن أنّه من أجل كل n طبيعي A_n يقبل القسمة على 7
4. نضع: $B_n = 5n \times 5^{6n+1} - 5^{6n+2} + 3n \times 19^{6n+2}$

أ/ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n،

$$B_n \equiv 5^{6n+2} \times (4n-1)[7]$$

ب/ عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون B_n يقبل القسمة على 7

II)

1. عيّن قيم العدد الطبيعي n حيث:

$$\begin{cases} 5^n + 5^{6n+2} - 5^{6n} + 3n - 2 \equiv 0[7] \\ 5n \equiv 4[6] \end{cases}$$

2. عيّن قيم العدد الطبيعي n حيث:

$$5^n + 6^n + 7^n + 8^n + 9^n \equiv 0[7]$$

III) عيّن قيم العدد الطبيعي n في كل حالة:

- $5^{6n} + n^2 - 2n - 1 \equiv 0[7]$
- $2 \times 5^{6n+2} - 5^{6n} + 2n^2 - n - 1 \equiv 0[7]$
- $\begin{cases} N = \overline{1n30201}^5 \\ N \equiv 0[7] \end{cases}$

IV) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y: $1075x - 1505y = 645 \dots (E)$

1. عيّن قيم العدد الصحيح x ، حيث: $5x \equiv 3[7]$
2. احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 1075 و1505
3. استنتج أنّ المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$
4. باستعمال خوارزمية اقليدس، عيّن حلا خاصا $(x_0; y_0)$ للمعادلة (E)، ثم حل (E) بطريقتين مختلفتين
5. بيّن أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ من الأعداد الصحيحة حلا للمعادلة $5x - 7y = 14 \dots (F)$ فإنّ x يكون مضاعفا للعدد 7، ثمّ استنتج حلول المعادلة (F)
6. ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين غير المعدومين x و y ، حيث x و y حلول المعادلة (E)

أ/ ما هي القيم الممكنة للعدد d

ب/ عيّن الثنائية $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق:

$$\begin{cases} |x-y| \leq 3 \\ d \neq 1 \end{cases}$$

V)

1. حلل العدد 2150 إلى جداء عوامل أولية
2. استنتج عدد القواسم الطبيعية للعدد 2510 ثم عيّنها
3. نضع $D = PGCD(10750;15050)$ و $M = PPCM(10750;15050)$
   - احسب D و M
4. يربح عامل أكثر من 1100 دج في اليوم، يقبض هذا العامل 10750 د.ج في مدة α يوم، ويقبض 15050 د.ج في مدة β يوم، حيث α و β عددان طبيعيان

أ/ أوجد الراتب اليومي لهذا العامل

ب/ أوجد قيمة α و β

VI) نسمي (S) الجملة $\begin{cases} n \equiv 2[3] \\ n \equiv 7[8] \end{cases}$ حيث $n \in \mathbb{N}$

1. بيّن أن العدد 2015 حل للجملة (S)
2. إذا كان n_0 حلا لـ (S)، بيّن أنّ n حل لـ (S) يكافئ $\begin{cases} n-n_0 \equiv 0[3] \\ n-n_0 \equiv 0[8] \end{cases}$
3. أثبت أنّ n حل للجملة (S) إذا وفقط إذا كان $n \equiv 23[24]$، ثم حل الجملة (S) بطريقتين.
4. بمناسبة شهر رمضان المعظم أراد الأستاذ "لعور عبد الكريم" إجراء مسابقة فكرية بين تلاميذه، فإشترى مصاحف كجوائز، وأراد ترتيبهم في علب، فإذا استعمل علبا تتسع لـ 3 مصاحف بقي لديه مُصحفين، وإذا استعمل علبا تتسع لـ 8 مصاحف بقي لديه 7 مصاحف
   - إذا علمت أنّ عدد المصاحف التي بحوزته محصوربين 100 و 130 مصحفا، ما هو عدد هذه المصاحف؟

بالتوفيق في شهادة البكالوريا

الأستاذ: قويسم الخليل

نُشر بتاريخ: 2023-04-08

تصحيح مُقترح للتمرين رقم ﴿01﴾: محور القسمة في $\mathbb{Z}$

المستوى: ثالثة ثانوي
الأستاذ: قويسم الخليل

I)

❶ دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على 7:

$n=$	$5^n \equiv$
$6k$	1
$6k+1$	5
$6k+2$	4
$6k+3$	6
$6k+4$	2
$6k+5$	3
$k \in \mathbb{N}$	[7]

لدينا: $5^0 \equiv 1[7]$ ، $5^1 \equiv 5[7]$ ، $5^2 \equiv 4[7]$ ، $5^3 \equiv 6[7]$ ، $5^4 \equiv 2[7]$ ، $5^5 \equiv 3[7]$ ، $5^6 \equiv 1[7]$ ومنه:

❷ تعيين باقي القسمة الاقليدية على 7 لكل من الأعداد

5^{2023} ، 2023^{1444}، $2021^{2023^{2025}}$، 5^{12k+6} ، 5^{18k+1} ،
40^{1962}، 1962^{505} ، 15^{2k+1} :

- 5^{2023}:

لدينا: $5^{2023} \equiv 5^{3(337)+1}[7]$

ومنه: $\boxed{5^{2023} \equiv 5[7]}$

- 2023^{1444}:

لدينا: $2023 \equiv 0[7]$

ومنه: $2023^{1444} \equiv 0^{1444}[7]$

ومنه: $\boxed{2023^{1444} \equiv 0[7]}$

- $2021^{2023^{2025}}$:

لدينا: $2023 \equiv 1[6]$

ومنه: $2023^{2025} \equiv 1^{2025}[6]$

ومنه: $2023^{2025} = 6k+1$ حيث: $k \in \mathbb{N}$

ولدينا: $2021 \equiv 5[7]$

ومنه: $2021^{2023^{2025}} \equiv 5^{2023^{2025}}[7]$

معناه: $2021^{2023^{2025}} \equiv 5^{6k+1}[7]$

معناه: $\boxed{2021^{2023^{2025}} \equiv 5[7]}$

- 5^{12k+6}:

لدينا: $5^{12k+6} \equiv 5^{6(2k+1)}[7]$

ومنه: $5^{12k+6} \equiv 5^{6k'}[7]$ حيث $k' \in \mathbb{N}$

ومنه: $\boxed{5^{12k+6} \equiv 1[7]}$

- 19^{18k+4}:

لدينا: $19^{18k+4} \equiv 5^{6(3k)+4}[7]$

معناه: $19^{18k+4} \equiv 5^{6k'+4}[7]$ حيث $k' \in \mathbb{N}$

معناه: $\boxed{19^{18k+4} \equiv 2[7]}$

- 40^{1962}:

لدينا: $40^{1962} \equiv 5^{6(327)}[7]$

ومنه: $40^{1962} \equiv 5^{6k}[7]$

ومنه: $\boxed{40^{1962} \equiv 1[7]}$

- 1962^{509}:

لدينا: $1962^{509} \equiv 2^{6(84)+5}[7]$

ومنه: $1962^{509} \equiv (-5)^{6k+5}[7]$ حيث $k \in \mathbb{N}$

ومنه: $1962^{509} \equiv (-1 \times 5)^{6k+5}[7]$

ومنه: $1962^{509} \equiv (-1)^{6k+5} \times (5)^{6k+5}[7]$

ومنه: $1962^{509} \equiv -1 \times 3[7]$

إذن: $\boxed{1962^{509} \equiv 4[7]}$

- 125^{2k+1}:

لدينا: $125^{2k+1} \equiv 6^{2k+1}[7]$

ومنه: $125^{2k+1} \equiv (-1)^{2k+1}[7]$

ومنه: $125^{2k+1} \equiv -1[7]$ لأنّ $(2k+1)$ عدد فردي

إذن: $\boxed{125^{2k+1} \equiv 6[7]}$

❸ برهان أنّ A_n يقبل القسمة على 7:

لدينا: $A_n \equiv 4 \times 5^{6n+3} + 5^{2966} + 2022^{2n+1} + 1[7]$

ومنه: $A_n \equiv 4 \times 5^{6n+3} + 5^{6(294)+2} + 6^{2n+1} + 1[7]$

ومنه: $A_n \equiv 4 \times 6 + 4 + (-1)^{2n+1} + 1[7]$

ومنه: $A_n \equiv 4 \times 6 + 4 - 1 + 1[7]$

ومنه: $A_n \equiv 28[7]$

ومنه: $\boxed{A_n \equiv 0[7]}$

إذن: A_n يقبل القسمة على 7 من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

❹

أ/ تبيين أنّ $B_n \equiv 5^{6n+2} \times (4n-1)[7]$:

لدينا: $B_n \equiv 5n \times 5^{6n+1} - 5^{6n+2} + 3n \times 19^{6n+2}[7]$

ومنه: $B_n \equiv n \times 5^{6n+1+1} - 5^{6n+2} + 3n \times 5^{6n+2}[7]$

ومنه: $B_n \equiv n \times 5^{6n+2} - 5^{6n+2} + 3n \times 5^{6n+2}[7]$

ومنه: $\boxed{B_n \equiv 5^{6n+2}(4n-1)[7]}$

ب/ تعيين قيم n حتى يكون B_n يقبل القسمة على 7:

لدينا: $B_n \equiv 0[7]$

معناه: $5^{6n+2}(4n-1) \equiv 0[7]$

معناه: $4(4n-1) \equiv 0[7]$

معناه:
$$\begin{cases} 4n-1 \equiv 0[7] \\ \text{أو} \\ 4 \equiv 0[7] \end{cases}$$

لدينا: $4 \equiv 0[7]$ مستحيل

إذن: $4n-1 \equiv 0[7]$

ومنه: $4n \equiv 1[7]$

ومنه: $8n \equiv 2[7]$

ومنه: $n \equiv 2[7]$

إذن: $\boxed{n = 7k + 2}$ حيث: $k \in \mathbb{N}$

II)

❶ تعيين n حيث: $\begin{cases} 5^n + 5^{6n+2} - 5^{6n} + 3n - 2 \equiv 0[7] \\ 5n \equiv 4[6] \end{cases}$:

لدينا: $5n \equiv 4[6]$

معناه: $-n \equiv 4[6]$

معناه: $n \equiv -4[6]$

معناه: $n \equiv 2[6]$

معناه: $n = 6\alpha + 2$ حيث: $\alpha \in \mathbb{N}$

ولدينا: $5^n + 5^{6n+2} - 5^{6n} + 3n - 2 \equiv 0[7]$

معناه: $5^{6\alpha+2} + 5^{6n+2} - 5^{6n} + 3n - 2 \equiv 0[7]$

معناه: $4 + 4 - 1 + 3n - 2 \equiv 0[7]$

معناه: $3n + 5 \equiv 0[7]$

معناه: $3n \equiv -5[7]$

معناه: $3n \equiv 2[7]$

معناه: $-2 \times 3n \equiv -2 \times 2[7]$

معناه: $-6n \equiv -4[7]$

معناه: $n \equiv 3[7]$

معناه: $n = 7\beta + 3$ حيث: $\beta \in \mathbb{N}$

إذن: $\begin{cases} 5^n + 5^{6n+2} - 5^{6n} + 3n - 2 \equiv 0[7] \\ 5n \equiv 4[6] \end{cases}$

معناه: $\begin{cases} n = 6\alpha + 2 \\ n = 7\beta + 3 \end{cases}$

إذن: $6\alpha + 2 = 7\beta + 3$

معناه: $6\alpha = 7\beta + 1$

معناه: $6\alpha \equiv 1[7]$

معناه: $-\alpha \equiv 1[7]$

معناه: $\alpha \equiv 6[7]$

إذن: $\alpha = 7k' + 6$ حيث $k' \in \mathbb{N}$

نعوض قيمة α في المعادلة $n = 6\alpha + 2$

فنجد: $n = 6(7k' + 6) + 2$

إذن: $\boxed{n = 42k' + 38}$

❷ تعيين قيم n حتى: $5^n + 6^n + 7^n + 8^n + 9^n \equiv 0[7]$

لدينا: $5^n + 6^n + 7^n + 8^n + 9^n \equiv 0[7]$

معناه: $5^n + (-1)^n + 0^n + 1^n + 2^n \equiv 0[7]$

معناه: $5^n + (-1)^n + 1 + (-5)^n \equiv 0[7]$

معناه: $5^n + (-1)^n + 1 + (-1)^n(5)^n \equiv 0[7]$

معناه: $5^n + (-1)^n + (-1)^n(5)^n \equiv 6[7]$

نميز حالتين:

• لما n زوجي:

لدينا: $5^n + (-1)^n + (-1)^n(5)^n \equiv 6[7]$

معناه: $5^n + 1 + 5^n \equiv 6[7]$

معناه: $2 \times 5^n \equiv 5[7]$

معناه: $-6 \times 5^n \equiv -15[7]$

معناه: $5^n \equiv 6[7]$

معناه: $n = 6p + 3$

وهذا تناقض لأنّ n فرضناه عدد زوجي

• لما n فردي:

لدينا: $5^n + (-1)^n + (-1)^n(5)^n \equiv 6[7]$

معناه: $5^n - 1 - 5^n \equiv 6[7]$

معناه: $-1 \equiv 6[7]$

معناه: $6 \equiv 6[7]$

إذن: $n = 2k + 1$ حيث $k \in \mathbb{N}$

إذن: قيم n حتى يكون $5^n + 6^n + 7^n + 8^n + 9^n \equiv 0[7]$

هي: $\boxed{n = 2k + 1}$

III) تعيين قيم العدد الطبيعي n في كل حالة:

• $5^{6n} + n^2 - 2n - 1 \equiv 0[7]$:

لدينا: $5^{6n} + n^2 - 2n - 1 \equiv 0[7]$

معناه: $1 + n^2 - 2n - 1 \equiv 0[7]$

معناه: $n^2 - 2n \equiv 0[7]$

معناه: $n(n-2) \equiv 0[7]$

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	[7]
$n-2 \equiv$	5	6	0	1	2	3	4	[7]
$n(n-2) \equiv$	0	6	0	4	1	1	3	[7]

من الجدول نجد

أنّ: $5^{6n} + n^2 - 2n - 1 \equiv 0[7]$

لما: $\boxed{n \in \{(7k);(7k+2): k \in \mathbb{N}\}}$

• $2 \times 5^{6n+2} - 5^{6n} + 2n^2 - n - 1 \equiv 0[7]$:

لدينا: $2 \times 5^{6n+2} - 5^{6n} + 2n^2 - n - 1 \equiv 0[7]$

معناه: $2 \times 4 - 1 + 2n^2 - n - 1 \equiv 0[7]$

معناه: $2n^2 - n - 1 \equiv 0[7]$

معناه: $2\left(n + \frac{1}{2}\right)(n-1) \equiv 0[7]$

معناه: $(2n+1)(n-1) \equiv 0[7]$

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	[7]
$n-1 \equiv$	6	0	1	2	3	4	5	[7]
$2n+1 \equiv$	1	3	5	0	2	4	6	[7]
$(2n+1)(n-1) \equiv$	6	0	5	0	6	1	2	[7]

من الجدول نجد

أنّ: $2 \times 5^{6n+2} - 5^{6n} + 2n^2 - n - 1 \equiv 0[7]$

لما: $\boxed{n \in \{(7k+1);(7k+3): k \in \mathbb{N}\}}$

• $\begin{cases} N = \overline{1n30201}^5 \\ N \equiv 0[7] \end{cases}$:

لدينا: $N = \overline{1n30201}^5$

معناه: $1 + 2(5)^2 + 3(5)^4 + n(5)^5 + (5)^6$

ولدينا: $N \equiv 0[7]$

معناه: $1 + 2(5)^2 + 3(5)^4 + n(5)^5 + (5)^6 \equiv 0[7]$

معناه: $1 + 2 \times 4 + 3 \times 2 + 3n + 1 \equiv 0[7]$

معناه: $3n \equiv -2[7]$

معناه: $-2 \times 3n \equiv -2 \times 5[7]$

معناه: $-6n \equiv -10[7]$

معناه: $n \equiv 4[7]$

إذن: $\boxed{n = 7k + 4}$ حيث $k \in \mathbb{N}$

IV)

❶ تعيين قيم x ، حيث $5x \equiv 3[7]$:

لدينا: $5x \equiv 3[7]$

معناه: $3 \times 5x \equiv 3 \times 3[7]$

معناه: $15x \equiv 9[7]$

معناه: $x \equiv 2[7]$

معناه: $\boxed{x = 7k + 2}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

❷ حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين 1075 و 1505:

لدينا:

$1505 = 1075(1) + 430$

$1075 = 430(2) + 215$

$430 = 215(2) + 0$

إذن: $\boxed{PGCD(1075; 1505) = 215}$

❸ استنتاج أنّ المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$:

لدينا: $645 \mid 215$

إذن: المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$

❹ تعيين حلا خاصا $(x_0; y_0)$ للمعادلة (E):

لدينا: $215 = 1075 - 430(2)$

معناه: $215 = 1075 - (1505 - 1075)(2)$

معناه: $215 = 1075(3) - 1505(2)$

معناه: $215 \times 3 = 1075(3 \times 3) - 1505(2 \times 3)$

معناه: $645 = 1075(9) - 1505(6)$

إذن الثنائية $\boxed{(9; 6)}$ حل للمعادلة (E)

• حل (E) بطريقتين مختلفتين:

لدينا المعادلة $(E): 1075x - 1505y = 645$

تكافئ المعادلة: $(E'): 5x - 7y = 3$

الطريقة 01: (غوص)

لدينا: $\begin{cases} 5x - 7y = 3 \\ 5(9) - 7(6) = 3 \end{cases}$

بطرح المعادلة الثانية من الأولى

نجد: $5(x - 9) - 7(y - 6) = 0$

ومنه: $5(x - 9) = 7(y - 6)$

ومنه: $5 \mid 7(y - 6)$ و $7 \mid 5(x - 9)$

بما أنّ: $5 \wedge 7 = 1$

فإنّه: $5 \mid y - 6$ و $7 \mid x - 9$ (حسب غوص)

إذن: $y - 6 = 5k$ و $x - 9 = 7k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

أي: $y = 5k + 6$ و $x = 7k + 9$

أي: $y = 5k + 1$ و $x = 7k + 2$

إذن الثنائيات $(x; y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة (E) هي:

$\boxed{(x; y) \in \{(7k + 2; 5k + 1): k \in \mathbb{Z}\}}$

• الطريقة 02 (الموافقات):

لدينا: $5x - 7y = 3$

معناه $5x = 7y + 3$

معناه: $5x \equiv 3[7]$

معناه: $x = 7k + 2$

نعوض قيمة x في (E')

نجد: $5(7k + 2) - 7y = 3$

ومنه: $y = 5k + 1$

إذن الثنائيات $(x; y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة (E) هي:

$\boxed{(x; y) \in \{(7k + 2; 5k + 1): k \in \mathbb{Z}\}}$

❺ تبيين أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ من الأعداد الصحيحة حلا لـ (F) فإنّ x يكون مضاعفا للعدد 7:

لدينا: $5x - 7y = 14$

معناه: $5x = 14 + 7y$

معناه: $5x = 7(2 + y)$

معناه: $5x \equiv 0[7]$

معناه: $x \equiv 0[7]$

معناه: $\boxed{x = 7k}$ حيث: $k \in \mathbb{Z}$

إذن: x مضاعف لـ 7

• استنتاج حلول المعادلة (F):

لدينا: $x = 7k$

نعوض قيمة x في (F)

نجد: $5(7k) - 7y = 14$

ومنه: $y = 5k - 2$

إذن الثنائيات $(x; y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة (F) هي:

$\boxed{(x; y) \in \{(x = 7k; 5k - 2): k \in \mathbb{Z}\}}$

❻

أ/ تعيين القيم الممكنة للعدد d:

لدينا: $d = PGCD(x; y)$

ومنه: $d|x$ و $d|y$

ومنه: $d|5x - 7y$

ومنه: $d|3$

ومنه: $d \in D_3$

ومنه: $\boxed{d \in \{1; 3\}}$

ب/ تعين الثنائية $(x; y)$ من $\mathbb{N}^2$ حيث: $\begin{cases} |x - y| \leq 3 \\ d \neq 1 \end{cases}$:

لدينا: $k \in \mathbb{N}$

ولدينا: $|x - y| \leq 3$

معناه: $|7k + 2 - 5k - 1| \leq 3$

معناه: $-3 \leq 2k + 1 \leq 3$

معناه: $-4 \leq 2k \leq 2$

معناه: $-2 \leq k \leq 1$

معناه: $k \in \{0; 1\}$

• لما $k = 0$ نجد: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ (مرفوض) لأنّ $PGCD(2; 1) = 1$

• لما $k = 1$ نجد: $\begin{cases} x = 9 \\ y = 6 \end{cases}$ (مقبول) لأنّ $PGCD(9; 6) \neq 1$

إذن الثنائيات $(x; y)$ من $\mathbb{N}^2$ حيث $\begin{cases} |x - y| \leq 3 \\ d \neq 1 \end{cases}$ هي:

$\boxed{(x; y) \in \{(9; 6)\}}$

V)

❶ تحليل العدد 2150 إلى جداء عوامل أولية:

لدينا:

2150	2
1075	5
215	5
43	43
1	

إذن: $\boxed{2150 = 2 \times 5^2 \times 43}$

❷ استنتاج عدد القواسم الطبيعية للعدد 2510 وتعيينها:

لدينا: $2150 = 2^1 \times 5^2 \times 43^1$

ومنه عدد القواسك الطبيعية لـ 2150 هو

$(1+1)(2+1)(1+1) = \boxed{12}$

نستعمل جدول القواسم:

لدينا:

2^n	5^n	43^n
2^0	5^0	43^0
2^1	5^1	43^1
	5^2	

يكافئ:

2^n	5^n	43^n
1	1	1
2	5	43
	25	

اذن: $D_{2150} \in \left\{\begin{array}{l} 1\times 1\times 1;\\ 1\times 1\times 43;\\ 1\times 5\times 1;\\ 1\times 5\times 43;\\ 1\times 25\times 1;\\ 1\times 25\times 43;\\ 2\times 1\times 1;\\ 2\times 1\times 43;\\ 2\times 5\times 1;\\ 2\times 5\times 43;\\ 2\times 25\times 1;\\ 2\times 25\times 43 \end{array}\right.$

إذن: $\boxed{D_{2150} \in \left\{\begin{array}{l} 1; 2; 5; 10; 25; 43; 50; 86;\\ 215; 430; 1075; 2150 \end{array}\right.}$

❸ حساب D و M

لدينا: $D = PGCD(10750; 15050)$

ومنه: $D = PGCD(10 \times 1075; 10 \times 1505)$

ومنه: $D = 10 \times PGCD(1075; 1505)$

ومنه: $D = 10 \times 215$

ومنه: $\boxed{D = 2150}$

ولدينا: $M \times D = 10750 \times 15050$

ومنه: $\boxed{M = 75250}$

❹

أ/ ايجاد الراتب اليومي لهذا العامل:

نضع: X هو الراتب اليومي لهذا العامل

يربح العامل أكثر من 1100 دج في اليوم

إذن: $X > 1100$

ولدينا: $\begin{cases} \alpha \times X = 10750 \\ \beta \times X = 15050 \end{cases}$

ومنه: $X|10750$ و $X|27600$

إذن: $X|PGCD(10750\,;15050)$

أي: $X|2150$

إذن: $X \in D_{2150}$

أي: $X \in \left\{\begin{array}{l} 1; 2; 5; 10; 25; 43; 50; 86;\\ 215; 430; 1075; 2150 \end{array}\right.$

بما أنّ: $X > 1100$

فإنّ: $\boxed{X = 2150}$

ب/ ايجاد قيمة α و β:

لدينا: $\begin{cases} \alpha X = 10750 \\ \beta X = 15050 \end{cases}$

ومنه: $\begin{cases} \alpha \times 2150 = 10750 \\ \beta \times 2150 = 15050 \end{cases}$

إذن: $\boxed{\begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = 7 \end{cases}}$

VI)

❶ تبيين أن العدد 2015 حل للجملة (S):

لدينا: $\begin{cases} 2015 = 3(671) + 2 \\ 2015 = 8(251) + 7 \end{cases}$

ومنه: $\begin{cases} 2015 \equiv 2[3] \\ 2015 \equiv 7[8] \end{cases}$

إذن: العدد 2015 حل للجملة (S)

❷ تبيين أنّ n حل لـ (S) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} n - n_0 \equiv 0[3] \\ n - n_0 \equiv 0[8] \end{cases}$

لدينا: n لـ (S) معناه: $\begin{cases} n \equiv 2[3] \\ n \equiv 7[8] \end{cases}$

و لدينا: n_0 لـ (S) معناه: $\begin{cases} n_0 \equiv 2[3] \\ n_0 \equiv 7[8] \end{cases}$

بالطرح نجد: $\begin{cases} n - n_0 \equiv 2 - 2[3] \\ n - n_0 \equiv 7 - 7[8] \end{cases}$

إذن: $\begin{cases} n - n_0 \equiv 0[3] \\ n - n_0 \equiv 0[8] \end{cases}$

❸ اثبات أنّ n حل لـ(S) إذا $n \equiv 23[24]$:

لدينا: $\begin{cases} n \equiv 2[3] \\ n \equiv 7[8] \end{cases}$

معناه: $\begin{cases} 8 \times n \equiv 8 \times 2[8 \times 3] \\ 3 \times n \equiv 3 \times 7[3 \times 8] \end{cases}$

معناه: $\begin{cases} 8n \equiv 16[24] \\ 3n \equiv 21[24] \end{cases}$

وعليه: $5n \equiv -5[24]$

ومنه: $n \equiv -1[24]$

ومنه: $\boxed{n \equiv 23[24]}$

• حل الجملة (S) بطريقة أخرى:

لدينا: $\begin{cases} n - n_0 \equiv 0[3] \\ n - n_0 \equiv 0[8] \end{cases}$

ولدينا: 2015 حل للجملة (S)

ومنه: $\begin{cases} n - 2015 \equiv 0[3] \\ n - 2015 \equiv 0[8] \end{cases}$

إذن: $n - 2015 \equiv 0[3 \times 8]$

أي: $n \equiv 2015[24]$

أي: $n \equiv 23[24]$

إذن: $\boxed{n = 24k + 23}$ حيث $k \in \mathbb{N}$

❹ **تعيين عدد هذه المصاحف :**

نضع: Y هو عدد المصاحف التي اشتراها الأستاذ عبد الكريم

إذا استعمل علبا تتسع لـ 3 مصاحف بقي لديه مُصحفين

معناه: $Y \equiv 2[3]$ ، وإذا استعمل علبا تتسع لـ 8 مصاحف بقي

لديه 7 مصاحف معناه: $Y \equiv 7[8]$

أي $\begin{cases} Y \equiv 2[3] \\ Y \equiv 7[8] \end{cases}$ وهذا يكافئ الجملة (S)

إذن: $Y = 24k + 23$

لدينا: $100 < Y < 130$

ومنه: $100 < 24k + 23 < 130$

ومنه: $100 < 24k + 23 < 130$

ومنه: $3.2 < k < 4.45$

إذن: $k = 4$

وعليه المصاحف هو: $Y = 24(4) + 23$

أي: $Y = 119$

بالتوفيق في شهادة البكالوريا

الأستاذ: قويسم الخليل

نُشر بتاريخ: 2023-03-21