محور الدوال الأصلية والحساب التكاملي

كل عناصر الدرس بطريقة مبسطة

مجموعة تمارين محلولة

التحكم في الإجابة على أسئلة اختيار من متعدد

تمارين تدريبية بالإضافة لتمارين المحور الواردة في شهادة البكالوريا من 2008 الى 2024

عناصر الدرس

1.نشاط تمهيدي

نعتبر الدالتين f و F المعرفتين على $]-3;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{-x^2-6x}{(x+3)^2}$ و $F(x)=\dfrac{2x-3}{x+3}-x$

1.تحقق أنه من أجل كل x من $]-3;+\infty[$، $F'(x)=f(x)$

2.اقترح دالة أخرى G بحيث من أجل كل x من $]-3;+\infty[$، $G'(x)=f(x)$

نقول أن F و G دالتان أصليتان للدالة f على $]-3;+\infty[$.

تعريف: f و F دالتان معرفتان على مجال I و f قابلة للاشتقاق على I. إذا كان من أجل كل x من I، $F'(x)=f(x)$ نقول أن:

- f هي الدالة المشتقة للدالة F.
- F دالة أصلية للدالة f على I.

2.الدالة الأصلية لدالة على مجال

تعريف: f دالة معرفة على مجال I.

نسمي دالة أصلية للدالة f على المجال I كل دالة F قابلة للاشتقاق على I مشتقتها F' هي f.

من أجل كل x من I، $F'(x)=f(x)$

مثال: * الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $F(x)=x^2-3x+1$ هي دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=2x-3$ لأن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $F'(x)=2x-3=f(x)$.

*الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $F(x)=x^2-3x-\sqrt{2}$ هي كذلك دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة f لأن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $G'(x)=2x-3=f(x)$.

3.مجموعة الدوال الأصلية لدالة خواص (دون برهان):

*إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I فإن f تقبل دوالا أصلية على I.

*إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I فإن كل الدوال الأصلية للدالة f على I هي الدوال: $x\mapsto F(x)+k$ حيث k عدد حقيقي ثابت.

نتيجة: دالتان أصليتان لنفس الدالة تختلفان بثابت فقط.

مثال: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=3x^2+4x-2$. كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $F(x)=x^3+2x^2-2x+k$ حيث k عدد حقيقي ثابت.

4. الدالة الأصلية التي تأخذ قيمة معلومة من أجل قيمة للمتغير

خاصية: f دالة مستمرة على مجال I. x_0 عدد حقيقي من I و y_0 عدد حقيقي كيفي.

توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f على المجال I تحقق الشرط $F(x_0)=y_0$.

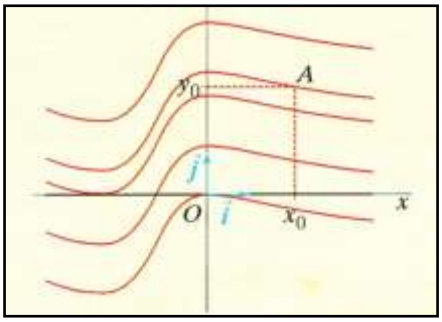
البرهان: بما أن الدالة f مستمرة على I فهي تقبل دوالا أصلية على I و لتكن G إحدى هذه الدوال الأصلية.

إذا كانت F دالة أصلية أخرى للدالة f على I فإن من أجل كل x من I، $F(x)=G(x)+k$ حيث k عدد حقيقي.

الشرط $F(x_0)=y_0$ يعني أن $G(x_0)+k=y_0$ أي أن $k=y_0-G(x_0)$. لقد تم هكذا تحديد العدد الحقيقي k.

توجد إذن دالة أصلية وحيدة F للدالة f على المجال I تحقق الشرط $F(x_0)=y_0$ و لدينا:

$$F(x)=G(x)+y_0-G(x_0)$$



التفسير البياني:

التمثيلات البيانية في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ للدوال الأصلية للدالة f

تستنتج من أحدها بواسطة انسحابات شعاعها $k\vec{j}$ حيث k عدد حقيقي.

واحد فقط من بين هذه التمثيلات البيانية يمر من النقطة $A(x_0;y_0)$.

5. تمارين

تمرين 1: نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $]-1;+\infty[$ كما يلي:

$$F(x)=\frac{x-1}{x+1}-2x \quad \text{و} \quad f(x)=-\frac{2x^2+4x}{(x+1)^2}$$

بين أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$.

طريقة: لإثبات أن F دالة أصلية لـِ f على مجال I يكفي أن نثبت أن F قابلة للاشتقاق على I و أن من أجل كل x من I، $F'(x)=f(x)$.

الحل: F دالة ناطقة معرفة على $]-1;+\infty[$ فهي إذن قابلة للاشتقاق على $]-1;+\infty[$ و من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ لدينا:

$$F'(x)=\frac{1(x+1)-1(x-1)}{(x+1)^2}-2=\frac{2}{(x+1)^2}-2$$

و منه:

$$F'(x)=\frac{2-2(x+1)^2}{(x+1)^2}=\frac{2\left[1-(x+1)^2\right]}{(x+1)^2}=\frac{2\left[(1-x-1)(1+x+1)\right]}{(x+1)^2}=\frac{-2x(x+2)}{(x+1)^2}$$

و بالتالي:

$$F'(x)=\frac{-2x^2-4x}{(x+1)^2}=-\frac{2x^2+4x}{(x+1)^2}=f(x)$$

و هكذا من أجل كل x من $]-1;+\infty[$، $F'(x)=f(x)$. إذن F دالة أصلية لـِ f على المجال $]-1;+\infty[$.

تمرين 2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2x+\cos x$

1. عين كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.
2. عين الدالة الأصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ و التي تحقق $F(\pi)=-1$. **الحل:**

1. كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال $x\mapsto x^2+\sin x+k$ حيث k عدد حقيقي.

2. لدينا من جهة $F(x)=x^2+\sin x+k$ و لدينا من جهة ثانية $F(\pi)=-1$.

$F(\pi)=-1$ يعني $\pi^2-0+k=-1$ و منه $k=-1-\pi^2$. نجد هكذا أن $F(x)=x^2+\sin x-1-\pi^2$

تمرين 3: نعتبر الدالتين F و G المعرفتين على $]2;+\infty[$ كما يلي:

$$F(x)=\frac{x^2-2x+3}{x-2} \quad \text{و} \quad G(x)=\frac{2x-1}{x-2}+x$$

باستعمال طريقتين مختلفتين بين أن F و G دالتان أصليتان لنفس الدالة.

الحل: الطريقة الأولى: نبين أنه من أجل كل x من $]2;+\infty[$، $F'(x)=G'(x)$

من أجل كل x من $]2;+\infty[$، $F'(x)=\frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$ و $G'(x)=\frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$

إذن من أجل كل x من $]2;+\infty[$، $F'(x)=G'(x)$. الدالتان هما إذن دالتان أصليتان لنفس الدالة.

الطريقة الثانية: نبين أنه من أجل كل x من $]2;+\infty[$، $F(x)-G(x)=k$ حيث k عدد حقيقي.

من أجل كل x من $]2;+\infty[$، $F(x)-G(x)=\left(\frac{x^2-2x+3}{x-2}\right)-\left(\frac{2x-1}{x-2}+x\right)=\frac{-2(x-2)}{x-2}=-2$

حساب الدوال الأصلية:

1/ الدوال الأصلية لدوال مألوفة: يمثل c عدد حقيقي كيفي

الدالة $f(x)$	الدالة الأصلية $F(x)$	المجال I
k (k عدد حقيقي)	$kx+c$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2+c$	$\mathbb{R}$
$x^n \quad (n\in\mathbb{N}^*)$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+c$	$]-\infty;0[$ أو $]0;+\infty[$
$\frac{1}{x^n} \quad (n\geq 2, n\in\mathbb{N})$	$-\frac{1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}}+c$	$]-\infty;0[$ أو $]0;+\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$	$]0;+\infty[$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x+c$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k;\frac{\pi}{2}+k\right[\quad (k\in\mathbb{Z})$

الدوال الأصلية لدوال مركبة:

u دالة قابلة للإشتقاق على المجال I.

الدالة f	الدالة الأصلية F	على المجال
$u'u$	$\frac{1}{2}u^2+c$	I
$n\in\mathbb{N}^*$ $u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$	I
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}+c$	$D=\ x\ /\ x\in I, u(x)\neq 0$
$\frac{u'}{u^n}$ $n\geq 2, n\in\mathbb{N}$	$-\frac{1}{n-1\ u^{n-1}}+c$	$D=\ x\ /\ x\in I, u(x)\neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+c$	$D=\ x\ /\ x\in I, u(x)>0$
$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert+c$	$D=\ x\ /\ x\in I, u(x)\neq 0$
$u'e^u$	e^u+c	I

خواص-إذا كانت F و G دالتين أصليتين على الترتيب لـِ f و g على مجال I فإن $F+G$ دالة أصلية لـِ $f+g$ على I.

-إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على مجال I فإن kF دالة أصلية للدالة kf على $k\in\mathbb{R}$ I

1 4. تمارين

تمرين 1: عين دالة أصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية:

$* \ f(x)=x^3-3x+5$ و $I=\mathbb{R}$ $* \ g(x)=\frac{2}{x^2}$ و $I=]-\infty;0[$ $* \ h(x)=\frac{3}{x^3}-\frac{1}{\sqrt{x}}$ و $I=]0;+\infty[$

الحل: * دالة أصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ معرفة بـِ :

$$F(x)=\frac{1}{3+1}x^{3+1}-3\times\frac{1}{2}x^2+5x=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+5x$$

* دالة أصلية G للدالة g على $I=]-\infty;0[$ معرفة بـِ :

$$G(x)=2\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{2}{x}$$

* دالة أصلية H للدالة h على $I=]0;+\infty[$ معرفة بـِ :

$$H(x)=3\left(-\frac{1}{(3-1)x^{3-1}}\right)-2\sqrt{x}=-\frac{3}{2x^2}-2\sqrt{x}$$

تمرين 2: عين دالة أصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية:

* $f(x)=(x+1)(x^2+2x+5)^2$ و $I=\mathbb{R}$ * $g(x)=\frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$ و $I=\mathbb{R}$

طريقة: لتعيين دالة أصلية على مجال I لدالة f يمكننا:

1. ملاحظة إذا كانت f تكتب على أحد الأشكال $u'u^n$ أو $\frac{u'}{u^n}$ أو $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ مع تحديد عبارة $u(x)$.
2. حساب $u'(x)$ ثم تحديد عددا حقيقيا k بحيث $f=k\times u'u^n$ أو $f=k\times\frac{u'}{u^n}$ أو $f=k\times\frac{u'}{\sqrt{u}}$.
3. تطبيق قواعد الدوال الأصلية.

الحل:

- يظهر و أن الدالة f من الشكل $u'u^n$ مع $u(x)=x^2+2x+5$.

لدينا $u'(x)=2x+2$ أي أن $u'(x)=2(x+1)$ و منه $x+1=\frac{1}{2}u'(x)$

نجد هكذا أن: $f(x)=\frac{1}{2}u'(x)\times[u(x)]^2$ أي أن $f=\frac{1}{2}\times u'u^2$.

و بالتالي فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $F(x)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}[u(x)]^3$ أي $F(x)=\frac{1}{6}(x^2+2x+5)^3$.

- يظهر و أن الدالة g من الشكل $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ مع $u(x)=x^2+1$.

لدينا $u'(x)=2x$ أي أن و منه $3x=\frac{3}{2}u'(x)$ نجد هكذا أن: $g(x)=\frac{3}{2}\times\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ أي أن $g=\frac{3}{2}\times\frac{u'}{\sqrt{u}}$.

و بالتالي فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $G(x)=\frac{3}{2}\times2\sqrt{u(x)}=3\sqrt{u(x)}$ أي $G(x)=3\sqrt{x^2+1}$.

5. الدوال الأصلية للدوال $x\mapsto u'(x)e^{u(x)}$

خاصية: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن:

- الدالة $f:x\mapsto e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I، $f'(x)=u'(x)e^{u(x)}$.
- الدالة $x\mapsto e^{u(x)}$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto u'(x)e^{u(x)}$ على I.

تطبيق1: عين في كل حالة من الحالات التالية دالة أصلية للدالة f على المجال I:

1. $f(x)=\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ ، $I=]0;+\infty[$.
2. $f(x)=e^{ax+b}$ ، $I=\mathbb{R}$.
3. $f(x)=\left(-x+\frac{1}{2}\right)e^{x^2-x-3}$ ، $I=\mathbb{R}$.
4. $f(x)=\cos(2x)e^{\sin(2x)}$ ، $I=\mathbb{R}$.

تطبيق2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=4xe^{2x}$

عين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون الدالة F المعرفة بـ $F(x)=(ax+b)e^{2x}$ دالة أصلية الدالة f على $\mathbb{R}$.

6. الدوال الأصلية للدوال $x\mapsto\frac{u'(x)}{u(x)}$

خاصية: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق و موجبة تماما على مجال I فإن:

- الدالة $x \mapsto \ln[u(x)]$: f قابلة للاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I، $f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$.
- الدالة $x \mapsto \ln[u(x)]$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ على I.

تطبيق1: عين في كل حالة من الحالات التالية دالة أصلية للدالة f على المجال I:

1. $f(x)=\frac{1}{x+2}$ ، $I=]-2;+\infty[$.
3. $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$ ، $I=]0;\pi[$.
2. $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$ ، $I=]1;+\infty[$.
4. $f(x)=\frac{-2e^x}{e^x+1}$ ، $I=\mathbb{R}$.

تطبيق2: نعتبر الدالة f المعرفة على $]-2;+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{2x+3}{(x+2)^2}$

1. عين العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل x من $]-2;+\infty[$، $f(x)=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{(x+2)^2}$.
2. استنتج دالة أصلية للدالة f على $]-2;+\infty[$.

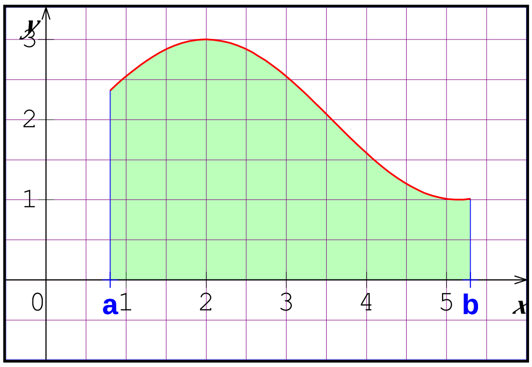
تطبيق3: نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{e^x-2}{e^x-1}$

1. عين العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $f(x)=a+\frac{be^x}{e^x-1}$.
2. استنتج دالة أصلية للدالة f على $]0;+\infty[$.

II. تكامل دالة

1. الدالة الأصلية و مساحة حيز تحت منحن

خاصية: f دالة مستمرة و موجبة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I حيث $a \le b$. (C_f) منحني f في معلم متعامد $(O;A,B)$ و F دالة أصلية لـ f على I.



ملاحظات:

1. الحيز تحت المنحني (C_f) بين العددين a و b هو الحيز المحدد بالمنحني (C_f)، محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$.

2. تعريف التكامل

f دالة مستمرة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I. إذا كانت F و G دالتين أصليتين للدالة f على I فإنه يوجد عدد حقيقي k بحيث من أجل كل x من I، $G(x)=F(x)+k$.

لدينا: $G(b)-G(a)=[F(b)+k]-[F(a)+k]=F(b)-F(a)$

نلاحظ هكذا أن العدد $F(b)-F(a)$ مستقل عن اختيار الدالة الأصلية للدالة f على المجال I.

تعريف: f دالة مستمرة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I.

يسمى العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$، حيث F دالة أصلية للدالة f على I، التكامل من a إلى b لـِ f

و نرمز إليه بالرمز $\int_a^b f(x)dx$. نقرأ: "التكامل من a إلى b لـِ $f(x)$ تفاضل x".

ملاحظة:

1. عمليا لحساب العدد $\int_a^b f(x)dx$ نقوم بتعيين دالة أصلية F للدالة f على مجال I يشمل العددين a و b

ثم نكتب:

$$\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$$

2. يمكن استبدال المتغير x بأحد الحروف t، q،... فيكون لدينا مثلا $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt$

خاصية: f دالة مستمرة و موجبة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I حيث $a\le b$. (C_f) منحني f

في معلم متعامد و F دالة أصلية لـِ f على I. مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و بالمستقيمات

التي معادلاتها $x=a$، $x=b$ و $y=0$ هو العدد الحقيقي $\int_a^b f(x)dx$.

تمرين1: أحسب التكاملات التالية:

1) $\int_{-1}^{2}\left(-3x^2+1\right)dx$ 2) $\int_0^1 e^{2x-1}dx$ 3) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\,dx$

1. $\int_{-1}^{2}\left(-3x^2+1\right)dx=\left[-x^3+x\right]_{-1}^{2}=(-6)-(0)=-6$.

2. $\int_0^1 e^{2x-1}dx=\frac{1}{2}\left[e^{2x-1}\right]_0^1=\frac{1}{2}\left[(e)-\left(e^{-1}\right)\right]=\frac{e^2-1}{2e}$.

3. $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\,dx=\left[-\cos x\right]_{-\pi}^{\pi}=(1)-(1)=0$.

II. خواص التكامل

1. علاقة شال خاصية: f دالة مستمرة على مجال I. من أجل كل أعداد حقيقية a، b و c من I لدينا:

$$\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$$

البرهان: إذا كانت F دالة أصلية لـِ f على I فإن:

$$\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\left[F(b)-F(a)\right]+\left[F(c)-F(b)\right]=\left[F(c)-F(a)\right]=\int_a^c f(x)dx$$

نتائج: من الواضح أن $\int_a^a f(x)dx=0$ ومنه إذا أخذنا $c=a$ نحصل على $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

2. الخطية

خاصية: f و g دالتان مستمرتان على مجال I و k عدد حقيقي.من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I لدينا:

$$(1)\quad \int_a^b\left[f(x)+g(x)\right]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx \quad \text{و} \quad (2)\quad \int_a^b k f(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$$

البرهان: العلاقة (1): نعلم أنه إذا كانت F و G دالتين أصليتين على الترتيب للدالتين f و g على المجال I فإن الدالة $F+G$ دالة أصلية للدالة $f+g$ على المجال I. و منه:

$$\int_a^b\left[f(x)+g(x)\right]dx=\left[F(x)+G(x)\right]_a^b=\left[F(b)+G(b)\right]-\left[F(a)+G(a)\right]$$

$$=\left[F(b)-F(a)\right]+\left[G(b)-G(a)\right]=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

العلاقة (2): نتبع منهجية مماثلة علما أنه إذا كانت F دالة أصلية لـِ f على I فإن kF دالة أصلية لـِ kf على I

3. المقارنة

خواص: f و g دالتان مستمرتان على مجال $[a;b]$.

(1) إذا كان من أجل كل x من $[a;b]$، $f(x)\geq 0$ فإن $\int_a^b f(x)dx\geq 0$

(2) إذا كان من أجل كل x من $[a;b]$، $f(x)\leq g(x)$ فإن $\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$

البرهان:

العلاقة (1): إذا كانت F دالة أصلية لـ f على I فإن من أجل كل x من I، $F'(x)=f(x)$. و بما أن $f(x)\geq 0$ على $[a;b]$ فإن F متزايدة على $[a;b]$ و بالتالي $F(a)\leq F(b)$ أي $F(b)-F(a)\geq 0$ و منه $\int_a^b f(x)dx\geq 0$. بالنسبة لبرهان العلاقة (2) يكفي أن نلاحظ أن $g(x)-f(x)\geq 0$ و نطبق النتائج السابقة.

تمرين 2: أحسب التكامل التالي: $\int_0^3 |x^2-1|dx$

طريقة: نكتب، حسب قيم x، عبارة $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة لنتمكن من تعيين دوال أصلية للدالة f

الحل: x^2-1 كثير حدود من الدرجة الثانية جذراه -1، 1 و بالتالي:

- من أجل كل x من $[0;1]$، $x^2-1\leq 0$ إذن $|x^2-1|=-x^2+1$.
- من أجل كل x من $[1;3]$، $x^2-1\geq 0$ إذن $|x^2-1|=x^2-1$.

باستعمال علاقة شال يكون لدينا: $\int_0^3 |x^2-1|dx=\int_0^1 |x^2-1|dx+\int_1^3 |x^2-1|dx=\int_0^1 (-x^2+1)dx+\int_1^3 (x^2-1)dx$

و منه $\int_0^3 |x^2-1|dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_1^3=\left[\left(-\frac{1}{3}+1\right)-0\right]+\left[\left(\frac{27}{3}-3\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)\right]=\frac{22}{3}$

تمرين 3: نعتبر التكاملين: $A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx$ و $B=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,dx$

أحسب $A+B$ و $A-B$ ثم استنتج A و B.

الحل:

$A+B=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,dx=B=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx=[x]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$.

$A-B=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,dx=B=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x dx=\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}$

لدينا $A+B=\frac{\pi}{4}$ و $A-B=\frac{1}{2}$. بعد حل هذه الجملة نجد $A=\frac{\pi+2}{8}$ و $B=\frac{\pi-2}{8}$.

تمرين 4: نعتبر التكامل $I=\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}dt$

1. بين أنه من أجل كل t من $[0;1]$ ، $\frac{1}{t^2+1}\leq 1$.

2. استنتج حصرا للعدد I.

الحل:

1. من أجل كل t من $[0;1]$، $1+t^2 \geq 1$ و منه من أجل كل t من $[0;1]$، $\frac{1}{1+t^2} \leq 1$.

2. بما أن $0<1$ و بتطبيق خاصية المحافظة على الترتيب نستنتج أن $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt \leq \int_0^1 1dt$

و بما أن $\int_0^1 1dt = [t]_0^1 = 1$ فإن $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt \leq 1$. من الواضح كذلك أنه من أجل كل t من $[0;1]$، $\frac{1}{1+t^2} > 0$

و منه $I > 0$. نستنتج هكذا الحصر التالي: $0 < I \leq 1$

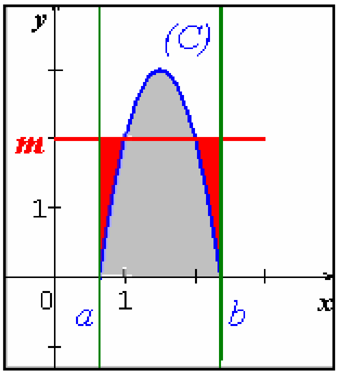
III. القيمة المتوسطة

1. القيمة المتوسطة لدالة على مجال

تعريف: f دالة مستمرة على مجال $[a;b]$.

القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a;b]$ هي العدد الحقيقي: $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

التفسير البياني في حالة دالة موجبة: نفرض أن الدالة f موجبة على المجال $[a;b]$.



ليكن (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد $(O; I, J)$.

$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ يعني $m(b-a) = \int_a^b f(x)dx$

نعلم أن $\int_a^b f(x)dx$ هو مساحة الحيز الواقع تحت المنحني (C) بين a و b.

$m(b-a)$ هي مساحة المستطيل الذي بعداه $b-a$ و m (القيمة المتوسطة).

و هكذا فإن m، القيمة المتوسطة لـ f على $[a;b]$، هي "ارتفاع" المستطيل

الذي قاعدته $b-a$ و الذي له نفس مساحة الحيز الواقع تحت المنحني (C) بين a و b.

نلاحظ أن للحيزين الملونين بالأزرق و الأحمر نفس المساحة.

2. حصر القيمة المتوسطة

خواص: f دالة مستمرة على مجال $[a;b]$.

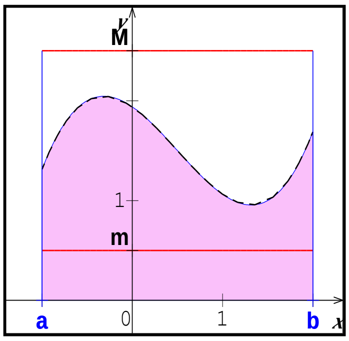
إذا وجد عددان حقيقيان m و M بحيث من أجل كل x من $[a;b]$، $m \le f(x) \le M$ فإن:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

البرهان: من أجل كل x من $[a;b]$ لدينا: $m \le f(x) \le M$ و منه و باستعمال خاصية المقارنة يكون لدينا: $\int_a^b mdx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b Mdx$ أي $m\int_a^b dx \le \int_a^b f(x)dx \le M\int_a^b dx$ و بما أن $\int_a^b dx = b-a$ نحصل على

$.m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

حالة خاصة: إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I وكان a و b عددان حقيقيان من I و وجد عدد حقيقي M بحيث من أجل كل x من I، $|f(x)| \le M$ فإن $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le M|b-a|$.

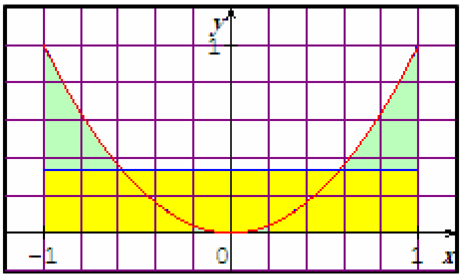


التفسير البياني في حالة f موجبة و $m \ge 0$: مساحة الحيز تحت المنحني الممثل لـِ f بين a و b محصورة بين مساحتي المستطيلين اللذين ارتفاعهما m و M و عرضهما $b-a$. كما أن القيمة المتوسطة μ هي الأخرى محصورة بين a و b.

تمرين 5: نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1;1]$ بـِ $f(x)=x^2$

1. أرسم التمثيل البياني (C) للدالة f في معلم متعامد و متجانس ثم أحسب القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[-1;1]$.

2. فسر بيانيا النتيجة.



الحل:

1. $\mu = \frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\left[x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}$.

2. مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) و المستقيمات التي معادلاتها $x=-1$، $x=1$ و $y=0$ تساوي مساحة المستطيل $ABCD$ الذي بعداه 2 و $\frac{1}{3}$ علما أن $A(1;0)$، $B\left(1;\frac{1}{3}\right)$، $C\left(-1;\frac{1}{3}\right)$ و $D(-1;0)$.

تمرين 6: نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـِ $f(x)=1+\ln(x+1)$

1. أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;e-1]$.

2. استنتج حصرا لـِ $f(x)$.

3. استنتج حصرا للعدد الحقيقي $I=\int_{1}^{e-1} f(x)dx$

الحل:

1. لدينا من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{1}{x+1}>0$. إذن f متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$ و منه على المجال $[0;e-1]$.

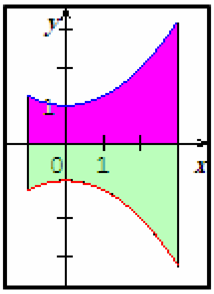
2. نستنتج أنه من أجل كل x من $[0;e-1]$، $f(0)\le f(x)\le f(e-1)$ أي $1\le f(x)\le 2$.

3. بتطبيق حصر القيمة المتوسطة نجد $(e-2)\le \int_{1}^{e-1} f(x)dx \le 2(e-2)$.

IV. التمديد إلى دالة إشارتها كيفية

1. تكامل دالة سالبة على مجال

لتكن f دالة مستمرة و سالبة على مجال $[a;b]$. و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.



نرمز بـِ A إلى مساحة الحيز D المحدد بالمنحني (C_f) و بالمستقيمات التي معادلاتها $x=a$ ، $x=b$ و $y=0$ و بـ A' إلى مساحة D' الحيز المحدد بالمنحني (C_{-f}) D'

و بالمستقيمات التي معادلاتها $x=a$ ، $x=b$ و $y=0$.

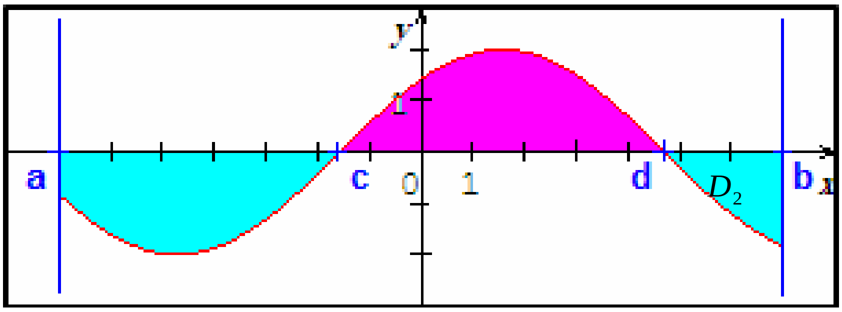
بما أن f سالبة على $[a;b]$ فإن $-f$ موجبة على $[a;b]$ و بالتالي $A'=\int_{a}^{b} -f(x)dx$ D

الحيزان D و D' متناظران بالنسبة إلى محور الفواصل فمساحتاهما متساويتان أي $A'=A$.

و بالتالي فإن $A=\int_{a}^{b} -f(x)dx$ أو $\int_{a}^{b} f(x)dx=-A$. نقول أحيانا أن $\int_{a}^{b} f(x)dx$ هي المساحة الجبرية للحيز D فتكون سالبة إذا كانت f سالبة على $[a;b]$ و تكون موجبة إذا كانت f موجبة على $[a;b]$.

2. **تكامل دالة تغير إشارتها على مجال** لتكن مثلا f دالة مستمرة و تغير إشارتها على مجال $[a;b]$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

نرمز بـِ A إلى مساحة الحيز D المحدد بالمنحني (C_f) و بالمستقيمات التي معادلاتها $x=a$ ، $x=b$ و $y=0$.



نلاحظ مثلا في الشكل أعلاه أن f موجبة على $[c;d]$ و سالبة على المجالين $[a;c]$ و $[d;b]$.

نرمز بـِ A_1 إلى مساحة الحيز D_1، بـِ A_2 إلى مساحة الحيز D_2 و بـِ A_3 إلى مساحة الحيز D_3

لدينا $A=A_1+A_2+A_3$ و بما أن $A_1=-\int_a^C f(x)dx$ ، $A_2=\int_c^d f(x)dx$ و $A_3=-\int_d^b f(x)dx$

فإن $A=-\int_a^C f(x)dx+\int_c^d f(x)dx-\int_d^b f(x)dx$

ملاحظة:

بصفة عامة لحساب مساحة حيز محدد بالمستقيمات التي معادلاتها $x=a$ ، $x=b$ و $y=0$ و بمنحن ممثل لدالة f تغير إشارتها على $[a;b]$ نقوم أولا بتحديد المجالات التي تحتفظ فيها الدالة بإشارة ثابتة (سالبة أو موجبة) ثم نطبق النتيجة المناسبة على كل مجال من هذه المجالات.

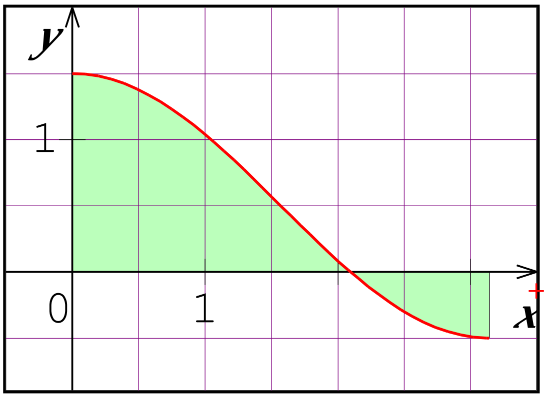
تمرين 7: نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;\pi]$ بـِ $f(x)=\frac{1}{2}+\cos x$

1. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم حدد حسب قيم x إشارة $f(x)$.
2. أرسم تمثيلها البياني (C) في معلم متعامد و متجانس.
3. أحسب A مساحة الحيز المحدد بالمنحني (C) و بالمستقيمات التي معادلاتها $x=0$ ، $x=\pi$ و $y=0$.

الحل:

1.للدالة f نفس اتجاه تغير الدالة $x\mapsto\cos x$ فهي إذن متناقصة تماما على المجال $[0;\pi]$.

لدينا $f(0)=\frac{3}{2}$ و $f(\pi)=-\frac{1}{2}$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة تقبل المعادلة $f(x)=0$ حلا وحيدا في $[0;\pi]$ تعني $f(x)=0$ $x=\frac{2\pi}{3}$. نستنتج أنه من أجل كل x من $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$ ، $f(x)\geq 0$



و من أجل كل x من $\left[\frac{2\pi}{3};\pi\right]$، $f(x)\le 0$.

2.أنظر الشكل المقابل.

3.لدينا $A=A_1+A_2$ حيث $A_1=\int_0^{\frac{2\pi}{3}} f(x)dx$

و $A_2=\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} -f(x)dx$. π

$A_1=\left[\frac{1}{2}x+\sin x\right]_0^{\frac{2\pi}{3}}=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}u.a$ و $A_1=-\left[\frac{1}{2}x+\sin x\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}=-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}u.a$

و منه $A=\left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)u.a$.

I . توظيف الحساب التكاملي لحساب دوال أصلية

1.المكاملة بالتجزئة

مبرهنة: لتكن u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I بحيث أن الدالتين المشتقتين u' و v' مستمرتان على I.

من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I لدينا:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=\left[u(x)v(x)\right]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx$$

البرهان: الدالتان u و v قابلتان للاشتقاق على I و منه الدالة الجداء uv قابلة للاشتقاق على I و لدينا $(uv)'=u'v+uv'$. الدالتان u و v قابلتان للاشتقاق على I فهما إذن مستمرتان على I. لدينا كذلك الدالتان u' و v' مستمرتان على I و منه الدوال $u'v$، uv' و مجموعهما $(uv)'$ مستمرة على I. بحساب التكامل من a إلى b نحصل على: $\int_a^b [u'(x)v(x)+u(x)v'(x)]dx=\int_a^b (uv)'(x)dx$ و باستعمال خواص الخطية نجد:

$\int_a^b u(x)v'(x)dx+\int_a^b u'(x)v(x)dx=\int_a^b (uv)'(x)dx$ و علما أن الدالة uv دالة أصلية للدالة $(uv)'$ فإن

$\int_a^b u(x)v'(x)dx+\int_a^b u'(x)v(x)dx=\left[u(x)v(x)\right]_a^b$ و هكذا نصل إلى النتيجة:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=\left[u(x)v(x)\right]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx$$

2. الدالة الأصلية لدالة و التي تنعدم من أجل قيمة

مبرهنة: f دالة مستمرة على مجال I و a عدد حقيقي من I.

الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على I و التي تنعدم من أجل a هي الدالة $F:x\mapsto\int_a^x f(t)dt$

البرهان: نضع $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ و منه إذا كانت G دالة أصلية للدالة f على المجال I يكون لدينا:

من أجل كل x من I، $F(x)=G(x)-G(a)$ و بالتالي: من أجل كل x من I، $F'(x)=G'(x)=f(x)$

نستنتج أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على المجال I. بالإضافة إلى ذلك لدينا: $F(a)=G(a)-G(a)=0$.

إذن الدالة F هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على I و التي تنعدم من أجل a.

ملاحظة: من الواضح أنه إذا كانت $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ فإن $F'(x)=f(x)$.

مثال: نعلم أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $(\ln)'(x)=\frac{1}{x}$ كما نعلم أن $\ln(1)=0$ و بالتالي لدينا:

من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $\ln x=\int_1^x\frac{1}{t}dt$.

تمرين 1: باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب:

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{3}}x\sin x\,dx \quad \text{و} \quad I=\int_0^1(x-1)e^x\,dx$$

طريقة: لاستعمال المكاملة بالتجزئة نكتب f على الشكل $u\times v'$.

الحل:

1. نضع $u(x)=x-1$ ، $v'(x)=e^x$ و منه $u'(x)=1$ ، $v(x)=e^x$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا: $I=\left[(x-1)e^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x\,dx$

و منه $I=1-\left[e^x\right]_0^1=1-(e-1)=-e$. إذن $I=-e$.

ملاحظة: كان بالإمكان وضع $u(x)=e^x$ ، $v'(x)=x-1$ و من تم $u(x)=e^x$ ، $v(x)=\frac{1}{2}x^2-x$

إلا أننا بعد التعويض نحصل على تكامل أكثر تعقيدا من الأول.

2. نضع $u(x)=x$ ، $v'(x)=\sin x$ و منه $u'(x)=1$ ، $v(x)=-\cos x$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا: $J=[-x\cos x]_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}-\cos x\,dx$

و منه $J=-\frac{\pi}{6}+[\sin x]_0^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$. إذن $J=-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

تمرين 2: عين، باستعمال المكاملة بالتجزئة، الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ و التي تنعدم عند 1.

طريقة: يمكننا دائما وضع $u(x)=u(x)v'(x)$ حيث $v'(x)=1$.

الحل:

الدالة $x\mapsto \ln x$ مستمرة على المجال $]0;+\infty[$. و بالتالي فدالتها الأصلية التي تنعدم عند 1 هي الدالة F المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ $F(x)=\int_1^x \ln(t)dt$.

نضع $u(t)=\ln(t)$ ، $v'(t)=1$ و منه $u'(t)=\frac{1}{t}$ ، $v(t)=t$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا: $F(x)=[t\ln t]_1^x-\int_1^x\frac{1}{t}\times t\,dt=x\ln x-\int_1^x dt$

و منه $F(x)=x\ln x-[t]_1^x=x\ln x-(x-1)=x\ln x-x+1$

الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ هي الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ $F(x)=x\ln x-x+1$.

ملاحظة: الدوال الأصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ على المجال $]0;+\infty[$ هي الدوال $x\mapsto x\ln x-x+c$ حيث $c\in\mathbb{R}$

و بصفة عامة نثبت بإتباع نفس الطريقة أن الدوال الأصلية للدالة $x\mapsto \ln(x+a)$ على المجال $]-a;+\infty[$ هي الدوال $x\mapsto (x+a)\ln(x+a)-x+c$ مع c عدد حقيقي ثابت

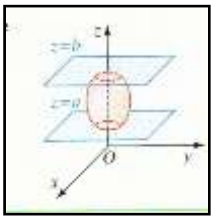
بعض تطبيقات الحساب التكاملي

1. حساب حجوم بعض المجسمات البسيطة

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد $(O;I,J,K)$ محاوره $(x'x)$، $(y'y)$ و $(z'z)$.

وحدة الحجوم (uv) هي حجم متوازي المستطيلات المنشأ على $(O;I,J,K)$.

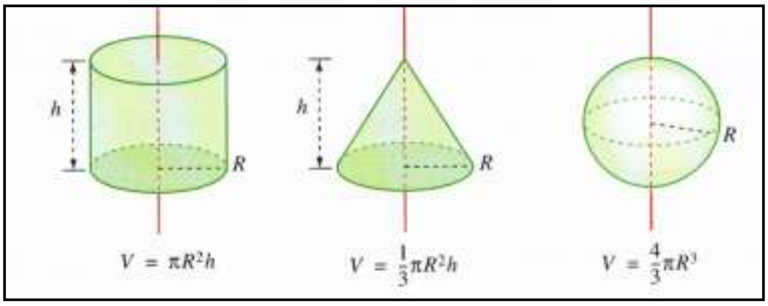
نعتبر في الفضاء مجسما محددا بمستويين موازيين للمستوي (xOy) معادلتاهما: $z=a$ و $z=b$ $(a<b)$.



خاصية1: لتكن $S(z)$ مساحة مقطع المجسم بمستو مواز للمستوي (xOy) راقمه z حيث $a<z<b$.

نقبل أن حجم المجسم بوحدة الحجوم هو العدد الحقيقي V حيث: $V=\int_a^b S(z)dz$

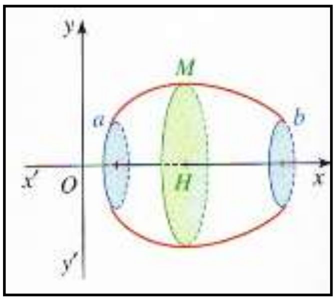
أمثلة:



لدينا في الشكل المقابل كل من:

- حجم الكرة.
- حجم المخروط الدوراني.
- حجم الاسطوانة الدورانية.

حالة خاصة: حجم مجسم دوراني محوره $(x'x)$



ليكن (C) المنحني الممثل لدالة f موجبة على مجال $[a;b]$. دوران المنحني (C) حول المحور $(x'x)$ يولد مساحة دورانية محورها $(x'x)$ التي بدورها تحدد مجسما دورانيا محوره $(x'x)$. لتكن $M(x;f(x))$ نقطة من المنحني (C).

مقطع المجسم الناتج عن دوران المنحني (C) حول المحور $(x'x)$ بمستو مار من M وعمودي على $(x'x)$ هو قرص مساحته $\pi\times HM^2$ أي $\pi\times[f(x)]^2$.

خاصية2: حجم مجسم مولد بالدوران حول المحور $(x'x)$ لمنحن (C) ممثل لدالة f مستمرة و موجبة على مجال $[a;b]$ هو العدد الحقيقي V حيث: $V=\int_a^b \pi[f(x)]^2dx$

2. المسافة المقطوعة على مستقيم

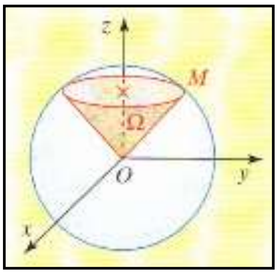
نرمز بـ $x(t)$ إلى المسافة المقطوعة من قبل نقطة متحركة عند اللحظة t. تعرف السرعة اللحظية $v(t)$ لهذه النقطة المتحركة عند اللحظة t بالعلاقة: $v(t)=\frac{dx}{dt}=x'(t)$ أي $dx=v(t)dt$.

خاصية: المسافة المقطوعة من قبل نقطة متحركة بين اللحظتين t_1 و t_2 $(t_1<t_2)$ سرعتها اللحظية $v(t)$ هي:

$$x=\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$

تمرين 3: برهن أن حجم كرة نصف قطرها R هو: $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

الحل:



نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;I,J,K)$ محاوره $(x'x)$، $(y'y)$ و $(z'z)$ الكرة التي مركزها O و نصف قطرها R.

مقطع هذه الكرة بمستو مواز للمستوي (xOy) و راقمه z حيث $-R<z<R$ هي دائرة مركزها $\Omega(0;0;z)$ و نصف قطرها $r=\Omega M$ مع $OM=R$.

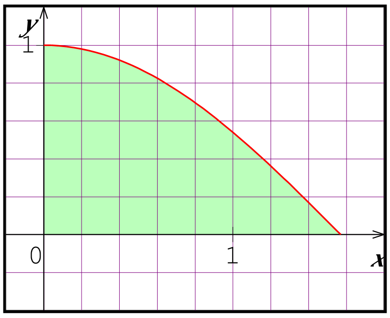
لدينا في المثلث القائم $O\Omega M$: $r^2=R^2-z^2$ و منه مساحة القرص الذي مركزه Ω و نصف قطره R هي: $S(z)=\pi\left(R^2-z^2\right)$. الحجم هو إذن: $V=\int_{-R}^{R}S(z)dz=\int_{-R}^{R}\pi\left(R^2-z^2\right)dz$ و بالتالي:

$V=\pi\left[R^2z-\frac{1}{3}z^3\right]_{-R}^{R}=\pi\left[\left(R^3-\frac{1}{3}R^3\right)-\left(-R^3+\frac{1}{3}R^3\right)\right]$ و منه $V=\frac{4}{3}\pi R^3\,u.v$.

تمرين 4: ليكن (C) التمثيل البياني للدالة $f:x\mapsto\cos x$ على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

1. أحسب a مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) و محور الفواصل $(x'x)$.
2. أحسب v الحجم المولد بدوران المنحني (C) حول محور الفواصل $(x'x)$.

الحل: نلاحظ أن الدالة f موجبة على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.



1. $a=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$ إذن $a=1u.a$

2. $v=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\pi\left[f(x)\right]^2dx=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2x\,dx$ $\quad\frac{\pi}{2}$

نعلم أن $\cos^2x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ و منه دالة أصلية للدالة $x\mapsto\cos^2x$ هي الدالة $x\mapsto\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)$ على $\mathbb{R}$

و هكذا نجد $v=\pi\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{\pi^2}{4}$. و منه $v=\frac{1}{4}\pi^2u.v$.

تمرين 5: من أجل $t>0$، سرعة نقطة متحركة هي: $V(t)=2t+e^t\left(m.s^{-1}\right)$

أحسب x المسافة المقطوعة من قبل هذه النقطة المتحركة بين اللحظتين $t_1=1s$ و $t_2=2s$.

الحل: نعلم أن $x=\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$ و منه $x=\int_1^2 (2t+e^t)dt$. دالة أصلية للدالة $t\mapsto 2t+e^t$ على $\mathbb{R}$ هي الدالة $t\mapsto t^2+e^t$

و منه $x=\left[t^2+e^t\right]_1^2=(4+e^2)-(1+e)=e^2-e+3$.

إذن المسافة المقطوعة بين اللحظتين $t_1=1s$ و $t_2=2s$ هي $(e^2-e+3)m$.

3. مساحة حيز محدد بمنحنيين

نتيجة: إذا كانت f و g دالتين مستمرتين على مجال $[a;b]$ بحيث من أجل كل x من $[a;b]$، $f(x)\geq g(x)$

فإن مساحة الحيز (D) المحدد بالمنحنيين (C_f)، (C_g) و بالمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$ هي:

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$$

تطبيق: نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=x-\frac{\ln x}{x}$

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$ حيث وحدة الطول هي $2cm$.

1. أدرس تغيرات الدالة f محددا نهايتيها عند 0 و عند $+\infty$.
2. بين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.
3. أدرس الأوضاع النسبية للمنحنيين (C_f) و (Δ).
4. أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المحدد بـ (C_f)، (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=\frac{1}{e}$ و $x=e$

المعادلات التفاضلية

حل معادلات تفاضلية من الشكل $y'=f(x)$ و $y''=f(x)$.

1. تذكير: معادلة تفاضلية هي معادلة:

1. المجهول فيها دالة غالبا ما نرمز إليها بالرمز y، z أو حرف آخر.
2. تظهر فيها بعض مشتقات y (المشتقة الأولى y' أو مشتقات من رتبة أكبر y'' ...).
3. نسمي حلا لمعادلة تفاضلية (E) في مجال I كل دالة φ تحقق (E) في I.

مثال: الدالة $y:x\mapsto 1+\sin x$ هي حل في $\mathbb{R}$ للمعادلة التفاضلية: $y'=\cos x$.

2. المعادلات التفاضلية من الشكل $y'=f(x)$

مبرهنة: إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I و كانت F دالة أصلية لها على I فإن حلول المعادلة التفاضلية $y'=f(x)$ هي الدوال y حيث: $y=F(x)+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

البرهان: من الواضح أن الدوال y التي تحقق $y'=f(x)$ هي الدوال الأصلية للدالة f على I و منه إذا كان F دالة أصلية لـِ f على I فإن كل الدوال الأصلية لـِ f على I هي الدوال $x\mapsto F(x)+c$ حيث c عدد حقيقي.

مثال: حلول المعادلة التفاضلية $y'=\frac{1}{x^2}$ في $]0;+\infty[$ هي الدوال y حيث: $y=-\frac{1}{x}+c$ مع c ثابت حقيقي.

3. المعادلات التفاضلية من الشكل $y''=f(x)$

مبرهنة: إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I و إذا كانت F دالة أصلية لها على I و كانت G دالة أصلية للدالة F على I فإن حلول المعادلة التفاضلية $y''=f(x)$ هي الدوال y حيث: $y=G(x)+c_1x+c_2$ مع c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان.

البرهان: نعلم أن $y''=(y')'$ و منه $y''=f(x)$ تعني $(y')'=f(x)$ أي $y'=F(x)+c_1$ حيث: F دالة أصلية للدالة f على I و c_1 عدد حقيقي ثابت. لدينا من جهة ثانية: $y'=F(x)+c_1$ تعني $y=G(x)+c_1x+c_2$ حيث G دالة أصلية للدالة F على I. c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان.
(الدالة F قابلة للاشتقاق على I فهي إذن مستمرة على هذا المجال و بالتالي فهي تقبل دوال أصلية على I)

مثال: حلول المعادلة التفاضلية $y''=\sin x$ في $\mathbb{R}$ هي الدوال y حيث: $y=-\sin x+ax+b$. a، b ثابتان.

4. المعادلات التفاضلية من الشكل $y''=-\omega^2 y$

مبرهنة (دون برهان): إذا كان ω عددا حقيقيا غير معدوم فإن حلول المعادلة التفاضلية $y''=-\omega^2 y$ هي الدوال y حيث: $y=c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x$ مع c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان.

ملاحظة: يمكننا ان نتأكد من أن الدوال y حيث: $y=c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x$ ، مع c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان، حلول للمعادلة التفاضلية $y''=-\omega^2 y$ و ذلك باشتقاق الدالة y مرتين.

مثال: حلول المعادلة التفاضلية $y''=-2y$ في $\mathbb{R}$ هي الدوال y حيث: $y=c_1\cos\left(x\sqrt{2}\right)+c_2\sin\left(x\sqrt{2}\right)$ مع c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان.

ملخص لحل معادلات تفاضلية من الشكل $y'=f(x)$ و $y''=f(x)$ و $y'=ay+b$ و $y''=-w^2y$

المعادلة التفاضلية	مجموعة حلول المعادلة
$y'=f(x)$	$y=F(x)+c$ حيث F دالة أصلية للدالة f مع c عدد حقيقي كيفي
$y''=f(x)$	$y=G(x)+c_1x+c_2$ حيث G دالة أصلية للدالة F و F دالة أصلية للدالة f مع c_1 و c_2 أعداد حقيقية ثابتة
$y'=ay+b$ / $a\neq 0$	$y=\lambda e^{ax}-\frac{b}{a}$ حيث λ عدد حقيقي ثابت كيفي
$y''=-\omega^2 y$ / $\omega\neq 0$	$y=c_1\cos\ \omega x\ +c_2\sin\ \omega x$ مع c_1 و c_2 أعداد حقيقية ثابتة

أمثلة:

1/حلول المعادلة $y'=2x^2+x-1$ في $\mathbb{R}$ هي الدوال y حيث: $y(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x+c$ مع c عدد حقيقي ثابت

2/حلول المعادلة $y''=3\sin 2x$ في $\mathbb{R}$ هي الدوال y حيث: $y(x)=-\frac{3}{4}\sin 2x+c_1x+c_2$ مع c_1 و c_2 أعداد حقيقية ثابتة

3/حلول المعادلة $y''+y=0$ في $\mathbb{R}$ هي الدوال y حيث: $y(x)=c_1\cos -x+c_2\sin -x$ مع c_1 و c_2 أعداد حقيقية ثابتة

5. تمارين

تمرين 1:

1. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية (E) $y'=3x^2-2x+5$.
2. عين F حل المعادلة التفاضلية (E) بحيث: $F(1)=-2$.

الحل:

1. دالة أصلية للدالة $x\mapsto 3x^2-2x+5$ هي الدالة $x\mapsto x^3-x^2+5x$ و بالتالي فإن حلول المعادلة (E) هي الدوال y حيث: $y=x^3-x^2+5x+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.
2. لدينا $F(x)=x^3-x^2+5x+c$ و $F(1)=-2$ و منه $1^3-1^2+5\times1+c=-2$ أي $c=-7$.

إذن الحل F الذي يحقق الشرط $F(1)=-2$ هي الدالة F حيث: $F(x)=x^3-x^2+5x-7$.

تمرين 2: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية (E) $y''=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

الحل:

دالة أصلية للدالة $x\mapsto 2\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ هي الدالة $x\mapsto \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ و دالة أصلية للدالة $x\mapsto \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ هي الدالة $x\mapsto -\frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ بالتالي فإن حلول المعادلة (E) هي الدوال y حيث: $y=-\frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+c_1x+c_2$ مع c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان.

تمرين 3: نعتبر في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية (E) $y''+\pi^2y=0$.

1. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية (E).
2. عين الحل F الذي يحقق الشرطين: $F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}$ و $F'\left(\frac{2}{3}\right)=0$.

الحل:

1. نلاحظ أولا أن $y''+\pi^2y=0$ تعني $y''=-\pi^2y$ و منه فإن حلول المعادلة التفاضلية $y''=-\pi^2y$ هي الدوال y حيث: $y=c_1\cos\pi x+c_2\sin\pi x$ مع c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان.
2. لدينا: $F(x)=c_1\cos\pi x+c_2\sin\pi x$ و $F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}$ و $F'\left(\frac{2}{3}\right)=0$.

لدينا: $F'(x)=-\pi c_1\sin\pi x+\pi c_2\cos\pi x$ و بالتالي:

$\begin{cases} F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3} \\ F'\left(\frac{2}{3}\right)=0 \end{cases}$ يعني $\begin{cases} c_1\cos\frac{\pi}{2}+c_2\sin\frac{\pi}{2}=\frac{2}{3} \\ -\pi c_1\sin\frac{2\pi}{3}+\pi c_2\cos\frac{2\pi}{3}=0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} c_2=\frac{2}{3} \\ -\pi c_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\pi c_2\left(-\frac{1}{2}\right)=0 \end{cases}$

إذن $\begin{cases} c_2=\frac{2}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}c_1+\frac{1}{2}c_2=0 \end{cases}$ ومنه $c_2=\frac{2}{3}$ و $c_1=-\frac{2}{3\sqrt{3}}$. نجد هكذا: $F(x)=-\frac{2}{3\sqrt{3}}\cos\pi x+\frac{2}{3}\sin\pi x$

تمارين محور الدوال الأصلية و الحساب التكاملي الواردة في شهادة البكالوريا

شعبة علوم تجريبية

التمرين01: بكالوريا شعبة علوم 2008 ـ الموضوع الأول

g الدالة العددية المعرفة على المجال $[-2;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=(-x-1)e^{-x}+1$.

1) H الدالة العددية المعرفة على المجال $[-2;+\infty[$ كما يلي : $H(x)=(\alpha x+\beta)e^{-x}$ حيث α و β عددان حقيقيان .

أ ـ عيّن α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة : $x\mapsto g(x)-1$.

ب ـ استنتج الدالة الأصلية للدالة g و التي تنعدم عند القيمة 0.

التمرين02: بكالوريا شعبة علوم 2008 ـ الموضوع الثاني

f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$.

1) أكتب $f(x)$ على الشكل $f(x)=x+a+\frac{b}{(x-1)^2}$ حيث a و b عددان حقيقيان .

2) عيّن F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ و التي تحقق $F(1)=2$.

التمرين03: بكالوريا شعبة علوم 2009 ـ الموضوع الأول

k الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي : $k(x)=|x|+\frac{4}{x+1}$ ، (C_k) تمثيلها البياني .

1) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_k) و المستقيمات التي معادلاتها : $y=0$ ، $x=\frac{1}{2}$ ، $x=-\frac{1}{2}$.

التمرين04: بكالوريا شعبة علوم 2009 ـ الموضوع الثاني

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x-1-\frac{\ln(x+1)}{x+1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني .

1) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $y=x-1$ ، $x=0$ و $x=1$.

التمرين05: بكالوريا شعبة علوم 2011 ـ الموضوع الأول

g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $g(x)=\frac{x-1}{x+1}$ ، و f الدالة المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{x-1}{x+1}+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

1) α عدد حقيقي .

بيّن أن الدالة $x\mapsto(x-\alpha)\ln(x-\alpha)-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln(x-\alpha)$ على المجال $]\alpha;+\infty[$.

2) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ ، $g(x)=1-\frac{2}{x+1}$ ثم عيّن دالة أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$.

التمرين06: بكالوريا شعبة علوم 2011 ـ الموضوع الثاني

f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^x-ex-1$. (C_f) تمثيلها البياني .

1) أحسب بدلالة α ، المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) ، حامل محور الفواصل و المستقيمين الذين

معادلتيهما: $x=0$ ، $x=\alpha$. ($\alpha\in]1,75;1,76[$ و يحقق $f(\alpha)=0$)

2) أثبت أن : ua $A(\alpha)=\left(\frac{1}{2}e\alpha^2-e\alpha+\alpha\right)$ (ua هي وحدة المساحات)

التمرين07: بكالوريا شعبة علوم 2012 ـ الموضوع الأول

f الدالة المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ كما يلي : $f(x)=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ ، (C_f) تمثيلها البياني .

لتكن g الدالة المعرّفة على $]-\infty;0[$ كما يلي : $g(x)=\frac{x^2}{2}+5x+6x\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$.

بيّن أن g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0[$.

التمرين08: بكالوريا شعبة علوم 2012 ـ الموضوع الثاني

g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1-xe^x$.

1) h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=(ax+b)e^x$

أ ـ عيّن العددين الحقيقين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$.

ب ـ إستنتج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.

التمرين09: بكالوريا شعبة علوم 2015 ـ الموضوع الأول

f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)$.

F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ و التي تحقق : $F(1)=-3$.

1) بيّن أن منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في نقطتين يطلب تعيين فاصلتيهما.

2) بيّن أن $x\mapsto x\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln x$ على $]0;+\infty[$ ، ثم إستنتج عبارة الدالة F .

التمرين10: بكالوريا شعبة علوم 2015 ـ الموضوع الثاني

f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=xe^{2x+2}-x+1$.

1) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $2f(x)+f'(x)-f''(x)=1-2x-3e^{2x+2}$.

2) إستنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

التمرين11: بكالوريا شعبة علوم 2016 ـ الدورة الأولى ـ الموضوع الأول

f الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{\ln x}{x}+x-1$ ، (C_f) تمثيلها البياني .

1) أ ـ جد دالة أصلية للدالة $x\mapsto\frac{\ln x}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$.

ب ـ أحسب I_n مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) ، المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x-1$ و المستقيمين الذين

معادلتيهما $x=1$ و $x=n$ حيث n عدد طبيعي $(n>1)$.

جـ ـ عيّن أصغر عدد طبيعي n_0 بحيث إذا كان $n>n_0$ فإن : $I_n>2$.

التمرين12: بكالوريا شعبة علوم 2016 ـ الدورة الأولى ـ الموضوع الثاني

f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=-x+(x^2+3x+2)e^{-x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني .

h و H الدالتان المعرّفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=x+f(x)$ و $H(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$.

1) عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث تكون الدالة H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$.

2) أ ـ أحسب التكامل التالي : $A(\lambda)=\int_0^{\lambda} h(x)\,dx$ ، حيث λ عدد حقيقي موجب تماما و فسّر النتيجة هندسيا .

ب ـ أحسب $\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$.

التمرين 13: بكالوريا شعبة علوم 2016 ـ الدورة الثانية ـ الموضوع الأول

f الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{e}{x+1}+\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ ، (C_f) تمثيلها البياني .

1) بيّن أن الدالة $x\mapsto \dfrac{-1}{x+1}[1+\ln(x+1)]$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto \dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ على المجال $]-1;+\infty[$

2) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدّد بحامل محور الفواصل و المنحنى (C_f) و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=0$ و $x=1$.

التمرين14: بكالوريا شعبة علوم 2017 ـ الدورة العادية ـ الموضوع الثاني

f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=2-x^2e^{-x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني .

1) F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $F(x)=2x+(x^2+2x+2)e^{-x}$.

تحقق أن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم أحسب مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) ، حامل محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=1$.

التمرين15: بكالوريا شعبة علوم 2017 ـ الدورة الإستثنائية ـ الموضوع الثاني

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x)=e^{-x}-2-\dfrac{e}{x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني .

(γ) المنحنى الذي معادلته : $y=e^{-x}-2$.

1) ليكن n عددا طبيعيا و $A(n)$ مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنيين (C_f) و (γ) و المستقيمين اللذين معادلتيهما : $x=-e^{n}$ و $x=-e^{n+1}$.

أحسب العدد الحقيقي I حيث : $I=A(0)+A(1)+....+A(2016)$.

التمرين16: بكالوريا شعبة علوم 2018 ـ الموضوع الأول

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=2x+1-xe^{-x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني .

1) باستعمال المكاملة بالتجزئة عيّن دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^{-x}$ و التي تنعدم من أجل $x=1$.

2) أحسب العدد A مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحني (C_f) و المستقيميات التي معادلاتهما : $x=1$ ، $x=3$ و $y=2x+1$.

التمرين17: بكالوريا شعبة علوم 2018 ـ الموضوع الثاني

f الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{1+x\ln x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني .

n عدد طبيعي حيث $n>1$ ، I_n مساحة الحيز من المستوي المحدد بحامل محور الفواصل و المنحنى (C_f) و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=n$.

1) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n>1$: $I_n=\ln(1+n\ln n)$.

2) أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (I_n) .

التمرين18: بكالوريا شعبة علوم 2019 ـ الموضوع الأول

f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;2[\cup]2;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{1}{x-2}+\ln x$. (C_f) تمثيلها البياني .

1) H الدالة المعرّفة على المجال $]3;+\infty[$ بـ : $H(x)=\int_3^x \ln(t)dt$ حيث t متغيّر حقيقي موجب تماما .

أ ـ باستعمال المكاملة بالتجزئة ، عيّن عبارة $H(x)$ بدلالة x .

بـ ـ أحسب A مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين : $x=3$ و $x=4$.

التمرين19: بكالوريا شعبة علوم 2019 ـ الموضوع الثاني

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. تؤخذ وحدة الطول $2cm$.

(C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان للدالتين f و g المعرّفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$f(x)=e^x-\frac{1}{2}ex^2$ و $g(x)=e^x-ex$.

1) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) على $\mathbb{R}$.

2) أحسب بالسنتمتر مربع مساحة الحيز المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) .

التمرين20: بكالوريا شعبة علوم 2022 ـ الموضوع الأول

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\left(\frac{1}{x}-2-\ln x\right)e^{-x}$. (C_f) تمثيلها البياني .

1) F الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $F(x)=e^{-x}(2+\ln x)$.

أ ـ تحقق أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

بـ ـ نضع : $S(\lambda)=\int_\lambda^{1/2} f(x)dx$ حيث λ عدد حقيقي يحقق : $0<\lambda<\frac{1}{2}$.

أحسب $S(\lambda)$ ثم فسر النتيجة بيانيا .

التمرين21: بكالوريا شعبة علوم 2023 ـ الموضوع الأول

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(x-1)(e^{2x}-1)$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة $2cm$)

1) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x+1$.

2) أ ـ باستعمال المكاملة بالتجزئة ، بيّن أن : $\frac{3-2e}{4}=\int_0^{\frac{1}{2}}(x-1)e^{2x}dx$.

بـ ـ استنتج ، بالسنتمتر المربع ، مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها :

$x=0$ ، $x=\frac{1}{2}$ و $y=-x+1$.

التمرين22: بكالوريا شعبة علوم 2023 ـ الموضوع الثاني

f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=((\ln x)^2-3)\ln x$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) حدد إشارة $f(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

2) F الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $F(x)=x((\ln x)^3-3(\ln x)^2+3\ln x-3)$.

أ ـ تحقق أن F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

ب ـ أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما : $x=1$ و $x=e$.

التمرين 23: بكالوريا شعبة علوم 2024 ـ الموضوع الأول ـ

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=-2x+3-xe^{-x+1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)

1) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-2x+3$.

2) أ ـ باستعمال المكاملة بالتجزئة ، بيّن أن : $\int_0^1 xe^{-x+1}dx=e-2$.

ب ـ استنتج بالسنتمتر المربع A مساحة الحيّز المستوي المحدد بـ (C_f) و (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما : $x=0$ و $x=1$.

التمرين 24: بكالوريا شعبة علوم 2024 ـ الموضوع الثاني ـ

f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=-x-\dfrac{\ln x}{x^2}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)

1) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x$.

2) أ ـ أثبت أن الدالة $H:x\mapsto\dfrac{-1-\ln x}{x}$ هي دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto\dfrac{\ln x}{x^2}$ على $]0;+\infty[$.

ب ـ $A(\alpha)$ المساحة بالسنتمتر المربع للحيّز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها: $y=-x$ ، $x=\alpha$ و $x=1$.

بيّن أن : $A(\alpha)=4\left(\alpha^2-\dfrac{1}{\alpha}+1\right)$. (مع $0.7<\alpha<0.71$ و يحقق $f(\alpha)=0$)

شعبة تقني رياضي

التمرين 25: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2009 ـ الموضوع الأول ـ

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x+\dfrac{2}{e^x+1}$. (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=x+\dfrac{2e^{-x}}{e^{-x}+1}$.

2) أحسب $A(\alpha)$ مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $y=x+2$ ، $x=0$ و $x=\alpha$.

بيّن أن $A(\alpha)=2\ln(-\alpha)$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $A(\alpha)$. ($-1.7<\alpha<-1.6$ ويحقق $f(\alpha)=0$)

التمرين 26: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2011 ـ الموضوع الأول ـ

g الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=\dfrac{1+2\ln 2x}{4x^2}$.

1) أ ـ h الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $h(x)=\dfrac{1+\ln 2x}{2x}$. أحسب $h'(x)$.

بـ ـ تحقق أن $g(x)=\frac{\ln 2x}{2x^2}+\frac{1}{4x^2}$ ، ثم استنتج دالة أصلية للدالة g على المجال $]0;+\infty[$.

التمرين 27: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2015 ـ الموضوع الأول

f الدالة المعرّفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x+1+\frac{2}{x+2}\ln(x+2)$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $1cm$)

1) أحسب بالسنتمتر المربع ، مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $y=0$ ، $x=-1$ و $x=1$.

التمرين 28: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2015 ـ الموضوع الثاني

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=2x+3-(x+1)e^x$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ ـ بيّن أن الدالة $x\mapsto xe^x$ هي الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto(x+1)e^x$ على $\mathbb{R}$.

بـ ـ أحسب A مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم $(\Delta): y=2x+3$ و المستقيمين اللذين معادلتيهما : $x=0$ و $x=\alpha$.

جـ ـ جد حصرا للعدد A. $(0.92<\alpha<0.93)$

التمرين 29: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2016 ـ الموضوع الأول

f الدالة المعرَفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=1+(x-1)\ln(x+1)$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) نعتبر الدالة H المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $H(x)=\frac{1}{2}(x^2-2x-3)\ln(x+1)-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x$.

أ ـ بيّن أن H دالة أصلية للدالة $x\mapsto(x-1)\ln(x+1)$ على المجال $]-1;+\infty[$.

بـ ـ أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها : $y=0$ ، $x=1$ و $x=2$.

التمرين 30: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2017 ـ الموضوع الأول

f الدالة العددية المعرّفة على D_f حيث $D_f=]-\infty;1[\cup]2;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=-2x+3+2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّن أن الدالة $h: x\mapsto(x-1)\ln(x-1)-(x-2)\ln(x-2)$ أصلية للدالة $x\mapsto\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$ على المجال $]2;+\infty[$.

ثم أحسب بدلالة β مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها :

$y=-2x+3$ ، $x=\beta$ و $x=3$

التمرين 31: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2017 ـ الموضوع الثاني

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\frac{x^3-6}{x^2+2}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) نرمز بـ S إلى مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $x=\alpha$ ، $x=0$ و $y=0$

أثبت أن : من أجل كل $x\in[\alpha;0]$ ، $-3\le f(x)\le f(\alpha)$ ثم بيّن أن : $\frac{3}{2}\alpha^2\le S\le -3\alpha$.

(حيث : $-1.48<\alpha<-1.47$ و يحقق $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$ و $f'(\alpha)=0$)

التمرين32: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2017 ـ الدورة الإستثنائية ـ الموضوع الأول

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=-\frac{1}{2}x+2+\frac{-1+\ln x}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) ليكن λ عدد حقيقي حيث $1<\lambda\leq e$ ، نرمز بـ $A(\lambda)$ إلى مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما : $x=1$ و $x=\lambda$.

أ ـ أحسب $A(\lambda)$ بدلالة λ .

بـ ـ عيّن قيمة λ حيث : $A(\lambda)=\frac{1}{2}cm^2$.

التمرين33: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2017 ـ الدورة الإستثنائية ـ الموضوع الثاني

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x)=(x+1)(1+2e^{-x})$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) ليكن α عددا حقيقيا موجبا . نرمز بـ $A(\alpha)$ مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $y=x+1$ ، $x=-1$ و $x=\alpha$.

أحسب $A(\alpha)$ بدلالة α ثم $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)$.

التمرين34: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2018 ـ الموضوع الأول

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty;1[$ بـ : $f(x)=\frac{x}{x-1}e^{-x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ ـ بيّن أنه من أجل كل $x\in[-1;0]$ ، $\frac{x}{x-1}\leq f(x)<e^{-x}$.

بـ ـ بيّن أنه من أجل كل $x\in[-1;0]$ ، $\frac{x}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}$ ثم بيّن أن : $1-\ln 2\leq\int_{-1}^{0}f(x)dx<e-1$.

التمرين35: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2019 ـ الموضوع الأول

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x)=(x+2)(e^x-1)$.

g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=(x+3)e^x-1$.

أحسب $f(x)-g(x)$ ، ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

التمرين36: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2019 ـ الموضوع الثاني

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كمايلي : $f(x)=\ln(x+1)+\frac{e\ln x}{x+1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) نقبل أنه من أجل كل من المجال $]1;+\infty[$: $\ln x<x+1$.

أ ـ بيّن أنه من أجل كل من المجال $]1;+\infty[$: $\ln 2<f(x)<e+\ln(x+1)$

بـ ـ تحقق أنه من أجل كل من المجال $]1;+\infty[$ الدالة $x\mapsto(x+1)\ln(x+1)-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln(x+1)$

جـ ـ S مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما : $x=e-1$ و $x=e^2-1$.

باستخدام جواب السؤال أ ، بيّن أن : $(e^2-e)\ln 2<S<e^3$.

التمرين37: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2022 ـ الموضوع الأول

f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=1+(x-1)\ln x$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. الوحدة $2cm$.

1) أ ـ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما ، $f(x)-x=(x-1)(-1+\ln x)$.

بـ ـ أدرس حسب قيم العدد الحقيقي x الموجب تماما إشارة $f(x)-x$.

2) K الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $K(x)=-\frac{3}{4}x^2+2x+\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\ln x$.

أ ـ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما ، $K'(x)=f(x)-x$.

بـ ـ أحسب مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $y=x$ ، $x=1$ و $x=e$.

التمرين38: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2022 ـ الموضوع الثاني

f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=e^{-x}-\frac{x+1}{x^2+1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

(Γ) التمثيل البياني للدالة $x\mapsto e^{-x}$.

1) علما أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[-1;0]$ ، $\frac{1}{2}x+1\le\frac{1}{x^2+1}\le\frac{5}{4(1-x)}$.

أ ـ عيّن حصرا للعدد I حيث : $I=\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^2+1}dx$.

بـ ـ أحسب J حيث : $J=\int_{-1}^{0}\frac{x}{x^2+1}dx$ ، ثم استنتج حصرا لـ A مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (Γ) و المستقيمين

اللذين معادلتاهما : $x=-1$ و $x=0$.

التمرين39: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2023 ـ الموضوع الأول

f الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=(2x+3)\ln(x+1)-3x$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة $2cm$)

1) F الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $F(x)=(x^2+3x+2)\ln(x+1)-2x^2-2x$.

أ ـ تحقق أن F أصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$.

بـ ـ استنتج بالسنتمتر المربع المساحة A للحيز المستوي المحدد بـ (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $y=0$ ،

$x=\alpha$ و $x=0$.

جـ ـ تحقق أن $A=(6\alpha^2+4\alpha)\,cm^2$.

(α العدد الحقيقي حيث $-0.72<\alpha<-0.71$ و يحقق $g(\alpha)=0$ مع $g(x)=2\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}$)

التمرين40: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2023 ـ الموضوع الثاني

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=-x+4+(2x-3)e^x$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x+4$.

2) F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $F(x)=(-2x+5)e^x$.

أ ـ تحقق أن F أصلية للدالة $x\mapsto(-2x+3)e^x$ على $\mathbb{R}$.

بـ ـ استنتج مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $y=-x+4$ ، $x=-1$ و $x=0$.

التمرين 41: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2024 ـ الموضوع الأول ـ

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=-x+(x+1)e^{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)

1) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x$.

2) أ ـ باستعمال المكاملة بالتجزئة ، بيّن أن : $\int_{-1}^{0} xe^{x}dx=\frac{2}{e}-1$.

بـ ـ استنتج بالسنتمتر المربع، A مساحة الحيّز المستوي المحدد بـ (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $y=-x$ ، $x=-1$ و $x=0$.

التمرين 42: بكالوريا شعبة تقني رياضي 2024 ـ الموضوع الثاني ـ

f الدالة المعرفة على $]-2;+\infty[$ بـ : $f(x)=\left(\frac{x+1}{x+2}\right)(-1+\ln(x+2))$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)

1) h الدالة المعرفة على $]-2;+\infty[$ بـ : $h(x)=-1+\ln(x+2)$. (C_h) منحناها البياني .

أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_h) و (C_f) .

2) بيّن أن : $\int_{-1}^{e-2}\frac{\ln(x+2)}{x+2}dx=\frac{1}{2}$ ثم أحسب بالسنتمتر المربع ، A مساحة الحيّز المحدد بالمنحنيين (C_h) و (C_f) و المستقيمين ذوي المعادلتين : $x=-1$ و $x=e-2$.

شعبة رياضيات

التمرين 43: بكالوريا شعبة رياضيات 2011 ـ الموضوع الأول ـ

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=(3x+4)e^{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ ـ x عدد حقيقي من المجال $]-\infty;0]$ ، باستعمال المكاملة بالتجزئة جد $\int_{-1}^{x} te^{t}dt$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0]$.

بـ ـ λ عدد حقيقي أصغر تماما من $-\frac{4}{3}$.

أحسب بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $y=0$ ، $x=-\frac{4}{3}$ و $x=\lambda$

ثم جد $\lim_{\lambda\to-\infty} A(\lambda)$.

التمرين 44: بكالوريا شعبة رياضيات 2011 ـ الموضوع الثاني ـ

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\left(1-\frac{1}{x^{2}}\right)\ln x$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

(δ) المنحنى الممثل للدالة $x\mapsto \ln x$ على المجال $]0;+\infty[$.

1) أ ـ x عدد حقيقي من المجال $[1;+\infty[$ ، باستعمال التكامل بالتجزئة جد $\int_1^x \frac{1}{t^2}\ln t\,dt$.

ـ تحقق أن $x \mapsto x\ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على المجال $[1;+\infty[$.

ـ استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $[1;+\infty[$.

ب ـ α عدد حقيقي أكبر تماما من 1 .

أحسب بدلالة α المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (δ) و المستقيمين الذين معادلتاهما : $x=1$ و $x=\alpha$.

ثم أحسب $\lim_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)$.

التمرين 45: بكالوريا شعبة رياضيات 2013 ـ الموضوع الأول

f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=e^x-ex+\frac{\ln x}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمين الذين معادلتاهما : $x=\frac{1}{2}$ و $x=2$.

التمرين 46: بكالوريا شعبة رياضيات 2013 ـ الموضوع الثاني

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x-(x+1)^2e^{-x}$.

و (C_f) منحنى الدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)

1) الدالة H معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $H(x)=(-x^2-4x-5)e^{-x}$.

أ ـ بيّن أن H دالة أصلية للدالة $x\mapsto (x+1)^2e^{-x}$ على $\mathbb{R}$.

ب ـ أحسب بالسنتمتر المربع ، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم $(\Delta): y=x$ و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=-1$ و $x=0$.

التمرين 47: بكالوريا شعبة رياضيات 2014 ـ الموضوع الأول

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}$.

و (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) λ عدد حقيقي أكبر أو يساوي 1 .

أ ـ أحسب بدلالة λ العدد $A(\lambda)$ حيث : $A(\lambda)=\int_1^{\lambda}[f(x)-1]dx$.

ب ـ أحسب $\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$.

التمرين 48: بكالوريا شعبة رياضيات 2014 ـ الموضوع الثاني

f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=(1+2\ln x)(-1+\ln x)$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

g الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=1-\ln x$. (C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

1) عيّن الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) .

2) نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $h(x)=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x$.

أ ـ أحسب $h'(x)$ و استنتج دالة أصلية للدالة $x \mapsto (\ln x)^2$ على المجال $]0;+\infty[$.

بــ أحسب العدد : $\int_{\frac{1}{e}}^{e}[f(x)-g(x)]dx$.

التمرين49: بكالوريا شعبة رياضيات 2015 ـ الموضوع الأول

f الدالة المعرّفة بـ: $f(0)=1$ ، و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f(x)=1-x^2\ln x$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

α العدد الحقيقي الذي يحقق : $1.531<\alpha<1.532$ و $f(\alpha)=0$.

g الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=f(|x|)$. (C_g) المنحنى الممثل للدالة g في نفس المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) باستعمال المكاملة بالتجزئة ، عيّن الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto x^2\ln x$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ و التي تنعدم من أجل القيمة 1 .

2) t عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $]0;\alpha]$. نضع $F(t)=\int_t^{\alpha} f(x)dx$.

أ ـ أكتب العبارة $F(t)$ بدلالة t و α .

بــ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي t من المجال $]0;\alpha]$ ، $F(t)=\dfrac{-3tf(t)-t^3-6t+\alpha^3+6\alpha}{9}$.

جــ أحسب $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ >}} F(t)$.

3) m عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $]0;\alpha]$.

$S(m)$ مساحة الدائرة ذات المركز المبدأ O و نصف القطر m .

نفرض أن مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_g) ، حامل محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتيهما : $x=-\alpha$ و $x=\alpha$ ، هي A حيث $A=\dfrac{2}{9}(\alpha^3+6\alpha)\ ua$. (ua وحدة المساحات) .

أ ـ عيّن القيمة المضبوطة للعدد m حتى يكون $S(m)=2A$.

بــ علما أن $3.140<\pi<3.142$ ، أعط حصرا للعدد m .

التمرين50: بكالوريا شعبة رياضيات 2016 ـ الموضوع الأول

f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=-x+\dfrac{3+2\ln x}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $u_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}[f(x)+x]dx$.

1) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n>0$.

2) أعط تفسيرا هندسيا للعدد u_0 .

3) أحسب u_n بدلالة n .

4) نضع : $S_n=u_0+u_1+....+u_n$. أحسب S_n بدلالة n .

التمرين51: بكالوريا شعبة رياضيات 2016 ـ الموضوع الثاني

f و g الدالتان المعرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=(2x-1)e^{-x+1}$ و $g(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$.

(C_f) و (C_g) تمثيلاهما البيانيان في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ ـ باستعمال المكاملة بالتجزئة ، أحسب بدلالة العدد الحقيقي x : $\int_1^x f(t)dt$.

بـ ـ أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) و المستقيمين اللذين معادلتيهما : $x=1$ و $x=2$.

التمرين52: بكالوريا شعبة رياضيات 2017 ـ الموضوع الثاني

f الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+1}{x-\ln x} & ; \quad x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) لتكن الدالة h المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $h(x)=x-\ln x$.

بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما ، $h(x)>0$.

2) لتكن الدالة F المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $F(x)=\int_1^x f(t)dt$.

أ ـ بيّن أن : من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x\geq 1$ ، $1+\frac{1}{x}\leq f(x)\leq f(\alpha)$. (نقبل أن الدالة f متزايدة على المجال $[1;\alpha]$)

(α العدد الحقيقي الذي يحقق $1.76<\alpha<1.77$ و $f'(\alpha)=0$)

بـ ـ أعط تفسيرا هندسيا للعدد $F(e)$ ثم استنتج حصرا له .

التمرين53: بكالوريا شعبة رياضيات 2017 ـ الدورة الإستثنائية الموضوع الأول

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $f(x)=\frac{1}{2}\left(-x+e-\frac{\ln(x^2)}{x}\right)$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-\frac{1}{2}x+\frac{e}{2}$.

2) نرمز بـ $A(\alpha)$ إلى مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $x=\alpha$ ، $x=1$ و $x+2y=e$.

تحقق أن : $A(\alpha)=\frac{1}{2}(\ln\alpha)^2\ cm^2$. (α العدد الحقيقي الذي يحقق $2<\alpha<2.1$ و $f(\alpha)=0$)

التمرين54: بكالوريا شعبة رياضيات 2017 ـ الدورة الإستثنائية الموضوع الثاني

المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\|=1cm$

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x)=(x+1)^2e^{-x}$ و (C) تمثيلها البياني

ليكن m وسيط حقيقي ، نعتبر الدالة f_m المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f_m(x)=(x^2+mx+1)e^{-x}$.

و ليكن (C_m) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

1) أدرس حسب قيم الوسيط m حيث $m\neq 2$ الوضعية النسبية للمنحنيين (C) و (C_m) .

2) أحسب بدلالة العدد الحقيقي الموجب تماما α ، $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C) و (C_3) و المستقيمين اللذين معادلتيهما : $x=0$ و $x=\alpha$ ثم أحسب $\lim_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)$.

التمرين55: بكالوريا شعبة رياضيات 2018 ـ الموضوع الأول

f الدالة العددية المعرّفة على $[0;1[\cup]1;+\infty[$ بـ : $\begin{cases} f(x)=x+1-\dfrac{1}{\ln x} & ; \quad x\in\mathbb{R}_+^*-\{1\} \\ f(0)=1 \end{cases}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) h الدالة العددية المعرّفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ : $h(x)=1-x+x\ln x$.

أ ـ بيّن أنّ الدالة h متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$ و استنتج إشارة $h(x)$ على المجال $[1;+\infty[$.

بـ ـ بيّن أنه من أجل كل $x>1$: $\dfrac{h(x)}{x\ln x}=f(x)-x+\dfrac{1}{x\ln x}$ ، واستنتج أنه من أجل كل $x>1$:

$x-\dfrac{1}{x\ln x}<f(x)<x+1$.

2) A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمين الذين معادلاتيهما : $x=\alpha$ و $x=e$.

بيّن أن : $\dfrac{1}{2}(e-\alpha)(e+\alpha+2)>A>\dfrac{1}{2}(e^2-\alpha^2)-\ln(\alpha+1)$.(α العدد الحقيقي الذي يحقق $1.49<\alpha<1.5$ و $f(\alpha)=0$)

التمرين 56: بكالوريا شعبة رياضيات 2019 ـ الموضوع الأول

f الدالة العددية المعرّفة على $[0;+\infty[$ بـ : $\begin{cases} f(x)=x-x^2\ln x \quad ; \quad x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. الوحدة $3cm$.

1) λ عدد حقيقي حيث : $0<\lambda<1$ ، نعتبر : $A(\lambda)=\int_{\lambda}^{1}-x^2\ln x\,dx$.

أ ـ باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب $A(\lambda)$ بدلالة λ .

بـ ـ أحسب $\lim\limits_{\substack{\lambda\to0 \\ >}}A(\lambda)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا .

التمرين 57: بكالوريا شعبة رياضيات 2019 ـ الموضوع الثاني

f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(x+1)^2e^{-2x}$.

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=(x+1)e^{-2x}$.

أ ـ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $g'(x)+2g(x)-e^{-2x}=0$ ثم استنتج دالة أصلية لـ g على $\mathbb{R}$.

بـ ـ باستعمال المكاملة بالتجزئة ، أحسب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و محور الفواصل و المستقيمين الذين معادلتيهما : $x=-1$ و $x=0$.

التمرين 58: بكالوريا شعبة رياضيات 2022 ـ الموضوع الثاني

f الدالة العددية المعرفة و الموجبة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{ax}{x+b}+\ln(x+b)$.

حيث a و b عددان حقيقيان مع b موجب تماما . تمثيلها البياني (C) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ يقبل محور الفواصل مماسا له في النقطة O .

1) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$ ، $f(x)=-1+\dfrac{1}{x+1}+\ln(x+1)$.

2) g الدالة العددية المعرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=(x+1)\ln(x+1)$.

أحسب $g'(x)$ ، ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$.

3) (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_n=\int_{n-1}^{n}f(x)dx$.

أ ـ أحسب u_{2022} ، ثم فسر النتيجة بيانيا .

بـ ـ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n=-2+(n+2)\ln(n+1)-(n+1)\ln n$.

جـ ـ أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين59: بكالوريا شعبة رياضيات 2023 ـ الموضوع الأول

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x+1-3xe^{2x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة $2cm$)

1) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x+1$.

2) أ ـ باستعمال المكاملة بالتجزئة ، أحسب العدد الحقيقي $\int_{-\alpha}^{0} xe^{2x}dx$.

بـ ـ استنتج بالسنتمتر المربع المساحة A للحيز المستوي المحدد بـ (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $y=x+1$ ، $x=-\alpha$ و $x=0$.

جـ ـ تحقق أن $A=2\left(\dfrac{4\alpha-1}{2\alpha-1}\right)cm^2$.

(α العدد الحقيقي حيث $0.2<\alpha<0.3$ و يحقق $g(\alpha)=0$ مع $g(x)=1+(6x-3)e^{-2x}$)

التمرين60: بكالوريا شعبة رياضيات 2023 ـ الموضوع الثاني

f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\left(x-\dfrac{3}{2}\ln x\right)\ln x$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة $2cm$)

1) F الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $F(x)=\left(\dfrac{1}{2}x^2+3x\right)\ln x-\dfrac{3}{2}x(\ln x)^2-\dfrac{1}{4}x^2-3x$.

أ ـ تحقق أن F أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

بـ ـ استنتج بالسنتمتر المربع مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $y=0$ ، $x=1$ و $x=e$.

التمرين61: بكالوريا شعبة رياضيات 2024 ـ الموضوع الأول

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{e^x+4x}{e^x+4}$. (C_f) تمثيلها البياني.

1) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$.

2) أ ـ أثبت أنه : من أجل كل x من $[1;+\infty[$ ، $\dfrac{e^x}{e^x+4}\le f(x)\le x$.

بـ ـ A مساحة الحيّز المستوي المحدد بـ (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $y=0$ ، $x=1$ و $x=2$.

بيّن أن : $\ln\left(\dfrac{e^2+4}{e+4}\right)\le A\le\dfrac{3}{2}$.

التمرين62: بكالوريا شعبة رياضيات 2024 ـ الموضوع الثاني

f الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ : $f(0)=0$ و من أجل كل $x>0$ ، $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2\ln x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ ـ بيّن أنه : إذا كان $1\le x\le e$ فإن $\dfrac{x}{x^2+1}\le f(x)\le 1$. (علما أن الدالة f متناقصة على المجال $[1;e]$)

بـ ـ A مساحة الحيّز المستوي المحدد بـ (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $y=0$ ، $x=1$ و $x=e$.

بيّن أن : $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{e^2+1}{2}\right)\le A\le e-1$.

أسئلة اختيار من متعدد في محور الدوال الأصلية

من بين الإقتراحات الثلاثة يوجد اختيار واحد صحيح عينه مع التعليل

السؤال الأول : لتكن f دالة عددية مُعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=2-x^2e^{1-x}$. وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(o.\vec{i}.\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=2cm$ و $\|\vec{j}\|=1cm$

1- لتكن F الدالة الأصلية للدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ ، عبارة الدالة F هي :

أ) $F(x)=2x+(x^2+2x+2)e^{1-x}$ ب) $F(x)=2x-(x^2+2x+2)e^{1-x}$ ج) $F(x)=2x-2e^{1-x}$

2- التكامل $\int_1^2 f(x).dx$ يساوي

أ) $-3+10e^{-1}$ ب) $-3+e^{-1}$ ج) $10e^{-1}$

السؤال الثاني : لتكن f دالة عددية مُعرّفة على $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ بـ $f(x)=x+1+\frac{3}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$. وليكن (C_f)

باستعمال المكاملة بالتجزئة التكامل $I=\int_2^3 \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right).dx$ يساوي

أ) 2 ب) $\ln\left(\frac{64}{27}\right)$ ج) $-\ln 27$

S مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) و محور الفواصل و المستقيمات $x=2$ و $x=3$ يساوي

أ) $S=\frac{7}{2}+\frac{3}{2}\ln\left(\frac{64}{27}\right)ua$ ب) $S=\frac{7}{2}+\frac{3}{2}\ln 27.ua$ ج) $S=\frac{11}{2}.ua$

السؤال الثالث : لتكن f دالة مُعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{2x}-(x+1)e^x$. وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o.\vec{i}.\vec{j})$ نعتبر m عدد حقيقي سالب

1- التفسير الهندسي للتكامل $I=\int_m^0 f(x).dx$:

أ) مساحة الحيز المستوي المحصور بين (C_f) و محور الفواصل و المستقيمات $x=0$ و $x=m$

ب) مساحة الحيز المستوي المحصور بين (C_f) و المنصف الأول و المستقيمات $x=0$ و $x=m$

ج) مساحة الحيز المستوي المحصور بين (C_f) المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=2x$ و المستقيمات $x=0$ و $x=m$

2- باستعمال المكاملة بالتجزئة التكامل $\int_m^0 xe^x.dx$ يساوي

أ) $-me^m-1+e^m$ ب) $-1+e^m$ ج) me^m+1+e^m

3- التكامل $I=\int_m^0 f(x).dx$ يساوي

أ) $I=-me^m-1+e^m.ua$ ب) $I=3e^m+4.ua$ ج) $I=-\frac{1}{2}e^{2m}+me^m+\frac{1}{2}.ua$

4- نهاية I لما يؤول x إلى $-\infty$ هي

أ) $\lim\limits_{m\to-\infty}(I)=4$ ب) $\lim\limits_{m\to-\infty}(I)=\frac{1}{2}$ ج) $\lim\limits_{m\to-\infty}(I)=1$

السؤال الرابع: لتكن f دالة مُعرَفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\frac{3e^x-1}{e^x+1}$. وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس

1- قيمة العددين الحقيقين α و β حتى تكون $f(x)=\alpha+\frac{\beta e^{-x}}{e^{-x}+1}$

أ) $\begin{cases}\alpha=3\\ \beta=-4\end{cases}$ ب) $\begin{cases}\alpha=-3\\ \beta=4\end{cases}$ ج) $\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=4\end{cases}$

2- لتكن F الدالة الأصلية للدالة المعرفة على $\mathbb{R}$, عبارة الدالة F هي :

أ) $F(x)=-x+4\ln(e^x+1)+c$ ب) $F(x)=3x+4\ln(e^{-x}+1)+c$ ج) $F(x)=4\ln(e^x+1)+c$

السؤال الخامس : لتكن f دالة مُعرَفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=3^{x-1}$.

1- f دالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و عبارة دالتها المشتقة هي :

أ) $f'(x)=3^{x-1}\ln 3$ ب) $f'(x)=3\ln(x-1)$ ج) $f'(x)=3^{x-2}\ln 3$

2- القيمة المتوسطة للدالة على المجال $[1,2]$ هي :

أ) $m=\frac{6}{\ln 3}$ ب) $m=\frac{2}{\ln 3}$ ج) $m=\ln 3$

السؤال السادس: حلول المعادلة التفاضلية $y'=2y-16$ بحيث $y(0)=1962$

أ) $y=1962e^{2x}+8$ ب) $y=1954e^{2x}+8$ ج) $y=1954e^{-16x}+2$

السؤال السابع : حلول المعادلة التفاضلية $y''=e^{2x-1}$

أ) $y=e^{2x-1}+c$ ب) $y=\frac{1}{2}e^{2x-1}+c$ ج) $y=\frac{1}{4}e^{2x-1}+c_1x+c_2$

السؤال الثامن : لتكن f دالة مُعرَفة على $]0,+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{e^{2x}-e^x+1}{e^x-1}$. وليكن (C_f) تمثيلها البياني

1- من أجل كل عدد حقيقي x من $]0,+\infty[$ فإن قيمة العددين الحقيقين α و β حتى تكون $f(x)=e^x+\alpha+\frac{\beta e^x}{e^x-1}$

أ) $\begin{cases}\alpha=-1\\ \beta=0\end{cases}$ ب) $\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=1\end{cases}$ ج) $\begin{cases}\alpha=-1\\ \beta=1\end{cases}$

2- لتكن F الدالة الأصلية للدالة المعرفة على $]0,+\infty[$ و التي تحقق $F(\ln 2)=2$, عبارة الدالة F هي :

أ) $F(x)=e^x-\ln(\frac{e^x-1}{e^x})$ ب) $F(x)=e^x+\ln(\frac{e^x-1}{e^x})$ ج) $F(x)=e^x-\ln(\frac{e^x}{e^x-1})+\ln 2$

3- S مساحة الحيز المستوي المحدد بـ المنحنى (C_f) و المستقيمات $x=\ln 2$ و $x=\ln 3$

أ) $S=\ln(2e)ua$ ب) $S=\ln(e-1)ua$ ج) $S=1-\ln 3+2\ln 2.ua$

التمرين الثاني : أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل

1- f دالة مُعرَفة على $]-1,+\infty[$ بـ $f(x)=3x^2-\frac{1}{x+1}$ القيمة المتوسطة الدالة f على المجال $[0,2]$ هي

$m=4-\ln\sqrt{3}$

2- اذا كانت f دالة مُعرَفة على $\mathbb{R}$ حلا للمعادلة التفاضلية $y'+2y=0$ و (C_f) يقطع حامل محور التراتيب في النقطة $\frac{3}{2}$ فإن مساحة الحيز المحدد بالمستقيمات $y=0$ و $x=0$ و $x=\ln 3$ تساوي $\frac{2}{3}$

3- اذا كانت f دالّة مُعرّفة على $\mathbb{R}$ حلا للمعادلة التفا ضلية $y'=-3y+6$ فإن تمثيلها البياني يقبل مستقيما مقاربا أفقيا في جوار $+\infty$

تمارين تدريبية حول محور الدوال الأصلية مرفقة بالحل منقولة للأمانة

تمارين محلولة حول الدوال الأصلية و التكامل

التمرين رقم 01 : أحسب F الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ للدوال التالية:

1) $f(x)=-10x^4+8x^3+3x^2-4x+17$ على المجال $\mathbb{R}$ ، 2) $f(x)=\dfrac{4x^3+2x^2-5}{3}$ على المجال $\mathbb{R}$ ،

3) $f(x)=-2\cos x-4\sin x+3$ على المجال $\mathbb{R}$ ، 4) $f(x)=3-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{5}{x^4}$ على المجال $]0\ ,\ +\infty[$

5) $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-2x+3$ على المجال $]0\ ,\ +\infty[$

التمرين رقم 02 : الدوال الأصلية للدوال من الشكل $u'u^n$: أحسب الدوال الأصلية على المجال I لكل من :

1) $f(x)=2x\left(x^2-1\right)^3$ ، $I=\mathbb{R}$ ، 2) $f(x)=-3(-3x+1)^4$ ، $I=\mathbb{R}$

3) $f(x)=x^2\left(x^3-2\right)^2$ ، $I=\mathbb{R}$ ، 4) $f(x)=\dfrac{(2x+3)^3}{7}$ ، $I=\mathbb{R}$

5) $f(x)=e^x\left(e^x-2\right)^3$ ، $I=\mathbb{R}$ ، 6) $f(x)=e^{-2x}\left(e^{-2x}+2\right)^3$ ، $I=\mathbb{R}$

7) $f(x)=\dfrac{1}{x}(\ln x)^2$ ، $I=]0;+\infty[$ ، 8) $f(x)=\dfrac{3}{x-1}\left[\ln(x-1)\right]^2$ ، $I=]1;+\infty[$

9) $f(x)=-2\cos x\sin^2 x$ ، $I=\mathbb{R}$

التمرين رقم 03 : الدوال الأصلية للدوال من الشكل $\dfrac{u'}{u^n}$: أحسب الدوال الأصلية على المجال I لكل من :

1) $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^3}$ ، $I=]-1;+\infty[$ 2) $f(x)=\dfrac{7}{(2x+1)^3}$ ، $I=\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

3) $f(x)=\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$ ، $I=]1;+\infty[$ 4) $f(x)=\dfrac{2e^x}{(1+e^x)^2}$ ، $I=\mathbb{R}$

5) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin^3 x}$ ، $I=]0;\pi[$

التمرين رقم 04 : الدوال الأصلية للدوال من الشكل $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$: أحسب الدوال الأصلية على المجال I لكل من :

1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$ ، $I=]2;+\infty[$ 2) $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$ ، $I=]-\infty;2[$

3) $f(x)=\dfrac{2e^x}{3\sqrt{e^x+1}}$ ، $I=\mathbb{R}$ 4) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x+1}}$ ، $I=\mathbb{R}$

5) $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}$ ، $I=]1;+\infty[$

التمرين رقم 05 : الدوال الأصلية للدوال من الشكل $\dfrac{u'}{u}$: أحسب الدوال الأصلية على المجال I لكل من :

1) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ ؛ $I=]2;+\infty[$ 2) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+3}$ ؛ $I=\mathbb{R}$

3) $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ ؛ $I=\mathbb{R}$ 4) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ ؛ $I=]0;\pi[$

التمرين رقم 06 : أحسب الدوال الأصلية لكل من الدوال التالية على المجال المعطى I:

1) $f(x)=2x^3-4x+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{5}{x^3}$ مع $I=]0\,;+\infty[$.

2) $f(x)=(2x+1)^4$ مع $I=\mathbb{R}$.

3) $f(x)=\dfrac{1}{(3x+2)^2}$ مع $I=]0\,;+\infty[$.

4) $f(x)=\dfrac{2x+1}{(x^2+x+2)^3}$ مع $I=\mathbb{R}$.

التمرين رقم 07 :

لتكن f الدالة المعرفة على $]0\,;\,+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2+x-3}{(x+1)^2}$.

1) عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0\,;\,+\infty[$:

$f(x)=ax+b+\dfrac{c}{(x+1)^2}$.

2) استنتج الدالة الأصلية F للدالة f على المجال $]0\,;\,+\infty[$.

التمرين رقم 08 : أحسب $A=\displaystyle\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{x}dx$ ، $B=\displaystyle\int_{-2}^{0}\frac{x-1}{x^2-2x+5}dx$

التمرين رقم 09 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=e^{-x}\ln(1+e^x)$ ونعرف التكامل التالي : $I=\displaystyle\int_0^{\ln 2}f(x)dx$

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x)>0$ واستنتج إشارة I .

2) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث $\dfrac{e^x}{1+e^x}=a+\dfrac{b}{1+e^x}$.

3) أحسب $A=\displaystyle\int_0^{\ln 2}\frac{1}{1+e^x}dx$ ثم $B=\displaystyle\int_0^{\ln 2}f'(x)dx$

4) أحسب $f(x)+f'(x)$ ثم استنتج قيمة التكامل I .

التمرين رقم 10 :

1) أوجد العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم فإن $\dfrac{1}{x(x^2+1)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{bx}{x^2+1}$.

2) باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب $\int_1^2 \frac{x\ln x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$

التمرين رقم 11 :

أحسب $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x\,dx$

التمرين رقم 12:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x^2e^{2x}$

1) عين العددين الحقيقيين a و b حتى تكون الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $F(x)=(ax^2+bx+c)e^{2x}$ أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

2) أحسب $\int_0^1 f(x)dx$

التمرين رقم 13 :

1) احسب التكامل $I_1=\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$

2) ليكن $I_2=\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx$ احسب I_1+I_2 ثم استنتج قيمة I_2 .

التمرين رقم 14 :

نضع $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\,dx$ و $B=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x\,dx$.

1) أحسب $A+B$.

2) أحسب باستعمال المكاملة بالتجزئة $A-B$.

3) استنتج من 1) و 2) قيمة كلا من A و B .

التمرين رقم 15 :

باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب : $A=\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$ ، $B=\int_1^{e} \ln t\,dt$ ، $C=\int_{-1}^{0}(2x+1)e^{-x}dx$.

حل التمرينات التدريبية أمسح الكود لتحميل الحلول

رابط محور الدوال الأصلية و الحساب التكاملي

يحتوي الرابط على :

1- **درس مفصل للدوال الأصلية مرفق بأمثلة توضيحية**
2- **درس مفصل لحساب التكامل مرفق بأمثلة توضيحية**
3- **التكامل بالتجزئة مرفق بأمثلة توضيحية**
4- **المعادلات التفاضلية التفاضلية مرفق بأمثلة توضيحية**
5- **تمارين المحور الواردة في شهادة البكالوريا من 2008 إلى 2024 مقسمة حسب الشعبة**
6- **تمارين مقترحة على شكل إختيار من متعدد**
7- **تمارين تدريبية منقولة للأمانة**

لتحميل المحور إمسح الكود التالي :

بالتوفيق في شهادة البكالوريا 2025