ملاحظة : ركّز جيّدًا أثناء المحاولة

تمــرين شامل في المتتاليات العدديــة

(I) (d_n) متتالية هندسية متناقصة تماما حدّها الأوّل d_0 و أساسها q' حيث :

$$(F):\begin{cases} d_0+d_1+d_2=-\dfrac{13}{27}.........(1)\\ d_0\times d_1\times d_2=-\dfrac{1}{729}.........(2)\end{cases}$$

1 - احسب d_0 ، d_1 و d_2 ثمّ استنتج الأساس q' .

2 - اكتب d_n بدلالة n ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n$.

3 - عيّن أكبر عدد طبيعي n حتّى يكون : $d_n \prec -\dfrac{3}{10^3}$.

(II) a وسيط حقيقي موجب تماما .

f_a الدّالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty;-a[\cup]-\frac{1}{a};+\infty[$ كمايلي : $f_a(x)=\ln\left(\dfrac{a+x}{1+ax}\right)+x$.

1 - احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x)$.

(III) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$$\begin{cases} v_0=a\\ v_{n+1}=e^{f_a(v_n)-v_n}\end{cases}$$

1 - برهن بالتّراجع أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n\neq 0$.

2 - عيّن قيمة a حتّى تكون المتتالية (v_n) ثابتة .

(IV) نفرض أنّ $a\neq 1$. b عدد حقيقي موجب تماما يختلف عن $\dfrac{1}{a}$.

(w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $w_n=\dfrac{v_n-b}{v_n+b}$.

1 - أ - جد قيمة b حتّى تكون المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين كل من أساسها q وحدّها الأول w_0 بدلالة a .

ب - من أجل قيمة b السابقة اكتب عبارة w_n ثمّ استنتج عبارة v_n بدلالة كل من n و a .

ج - احسب كل من : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

2 - نضع في كلٍّ ممّا يلي $b=1$ و $a=3$.

أ - اكتب بدلالة n المجموع s_n حيث : $s_n=w_0+w_1+w_2+.......+w_n$ ، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$.

ب - اكتب بدلالة n المجموع s'_n حيث : $s'_n=\dfrac{1}{v_0+1}+\dfrac{1}{v_1+1}+\dfrac{1}{v_2+1}+.......+\dfrac{1}{v_n+1}$.

- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} s'_n$ ، ثمّ استنتج طبيعة المتتالية (s'_n) .

ج - اكتب بدلالة n المجموع s''_n حيث : $s''_n=\dfrac{1}{(v_0+1)^2}+\dfrac{1}{(v_1+1)^2}+\dfrac{1}{(v_2+1)^2}+.......+\dfrac{1}{(v_n+1)^2}$.

د - اكتب بدلالة كل من n و m المجموع h_n حيث : $h_n=w_0^m+w_1^m+w_2^m+.......+w_n^m$ مع m عدد طبيعي أكبر تماما من 1 .

ه - اكتب بدلالة n الجداء G_n حيث : $G_n=|w_0\times w_1\times w_2\times ....\times w_n|$.

- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n$ ، ثمّ استنتج طبيعة المتتالية (G_n) .

و - اكتب بدلالة n الجداء E_n حيث : $E_n=e^{w_0}\times e^{w_1}\times e^{w_2}\times ....\times e^{w_n}$.

- ماهي طبيعة المتتالية (E_n) ؟ برّر إجابتك .

ي - اكتب بدلالة n الجداء P_n حيث : $P_n=w_0^{2020}\times w_1^{2020}\times w_2^{2020}\times .....\times w_n^{2020}$.

- بيّن أنّ المتتالية (P_n) متقاربة .

3 - أ - تحقّق أنّه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ و $\alpha\in\mathbb{R}^*-\{1\}$ فإنّ : $\dfrac{2}{1+\alpha^{n+2}}-1=\dfrac{1-\alpha^{n+2}}{1+\alpha^{n+2}}$.

ب - برهن بالتراجع أنّه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $v_n=\dfrac{2}{1+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}}-1$ ثمّ احسب من جديد $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

(V) f_3 الدّالة العددية المعرفة على $[1;4]$ كمايلي : $f_3(x)=\ln\left(\frac{3+x}{1+3x}\right)+x$.

ونسمّي (C_{f_3}) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ حيث : $\left\|\vec{i}\right\|=2cm$.

1 - ادرس تغيّرات الدّالة f_3 على المجال $[1;4]$.

2 - بيّن أنّ $\ln\left(\frac{3+x}{1+3x}\right)=\ln\left(\frac{1}{3}+\frac{8}{3+9x}\right)$ ثمّ ادرس وضعية المنحنى (C_{f_3}) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ على $[1;4]$.

3 - أنشئ المنحنى (C_{f_3}) على المجال $[1;4]$.

4 - برهن أنّه إذا كان $x\in[1;4]$ فإنّ : $f_3(x)\in[1;4]$.

(VI) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ $u_0=3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f_3(u_n)$.

1 - أ - برّر وجود المتتالية (u_n) .

ب - باستعمال المنحنى (C_{f_3}) والمستقيم (Δ) ، مثّل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل (دون حسابها ومبرزا خطوط الإنشاء) .

ج - ضع تخمينا حول اتّجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها .

2 - أ - برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $1\preceq u_n\prec 4$.

ب - بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}\preceq u_n$ ثمّ استنتج إتّجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

ج - أثبت أنّ المتتالية (u_n) متقاربة ثمّ أوجد نهايتها .

3 - أ - بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $[1;4]$ فإنّ : $f_3'(x)\preceq f_3'(4)$.

ب - احسب $f_3'(4)$.

ج - بيّن أنّه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}-1\preceq\frac{83}{91}(u_n-1)$. (إرشاد : استعمل المتباينة $\int_1^{u_n}f'_3(x)\,dx\preceq\int_1^{u_n}f'_3(4)\,dx$) .

د - بيّن أنّه من أجل كل n عدد طبيعي : $0\preceq u_n-1\preceq 2\left(\frac{83}{91}\right)^n$ ، ثمّ استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

4 - احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n$ حيث :

$$T_n=\sum_{k=0}^{k=n-1}\ln\left(\frac{1+3u_k}{u_k+3}\right)=\ln\left(\frac{1+3u_0}{3+u_0}\right)+\ln\left(\frac{1+3u_1}{3+u_1}\right)+\ln\left(\frac{1+3u_2}{3+u_2}\right)+\ldots\ldots\ldots\ldots+\ln\left(\frac{1+3u_{n-1}}{3+u_{n-1}}\right)$$

(VII) نضع في هذا الجزء : $a=5$.

(L_n) المتتالية العددية المعرفة بـ $L_0=\frac{1}{5}$ ومن أجل كل $n\in\mathbb{N}$ لدينا : $L_{n+1}=2L_nf_5(L_n)-L_n^2$.

- نأخذ أنّ g الدّالة المعرفة على $[0;1]$ بـ : $g(x)=2x\ln\left(\frac{5+x}{1+5x}\right)+x^2$ متزايدة ، وأنّ $g(x)-x=0$ لمّا $x=1$.

1 - برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ : $0\preceq L_n\preceq 1$.

2 - أ - بيّن أنّه من أجل كل $x\in[0;1]$: $2\ln\left(\frac{5+x}{1+5x}\right)+x\succeq 1$.

ب - أثبت أنّ المتتالية (L_n) متزايدة (تذكّر أنّ حدود المتتالية (L_n) موجبة) .

ج - بيّن أنّ (L_n) متقاربة ثمّ أوجد نهايتها .

3 - بيّن أنّ المتتاليتان (u_n) و (L_n) متجاورتان .

بالتوفيـــق والنجاح إن شاء الله في البكالوريـا

قال الإمام عبد الحميد ابن باديس رحمه الله تعالى :

كم عالمٍ يَسكنُ بيتًا بِالكِرَا *** وجاهلٍ يملكُ دورًا وقُرَى

لمَّا قرأتُ قولَهُ سُبحانهُ *** نحنُ قَسَمنَا بَينَهُم زالَ المِرَا

التصحيح المفصل للتمرين الشامل في المتتاليات

الجزء الأول

1 حساب d_0 ، d_1 و d_2 ثمّ استنتاج الأساس q'

لدينا بما أنّ المتتالية (d_n) هندسية فإنّ : $d_1^2 = d_0 \times d_2$ بالتعويض في المعادلة (2) نجد : $d_1^3 = -\frac{1}{729}$ إذن $d_1 = -\frac{1}{9}$.

الجملة (F) تصبح تكافئ : $\begin{cases} d_0 + d_2 = -\frac{10}{27} \\ d_0 \times d_2 = \frac{1}{81} \end{cases}$ معناه : $\begin{cases} d_0 = -\frac{10}{27} - d_2 \ldots\ldots (3) \\ d_0 \times d_2 = \frac{1}{81} \ldots\ldots (4) \end{cases}$ بتعويض المعادلة (3) في (4) نجد :

$\left(-\frac{10}{27} - d_2\right) d_2 = \frac{1}{81}$ يكافئ : $-d_2^2 - \frac{10}{27}d_2 - \frac{1}{81} = 0$ ، بحل هذه الأخيرة نجد حلولها هي : $d_2 = -\frac{1}{3}$ و $d_2 = -\frac{1}{27}$ وبما أنّ المتتالية (d_n) متناقصة فإنّ $d_2 = -\frac{1}{27}$ وبالتعويض في المعادلة (3) نحصل على $d_0 = -\frac{1}{3}$.

أساس المتتالية (d_n) هو : $q' = \frac{d_2}{d_1} = \frac{d_1}{d_0} = \frac{1}{3}$.

2 كتابة d_n بدلالة n ثمّ حساب $\lim_{n\to+\infty} d_n$

المتتالية (d_n) هندسية ومنه : $d_n = d_0 (q')^n$ إذن : $d_n = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ و $\lim_{n\to+\infty} d_n = \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = 0$ لأنّ : $-1 \prec \frac{1}{3} \prec 1$.

3 تعيين أكبر عدد طبيعي n حتّى يكون : $d_n \prec -\frac{3}{10^3}$

لدينا : $d_n \prec -\frac{3}{10^3}$ يكافئ : $-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n \prec -\frac{3}{10^3}$ يكافئ : $\left(\frac{1}{3}\right)^n \succ \frac{9}{10^3}$ أي $\ln\left(\frac{1}{3}\right)^n \succ \ln\left(\frac{9}{10^3}\right)$ معناه $n\ln\left(\frac{1}{3}\right) \succ \ln\left(\frac{9}{10^3}\right)$

ومنه $n \prec \dfrac{\ln\left(\frac{9}{10^3}\right)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$ أي $n \prec 4.2877$ من هنا نجد أنّ أكبر عدد طبيعي n يحقّق $d_n \prec -\frac{3}{10^3}$ هو : $n = 4$.

الجزء الثاني

1 حساب $\lim_{x\to-\infty} f_a(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f_a(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\ln\left(\frac{a+x}{1+ax}\right)+x\right) = \lim_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{a+x}{1+ax}\right) + \lim_{x\to-\infty} x = \ln\left(\frac{1}{a}\right) + \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{a+x}{1+ax}\right)+x\right) = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{a+x}{1+ax}\right) + \lim_{x\to+\infty} x = \ln\left(\frac{1}{a}\right) + \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

الجزء الثالث

لدينا : $v_{n+1} = e^{f_a(v_n) - v_n} = e^{\ln\left(\frac{a+v_n}{1+av_n}\right)+v_n-v_n} = e^{\ln\left(\frac{a+v_n}{1+av_n}\right)}$ ومنه : $v_{n+1} = \frac{a+v_n}{1+av_n}$.

1 البرهان بالتّراجع أنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n \neq 0$

- من أجل $n = 0$ لدينا : $v_0 = a$ ونعلم أنّ $a \neq 0$ ومنه $v_0 \neq 0$ إذن الخاصية " $v_n \neq 0$ " محقّقة من أجل $n = 0$.
- نفرض أنّ $v_n \neq 0$ ونبرهن أنّ $v_{n+1} \neq 0$.

لدينا من الفرض : $v_n \neq 0$ يكافئ $v_n + a \neq a$ و $a \neq 0$ إذن $v_n + a \neq 0 \ldots\ldots (*)$ هذا من جهة ومن جهة أخرى لدينا : $av_n \neq 0$ أي $av_n + 1 \neq 1$ يكافئ $\frac{1}{1+av_n} \neq 1 \ldots\ldots (**)$ بضرب $(*)$ في $(**)$ طرف بطرف نجد أنّ $v_{n+1} \neq 0$.

إذن حسب البرهان بالتراجع فإنّه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n \neq 0$.

2 تعيين قيمة a حتّى تكون المتتالية (v_n) ثابتة

المتتالية (v_n) ثابتة معناه $v_{n+1} = v_n = v_0 = a$ وعليه بالتعويض نجد : $a = \frac{a+a}{1+a\cdot a}$ يكافئ $a(1+a^2) = 2a$ أي $a^3 - a = 0$ معناه : $a(a^2-1) = 0$ حلول هذه المعادلة الأخيرة هي : $s = \{-1;0;1\}$ وبما أنّ $a \in \mathbb{R}_+^*$ فإنّ قيمة a حتّى تكون المتتالية (v_n) هي : $a = 1$.

الجزء الرابع

1 إيجاد قيمة b حتّى تكون المتتالية (w_n) هندسية مع تعيين كل من أساسها q وحدّها الأول w_0 بدلالة a

بما أنّ $1-ba \neq 0$ فإنّه لدينا :

$$w_{n+1}=\frac{v_{n+1}-b}{v_{n+1}+b}=\frac{\dfrac{a+v_n}{1+av_n}-b}{\dfrac{a+v_n}{1+av_n}+b}=\frac{\dfrac{a+v_n-b-bav_n}{1+av_n}}{\dfrac{a+v_n+b+bav_n}{1+av_n}}=\frac{(1-ba)\,v_n+(a-b)}{(1+ba)\,v_n+(a+b)}=\frac{1-ba}{1+ba}\cdot\frac{v_n+\dfrac{a-b}{1-ba}}{v_n+\dfrac{a+b}{1+ba}}$$

ومنه حتّى تكون المتتالية (w_n) هندسية يجب أن يكون : $\begin{cases}\dfrac{a-b}{1-ba}=-b\\ \dfrac{a+b}{1+ba}=b\end{cases}$ يكافئ : $\begin{cases}a-b=-b+b^2a\\ a+b=b+b^2a\end{cases}$ معناه : $\begin{cases}a\left(b^2-1\right)=0\\ a\left(b^2-1\right)=0\end{cases}$

بما أنّ $a\in\mathbb{R}_+^*$ فإنّ : $b^2-1=0$ حلولها هي : $b=1$ و $b=-1$ وبما أنّ b عدد حقيقي موجب تماما فإنّ $b=1$.

إذن من أجل $b=1$ نجد : $w_{n+1}=\dfrac{1-a}{1+a}\cdot\dfrac{v_n+\dfrac{a-1}{1-a}}{v_n+\dfrac{a+1}{1+a}}=\dfrac{1-a}{1+a}\cdot\dfrac{v_n-1}{v_n+1}=\dfrac{1-a}{1+a}\cdot w_n$.

وعليه من أجل $\boxed{b=1}$ (w_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q=\dfrac{1-a}{1+a}}$ وحدّها الأوّل $\boxed{w_0=\dfrac{v_0-1}{v_0+1}=\dfrac{a-1}{a+1}}$.

من أجل قيمة b السابقة كتابة عبارة w_n ثمّ استنتاج عبارة v_n بدلالة كل من n و a

- (w_n) هندسية معناه : $w_n=w_0\times q^n$ وعليه : $w_n=\dfrac{a-1}{a+1}\left(\dfrac{1-a}{1+a}\right)^n=-\left(\dfrac{1-a}{1+a}\right)\left(\dfrac{1-a}{1+a}\right)^n$ ومنه $\boxed{w_n=-\left(\dfrac{1-a}{1+a}\right)^{n+1}}$

- لدينا : $w_n=\dfrac{v_n-1}{v_n+1}$ يكافئ : $w_n\left(v_n+1\right)=v_n-1$ أي : $w_n\cdot v_n+w_n=v_n-1$ معناه : $w_n+1=v_n\left(1-w_n\right)$ ومنه :

$\boxed{v_n=\dfrac{1+w_n}{1-w_n}}$ بتعويض عبارة w_n في المعادلة الأخيرة نجد : $v_n=\dfrac{1+\left(-\left(\dfrac{1-a}{1+a}\right)^{n+1}\right)}{1-\left(-\left(\dfrac{1-a}{1+a}\right)^{n+1}\right)}$ إذن : $\boxed{v_n=\dfrac{1-\left(\dfrac{1-a}{1+a}\right)^{n+1}}{1+\left(\dfrac{1-a}{1+a}\right)^{n+1}}}$ وهو.ء .

حساب كل من : $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$

لدينا : $-(1+a)\prec 1-a\prec 1+a$ وعليه : $-1\prec\dfrac{1-a}{1+a}\prec 1$ (واضح أنّ $1+a$ عدد حقيقي موجب تماماً) ، ومنه :

- $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\left(\dfrac{1-a}{1+a}\right)^{n+1}\right)=-\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1-a}{1+a}\right)^{n+1}=0$

- $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1-\left(\dfrac{1-a}{1+a}\right)^{n+1}}{1+\left(\dfrac{1-a}{1+a}\right)^{n+1}}\right)=\dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\left(\dfrac{1-a}{1+a}\right)^{n+1}\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\left(\dfrac{1-a}{1+a}\right)^{n+1}\right)}=\dfrac{1-\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1-a}{1+a}\right)^{n+1}}{1+\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1-a}{1+a}\right)^{n+1}}=\dfrac{1-0}{1+0}=1$

2 - نضع في كلّ ممّا يلي $b=1$ و $a=3$.

كتابة بدلالة n المجموع s_n

من أجل $a=3$ لدينا : $w_0=\dfrac{1}{2}$ و $q=-\dfrac{1}{2}$.

$$s_n=w_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{3}{2}}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)=\frac{1}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

ولدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}s_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{3}\left(1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right)=\dfrac{1}{3}$ لأنّ : $-1\prec-\dfrac{1}{2}\prec 1$.

كتابة s'_n بدلالة n المجموع

لدينا : $w_n = \frac{v_n - 1}{v_n + 1}$ يكافئ : $w_n = \frac{v_n - 1 + 1 - 1}{v_n + 1} = \frac{v_n + 1 - 2}{v_n + 1} = \frac{v_n + 1}{v_n + 1} - \frac{2}{v_n + 1} = 1 - \frac{2}{v_n + 1}$ ومنه :

$\frac{2}{v_n + 1} = 1 - w_n$ إذن : $\boxed{\frac{1}{v_n + 1} = \frac{1}{2}(1 - w_n)}$ وبالتالي :

$$s'_n = \frac{1}{v_0 + 1} + \frac{1}{v_1 + 1} + \frac{1}{v_2 + 1} + \dots\dots + \frac{1}{v_n + 1} = \frac{1}{2}(1 - w_0) + \frac{1}{2}(1 - w_1) + \frac{1}{2}(1 - w_2) + \dots\dots + \frac{1}{2}(1 - w_n)$$
$$= \frac{1}{2}((1 - w_0) + (1 - w_1) + (1 - w_2) + \dots\dots + (1 - w_n)) = \frac{1}{2}(1 + 1 + 1 + \dots\dots + 1 - (w_0 + w_1 + w_2 + \dots\dots + w_n))$$
$$= \frac{1}{2}((n + 1) - s_n) = \frac{1}{2}\left((n + 1) - \frac{1}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)\right) = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

ومنه : $\boxed{s'_n = \frac{n}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}}$

- **حساب $\lim_{n \to +\infty} s'_n$ ، ثمّ استنتاج طبيعة المتتالية (s'_n)**

لدينا : $\lim_{n \to +\infty} s'_n = \lim_{n \to +\infty}\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right) = \lim_{n \to +\infty}\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{6}\right) - \lim_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right) = +\infty$.

ومنه المتتالية (s'_n) متباعدة .

كتابة s''_n بدلالة n المجموع

وجدنا في السؤال السابق : $\boxed{\frac{1}{v_n + 1} = \frac{1}{2}(1 - w_n)}$ وبتربيع الطرفين نجد : $\left(\frac{1}{v_n + 1}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}(1 - w_n)\right)^2$ إذن :

$\frac{1}{(v_n + 1)^2} = \frac{1}{4}(1 - w_n)^2$ ومنه : $\boxed{\frac{1}{(v_n + 1)^2} = \frac{1}{4}(1 - 2w_n + w_n^2)}$ إذن :

$$s''_n = \frac{1}{(v_0 + 1)^2} + \frac{1}{(v_1 + 1)^2} + \frac{1}{(v_2 + 1)^2} + \dots\dots + \frac{1}{(v_n + 1)^2}$$
$$= \frac{1}{4}(1 - 2w_0 + w_0^2) + \frac{1}{4}(1 - 2w_1 + w_1^2) + \frac{1}{4}(1 - 2w_2 + w_2^2) + \dots\dots + \frac{1}{4}(1 - 2w_n + w_n^2)$$
$$= \frac{1}{4}(1 - 2w_0 + w_0^2 + 1 - 2w_1 + w_1^2 + 1 - 2w_2 + w_2^2 + \dots\dots + 1 - 2w_n + w_n^2)$$
$$= \frac{1}{4}(1 + 1 + 1 + \dots\dots + 1 - 2(w_0 + w_1 + w_2 + \dots\dots + w_n) + (w_0^2 + w_1^2 + w_2^2 + \dots\dots + w_n^2))$$
$$= \frac{1}{4}((n + 1) - 2s_n + (w_0^2 + w_1^2 + w_2^2 + \dots\dots + w_n^2))$$
$$= \frac{1}{4}\left((n + 1) - 2s_n + \left((w_0 q^0)^2 + (w_0 q^1)^2 + (w_0 q^2)^2 + \dots\dots + (w_0 q^n)^2\right)\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left((n + 1) - 2s_n + w_0^2 (q^0)^2 + w_0^2 (q^1)^2 + w_0^2 (q^2)^2 + \dots\dots + w_0^2 (q^n)^2\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left((n + 1) - 2s_n + w_0^2\left(q^0 + q^{2(1)} + q^{2(2)} + \dots\dots + q^{2(n)}\right)\right) = \frac{1}{4}\left((n + 1) - 2s_n + w_0^2\left(\frac{1 - (q^2)^{n+1}}{1 - q^2}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left((n + 1) - 2\left(\frac{1}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1 - \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left((n + 1) - \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left((n + 1) - \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left((n + 1) - \frac{1}{3}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) - \frac{1}{3}\right)$$

ومنه $\boxed{s''_n = \frac{n}{4} - \frac{1}{12}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) + \frac{1}{6}}$.

كتابة بدلالة كل من n و m المجموع h_n

لدينا : $w_n^m = (w_0q^n)^m = w_0^m(q^n)^m = w_0^m \cdot q^{n(m)} = w_0^m \cdot (q^m)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^m \cdot \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^m\right)^n$

ومنه المتتالية (w_n^m) هندسية أساسها هو : $q^m = \left(-\frac{1}{2}\right)^m$ وحدّها الأول هو : $w_0^m = \left(\frac{1}{2}\right)^m$ وعليه :

$$h_n = w_0^m\left(\frac{1-(q^m)^{n+1}}{1-q^m}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^m\left(\frac{1-\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^m\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^m}\right) = \frac{1^m}{2^m}\left(\frac{1-\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^m\right)^{n+1}}{1-\frac{(-1)^m}{2^m}}\right)$$
$$= \frac{1}{2^m}\left(\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{m(n+1)}}{\frac{2^m-(-1)^m}{2^m}}\right) = \left(\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{m(n+1)}}{2^m-(-1)^m}\right)$$

ومنه $h_n = \left(\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{m(n+1)}}{2^m-(-1)^m}\right)$ حيث m عدد طبيعي أكبر تماما من 1 . (لاحظ أنّه لمّا $m=1$ يُصبح $h_n = s_n$) .

كتابة بدلالة n الجداء G_n

لدينا : $\ln|w_0| + \ln|w_1| + \ln|w_2| + \dots\dots + \ln|w_n| = \ln|w_0 \times w_1 \times w_2 \times \dots\dots \times w_n| = \ln G_n$ هذا من جهة ومن جهة أخرى لدينا : $\ln|w_n| = \ln|w_0 \cdot q^n| = \ln|w_0| + \ln|q^n| = \ln|w_0| + n\ln|q|$ إذن المتتالية $(\ln|w_n|)$ حسابية أساسها هو :

$r = \ln|q| = \ln\left|-\frac{1}{2}\right| = \ln\left|\frac{1}{2}\right| = -\ln 2$ وحدها الأول هو : $\ln|w_0| = \ln\left|\frac{1}{2}\right| = -\ln 2$ إذن :

$$\ln G_n = \left(\frac{n+1}{2}\right)(\ln|w_0| + \ln|w_n|) = \left(\frac{n+1}{2}\right)(\ln|w_0| + \ln|w_0| + n\ln|q|) = \left(\frac{n+1}{2}\right)(2\ln|w_0| + n\ln|q|)$$
$$= (n+1)\left(\ln|w_0| + \frac{n}{2}\ln|q|\right) = (n+1)\left(-\ln(2) - \frac{n\ln(2)}{2}\right) = -(n+1)\ln(2)\left(1+\frac{n}{2}\right)$$

وعليه : $G_n = e^{-(n+1)\ln(2)\left(1+\frac{n}{2}\right)}$

- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n$ ، ثمّ استنتاج طبيعة المتتالية (G_n)

لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-(n+1)\ln(2)\left(1+\frac{n}{2}\right)} = 0$ لأنّ : $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n = -\infty$ $\lim\limits_{n\to+\infty} -(n+1)\ln(2)\left(1+\frac{n}{2}\right) = -\infty$ ومنه المتتالية (G_n) متقاربة .

كتابة بدلالة n الجداء E_n

$$E_n = e^{w_0} \times e^{w_1} \times e^{w_2} \times \dots\dots\dots \times e^{w_n} = e^{w_0+w_1+w_2+\dots\dots\dots+w_n} = e^{s_n} = e^{\frac{1}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}$$

- طبيعة المتتالية (E_n) مع تبرير الإجابة

إنّ المتتالية (E_n) متقاربة ، التبرير : $\lim\limits_{n\to+\infty} E_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)} = e^{\frac{1}{3}}$ لأنّ : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$.

كتابة بدلالة n الجداء P_n

$$P_n = w_0^{2020} \times w_1^{2020} \times w_2^{2020} \times \dots.. \times w_n^{2020} = (w_0q^0)^{2020} \times (w_0q^1)^{2020} \times (w_0q^2)^{2020} \times \dots.. \times (w_0q^n)^{2020}$$
$$= w_0^{2020}\cdot(q^0)^{2020} \times w_0^{2020}\cdot(q^1)^{2020} \times w_0^{2020}\cdot(q^2)^{2020} \times \dots.. \times w_0^{2020}\cdot(q^n)^{2020}$$
$$= w_0^{2020}\cdot w_0^{2020}\cdot w_0^{2020}\cdot \dots..\cdot w_0^{2020} \times q^{2020(0)}\cdot q^{2020(1)}\cdot q^{2020(2)}\cdot \dots..\cdot q^{2020(n)}$$
$$= (w_0^{2020})^{n+1} \times q^{2020(0+1+2+\dots..+n)} = w_0^{2020(n+1)} \times q^{2020\left(\frac{n+1}{2}\right)(0+n)} = w_0^{2020(n+1)} \times q^{1010n(n+1)}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{2020(n+1)} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{1010n(n+1)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2020(n+1)} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{1010n(n+1)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2020(n+1)+1010n(n+1)}$$

ومنه : $P_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{1010(n+1)(2+n)}$.

• تبيين أنّ المتتالية (P_n) متقاربة

لدينا $\lim_{n\to+\infty} P_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{1010(n+1)(2+n)} = 0$ وبالتالي المتتالية (P_n) متقاربة .

3 التحقّق أنّه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ و $\alpha \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ فإنّ : $\frac{2}{1+\alpha^{n+2}} - 1 = \frac{1-\alpha^{n+2}}{1+\alpha^{n+2}}$

$$\frac{2}{1+\alpha^{n+2}} - 1 = \frac{2}{1+\alpha^{n+2}} - \left(\frac{1+\alpha^{n+2}}{1+\alpha^{n+2}}\right) = \frac{2-1-\alpha^{n+2}}{1+\alpha^{n+2}} = \frac{1-\alpha^{n+2}}{1+\alpha^{n+2}}$$

البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}} - 1$ ثمّ حساب من جديد $\lim_{n\to+\infty} v_n$

• من أجل $n=0$ لدينا : $v_0 = 3 = 4 - 1 = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} - 1 = \frac{2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{0+1}} - 1$ ومنه الخاصية " $v_n = \frac{2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}} - 1$ " محقّقة من أجل $n=0$.

• نفرض أنّ : $v_n = \frac{2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}} - 1$ ونبرهن أنّ : $v_{n+1} = \frac{2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}} - 1$.

$$v_{n+1} = \frac{3+v_n}{1+3v_n} = \frac{3+\left(\frac{2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}} - 1\right)}{1+3\left(\frac{2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}} - 1\right)} = \frac{2+\frac{2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}}{-2+\frac{6}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}} = \frac{2\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)+2}{-2\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)+6}$$

$$= \frac{4+2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{4-2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}} = \frac{4\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}{4\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)} = \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}} = \frac{2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}} - 1$$

إذن حسب البرهان بالتراجع فإنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ : $v_n = \frac{2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}} - 1$.

ولدينا : $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}} - 1\right) = 1$ لأنّ : $-1 \prec -\frac{1}{2} \prec 1$.

الجزء الخامس

1 دراسة تغيّرات الدّالة f_3 على المجال $[1;4]$

المشتقة

الدّالة f_3 معرّفة وقابلة للاشتقاق على المجال $[1;4]$ ودالتها المشتقة هي :

$$f_3'(x) = \frac{\frac{1+3x-3(3+x)}{(1+3x)^2}}{\frac{3+x}{1+3x}} + 1 = \frac{-8}{(3+x)(1+3x)} + 1 = \frac{-8+3+9x+x+3x^2}{(3+x)(1+3x)} = \frac{3x^2+10x-5}{(3+x)(1+3x)}$$

إشارة $f_3'(x)$ من إشارة $3x^2+10x-5$ لأنّ : $(3+x)(1+3x)$ موجب تماما على المجال $[1;4]$.

لنحل المعادلة التالية : $3x^2+10x-5=0$ مميزها هو $\Delta = b^2-4ac = 100+60 = 160$ وعليه : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{160}$ إذن حلولها هي :
$x_1 = \frac{-10-\sqrt{160}}{6}$ و $x_2 = \frac{-10+\sqrt{160}}{6}$. وتكون إشارة كثير الحدود $A(x)=3x^2+10x-5$ كالتالي :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$A(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

لكن : $x \in [1;4]$ و $x_2 \prec 1$ ومنه : $f_3'(x) \succ 0$ إذن الدّالة f_3 متزايدة تماما على المجال $[1;4]$. ويكون جدول تغيّراتها كمايلي :

x	1	4
$f_3'(x)$	$+$	
$f_3(x)$	$1 \nearrow$	$\ln\left(\frac{7}{13}\right)+4$

2 تبيين أنّ $\ln\left(\frac{3+x}{1+3x}\right) = \ln\left(\frac{1}{3}+\frac{8}{3+9x}\right)$

$$\ln\left(\frac{1}{3}+\frac{8}{3+9x}\right) = \ln\left(\frac{1+3x}{3+9x}+\frac{8}{3+9x}\right) = \ln\left(\frac{9+3x}{3+9x}\right) = \ln\left(\frac{3(3+x)}{3(1+3x)}\right) = \ln\left(\frac{3+x}{1+3x}\right)$$

دراسة وضعية المنحنى (C_{f_3}) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ على $[1;4]$

لدينا : $\ln\left(\frac{1}{3}+\frac{8}{3+9x}\right) = \ln\left(\frac{3+x}{1+3x}\right) = f_3(x)-x = f_3(x)-y$.

دراسة إشارة $f_3(x)-y$

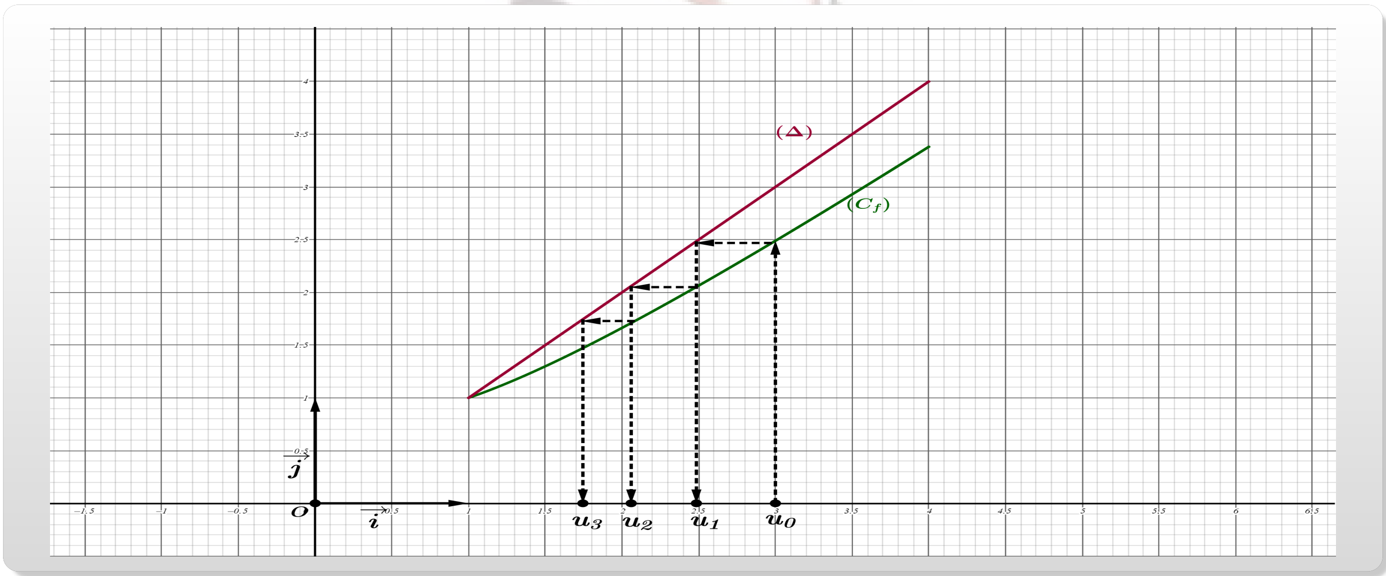
$f_3(x)-y=0$ معناه : $\ln\left(\frac{3+x}{1+3x}\right)=0$ أي : $\frac{3+x}{1+3x}=1$ معناه : $3+x=1+3x$ ومنه : $x=1$.

لمّا $1 \prec x$ يكافئ : $9 \prec 9x$ معناه : $12 \prec 9x+3$ أي : $\frac{1}{9x+3} \prec \frac{1}{12}$ يكافئ : $\frac{1}{3}+\frac{1}{9x+3} \prec \frac{5}{12}$ وعليه : $\ln\left(\frac{1}{3}+\frac{8}{3+9x}\right) \prec \ln\left(\frac{5}{12}\right)$

ومنه : $f_3(x)-y \prec 0$.

- لمّا $x \in]1;4]$ المنحنى (C_{f_3}) يقع تحت المستقيم (Δ) و يتقاطعان في النقطة $(1;1)$.

3 إنشاء المنحنى (C_{f_3}) على المجال $[1;4]$



إنشاء المنحنى (C_{f_3}) وتمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3

4 برهان أنّه إذا كان $x \in [1;4]$ فإنّ : $f_3(x) \in [1;4]$

لدينا : $x \in [1;4]$ معناه : $1 \preceq x \preceq 4$ بما أنّ الدّالة f_3 متزايدة فإنّ : $f_3(1) \preceq f_3(x) \preceq f_3(4)$ يكافئ : $1 \preceq f_3(x) \preceq \ln\left(\frac{7}{13}\right)+4$ بما أنّ : $4 \prec \ln\left(\frac{7}{13}\right)+4$ فإنّ : $1 \preceq f_3(x) \preceq 4$ ومنه : $f_3(x) \in [1;4]$.

الجزء السادس

1 تبرير وجود المتتالية (u_n)

لدينا من السؤال 4 في الجزء الخامس فإنّ : $u_n \in [1;4]$ وعليه المتتالية (u_n) موجودة .

تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 ممثّلة في الرسم السابق .

وضع تخمين حول اتّجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها

من خلال البيان نلاحظ أنّ حدود المتتالية (u_n) تتناقص وبالتالي نُخمّن أنّها متناقصة كما نلاحظ أنّها تتقارب نحو نقطة تقاطع المنحنى (C_{f_3}) مع المنصف الأول (المستقيم (Δ)) وعليه نُخمّن أنّها متقاربة نحو النقطة ذات الفاصلة 1 .

2 البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \preceq u_n \prec 4$

- من أجل $n=0$ لدينا $u_0 = 3$ ونعلم أنّ : $1 \preceq 3 \prec 4$ ومنه : $1 \preceq u_0 \prec 4$ ومنه الخاصية " $1 \preceq u_n \prec 4$ " محقّقة من أجل $n=0$.
- نفرض أنّ : $1 \preceq u_n \prec 4$ ونبرهن أنّ : $1 \preceq u_{n+1} \prec 4$.

لدينا من الفرض : $1 \preceq u_n \prec 4$ بما أنّ الدّالة f_3 متزايدة فإنّ : $f_3(1) \preceq f_3(u_n) \prec f_3(4)$ يكافئ : $1 \preceq u_{n+1} \prec \ln\left(\frac{7}{13}\right)+4$ بما أنّ : $4 \prec \ln\left(\frac{7}{13}\right)+4$ فإنّ : $1 \preceq u_{n+1} \prec 4$.

إذن حسب البرهان بالترجع فإنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ : $1 \preceq u_n \prec 4$.

تبيين أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} \preceq u_n$ ثمّ استنتاج إتّجاه تغيّر المتتالية (u_n)

وجدنا ممّا سبق أنّه من أجل كل x من المجال $[1;4]$ فإنّ : $f_3(x) - x \preceq 0$ وعليه بما أنّ : $1 \preceq u_n \prec 4$ فإنّ : $f_3(u_n) - u_n \preceq 0$ أي : $f_3(u_n) \preceq u_n$ إذن : $u_{n+1} \preceq u_n$ هذا ما يبيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة .

إثبات أنّ المتتالية (u_n) متقاربة

لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $1 \preceq u_n \prec 4$ معناه المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد 1 وبما أنّها متناقصة فإنّها متقاربة نحو 1 .

إيجاد نهاية المتتالية (u_n)

بما أنّ المتتالية (u_n) متقاربة فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$ حيث l عدد حقيقي .

<u>إيجاد l</u>

لدينا : $f_3(l) = l$ يكافئ : $\ln\left(\frac{3+l}{1+3l}\right)+l = l$ أي : $\ln\left(\frac{3+l}{1+3l}\right) = 0$ معناه : $\frac{3+l}{1+3l} = 1$ وبالتالي : $3+l = 1+3l$ ومنه : $l = 1$

إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

3 تبيين أنّه من أجل كل x من المجال $[1;4]$ فإنّ : $f_3'(x) \preceq f_3'(4)$

الدّالة f_3' معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $[1;4]$ ودالتها المشتقة هي :

$$f_3''(x) = \frac{(6x+10)(3+x)(1+3x) - (6x+10)(3x^2+10x-5)}{(3+x)^2(1+3x)^2} = \frac{(6x+10)\left[3x^2+10x+3-(3x^2+10x-5)\right]}{(3+x)^2(1+3x)^2}$$

ومنه : $f_3''(x) = \dfrac{16(3x+5)}{(3+x)^2(1+3x)^2}$ ، واضح أنّه من أجل كل x من المجال : $[1;4]$ فإنّ : $f_3''(x) \succ 0$ ومنه الدّالة f_3' متزايدة تماما على $[1;4]$.

لدينا : $x \preceq 4$ وعليه بما أنّ الدّالة f_3' متزايدة تماما على المجال $[1;4]$ فإنّ : $f_3'(x) \preceq f_3'(4)$ و.ه.م .

حساب $f_3'(4)$

$$f_3'(4) = \frac{3(4)^2+10(4)-5}{(3+4)(1+3(4))} = \frac{3(16)+40-5}{(7)(13)} = \frac{83}{91}$$

تبيين أنّه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - 1 \preceq \frac{83}{91}(u_n - 1)$

لدينا : $f_3{}'(x) \preceq f_3{}'(4)$ وبما أنّ الدّالة f_3' مستمرة فإنّها تقبل المكاملة على المجال $[1;4]$ وبما أنّ : $1 \preceq u_n \prec 4$ فإنّ : $\int_1^{u_n} f_3{}'(x)\,dx \preceq \int_1^{u_n} f_3{}'(4)\,dx$

يكافئ : $\int_1^{u_n} f_3{}'(x)\,dx \preceq f_3{}'(4)\int_1^{u_n} dx$ معناه : $[f_3(x)+c_1]_1^{u_n} \preceq f_3{}'(4)[x+c_2]_1^{u_n}$ - حيث c_1 و c_2 عددين حقيقين -

وعليه : $f_3(u_n) - f_3(1) \preceq f_3{}'(4)(u_n - 1)$ ومنه : $u_{n+1} - 1 \preceq \frac{83}{91}(u_n - 1)$ وهو.م .

تبيين أنّه من أجل كل n عدد طبيعي : $0 \preceq u_n - 1 \preceq 2\left(\frac{83}{91}\right)^n$

باستعمال المتباينة السابقة - $u_{n+1} - 1 \preceq \frac{83}{91}(u_n - 1)$ - لدينا :

$$\begin{aligned}
n=0 &\;:\; u_1 - 1 \preceq \frac{83}{81}(u_0 - 1)\\
n=1 &\;:\; u_2 - 1 \preceq \frac{83}{81}(u_1 - 1)\\
n=2 &\;:\; u_3 - 1 \preceq \frac{83}{81}(u_2 - 1)\\
&\;\vdots\\
n=n-2 &\;:\; u_{n-1} - 1 \preceq \frac{83}{81}(u_{n-2} - 1)\\
n=n-1 &\;:\; u_n - 1 \preceq \frac{83}{81}(u_{n-1} - 1)
\end{aligned}$$

بضرب المتباينات طرف بطرف نجد :

$$(u_1-1)(u_2-1)(u_3-1)\,.........\,(u_{n-1}-1)(u_n-1) \preceq \left(\frac{83}{91}\right)^n (u_0-1)(u_1-1)(u_2-1)\,.........\,(u_{n-2}-1)(u_{n-1}-1)$$

إذن بعد الاختزالات نجد : $(u_n - 1) \preceq \left(\frac{83}{91}\right)^n (u_0 - 1)$ يكافئ : $u_n - 1 \preceq \left(\frac{83}{91}\right)^n (3-1)$ ومنه : $u_n - 1 \preceq 2\left(\frac{83}{91}\right)^n$ هذا من جهة

ومن جهة أخرى لدينا : $1 \preceq u_n$ وعليه : $0 \preceq u_n - 1$ إذن نجد : $0 \preceq u_n - 1 \preceq 2\left(\frac{83}{91}\right)^n$ وهو.م .

استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

لدينا : $0 \preceq u_n - 1 \preceq 2\left(\frac{83}{91}\right)^n$ وكذلك $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\left(\frac{83}{91}\right)^n = 0$ لأنّ : $-1 \prec \frac{83}{91} \prec 1$ إذن حسب النّهايات بالحصر نتحصّل على :

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - 1) = 0$ ومنه : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

4 حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$

لدينا : $f_3(u_k) = \ln\left(\frac{3+u_k}{1+3u_k}\right) + u_k$ يكافئ : $-\ln\left(\frac{3+u_k}{1+3u_k}\right) = u_k - f_3(u_k)$ ومنه : $\ln\left(\frac{1+3u_k}{3+u_k}\right) = u_k - u_{k+1}$ إذن :

$$\begin{aligned}
T_n &= \ln\left(\frac{1+3u_0}{3+u_0}\right) + \ln\left(\frac{1+3u_1}{3+u_1}\right) + \ln\left(\frac{1+3u_2}{3+u_2}\right) + \,...............\, + \ln\left(\frac{1+3u_{n-1}}{3+u_{n-1}}\right)\\
&= (u_0 - u_1) + (u_1 - u_2) + (u_2 - u_3) + \,...............\, + (u_{n-2} - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_n)\\
&= u_0 - u_n
\end{aligned}$$

ومنه : $T_n = 3 - u_n$. وعليه : $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(3 - u_n) = 3 - \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3 - 1 = 2$.

الجزء السابع

لدينا : $L_{n+1} = 2L_n f_5(L_n) - L_n^2 = 2L_n\left(\ln\left(\frac{5+L_n}{1+5L_n}\right) + L_n\right) - L_n^2 = 2L_n \cdot \ln\left(\frac{5+L_n}{1+5L_n}\right) + 2L_n^2 - L_n^2 = 2L_n \cdot \ln\left(\frac{5+L_n}{1+5L_n}\right) + L_n^2$

وعليه نلاحظ أنّ : $L_{n+1} = g(L_n)$.

1 البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ : $0 \preceq L_n \preceq 1$

● من أجل $n = 0$ لدينا : $L_0 = \frac{1}{5}$ ونعلم أنّ : $0 \preceq \frac{1}{5} \preceq 1$ وعليه : $0 \preceq L_0 \preceq 1$ إذن الخاصية " $0 \preceq L_n \preceq 1$ " محقّقة من أجل $n = 0$.

• نفرض أنّ : $0 \preceq L_n \preceq 1$ ونبرهن أنّ : $0 \preceq L_{n+1} \preceq 1$.

لدينا من الفرض : $0 \preceq L_n \preceq 1$ بما أنّ الدّالة g متزايدة فإنّ : $g(0) \preceq g(L_n) \preceq g(1)$ وعليه : $0 \preceq L_{n+1} \preceq 1$.

إذن حسب البرهان بالتراجع فإنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ : $0 \preceq L_n \preceq 1$.

2 تبيين أنّه من أجل كل $x \in [0;1]$: $2\ln\left(\dfrac{5+x}{1+5x}\right) + x \succeq 1$

نضع من أجل كل x من المجال $[0;1]$: $h(x) = 2\ln\left(\dfrac{5+x}{1+5x}\right) + x$.

الدّالة h معرّفة وقابلة للاشتقاق على المجال $[0;1]$ ودالتها المشتقة هي :

$$h'(x) = 2\left(\frac{\dfrac{1+5x-5(5+x)}{(1+5x)^2}}{\dfrac{5+x}{1+5x}}\right) + 1 = 2\left(\frac{-24}{(1+5x)(5+x)}\right) + 1 = \frac{5x^2+26x-43}{(1+5x)(5+x)}$$

إشارة $h'(x)$ من إشارة $5x^2+26x-43$ لأنّ : $(5+x)(1+5x)$ موجب تماما على المجال $[0;1]$.

لحل المعادلة التالية : $5x^2+26x-43 = 0$ مميزها هو $\Delta = b^2-4ac = 676+860 = 1536$ وعليه : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{1536}$ إذن حلولها هي :

$x_1 = \dfrac{-13-8\sqrt{6}}{5}$ و $x_2 = \dfrac{-13+8\sqrt{6}}{5}$. وتكون إشارة كثير الحدود 5 $B(x) = 3x^2+10x-5$ كالتالي :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$B(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

لكن : $x \in [0;1]$ و $x_2 \succ 1$ و $x_1 \prec 0$ ومنه : $h'(x) \prec 0$ إذن الدّالة h متناقصة تماما على المجال $[0;1]$.

وعليه لمّا : $x \preceq 1$ وبما أنّ الدّالة h متناقصة تماما على المجال $[0;1]$ فإنّ : $h(x) \succeq h(1)$ أي : $h(x) \succeq 1$ ومنه : $2\ln\left(\dfrac{5+x}{1+5x}\right) + x \succeq 1$ و.هـ.م .

إثبات أنّ المتتالية (L_n) متزايدة

بما أنّ حدود المتتالية (L_n) موجبة فإنّ :

$$\frac{L_{n+1}}{L_n} = \frac{2L_n f_5(L_n) - L_n^2}{L_n} = 2f_5(L_n) - L_n = 2\left(\ln\left(\frac{5+L_n}{1+5L_n}\right) + L_n\right) - L_n = 2\ln\left(\frac{5+L_n}{1+5L_n}\right) + L_n$$

ومن السؤال السابق

وجدنا أنّه من أجل كل x من المجال $[0;1]$ فإنّ : $2\ln\left(\dfrac{5+x}{1+5x}\right) + x \succeq 1$ وبما أنّ : $0 \preceq L_n \preceq 1$ فإنّ : $2\ln\left(\dfrac{5+L_n}{1+5L_n}\right) + L_n \succeq 1$ وعليه :

$\dfrac{L_{n+1}}{L_n} \succeq 1$ ومنه : $L_{n+1} \succeq L_n$ إذن : $L_{n+1} - L_n \succeq 0$ لنجد في الأخير أنّ المتتالية (L_n) متزايدة و.هـ.م .

تبيين أنّ (L_n) متقاربة ثمّ إيجاد نهايتها

وجدنا أنّ : $0 \preceq L_n \preceq 1$ هذا معناه أنّ المتتالية (L_n) محدودة من الأعلى بالعدد 1 وبما أنّها متزايدة فهي متقاربة نحو 1 .

إيجاد نهاية المتتالية (L_n)

بما أنّ (L_n) متقاربة فإنّ : $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n = \lim\limits_{n\to+\infty} L_{n+1} = l_1$ حيث l_1 عدد حقيقي .

لدينا : $l_1 = g(l_1)$ أي : $g(l_1) - l_1 = 0$ ومنه حسب ماهو معطى $g(x) - x = 0$ لمّا $x = 1$ نجد أنّ : $l_1 = 1$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n = 1$.

3 تبيين أنّ المتتاليتان (u_n) و (L_n) متجاورتان

وجدنا ممّا سبق أنّ :

• المتتالية (u_n) متناقصة بينما المتتالية (L_n) متزايدة .

• $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

إذن المتتاليتان (u_n) و (L_n) متجاورتان .

بالتوفيق والنّجاح إن شاء الله في شهادة البكالوريا

أعظم هندسة في العالم :

بناء جسرٍ من الأمل ... على نهرٍ من اليأس !!