على درب البكالوريا

نهائي رياضيات و تقني رياضي

تمارين متنوعة حول الحساب

في مجموعة الأعداد الصحيحة

الأستاذ :محمدعلالو

السنة الدراسية 2022-2023

المقدمة

يشرفني أن أضع بين أيدي تلاميذ شعبتي الرياضيات و تقني رياضي المقبلين على امتحان شهادة البكالوريا 2022-2023 . هذا العمل المتواضع الذي يضم 63 تمرينا حول الحساب في مجموعة الأعداد الصحيحة .

30 منها مرفقة بالحلول

لا تنسونا بالدعاء الصالح خلال هذا الشهر الفضيل

مع أخلص المنى بالتوفيق و النجاح للجميع

الأستاذ : محمد علالو

Un peu d'histoire

Pierre de Fermat (17 août 1601 [Beaumont-de-Lomagne] -12 janvier 1665 [Castres]

Pierre de Fermat était un génial mathématicien français du XVIIè siècle, qui a contribué avec Descartes à la création de la géométrie analytique (il est le premier à donner une méthode générale pour la détermination des tangentes à une courbe plane), à celle du calcul infinitésimal (avec Leibniz et Newton), et à celle du calcul des probabilités (avec Pascal). C'est surtout le fondateur de la théorie moderne des nombres, la branche des mathématiques qui étudie les nombres entiers.
Né près de Toulouse (précisément à Beaumont de Lomagne) en 1601, d'un père négociant en cuir, Fermat a toujours vécu bien loin des centres intellectuels européens. Il n'était d'ailleurs pas mathématicien professionnel, mais magistrat (il fut aussi conseiller au parlement de Toulouse à partir de 1631, puis membre de la chambre de l'édit de Castres), et il ne participa à la vie mathématique de son époque que par sa correspondance privée avec d'autres savants. Il est mort à Castres en 1665.
Fermat a été très influencé par la lecture des classiques de l'Antiquité, notamment celle de Diophante, mathématicien grec auteur de *l'Arithmetica*, ouvrage que les européens ont redécouvert au milieu du XVIè s. Fermat annotera abondamment la marge de son exemplaire (son fils rééditera *l'Arithmetica* avec les notes de Fermat). Il a annoncé, plus rarement prouvé, de nombreux théorèmes. En 1840, tous étaient démontrés ou invalidés. Tous sauf un : la conjecture appelée grand théorème de Fermat, qui a maintenu les mathématiciens en haleine jusqu'en 1994.
En marge du problème qui consiste à trouver des carrés qui sont sommes de deux autres carrés (on appelle cela chercher des triplets pythagoriciens, car il s'agit des côtés d'un triangle rectangle, par exemple $52=32+4252=32+42$), Fermat écrivit : "*D'autre part, un cube n'est jamais somme de deux cubes, une puissance quatrième n'est jamais somme de deux puissances quatrièmes, et plus généralement aucune puissance supérieure stricte à 2 n'est somme de deux puissances analogues. J'ai trouvé une merveilleuse démonstration de cette proposition, mais je ne peux l'écrire dans cette marge car elle est trop longue*". On ne saura jamais si Fermat avait réellement une preuve de son théorème, c'est peu probable, mais après tout qu'importe! Des générations de mathématiciens s'y sont cassés les dents, tout en y forgeant les outils modernes de l'arithmétique.

On retrouva une démonstration de Fermat pour le cas des puissances 4-ièmes, fondée sur l'ingénieuse méthode de la descente infinie. Il a fallu attendre 100 ans pour que Leonhard Euler fournisse une démonstration du cas n=3, avec une erreur certes, mais les idées essentielles y étaient, puis 1820 pour que Dirichlet et Legendre traitent le cas n=5. Un grans pas fut franchi par Kümmer au milieu du XIXè s. avec des travaux très importants sur les entiers cyclotomiques. Il est parvenu à démontrer le théorème pour tous les exposant premiers inférieurs à 100, hormis 37, 59 et 67.
Il faudra attendre le 19 septembre 1994, et le mathématicien anglais Andrew Wiles, pour qu'après nombre de progrès, le théorème de Fermat soit entièrement résolu. La démonstration de Wiles prend environ 1000 pages. Il n'y avait effectivement pas assez de place dans la marge!

Les entrées du Dicomaths correspondant à Fermat

- *Equation de Pell-Fermat*
- *Grand théorème de Fermat*
- *Nombres premiers de Fermat, et polygones réguliers*
- *Petit théorème de Fermat*
- *Point de Torricelli/Fermat*

Etienne Bézout (31 mars 1730 [Nemours] - 27 septembre 1783 [Les Basses-Loges])

Étienne Bézout est un mathématicien français du siècle des Lumières, contemporain de d'Alembert. Il est né à Nemours le 31 mars 1730. Bézout étudie au collège de sa ville natale; son père est magistrat, il décède en 1750, année où Étienne Bézout termine sa scolarité. Ce dernier hérite d'un petit pécule qui lui permet d'aller étudier et enseigner les mathématiques à Paris. Il est alors remarqué par d'Alembert sous la direction duquel il écrit deux mémoires consacrés l'un à la mécanique, l'autre aux intégrales elliptiques. Ces travaux lui permettent d'être élu académicien adjoint en 1758. Il travaille sur ces sujets de la dynamique et de l'intégration jusqu'en 1762, date à partir de laquelle il se consacre aux équations algébriques.

En 1764, le duc de Choiseul, ministre de la Marine, décide de réorganiser complètement la formation des officiers de la Marine royale et charge Étienne Bézout de cette responsabilité. C'est une lourde charge, qui lui impose d'écrire un cours et de se déplacer plusieurs mois par an à Brest, Rochefort et Toulon pour faire passer les examens des gardes de la marine, et qui l'éloigne de l'Académie. Il accepte pourtant cette mission, sans doute pour des besoins financiers, et aussi peut-être par goût de l'enseignement. A partir de 1768, il est de plus nommé examinateur des écoles d'Artillerie. Le cours qu'il écrira pour ces écoles militaires, *Cours complet de mathématiques à l'usage de la marine et de l'artillerie* eut un grand succès, et fut un livre très populaire parmi les étudiants préparant l'École Polytechnique lorsque celle-ci fut créée; il fut aussi choisi par l'université d'Harvard comme ouvrage de référence pour son cours de calculus.

La carrière académique de Bézout est très ralentie par cette charge. Il ne publie aucun mémoire de recherche entre 1765 et 1779, année où parait son ouvrage principal *Théorie générale des équations algébriques*. Il ne devient pensionnaire de l'Académie qu'en 1782, peu de temps avant sa mort, le 27 septembre 1783.

Bézout n'a pas été particulièrement reconnu de son vivant. Pourtant, son nom est passé à la postérité pour au moins trois travaux :

- l'identité de Bézout, qui dit que deux entiers a et b sont premiers entre eux si et seulement si on peut trouver des entiers u et v tels que au+bv=1. En réalité, ce résultat est dû à Claude Bachet, plus d'un siècle avant Bézout. La contribution de Bézout est d'avoir observé que cela restait vrai pour des polynômes comme conséquence du résultat énoncé ci-dessous. C'est Nicolas Bourbaki, en 1952, qui attribua le résultat à Bézout dans le cadre bien plus général des anneaux principaux.
- la théorie de élimination entre deux équations algébriques : il énonce que si on cherche à résoudre un système d'équation du type P(X)=0 et Q(X)=0où P et Q sont des polynômes, il en résulte une équation de degré le produit des degrés de P et de Q.
    - le théorème de Bézout, qui étudie le nombre de points d'intersection de deux courbes algébriques planes. En termes modernes, deux courbes algébriques planes de degré respectifs m et n se coupent en exactement m×n points, en tenant compte des multiplicités.

Les entrées du Dicomaths correspondant à Bézout

- *Identité de Bachet-Bézout*
- *Théorème de Bézout*

Carl Friedrich Gauss (30 avril 1777 [Brunswick] - 23 février 1855 [Göttingen])

Carl Friedrich Gauss, né le 30 avril 1777 à Brunswick, est considéré par ses pairs comme le prince des mathématiciens. Il est à la fois le dernier des classiques, et le premier des modernes, c'est-à-dire qu'il a résolu les problèmes les plus classiques avec les méthodes les plus modernes. Par exemple, il démontra comment partager une tarte en 17 parts égales à l'aide des seuls règle et compas, ce qui était un problème ouvert depuis les grecs. Mieux, il démontra pour quels nombres ce partage en parts égales est possible.

Gauss est né dans une famille modeste : sa mère était femme de chambre, son père exerçait toute sorte de métiers, du jardinage à la trésorerie d'une société d'assurances. Il est un élève particulièrement précoce. Un épisode célèbre (peut-être romancé!) de son enfance rapporte qu'alors qu'il était âgé de 9 ans, son maître demanda de calculer 1+2+...+100. Gauss inscrivit presque immédiatement le résultat sur son ardoise, ayant trouvé une méthode extrêmement efficace pour calculer de telles sommes.

À11 ans, Gauss entre au lycée, où il étudie latin, grec, mathématiques, etc... Il est un élève tellement brillant que le duc de Brunswick souhaite le rencontrer. Visiblement séduit par cet entretien, le duc le prend sous sa protection et lui accorde une bourse : c'est ainsi que Gauss, quoiqu'issu d'une famille modeste, pourra poursuivre ses études.

Il entre à l'université de Göttingen à l'automne 1795. Un an plus tard, après avoir découvert comment construire à la règle et au compas le polygone régulier à 17 côtés, il décide de se consacrer aux mathématiques. Sa thèse, soutenue en 1799, contient la première démonstration du théorème fondamental de l'algèbre. Deux ans plus tard, il publie *Disquisitiones Arithmaticae*, un ouvrage consacré à la théorie des nombres, où il explore des méthodes complètement nouvelles. Cette même année, en 1801, il détermine l'orbite de Cérès, une planète naine du système solaire, apparue furtivement sur les écrans des télescopes au début de 1801, et disparue ensuite. À cette occasion, Gauss introduit un outil fondamental, la méthode des moindres carrés.

Gauss se marie en 1805 avec Johanna Osthoff; ensemble ils ont trois enfants, mais

son épouse décède des suites du troisième accouchement en 1809. Il se remarie en 1812 et aura à nouveau trois enfants. En 1807, il est nommé directeur de l'observatoire astronomique de Göttingen. Ceci l'éloigne peu à peu des mathématiques les plus abstraites d'autant qu'en 1818, il est chargé de la triangulation du royaume de Hanovre afin d'établir une cartographie de qualité. Ce travail routinier l'amène pendant huit ans à sillonner toute la région de Hanovre et à écrire de nombreux traités de géodésie. La recherche mathématique n'est pas loin cependant, et en 1828, il publie *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, consacré à la géométrie différentielle.
En 1831 arrive à Göttingen Wilhelm Weber avec qui Gauss s'entend à merveille. Pendant six ans, jusqu'à ce que Weber soit chassé de l'Université pour avoir protesté contre le régime, les deux savant mènent des recherches sur l'électro-magnétisme. Ainsi, le "gauss" est devenu l'unité d'induction magnétique.
Gauss achève sa carrière de mathématicien en 1849, à l'occasion d'un jubilé en son honneur. Peu à peu, sa santé se détériore, et il meurt à Göttingen le 23 février 1855 pendant son sommeil.
On trouvera plus d'informations sur Carl Gauss dans le livre qui lui est consacré de la collection "Génies Mathématiques".

Les entrées du Dicomaths correspondant à Gauss

- *Constructions à la règle et au compas*
- *Décomposition de Gauss*
- *Entiers de Gauss*
- *Méthode de Gauss*
- *Méthode de Gauss-Seidel*
- *Méthode de Jacobi*
- *Méthode du pivot de Gauss*
- *Problème du cercle de Gauss*
- *Règle de Gauss*
- *Sommes de Gauss*
- *Théorème de D'Alembert-Gauss*
- *Théorème de Gauss*
- *Théorème de Lucas*

Leonhard Euler (15 avril 1707 - 18 septembre 1783)

Né à Bâle le 15 avril 1707, Leonhard Euler étudia les mathématiques sur les conseils de Johann Bernoulli, qui était ami avec son père. Il s'installa à Saint-Petersbourg, auprès de Pierre le Grand, puis à Berlin sous le règne de Frédéric II, où a chaque fois il rencontra un environnement scientifique exceptionnel. Son oeuvre est considérable. Euler intervint dans les trois domaines fondamentaux de la science de son époque : l'astronomie (orbites planétaires, trajectoires des comètes), les sciences physiques (champs magnétiques, hydrodynamique, optique, nature ondulatoire de la lumière,...), les mathématiques, où il met au premier plan le concept de fonction. On lui doit aussi la très jolie relation entre les nombres de sommets, d'arêtes et de faces d'un polyèdre convexe (ex : le cube, le tétraèdre,...).

La santé d'Euler était assez fragile. Il perdit son oeil droit en 1735, puis son oeil gauche en 1771 en raison d'une cataracte. Il fut donc pendant 12 ans totalement aveugle. Cela obligeait ce mathématicien très prolixe, qui publia 886 ouvrages, le tout en 80 volumes, à faire appel à des personnes de son entourage à qui il dictait ses mémoires. Il décède le 18 septembre 1783 à Saint-Petersbourg d'une hémorragie cérébrale.

Les entrées du Dicomaths correspondant à Euler

- *Constante d'Euler-Mascheroni*
- *Des séries à l'hypothèse de Riemann*
- *Diagramme de Venn*
- *Droite et cercle d'Euler*
- *Fonction Gamma*
- *Fonction homogène*
- *Formule d'Euler - pour les nombres complexes*
- *Formule d'Euler-MacLaurin*
- *Indicateur d'Euler*
- *Méthode d'Euler*
- *Opérateur différentiel*
- *Polyèdres*
- *Ponts de Königsberg et cycle eulérien*

➢ **التمرين 01 :** x و y عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما

1) بين أن $x+y$ أولي مع $x\times y$

2) عين العددان الطبيعيان α و β ، حيث : $\begin{cases}15\alpha^2-229\alpha=30\beta\\PGCD(\alpha;\beta)=1\end{cases}$

3) عين الثنائيات $(x;y)$ بحيث : $15(x^2+y^2)=229(x+y)$ و $PGCD(x;y)=1$

✓ **الحل:**

1) إثبات أن $PGCD(x+y;x\times y)=1$:

نعتبر d القاسم المشترك الأكبر للعددين $x+y$ و $x\times y$ أي أن $d=PGCD(x+y;x\times y)$

إذن d قاسم لكل من $x+y$ و $x\times y$ و عليه d قاسم لكل من $x(x+y)$ و $x\times y$ ومنه d قاسم لـ $x(x+y)-x\times y$ ينتج أن d قاسم لـ x^2 و بالتالي d قاسم لـ x

من جهة أخرى d قاسم لكل من $y(x+y)$ و $x\times y$ ومنه d قاسم لـ $y(x+y)-x\times y$ ينتج أن d قاسم لـ y^2 و بالتالي d قاسم لـ y و عليه d قاسم مشترك لكل من x و y وبما أن $PGCD(x;y)=1$ فإن $d=1$

2) تعيين العددان الطبيعيان α و β ، حيث : $\begin{cases}15\alpha^2-229\alpha=30\beta\\PGCD(\alpha;\beta)=1\end{cases}$

لدينا $15\alpha^2-229\alpha=30\beta$ تكافئ $\alpha(15\alpha-229)=30\beta$ ومنه α قاسم للعدد 30β وبما أن $PGCD(\alpha;\beta)=1$ فإن حسب مبرهنة قوص α قاسم للعدد 30 و بالتالي $\alpha\in\{1;2;3;5;6;10;15;30\}$ و بما أن $15\alpha-229\geq 0$ أي أن $\alpha\geq\frac{229}{15}$ فإن $\alpha=30$ نجد عندئذ $15(30)^2-229(30)=30\beta$ ومنه $\beta=221$

3) عين الثنائيات $(x;y)$ بحيث : $15(x^2+y^2)=229(x+y)$

بما أن $x^2+y^2=(x+y)^2-2x\times y$ فإن $15(x^2+y^2)=229(x+y)$ تكافئ $15\left[(x+y)^2-2x\times y\right]=229(x+y)$ نجد $15(x+y)^2-30x\times y=229(x+y)$ ومنه $15(x+y)^2-229(x+y)=30x\times y$

وبوضع $x+y=\alpha$ و $x\times y=\beta$ نجد $15\alpha^2-229\alpha=30\beta$ وعليه حسب ما سبق $x+y=30$ و $x\times y=221$ لأن إذا كان x و y أوليان فيما بينهما فإن $x+y$ أولي مع $x\times y$

إن x و y هما حلي المعادلة التالية: $t^2-30t+221=0$ وعليه($x=13$ و $y=17$)أو($x=17$ و $y=13$)

➢ **التمرين 02 :** x و y عددان طبيعيان غير معدومان ، نضع $x=2a+3b$ و $y=3a+4b$

1) بين أن $PGCD(a;b)=PGCD(x;y)$

2) عين الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية بحيث $\begin{cases}(2a+3b)(3a+4b)=2200\\PGCD(a;b)=5\end{cases}$

✓ **الحل :**

1) نبين أن $PGCD(a;b)=PGCD(x;y)$:

لنضع $d=PGCD(a;b)$ و $d'=PGCD(x;y)$ و لنبرهن أن $d=d'$

أ. بما أن $d=PGCD(a;b)$ فإن d قاسم لـ a و قاسم لـ b ومنه d قاسم لـ $2a+3b$ و قاسم لـ $3a+4b$

أي أن d قاسم مشترك لكل من x و y و بما أن $d'=PGCD(x;y)$ فإن $d\le d'$

ب. بما أن $d'=PGCD(x;y)$ فإن d' قاسم لـ x و قاسم لـ y ومنه d قاسم لـ $3y-4x$ و قاسم لـ $3x-2y$

أي أن d قاسم مشترك لكل من a و b و بما أن $d=PGCD(a;b)$ فإن $d'\le d$

من أ وب ينتج أن $d=d'$

2) تعيين الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية بحيث $\begin{cases}(2a+3b)(3a+4b)=2200\\ PGCD(a;b)=5\end{cases}$

بما أن $PGCD(a;b)=5$ فإنه يوجد a' و b' من $\mathbb{N}^*$ بحيث $a=5a'$ و $b=5b'$ مع $PGCD(a';b')=1$

و عليه $(2a+3b)(3a+4b)=2200$ تكافئ $25(2a'+3b')(3a'+4b')=2200$

نجد $(2a'+3b')(3a'+4b')=88$ و بما أن $(2a'+3b')\le(3a'+4b')$ فإن

$\begin{cases}2a'+3b'=1\\3a'+4b'=88\end{cases}$ أو $\begin{cases}2a'+3b'=2\\3a'+4b'=44\end{cases}$ أو $\begin{cases}2a'+3b'=4\\3a'+4b'=22\end{cases}$ أو $\begin{cases}2a'+3b'=8\\3a'+4b'=11\end{cases}$ وعليه

$\begin{cases}a'=260\\b'=-173\end{cases}$ (مرفوضة) أو $\begin{cases}a'=124\\b'=-82\end{cases}$ (مرفوضة) أو $\begin{cases}a'=50\\b'=-32\end{cases}$ (مرفوضة) أو $\begin{cases}a'=1\\b'=2\end{cases}$ (مقبولة)

وعليه توجد ثنائية وحيدة تحقق المطلوب هي $(5;10)$

➢ **التمرين03 :**

n عدد صحيح، نعتبر الجملة (S) ذات المجهول n التالية : (S)... $\begin{cases}n\equiv 13[19]\\ n\equiv 6[12]\end{cases}$

(1 أ. تحقق أن المعادلة (E)... $19u+12v=1$ تقبل على الأقل حلا $(u;v)$ في المجموعة $\mathbb{Z}^2$

ب. بين أنه إذا كانت $(u;v)$ حل للمعادلة (E) فإن $N=(13\times 12v)+(6\times 19u)$ حل للجملة (S)

(2 أ. بين : (الجملة (S)) تكافئ $\left(\begin{cases}n\equiv N[19]\\ n\equiv N[12]\end{cases}\right)$

ب. بين أن : $\left(\begin{cases}n\equiv N[19]\\ n\equiv N[12]\end{cases}\right)$ تكافئ $(n\equiv N[12\times 19])$

(3 أ. بإستعمال خوارزمية إقليدس عين الثنائية $(u;v)$ التي هي حل للمعادلة (E) ، ثم عين قيمة N

ب. عين حلول الجملة (S)

(4 a عدد طبيعي باقي قسمته على 12 هو 6 و باقي قسمته على 19 هو 13 ، عين باقي قسمة a على 228

✓ **الحل:**

1) أ. نتحقق أن المعادلة (E)... $19u+12v=1$ تقبل على الأقل حلا $(u;v)$ في المجموعة $\mathbb{Z}^2$

بما أن 19 عدد أولي لا يقسم العدد 12 فإن $PGCD(12;19)=1$ و عليه حسب مبرهنة بيزو توجد على الأقل

$(u;v)$ من $\mathbb{Z}^2$ تحقق $19u+12v=1$ أي أن المعادلة (E) تقبل على الأقل حلا $(u;v)$ في المجموعة $\mathbb{Z}^2$

ب. بين أنه إذا كانت $(u;v)$ حل للمعادلة (E) فإن $N=(13\times12v)+(6\times19u)$ حل للجملة (S) :

بما أن $(u;v)$ حل للمعادلة (E) فإن $19u+12v=1$ ومنه $19u=1-12v$

وعليه $N=(12\times13v)+6(1-12v)$ إذن $N=(12\times7v)+6$ و بالتالي $N\equiv6[12]$

كذلك $12v=1-19u$ وعليه $N=13\times(1-19u)+(6\times19u)$ إذن $N=19\times(-7u)+13$

و بالتالي $N\equiv13[19]$ ، ينتج أن $N=(13\times12v)+(6\times19u)$ حل للجملة (S)

2) أ. نبين : (الجملة (S)) تكافئ $\left(\begin{cases}n\equiv N[19]\\n\equiv N[12]\end{cases}\right)$

(1) إذا كان n حل للجملة (S) فإن $\begin{cases}n\equiv13[19]\\n\equiv6[12]\end{cases}$ و بما أن N حل للجملة (S) فإن $\begin{cases}N\equiv13[19]\\N\equiv6[12]\end{cases}$

و عليه $\begin{cases}13\equiv N[19]\\6\equiv N[12]\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}n\equiv N[19]\\n\equiv N[12]\end{cases}$

(2) بالعكس : إذا كان $\begin{cases}n\equiv N[19]\\n\equiv N[12]\end{cases}$ و بما أن N حل للجملة (S) فإن $\begin{cases}N\equiv13[19]\\N\equiv6[12]\end{cases}$ و عليه $\begin{cases}n\equiv13[19]\\n\equiv6[12]\end{cases}$

من (1) و (2) ينتج أن : (الجملة (S)) تكافئ $\left(\begin{cases}n\equiv N[19]\\n\equiv N[12]\end{cases}\right)$

ب. نبين أن : $\left(\begin{cases}n\equiv N[19]\\n\equiv N[12]\end{cases}\right)$ تكافئ $(n\equiv N[12\times19])$

(1) إذا كان $\begin{cases}n\equiv N[19]\\n\equiv N[12]\end{cases}$ فإن $\begin{cases}(n-N)\equiv0[19]\\(n-N)\equiv0[12]\end{cases}$ أي أن 19 قاسم للعدد $(n-N)$ و 12 قاسم للعدد $(n-N)$

و بما أن 19 أولي مع 12 فإن (19×12) قاسم للعدد $(n-N)$ أي أن $n-N\equiv0[12\times19]$ وعليه $n\equiv N[12\times19]$

(2) بالعكس :

إذا كان $n\equiv N[12\times19]$ أي أن $n-N\equiv0[12\times19]$ فإنه يوجد عدد صحيح k حيث $n-N=(12\times19)k$

أي أن $n-N=12(19k)$ و $n-N=19(12k)$ و بالتالي $n-N\equiv0[12]$ و $n-N\equiv0[19]$ ومنه $\begin{cases}n\equiv N[19]\\n\equiv N[12]\end{cases}$

من (1) و (2) ينتج أنه : $\left(\begin{cases}n\equiv N[19]\\n\equiv N[12]\end{cases}\right)$ تكافئ $(n\equiv N[12\times19])$

2) أ. باستعمال خوارزمية إقليدس نعين الثنائية $(u;v)$ التي هي حل للمعادلة (E)، ثم نعين قيمة N :

لدينا $19=12(1)+7$ و $12=7(1)+5$ و $7=5(1)+2$ و $5=2(2)+1$

إذن $1=5-2(2)$ وبما أن $2=7-5(1)$ فإن $1=5-2(7-5)$ أي أن $5(3)+7(-2)=1$

و بما أن $5=12-7(1)$ فإن $(12-7)(3)+7(-2)=1$ أي أن $12(3)+7(-5)=1$

و بما أن $7=19-12(1)$ فإن $12(3)+(19-12)(-5)=1$ أي أن $19(-5)+12(8)=1$

وبالتالي الثنائية $(-5;8)$ حل للمعادلة (E) وعليه $N=(12\times13\times8)+(6\times19\times(-5))$ أي أن $N=678$

ب. تعيين حلول الجملة (S):

بما أن (الجملة (S)) تكافئ $\begin{pmatrix}\begin{cases}n\equiv N[19]\\ n\equiv N[12]\end{cases}\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}\begin{cases}n\equiv N[19]\\ n\equiv N[12]\end{cases}\end{pmatrix}$ تكافئ $(n\equiv N[12\times19])$

فإن (الجملة (S)) تكافئ $(n\equiv N[12\times19])$ أي أن (الجملة (S)) تكافئ $(n\equiv 678[228])$ أي أن $n\equiv 2[228]$

و عليه حلول الجملة (S) هي : $n=228k+2$ مع k عدد صحيح

4) a عدد طبيعي باقي قسمته على 12 هو 6 و باقي قسمته على 19 هو 13 ، تعيين باقي قسمة a على 228

بما أن باقي قسمة a على 12 هو 6 فإن $a\equiv 6[12]$ و بما أن باقي قسمة a على 19 هو 13 فإن $a\equiv 13[19]$

ينتج أن a حل للجملة (S) ومنه $a=228k+2$ مع k عدد صحيح و بالتالي باقي قسمة a على 228 هو 2

➢ **التمرين 04 :**

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$ التالية: $(E)...\quad 36x-25y=5$

1) أ. برهن أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإن $x\equiv 0[5]$

ب. استنتج حلا خاصا للمعادلة (E) ، ثم حل المعادلة (E)

2) نعتبر الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) مع x و y عددان طبيعيان ، و ليكن d القاسم المشترك الأكبر لهما

أ. عين القيم الممكنة للعدد d

ب. عين كل الثنائيات $(x;y)$ التي من أجلها $d=1$

✓ **الحل :**

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$ التالية: $(E)...\quad 36x-25y=5$

1) أ. نبرهن أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإن $x\equiv 0[5]$:

بما أن فرضا الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإن $36x-25y=5$ ومنه $36x=5(5y+1)$

ينتج أن 5 قاسم لـ $36x$ و بما أن 5 عدد أولي لا يقسم 36 فإن $PGCD(5;36)=1$ و بالتالي حسب مبرهنة قوص 5 قاسم لـ x ومنه $x\equiv 0[5]$

ب. استنتاج حلا خاصا للمعادلة (E) ، ثم تعيين حلول المعادلة (E):

بما أن $x\equiv 0[5]$ فإن $x=5k$ مع k عدد صحيح و بأخذ $k=1$ نجد $x=5$ و $y=7$

و بالتالي الثنائية $(5;7)$ حل خاص للمعادلة (E)

* استنتاج حلول المعادلة (E) :

لدينا $36x-25y=5$ و $36(5)-25(7)=5$ فإن $36x-25y=36(5)-25(7)$

ينتج أن $36(x-5)=25(y-7)\ ...(I)$ و عليه ينتج أن 25 قاسم لـ $36(x-5)$ و بما أن $PGCD(5;36)=1$

فإن $PGCD(25;36)=1$ و منه حسب مبرهنة قوص 25 قاسم لـ $x-5$ إذن $x=25p+5$ مع p عدد صحيح

و بتعويض x في (I) نجد $y=36p+7$ ومنه حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(25p+5;36p+7)$ مع $p\in\mathbb{Z}$

2) نعتبر الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) مع x و y عددان طبيعيان ، و ليكن d القاسم المشترك الأكبر لهما

أ. تعيين القيم الممكنة للعدد d :

بما أن $PGCD(x;y)=d$ فإن d يقسم x و d يقسم y ومنه d يقسم $36x-25y$

و بما أن $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإن $36x-25y=5$ و بالتالي d يقسم 5 وعليه $d=1$ أو $d=5$

ب. تعيين كل الثنائيات $(x;y)$ التي من أجلها $d=1$:

لنبحث أولا عن قيم p من $\mathbb{N}$ التي من أجلها $d=5$:

إن $x\equiv 0[5]$ و $y\equiv 0[5]$ ومنه $25p+5\equiv 0[5]$ و $36p+7\equiv 0[5]$ و بما أن من أجل كل p من $\mathbb{Z}$: $25p+5\equiv 0[5]$

فإن $36p+7\equiv 0[5]$ تكافئ $36p\equiv 3[5]$ و بما أن $36\equiv 1[5]$ فإن $p\equiv 3[5]$ أي أن $p=5q+3$ مع $q\in\mathbb{N}$

ينتج أن من أجل $p=5q+r$ مع $r\in\{0;1;2;4\}$ يكون $d=1$

و عليه الثنائيات هي :

$(125q+5;180q+7)$ ، $(125q+30;180q+43)$ ، $(125q+55;180q+79)$ ، $(125q+105;180q+151)$

➢ التمرين 05 :

1) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$ التالية : $104x-20y=272\ ...(E)$ حيث x و y عددان صحيحان

أ. جدّ $PGCD(20;104)$ ، ثم بين أن المعادلة (E) تقبل حلولا في المجموعة $\mathbb{Z}^2$

ب. بين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإن $x\equiv 3[5]$

جـ. استنتج حلول المعادلة (E)

2) A عدد طبيعي يكتب $\overline{1\alpha\alpha\beta\gamma 3}$ في نظام التعداد الذي أساسه 4 و يكتب $\overline{1\alpha\beta\gamma 1}$ في نظام التعداد الذي أساسه 6

عين الأعداد الطبيعية α ، β و γ ، ثم أكتب A في النظام العشري

3) أ. عين حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 5 و على 7

ب. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2^{12n+4}+2^{12n+9}+A^{1444}+46$ مضاعف للعدد 35

جـ. عين الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية حلول المعادلة (E) و التي تحقق : $2^x+2^y\equiv 0[5]$

✓ الحل:

1) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$ التالية : $104x-20y=272\ ...(E)$ حيث x و y عددان صحيحان

أ. إيجاد $PGCD(20;104)$: لدينا $104=20\times 5+4$ و $20=5\times 4+0$ إذن $PGCD(20;104)=4$

- نبين أن المعادلة (E) تقبل حلولا في المجموعة $\mathbb{Z}^2$:

بما أن $PGCD(20;104)=4$ و 4 قاسم للعدد 272 لأن $272=4\times 68$ فإن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$

ب. نبين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإن $x\equiv 3[5]$:

(E) تكافئ $26x-5y=68$ ومنه $26x=68+5y$ أي أن $26x=5(y+12)+8$ ومنه $26x\equiv 8[5]$

و بما أن $8\equiv 3[5]$ و $26\equiv 1[5]$ فإن $x\equiv 3[5]$

جـ. استنتاج حلول المعادلة (E) :

بما أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإن $x \equiv 3[5]$ ومنه $x = 5k+3$ مع k عدد صحيح

و بتعويض x في المعادلة $26x-5y=68$ نجد $26(5k+3)-5y=68$ و عليه $5y=26(5k)+10$

ومنه $y=26k+2$ و بالتالي حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(5k+3;26k+2)$ مع k عدد صحيح

2) A عدد طبيعي يكتب $\overline{1\alpha\alpha\beta\gamma3}$ في نظام التعداد الذي أساسه 4 و يكتب $\overline{1\alpha\beta\gamma1}$ في نظام التعداد الذي أساسه 6

- تعيين الأعداد الطبيعية α ، β و γ :

إن $A=1\times4^5+\alpha\times4^4+\alpha\times4^3+\beta\times4^2+\gamma\times4+3$ مع $0\le\alpha\le3$ و $0\le\beta\le3$ و $0\le\gamma\le3$

و $A=1\times6^4+\alpha\times6^3+\beta\times6^2+\gamma\times6+1$ مع $0\le\alpha\le5$ و $0\le\beta\le5$ و $0\le\gamma\le5$

نجد $1027+320\alpha+16\beta+4\gamma=1297+216\alpha+36\beta+6\gamma$ ومنه $104\alpha-20\beta=2\gamma+270$

- إذا كان $\gamma=0$ نجد: $104\alpha-20\beta=270$ و بما أن $PGCD(20;104)=4$ و 4 لا يقسم 270

  فإن المعادلة $104\alpha-20\beta=270$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$

- إذا كان $\gamma=1$ نجد : $104\alpha-20\beta=272$ ومنه $\alpha=5k+3$ و $\beta=26k+2$

  وبما أن $0\le\alpha\le3$ و $0\le\beta\le3$ فإن $\alpha=3$ و $\beta=2$

- إذا كان $\gamma=2$ نجد : $104\alpha-20\beta=274$ و بما أن $PGCD(20;104)=4$ و 4 لا يقسم 274

  فإن المعادلة (E) $104\alpha-20\beta=274$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$

- إذا كان $\gamma=3$ نجد : $104\alpha-20\beta=276$ و بما أن $PGCD(20;104)=4$ و 4 يقسم 276

  فإن المعادلة (E) تكافئ $26\alpha-5\beta=69$ أي أن $26(\alpha-1)-5(\beta-5)=68$ ومنه

  $\alpha-1=5k+3$ و $\beta-1=26k+2$ إذن $\alpha=5k+4$ و $\beta=26k+3$

  و بما أن $0\le\alpha\le3$ فإن $0\le5k+4\le3$ أي أن $-\frac{4}{5}\le k\le-\frac{1}{5}$ مرفوضة

  و عليه $\alpha=3$ و $\beta=2$ و $\gamma=1$ و $A=2023$

3) أ. تعيين حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 5 و على 7 :

(1) بواقي قسمة 2^n على 5 : لدينا $2^0\equiv1[5]$ ، $2^1\equiv2[5]$ ، $2^2\equiv4[5]$ ، $2^3\equiv3[5]$ ، $2^4\equiv1[5]$

التعميم :

من أجل كل عدد طبيعي p : $2^{4p}\equiv1[5]$ ، $2^{4p+1}\equiv2[5]$ ، $2^{4p+2}\equiv4[5]$ ، $2^{4p+3}\equiv3[5]$

(2) بواقي قسمة 2^n على 7 : لدينا $2^0\equiv1[7]$ ، $2^1\equiv2[7]$ ، $2^2\equiv4[7]$ ، $2^3\equiv1[7]$.

التعميم :

من أجل كل عدد طبيعي q : $2^{3q}\equiv1[7]$ ، $2^{3q+1}\equiv2[7]$ ، $2^{3q+2}\equiv4[7]$

ب. نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2^{12n+4}+2^{12n+9}+A^{1444}+46$ مضاعف للعدد 35 :

بما أن $35=5\times7$ و $PGCD(5;7)=1$ فإنه يكفي أن نبرهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$2^{12n+4}+2^{12n+9}+A^{1444}+46\equiv0[5] \text{ و } 2^{12n+4}+2^{12n+9}+A^{1444}+46\equiv0[7]$$

(1) إن $2^{12n+4}=2^{4(3n+1)}$ إذن $2^{12n+4}\equiv1[5]$ و $2^{12n+9}=2^{4(3n+2)+1}$ إذن $2^{12n+9}\equiv2[5]$ و بما أن

$2023\equiv(-2)[5]$ فإن $2023^{1444}\equiv2^{1444}[5]$ إذن $2023^{1444}\equiv1[5]$ (لأن $1444=4p$) و $46\equiv1[5]$

و عليه $2^{12n+4}+2^{12n+9}+A^{1444}+46\equiv0[5]$

(2) إن $2^{12n+4}=2^{3(4n+1)+1}$ إذن $2^{12n+4}\equiv 2[7]$ و $2^{12n+9}=2^{3(4n+3)}$ إذن $2^{12n+9}\equiv 1[7]$ و بما أن

$2023\equiv 0[7]$ و $46\equiv 4[7]$ فإن $2^{12n+4}+2^{12n+9}+A^{1444}+46\equiv 0[7]$

جـ. تعيين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) و التي تحقق : $2^x+2^y\equiv 0[35]$ مع $(x;y)$ من $\mathbb{N}^2$

بما أن $35=5\times 7$ و $PGCD(5;7)=1$ فإنه يكفي أن نعين الثنائيات $(x;y)$ بحيث $2^x+2^y\equiv 0[5]$ و $2^x+2^y\equiv 0[7]$

بما أن الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإن $x=5k+3$ و $y=26k+2$ وعليه :

(1) $2^x+2^y\equiv 0[5]$ تكافئ $2^{5k+3}+2^{26k+2}\equiv 0[5]$ و منه $2^x+2^y\equiv 0[5]$ تكافئ $2^{4k+3}\times 2^k+2^{4(6k)+2}\equiv 0[5]$

إذن $2^x+2^y\equiv 0[5]$ تكافئ $3\times 2^k+4\equiv 0[5]$ نجد $2^x+2^y\equiv 0[5]$ تكافئ $2^k\equiv 2[5]$ ينتج أن $k=2p+1$

وعليه $x=5(2p+1)+3$ و $y=26(2p+1)+2$ و بالتالي الثنائيات هي $(10p+8;52p+28)$ مع $p\in\mathbb{N}$

➢ التمرين 06 :

(I) 1) ذكّر بنص مبرهنة بيزو

2) a و b عددان طبيعيان و c عدد صحيح . باستعمال مبرهنة بيزو ، برهن أنه :

إذا كان a قاسما للعدد $b\times c$ و a أولي مع b فإن a قاسم للعدد c

3) p و q عددان طبيعيان أوليا ن فيما بينهما و m عدد صحيح ، برهن أنه :

إذا كان $m\equiv 0[p]$ و $m\equiv 0[q]$ فإن $m\equiv 0[p\times q]$

(II) نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ الجملة (S) التالية : $...(S)$ $\begin{cases} n\equiv 9[17] \\ n\equiv 3[5] \end{cases}$

1) أ. تحقق من وجود ثنائية $(u;v)$ من الأعداد الصحيحة بحيث : $...(E)$ $17u+5v=1$

ب. لنضع $n_0=3\times(17u)+9\times(5v)$ ، تحقق أن n_0 حل للجملة (S)

2) برهن أن : n حل للجملة (S) يكافئ أن $(n-n_0)\equiv 0[85]$

3) استنتج حلول الجملة (S)

4) لدى مكتبي مجموعة من الكتب عددها محصور بين 300 و 400

إذا وضعها في علب ذات 17 كتابا بقي لديه 9 كتب، أما إذا وضعها في علب ذات 5 كتب يبقى لديه 3 كتب

عين عدد الكتب.

✓ الحل:

(I) 1) تذكير نص مبرهنة بيزو:

يكون عددان صحيحان a و b أوليين فيما بينهما إذا وفقط إذا وجد عددان صحيحان u و v حيث $au+bv=1$

2) a و b عددان طبيعيان و c عدد صحيح . باستعمال مبرهنة بيزو ، نبرهن أنه :

إذا كان a قاسما للعدد $b\times c$ و a أولي مع b فإن a قاسم للعدد c

البرهان: بما أن فرضا a أولي مع b فإنه حسب مبرهنة بيزو، يوجد عددان صحيحان u و v حيث $au+bv=1$

ومنه $ac\ u+bc\ v=c$ و بما أن فرضا a قاسم للعدد $b\times c$ و a قاسم للعدد $a\times c$

فإن a قاسم للعدد $ac\ u+bc\ v$ وعليه a قاسم للعدد $ac\ u+bc\ v$ وبما أن $ac\ u+bc\ v=c$

فإن a قاسم للعدد c

3) p و q عددان طبيعيان أوليا ن فيما بينهما و m عدد صحيح ، نبرهن أنه :

إذا كان $m\equiv 0\left[p\right]$ و $m\equiv 0\left[q\right]$ فإن $m\equiv 0\left[p\times q\right]$

بما أن فرضا $m\equiv 0\left[p\right]$ فإنه يوجد عدد طبيعي k بحيث $m=p\times k$

و بما أن فرضا $m\equiv 0\left[p\right]$ $m\equiv 0\left[q\right]$ فإنه يوجد عدد طبيعي k' بحيث $m=q\times k'$

ينتج أن $p\times k=q\times k'$ و عليه q يقسم $p\times k$ و بما أن p و q أوليان فيما بينهما فإن q يقسم k

وبالتالي يوجد عدد طبيعي λ بحيث $k=q\times\lambda$ ومنه $m=(p\times q)\times\lambda$ أي أن $m\equiv 0\left[p\times q\right]$

(II) نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ الجملة (S) التالية : $...(S)\quad \begin{cases} n\equiv 9[17] \\ n\equiv 3[5] \end{cases}$

2) أ. نتحقق من وجود ثنائية $(u;v)$ من الأعداد الصحيحة بحيث : $17u+5v=1 \quad ...(E)$

بما أن 5 عدد أولي لا يقسم 17 فإن 5 أولي مع 17 و عليه حسب مبرهنة بيزو وجود ثنائية $(u;v)$ من الأعداد الصحيحة بحيث : $17u+5v=1 \quad ...(E)$

ب. لنضع $n_0=3\times(17u)+9\times(5v)$ ، نتحقق أن n_0 حل للجملة (S) :

بما أن $n_0=3\times(17u)+9\times(5v)$ و $5v=1-17u$ فإن $n_0=3\times(17u)+9(1-17u)$

أي أن $n_0=17(-102u)+9$ ومنه $n_0\equiv 9[17]$ و كذلك $17u=1-5v$ إذن $n_0=3\times(1-5v)+9\times(5v)$

أي أن $n_0=5\times(-6v)+3$ ومنه $n_0\equiv 3[5]$ ينتج أن n_0 حل للجملة (S)

2) نبرهن أن : n حل للجملة (S) يكافئ أن $(n-n_0)\equiv 0[85]$

أ. إذا كانت n حل للجملة (S) فإن $n\equiv 9[17]$ و $n\equiv 3[5]$ و بما أن n_0 حل للجملة (S) فإن $n_0\equiv 9[17]$ و $n_0\equiv 3[5]$

وعليه $(n-n_0)\equiv 0[17]$ و $(n-n_0)\equiv 0[5]$

و بما أن 5 عدد أولي لا يقسم 17 فإن $PGCD(5;17)=1$ ومنه $(n-n_0)\equiv 0[5\times 17]$ أي أن $(n-n_0)\equiv 0[85]$

ب. إذا كان $(n-n_0)\equiv 0[85]$ فإنه يوجد عدد طبيعي α بحيث $n-n_0=85\lambda$

أي أن $n-n_0=5\times(17\lambda)$ و $n-n_0=17\times(5\lambda)$ ومنه $n\equiv n_0[17]$ و $n\equiv n_0[5]$ و بما أن $n_0\equiv 9[17]$ و $n_0\equiv 3[5]$

فإن $n\equiv 9[17]$ و $n\equiv 3[5]$ و بالتالي n حل للجملة (S)

من أ. وب .ينتج أن : n حل للجملة (S) يكافئ أن $(n-n_0)\equiv 0[85]$

3) استنتاج حلول الجملة (S) :

تعيين الثنائية $(u;v)$:

لدينا $17=5\times 3+2$ و $5=2\times 2+1$ إذن $1=5-2\times 2$ و بما أن $2=17-5\times 3$ فإن $1=5-2\times(17-5\times 3)$

ومنه $1=17(-2)+5(7)$ و عليه الثنائية $(-2;7)$ تحقق $17u+5v=1$ و عليه $n_0=213$

بما أن n حل للجملة (S) يكافئ أن $(n-n_0)\equiv 0[85]$ فإن $(n-213)\equiv 0[85]$ ومنه $n\equiv 213[85]$

أي أن $n\equiv 2[85]$ لأن $213\equiv 2[85]$

4) لدى مكتبي مجموعة من الكتب عددها محصور بين 300 و 400

إذا وضعها في علب ذات 17 كتابا بقي لديه 9 كتب، أما إذا وضعها في علب ذات 5 كتب يبقى لديه 3 كتب

- **تعيين عدد الكتب:**

ليكن x عدد الكتب من المعطيات $x=17\alpha+9$ و $x=5\beta+3$

مع α و β عددان طبيعيان غير معدومان و $300\leq x\leq 400$ ، ومنه $x\equiv 9\ 17$ و $x\equiv 3\ 5$.

حسب ما سبق نجد $x=85\delta+2$ و بما أن $300\leq x\leq 400$ فإن $300\leq 85\delta+2\leq 400$ و عليه $298\leq 85\delta\leq 398$

ومنه $\frac{298}{85}\leq\delta\leq\frac{398}{85}$ و بالتالي $\delta=4$ ، ينتج أن $x=342$

➢ التمرين 07 :

1) عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية لكل من 2^n و 3^n على 5

2) استنتج باقي قسمة العدد $2023^{1444}-2022^{1443}-2021^{1442}+2020^{1441}$ على 5

3) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $3^{3n+2}+2^{n+4}\equiv 0[5]$

4) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـــ : $u_n=2^{n+1}-2\times 3^n$

1. عين الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون u_n مضاعفا للعدد 5

2. نعتبر المجموع S_n بحيث : $S_n=u_0+u_1+...+u_n$

أ. أحسب S_0 ، S_1 ، S_2

ب. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $S_n=2^{n+2}-3^{n+1}-1$

جـ. عين حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي قسمة S_n على 5

✓ الحل:

1) أ. تعيين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية لكل من 2^n على 5 :

لدينا $2^0\equiv 1[5]$ ، $2^1\equiv 2[5]$ ، $2^2\equiv 4[5]$ ، $2^3\equiv 3[5]$ ، $2^4\equiv 1[5]$

التعميم :

من أجل كل عدد طبيعي p : $2^{4p}\equiv 1[5]$ ، $2^{4p+1}\equiv 2[5]$ ، $2^{4p+2}\equiv 4[5]$ ، $2^{4p+3}\equiv 3[5]$

ب. تعيين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية لكل من 3^n على 5 :

لدينا $3^0\equiv 1[5]$ ، $3^1\equiv 3[5]$ ، $3^2\equiv 4[5]$ ، $3^3\equiv 2[5]$ ، $3^4\equiv 1[5]$

التعميم :

من أجل كل عدد طبيعي k : $3^{4k}\equiv 1[5]$ ، $3^{4k+1}\equiv 3[5]$ ، $3^{4k+2}\equiv 4[5]$ ، $3^{4k+3}\equiv 2[5]$

2) استنتاج باقي قسمة العدد $2023^{1444}-2022^{1443}-2021^{1442}+2020^{1441}$ على 5 :

- بما أن $2023\equiv 3[5]$ فإن $2023^{1444}\equiv 3^{1444}[5]$ و بما أن $1444=4k$ فإن $2023^{1444}\equiv 1[5]$
- بما أن $2022\equiv 2[5]$ فإن $2023^{1443}\equiv 2^{1443}[5]$ و بما أن $1443=4p+3$ فإن $2023^{1443}\equiv 3[5]$
- بما أن $2021\equiv 1[5]$ فإن $2021^{1442}\equiv 1[5]$
- بما أن $2020\equiv 0[5]$ فإن $2020^{1441}\equiv 0[5]$

و عليه $2023^{1444}-2022^{1443}-2021^{1442}+2020^{1441}\equiv(1-3-1+0)[5]$

أي أن $2023^{1444}-2022^{1443}-2021^{1442}+2020^{1441}\equiv 2[5]$

3) نبرهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $3^{3n+2}+2^{n+4}\equiv 0[5]$

من أجل كل عدد طبيعي n؛ $3^{3n+2}+2^{n+4}\equiv 0[5]$ تكافئ $3^2\times\left(3^3\right)^n+2^4\times 2^n\equiv 0[5]$

بما أن $3^2\equiv 4[5]$ و $3^3\equiv 2[5]$ و $2^4\equiv 1[5]$ فإن $3^2\times\left(3^3\right)^n+2^4\times 2^n\equiv\left(4\times 2^n+2^n\right)[5]$

أي أن $3^2\times\left(3^3\right)^n+2^4\times 2^n\equiv 5\times 2^n[5]$ و بما أن من أجل كل عدد طبيعي n؛ $5\times 2^n\equiv 0[5]$

فإن من أجل كل عدد طبيعي n؛ $3^{3n+2}+2^{n+4}\equiv 0[5]$

4) نعتبر المتتالية العددية $\left(u_n\right)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بـــ: $u_n=2^{n+1}-2\times 3^n$

1.تعيين الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون u_n مضاعفا للعدد 5 :

إن $u_n=2\times 2^n-2\times 3^n$ ومنه نبحث عن n بحيث $\left(2\times 2^n-2\times 3^n\right)\equiv 0[5]$

$n=$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	
$2\times 2^n\equiv$	2	4	3	1	$[5]$
$2\times 3^n\equiv$	2	1	3	4	$[5]$
$u_n\equiv$	0	3	0	2	$[5]$

قيم n التي من أجلها $u_n\equiv 0[5]$ هي: $4k$ ، $4k+2$

2. نعتبر المجموع S_n بحيث: $S_n=u_0+u_1+...+u_n$

أ. حساب S_0 ، S_1 ، S_2 : إن S_n هو مجموع $(n+1)$ حد متتابع من المتتالية العددية $\left(u_n\right)$ و عليه :

$S_0=u_0=0$ ، $S_1=u_0+u_1=-2$ ، $S_2=u_0+u_1+u_2=-10$

ب. نبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n؛ $S_n=2^{n+2}-3^{n+1}-1$:

(1) من أجل $n=0$: $S_0=2^2-3^1-1=0$ محققة لأن $S_0=u_0=0$

(2) ليكن n عدد طبيعي كيفي ، لنفرض أن: $S_n=2^{n+2}-3^{n+1}-1$

و لنبرهن أن: $S_{n+1}=2^{n+3}-3^{n+2}-1$

إن $S_{n+1}=u_0+u_1+...+u_n+u_{n+1}$ ومنه $S_{n+1}=S_n+u_{n+1}$ و بما أن فرضا $S_n=2^{n+2}-3^{n+1}-1$

و كذلك $u_{n+1}=2^{n+2}-2\times 3^{n+1}$ فإن $S_{n+1}=2^{n+2}-3^{n+1}-1+2^{n+2}-2\times 3^{n+1}$

ومنه $S_{n+1}=2\times 2^{n+2}-3\times 3^{n+1}-1$ أي أن $S_{n+1}=2^{n+3}-3^{n+2}-1$

(1) و(2) ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n؛ $S_n=2^{n+2}-3^{n+1}-1$

جـ. تعيين حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي قسمة S_n على 5 :

إن $S_n=2^2\times 2^n-3\times 3^n-1$ و ومنه :

$n=$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	
$2^2\times 2^n\equiv$	4	3	1	2	$[5]$
$3\times 3^n\equiv$	3	4	2	1	$[5]$
$S_n\equiv$	0	3	3	0	$[5]$

التمرين 08:

1) عين القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين 1120 و 840

2) نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$ التالية:

$$840x-1120y=\alpha \quad ...(E)$$ ، حيث α عدد صحيح

أ. عين الشرط اللازم و الكافي على α حتى تقبل المعادلة (E) حلولا في مجموعة الأعداد الصحيحة

ب. نفرض أن $\alpha=1400$: تحقق أن $(3;1)$ حل للمعادلة (E) ثم استنتج حلول المعادلة (E)

3) n عدد طبيعي يكتب $\overline{304\alpha\alpha}$ في نظام تعداد أساسه 5 ، و يكتب $\overline{37\beta1}$ في نظام تعداد أساسه 8

عين العددان الطبيعيان α و β ثم أكتب العدد $(n+30)$ في النظام العشري

الحل:

1) تعيين $PGCD(1120;840)$:

لدينا $1120=840(1)+280$ ، $840=280(3)+0$ و عليه $PGCD(1120;840)=280$

2) أ. تقبل المعادلة (E) حلولا في مجموعة الأعداد الصحيحة إذا وفقط إذا كان α مضاعف لـ $PGCD(1120;840)$

و عليه الشرط اللازم و الكافي على α حتى تقبل المعادلة (E) حلولا في مجموعة الأعداد الصحيحة هو

α مضاعف لـ 280 أي أن $\alpha=280p$ مع p عدد صحيح

ب. نفرض أن $\alpha=1400$: المعادلة (E) تكافئ $3x-4y=5\ ...(E')$ ، لأن $PGCD(1120;840)=280$

بما أن $3(3)-4(1)=5$ فإن $(3;1)$ حل للمعادلة (E') وبالتالي حل للمعادلة (E)

استنتاج حلول المعادلة (E) **:** لدينا $3x-4y=5$ و $3(3)-4(1)=5$ ومنه $3(x-3)=4(y-1)\ ...(*)$

وعليه 4 يقسم $3(x-3)$ و بما أن 4 أولي مع 3 فإن 4 يقسم $x-3$ ومنه $x-3=4k$ مع $k\in\mathbb{Z}$

أي أن $x=4k+3$ مع $k\in\mathbb{Z}$ و بتعويض x في المعادلة $(*)$ نجد $y=3k+1$ مع $k\in\mathbb{Z}$

بالعكس : إذا كان $x=4k+3$ و $y=3k+1$ مع $k\in\mathbb{Z}$ فإن $3(4k+3)-4(3k+1)=5$ محققة من أجل كل عدد صحيح k

و بالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S=\{(4k+3;3k+1)\ /\ k\in\mathbb{Z}\}$

3) تعين α و β ثم كتابة n في النظام العشري :

لدينا $n=3\times5^4+4\times5^2+\alpha\times5+\alpha$ مع $0\le\alpha\le4$ و $n=3\times8^3+7\times8^2+\beta\times8+1$ مع $0\le\beta\le7$

وعليه $1975+6\alpha=1985+8\beta$ مع $0\le\alpha\le4$ و $0\le\beta\le7$ أي أن $3\alpha-4\beta=10$ مع $0\le\alpha\le4$ و $0\le\beta\le7$

حسب السؤال السابق فإن $\alpha=4k+3$ و $\beta=3k+1$ مع $k\in\mathbb{Z}$ وبما أن $0\le\alpha\le4$ و $0\le\beta\le7$

فإن $\frac{-3}{4}\le k\le\frac{1}{4}$ و $\frac{-1}{3}\le k\le2$ مع $k\in\mathbb{Z}$ ينتج أن $k=0$ و عليه $\alpha=3$ و $\beta=1$ و $n+30=2023$

التمرين 09:

1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2^{4n+1}\equiv2[10]$

2) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2^{4n+2}-4$ و $2^{4n+3}-8$ و $2^{4n+4}-6$ من مضاعفات 10

3) عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 10

4) استنتج رقم آحاد العدد A بحيث ؛ $A=1444^{2023}+1962^{1954}-1954^{1962}-2022^{1443}$

5) أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $n^2\times8^{4n+2}-9n\times6^{2n+1}+n\times9^{2n}+5\equiv(4n^2+7n+5)[10]$

ب. استنتج الأعداد الطبيعية n بحيث : $n^2\times8^{4n+2}-9n\times6^{2n+1}+n\times9^{2n}+5\equiv0[10]$

6) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع $S_n=5+(5+2)+(5+2^2)+...+(5+2^n)$

أ. عين S_n بدلالة n

ب.عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد S_n على 10

✓ **الحل:**

1) نرهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2^{4n+1} \equiv 2[10]$

الطريقة الأولى: نوظف الاستدلال بالتراجع

أ. من أجل $n=0$: $2^1 \equiv 2[10]$ صحيحة لأن ؛ $2^1-2=0$ مضاعف للعدد 10

ب. ليكن n عدد طبيعي كيفي :

لنفرض أن $2^{4n+1} \equiv 2[10]$ و لنبرهن أن $2^{4(n+1)+1} \equiv 2[10]$ أي أن $2^{4n+5} \equiv 2[10]$

لدينا $2^{4n+5} = 2^{4n+1} \times 2^4$ ، بما أن فرضا $2^{4n+1} \equiv 2[10]$ و $2^4 \equiv 6[10]$

فإن $2^{4n+1} \times 2^4 \equiv (2\times 6)[10]$ أي أن $2^{4n+5} \equiv 2[10]$

من أ و ب ينتج أنه أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2^{4n+1} \equiv 2[10]$

الطريقة الثانية : بما أن $2^4 \equiv 1[5]$ فإن من أجل كل عدد طبيعي n : $2^{4n} \equiv 1[5]$

وعليه من أجل كل عدد طبيعي n : $2^{4n} \times 2 \equiv 1\times 2[5\times 2]$ أي أن من أجل كل عدد طبيعي n : $2^{4n+1} \equiv 2[10]$

2) ليكن n عدد طبيعي كيفي :

أ. لدينا $2^{4n+1} \equiv 2[10]$ و $2^1 \equiv 2[10]$ إذن $2^1 \times 2^{4n+1} \equiv 4[10]$ ومنه $2^{4n+2} \equiv 4[10]$

وعليه $2^{4n+2}-4$ مضاعف للعدد 10

ب. $2^{4n+2} \equiv 4[10]$ و $2^1 \equiv 2[10]$ إذن $2^1 \times 2^{4n+2} \equiv (2\times 4)[10]$ ومنه $2^{4n+3} \equiv 8[10]$

وعليه $2^{4n+3}-8$ مضاعف للعدد 10

جـ. $2^{4n+3} \equiv 8[10]$ و $2^1 \equiv 2[10]$ إذن $2^1 \times 2^{4n+3} \equiv (2\times 8)[10]$ ومنه $2^{4n+4} \equiv 6[10]$

وعليه $2^{4n+4}-6$ مضاعف للعدد 10

3) تعيين حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الاقليدية لعدد 2^n على 10 :

من ما سبق نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي k :

$2^{4k+1} \equiv 2[10]$ ، $2^{4k+2} \equiv 4[10]$ ، $2^{4k+3} \equiv 8[10]$ و $2^{4k+4} \equiv 6[10]$

حالة خاصة: $2^0 \equiv 1[10]$

4) استنتاج رقم آحاد العدد A :

تذكير : رقم آحاد أي عدد طبيعي N هو باقي قسمته على 10

لدينا : $1441 \equiv 1[10]$ ومنه $1441^{2020} \equiv 1[10]$ و $1962 \equiv 2[10]$ إذن $1962^{1954} \equiv 2^{1954}[10]$

و بما أن $1954 = 4(488)+2$ فإن $1962^{1954} \equiv 4[10]$ و $1954 \equiv 4[10]$ فإن $1954^{1962} \equiv (2^2)^{1962}[10]$

أي أن $1954^{1962} \equiv 2^{3924}[10]$ و بما أن $3924 = 4(980)+4$ فإن $1954^{1962} \equiv 6[10]$

و $2022 \equiv 2[10]$ ، و بما أن $1443 = 4(360)+3$ فإن $2022^{1443} \equiv 8[10]$

و $1444 \equiv 4[10]$ ينتج أن $1444^{2023} \equiv 4^{2023}[10]$ أي أن $1444^{2023} \equiv 2^{4046}[10]$ وبما أن $4046 = 4(1011)+2$

فإن $1444^{2023} \equiv 4[10]$ و عليه $A \equiv (4+4-6-8)[10]$ أي أن $A \equiv 4[10]$ ، و بالتالي رقم آحاد العدد A هو 4

5) أ. نبين أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $n^2 \times 8^{4n+2} - 9n \times 6^{2n+1} + n \times 9^{2n} + 5 \equiv (4n^2+7n+5)[10]$

لدينا $8 \equiv -2[10]$ ومنه من اجل كل عدد طبيعي n : $8^{4n+2} \equiv 2^{4n+2}[10]$ إذن $8^{4n+2} \equiv 4[10]$

ومنه $n^2\times 8^{4n+2}\equiv 4n^2\left[10\right]$.

$6\equiv -4\left[10\right]$ ومنه $6^{2n+1}\equiv -\left(2^2\right)^{2n+1}\left[10\right]$ أي أن $6^{2n+1}\equiv -2^{4n+2}\left[10\right]$

ومنه $6^{2n+1}\equiv -4\left[10\right]$ ينتج $9n\times 6^{2n+1}\equiv -6n\left[10\right]$ ، كذلك $9\equiv -1\left[10\right]$ ومنه $9^{2n}\equiv 1\left[10\right]$

ينتج $n\times 9^{2n}\equiv n\left[10\right]$ و بالتالي $n^2\times 8^{4n+2}-9n\times 6^{2n+1}+n\times 9^{2n}+5\equiv\left(4n^2+7n+5\right)\left[10\right]$

ب. استنتج الأعداد الطبيعية n بحيث : $n^2\times 8^{4n+2}-9n\times 6^{2n+1}+n\times 9^{2n}+5\equiv 0\left[10\right]$

لتعيين قيم n بحيث $n^2\times 8^{4n+2}-9n\times 6^{2n+1}+n\times 9^{2n}+5\equiv 0\left[10\right]$ يكفي تعين قيم n

بحيث $4n^2+7n+5\equiv 0\left[10\right]$ لأن $n^2\times 8^{4n+2}-9n\times 6^{2n+1}+n\times 9^{2n}+5\equiv\left(4n^2+7n+5\right)\left[10\right]$

بما كل عدد طبيعي n يكتب على الشكل $n=10k+r$ مع $k\in\mathbb{N}$ و $r\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$

لنضع $B=4n^2+7n+5$ ، الجدول التالي يلخص بواقي قسمة B على 10 حسب قيم العدد الطبيعي n :

$n\equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$[10]$
$4n^2\equiv$	0	4	6	6	4	0	4	6	6	4	$[10]$
$7n\equiv$	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3	$[10]$
$B\equiv$	5	6	5	2	7	0	1	0	7	2	$[10]$

وعليه $4n^2+7n+5\equiv 0\left[10\right]$ إذا وفقط إذا كان $n\equiv 5\left[10\right]$ أو $n\equiv 7\left[10\right]$ و بالتالي

$n^2\times 8^{4n+2}-9n\times 6^{2n+1}+n\times 9^{2n}+5\equiv 0\left[10\right]$ إذا وفقط إذا كان $n\equiv 10\alpha+5$ أو $n\equiv 10\alpha+7$ مع $\alpha\in\mathbb{N}$

6) أ . تعيين S_n بدلالة n :

لدينا $S_n=\left(5+5+5...+5\right)+\left(2^1+2^2+...+2^n\right)$

إن $5+5+5...+5=5\left(n+1\right)$ و $2^1+2^2+...+2^n=2\left(\dfrac{1-2^n}{1-2}\right)=2\left(2^n-1\right)$

ومنه $S_n=5\left(n+1\right)+2\left(2^n-1\right)$ أي أن $S_n=5n+2^{n+1}+3$

ب. تعيين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمةالاقليدية للعدد S_n على 10 : ليكن k عدد طبيعي

- من أجل $n=4k+1$: $2^{n+1}=2^{4k+2}$ ومنه $2^{n+1}\equiv 4\left[10\right]$ وعليه $S_n\equiv\left(5\left(4k+1\right)+7\right)\left[10\right]$
  أي أن $S_n\equiv\left(20k+12\right)\left[10\right]$ و بما أن $20k\equiv 0\left[10\right]$ و $12\equiv 2\left[10\right]$ فإن $S_n\equiv 2\left[10\right]$

- من أجل $n=4k+2$: $2^{n+1}=2^{4k+3}$ ومنه $2^{n+1}\equiv 8\left[10\right]$ وعليه $S_n\equiv\left(5\left(4k+2\right)+11\right)\left[10\right]$
  أي أن $S_n\equiv\left(20k+21\right)\left[10\right]$ و بما أن $20k\equiv 0\left[10\right]$ و $21\equiv 1\left[10\right]$ فإن $S_n\equiv 1\left[10\right]$

- من أجل $n=4k+3$: $2^{n+1}=2^{4k+4}$ ومنه $2^{n+1}\equiv 6[10]$ وعليه $S_n\equiv(5(4k+3)+9)[10]$
أي أن $S_n\equiv(20k+24)[10]$ و بما أن $20k\equiv 0[10]$ و $24\equiv 4[10]$ فإن $S_n\equiv 4[10]$

- من أجل $n=4k+4$: $2^{n+1}=2^{4k+5}=2^{4(k+1)+1}$ ومنه $2^{n+1}\equiv 2[10]$ وعليه $S_n\equiv(5(4k+4)+5)[10]$
أي أن $S_n\equiv(20k+25)[10]$ و بما أن $20k\equiv 0[10]$ و $25\equiv 5[10]$ فإن $S_n\equiv 5[10]$

➢ **التمرين 10:**

(1 أ. عين باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 12 وذلك من اجل قيم n التالية : 0، 1، 2، 3، 4 و 5
ب. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $2^{2n+2}\equiv 4[12]$ و $2^{2n+3}\equiv 8[12]$

(2 u_0 و q عددان طبيعيا غير معدومان، (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q
عين u_0 و q بحيث: u_0 و q أوليان فيما بينهما و $2u_0{}^2=u_1+u_2$

(3 نفرض أن $u_0=3$ و $q=2$
أ. عين عبارة u_n بدلالة n، ثم عين الأعداد الطبيعية n و التي من أجلها يكون $u_n<10^3$
ب. عين بدلالة n المجموع S_n التالي: $S_n=u_0+u_1+...+u_{n-1}$
جـ. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر تماما من1؛ $S_n\equiv 9[12]$

✓ **الحل:**

1) أ. لما $n=0$: $2^0\equiv 1[12]$ ، لما $n=1$: $2^1\equiv 2[12]$ ، لما $n=2$: $2^2\equiv 4[12]$ ، لما $n=3$: $2^3\equiv 8[12]$
لما $n=4$: $2^4\equiv 4[12]$ و لما $n=5$: $2^5\equiv 8[12]$

ب. نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2^{2n+2}\equiv 4[12]$ **(نوظف الاستدلال بالتراجع)**

(1) من أجل $n=0$: $2^2\equiv 4[12]$ محققة

(2) ليكن n عدد طبيعي معطى ؛ لنفرض أن $2^{2n+2}\equiv 4[12]$ و لنبرهن $2^{2n+4}\equiv 4[12]$
لدينا $2^{2n+4}=2^{2n+2}\times 2^2$ ، بما أن فرضا $2^{2n+2}\equiv 4[12]$ و $2^2\equiv 4[12]$ فإن $2^{2n+2}\times 2^2\equiv 16[12]$ و بما أن $16\equiv 4[12]$
فإن $2^{2n+4}\equiv 4[12]$ و عليه من أجل كل عدد طبيعي n : $2^{2n+2}\equiv 4[12]$

طريقة ثانية: بما أن $2^2\equiv 1[3]$ فإن من أجل كل عدد طبيعي n : $2^{2n}\equiv 1[3]$ و عليه $2^{2n}\times 4\equiv 4[12]$
أي أن $2^{2n}\times 2^2\equiv 4[12]$ ومنه $2^{2n+2}\equiv 4[12]$

- نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2^{2n+3}\equiv 8[12]$: **(نوظف البرهان بالاستنتاج)**
بما أن من أجل كل عدد طبيعي n : $2^{2n+2}\equiv 4[12]$ و $2^1\equiv 2[12]$ فإن $2^{2n+2}\times 2^1\equiv 8[12]$
نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2^{2n+3}\equiv 8[12]$

2) بما أن (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q فإن $u_1=u_0\times q$ و $u_2=u_0\times q^2$ و عليه :
$2u_0^2=u_1+u_2$ تكافئ $2u_0^2=u_0\times q+u_0\times q^2$ ومنه $2u_0^2=u_1+u_2$ تكافئ $2u_0=q(1+q)$
ينتج أن q قاسم للعدد $2u_0$ و بما أن u_0 أولي مع q فإنه حسب مبرهنة قوص q قاسم للعدد 2 و بالتالي $q=1$ أو $q=2$

- لما $q=1$ ؛ نجد $2u_0=2$ و عليه $u_0=1$
- لما $q=2$ ؛ نجد $2u_0=6$ و عليه $u_0=3$

3) أ. بما أن (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q فإن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n=3\times 2^n$

- لدينا $u_n<10^3$ تكافئ $3\times 2^n<10^3$ ومنه $u_n<10^3$ تكافئ $2^n<\frac{10^3}{3}$ و عليه $u_n<10^3$ تكافئ $n<\frac{\ln\left(\frac{10^3}{3}\right)}{\ln 2}$
أي أن $n<8,38$ و بما أن n عدد طبيعي فإن

ب. من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $S_n=u_0\times\frac{1-q^n}{1-q}$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $S_n=3(2^n-1)$

جـ. ليكن n عدد طبيعي بحيث $n>1$ ؛ $S_n\equiv 9[12]$ تكافئ $3(2^n-1)\equiv 9[12]$ ومنه $S_n\equiv 9[12]$ تكافئ $2^n-1\equiv 3[4]$
و عليه $S_n\equiv 9[12]$ تكافئ $2^n\equiv 0[4]$

بما أن من أجل كل عدد طبيعي n بحيث $n>1$؛ $2^n\equiv 0[4]$ فإن من أجل كل عدد طبيعي n بحيث $n>1$؛ $S_n\equiv 9[12]$

➢ التمرين 11:

من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $S_n=1+6+27+...+n\times 3^{n-1}$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $4S_n=(2n-1)\times 3^n+1$

2) جد العدد الطبيعي n الذي يحقق : $S_n=547$

3) بين أن العددين الطبيعيين S_4 و S_5 أوليان فيما بينهما

4) نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$ التالية : $S_5\times x-S_4\times y=263\ ...(E)$

أ. تحقق أن الثنائية $(1;2)$ حل للمعادلة (E)، ثم استنتج حلول المعادلة (E)

ب. عين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة و التي تحقق : $|4x-y-2|<42$

✓ الحل:

1) نبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4S_n=(2n-1)\times 3^n+1$

أ) من أجل $n=0$: $4S_0=0$ محققة لأن $S_0=0$

ب) ليكن n عدد طبيعي معطى :

لنفرض أن $4S_n=(2n-1)\times 3^n+1$ و لنبرهن أن $4S_{n+1}=(2n+1)\times 3^{n+1}+1$

لدينا $S_{n+1}=1+6+27+...+n\times 3^{n-1}+(n+1)\times 3^n$ أي أن $S_{n+1}=S_n+(n+1)\times 3^n$ ومنه $4S_{n+1}=4S_n+4(n+1)\times 3^n$

و بما أن فرضا أن $4S_n=(2n-1)\times 3^n+1$ فإن $4S_{n+1}=(2n-1)\times 3^n+1+4(n+1)\times 3^n$ أي أن

$4S_{n+1}=(2n-1+4n+4)\times 3^n+1$ ومنه $4S_{n+1}=(6n+3)\times 3^n+1$ إذن $4S_{n+1}=(2n+1)\times 3\times 3^n+1$

وعليه $4S_{n+1}=(2n+1)\times 3^{n+1}+1$. ينتج من أ) و ب) أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4S_n=(2n-1)\times 3^n+1$

2) إيجاد العدد الطبيعي n الذي يحقق $S_n=547$:

بما أن $S_n=547$ فإن $4S_n=2188$ أي أن $(2n-1)\times 3^n+1=2188$ ومنه $(2n-1)\times 3^n=2187$

إذن $(2n-1)\times 3^n=3^7$ أي أن $(2n-1)\times 3^n=9\times 3^5$ ينتج أن $n=5$

3) نبين أن S_4 و S_5 أوليان فيما بينهما : إن $S_5=547$ و $S_4=142$ (لأن $4S_4=568$)

إن $S_5=3S_4+121$ و $S_4=1\times(121)+21$ و $121=5\times(21)+16$ و $21=1\times(16)+5$ و $16=3\times(5)+1$

ومنه $PGCD(547;142)=1$ أي أن S_4 و S_5 أوليان فيما بينهما

4) نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) التالية : $547x-142y=263\ ...(E)$

لاحظ أنه بما أن $PGCD(547;142)=1$ فإن للمعادلة (E) حلولا في المجموعة $\mathbb{Z}^2$

أ. نتحقق أن $(1;2)$ حل للمعادلة (E) : بما أن $547(1)-142(2)=263$ فإن $(1;2)$ حل للمعادلة (E)

- استنتاج حلول المعادلة (E) : لدينا $\begin{cases}547x-142y=263\\547(1)-142(2)=263\end{cases}$ ومنه $547(x-1)=142(y-2)\ ...(F)$

بما أن 142 يقسم $142(y-2)$ فإن حسب (F) 142 يقسم $547(x-1)$ وبما أن $PGCD(547;142)=1$ فإن حسب مبرهنة قوص 142 يقسم $x-1$ و عليه $x=142k+1$ مع k عدد صحيح

و بتعويض x في المعادلة (F) نجد $y=547k+2$ مع k عدد صحيح

بالعكس: بتعويض x و y في المعادلة (E) نجدها محققة لأن : $547(142k+1)-142(547k+2)=263$

بالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $\{(142k+1;547k+2)\ /k\in\mathbb{Z}\}$

ب. تعيين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) بحيث $|4x-y-2|<42$:

بما أن الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإن $x=142k+1$ و $y=547k+2$

ينتج أن $|4x-y-2|<42$ تكافئ $|4(142k+1)-(547k+2)-2|<42$

إذن $|4x-y-2|<42$ تكافئ $|21k|<42$ أي أن $|4x-y-2|<42$ تكافئ $|k|<2$

تذكير : a عدد حقيقي ، b عدد حقيقي موجب تماما : $|a|<b$ إذا وفقط إذا كان $-b<a<b$

و عليه $|4x-y-2|<42$ تكافئ $-2<k<2$ ومنه $k\in\{-1;0;1\}$ و عليه الثنائيات المطلوبة هي :

$(-141;-545)$ ، $(1;2)$ ، $(143;549)$

التمرين 12:

1) نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) ذات المجهول $(n;m)$ التالية: $11n-24m=1\ ...(E)$

أ. أشرح لماذا المعادلة (E) تقبل حلولا في المجموعة $\mathbb{Z}^2$

ب. باستعمال خوارزمية إقليدس عين حلا خاصا للمعادلة (E)

جـ. عين مجموعة حلول المعادلة (E)

2) أ. تحقق أن العدد 9 قاسم لكل من $(10^{11}-1)$ و $(10^{24}-1)$

ب. بين أنه إذا كانت الثنائية $(n;m)$ حل للمعادلة (E) فإن $(10^{11n}-1)-10(10^{24m}-1)=9$

جـ. بين أن $(10^{11}-1)$ قاسم للعدد $(10^{11n}-1)$ ، ثم استنتج وجود عددان طبيعيان a و b بحيث :

$$(10^{11}-1)a-(10^{24}-1)b=9$$

د. بين أن كل قاسم مشترك للعددين $(10^{11}-1)$ و $(10^{24}-1)$ هو قاسم للعدد 9، ثم استنتج $PGCD(10^{11}-1;10^{24}-1)$

✓ **الحل:**

1) أ. بما أن 11 عدد أولي لا يقسم 24 فإن 11 أولي مع 24 و بالتالي المعادلة (E) تقبل حلولا في المجموعة $\mathbb{Z}^2$

ب. لدينا : $24=11\times(2)+2$ و $11=2\times(5)+1$ إذن $11-2\times(5)=1$ و بما أن $24-11\times(2)=2$

فإن $11-(24-11\times2)\times5=1$ ومنه $11\times(11)-24\times(5)=1$ و عليه الثنائية $(11;5)$ حل خاص للمعادلة (E)

جـ. تعيين حلول المعادلة (E) : $11\times(11)-24\times(5)=1$

لدينا $11n-24m=1$ و $11\times(11)-24\times(5)=1$ ومنه $11(n-11)=24(m-5)\ \ ...(I)$

و بما أن 11 يقسم $11(n-11)$ فإن 11 يقسم $24(m-5)$ و بما أن 11 أولي مع 24 فإن 11 يقسم $(m-5)$

و بالتالي $m-5=11k$ مع $k\in\mathbb{Z}$ أي أن $m=11k+5$ مع $k\in\mathbb{Z}$

بتعويض m في (I) نجد $n=24k+11$ مع $k\in\mathbb{Z}$

و بالعكس : بتعويض m و n في (E) نجد $11(24k+11)-24(11k+5)=1$ محققة من أجل كل k من $\mathbb{Z}$

وعليه مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S=\{(14k+11;11k+5)/k\in\mathbb{Z}\}$

2) **تذكير: من أجل كل عدد طبيعي n و كل عدد حقيقي x :** $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+...+1)$

أ.

- الطريقة الأولى: لدينا $10^{11}-1=(10-1)(10^{10}+10^9+...+1)$ أي أن $10^{11}-1=9(10^{10}+10^9+...+1)$

ومنه 9 قاسم للعدد $10^{11}-1$

كذلك $10^{24}-1=(10-1)(10^{23}+10^{22}+...+1)$ أي أن $10^{24}-1=9(10^{23}+10^{22}+...+1)$

ومنه 9 قاسم للعدد $10^{24}-1$

- الطريقة الثانية: بما أن $10\equiv 1[9]$ فإن $10^{11}\equiv 1[9]$ و $10^{24}\equiv 1[9]$ ومنه $10^{11}-1\equiv 0[9]$ و $10^{24}-1\equiv 0[9]$

و عليه 9 قاسم لكل من $10^{11}-1$ و $10^{24}-1$.

ب. بما أن فرضا $(n;m)$ حل للمعادلة (E) فإن $11n-24m=1$ ومنه $11n=1+24m$ ومنه

$(10^{11n}-1)-10(10^{24m}-1)=(10^{24m+1}-1)-10(10^{24m}-1)$ إذن $(10^{11n}-1)-10(10^{24m}-1)=10^{24m+1}-1-10^{24m+1}+10$

وعليه $(10^{11n}-1)-10(10^{24m}-1)=9$

جـ. إن $10^{11n}-1=(10^{11})^n-1$ إذن $10^{11n}-1=(10^{11}-1)(10^{11(n-1)}+10^{11(n-2)}+....+1)$ ومنه $(10^{11}-1)$ قاسم للعدد $10^{11n}-1$

كذلك $10^{24m}-1=(10^{24})^m-1$ إذن $10^{24m}-1=(10^{24}-1)(10^{24(m-1)}+10^{24(m-2)}+....+1)$ ومنه $(10^{24}-1)$ قاسم للعدد $10^{24m}-1$

الاستنتاج: بما أن $(10^{11}-1)$ قاسم للعدد $10^{11n}-1$ فإنه يوجد عدد طبيعي a بحيث $10^{11n}-1=a(10^{11}-1)$

وبما أن $(10^{24}-1)$ قاسم للعدد $10^{24m}-1$ فإنه يوجد عدد طبيعي a' بحيث $10^{24m}-1=a'(10^{24}-1)$

و بما أن $(10^{11n}-1)-10(10^{24m}-1)=9$ فإنه يوجد عددان طبيعيان a و a' بحيث $a(10^{11}-1)-10a'(10^{24}-1)=9$

و بوضع $b=10a'$ ينتج وجود عددان طبيعيان a و b بحيث $(10^{11}-1)a-(10^{24}-1)b=9$

د. نعتبر d قاسم مشترك لكل من $10^{11}-1$ و $10^{24}-1$ إذن d قاسم لـ $10^{11}-1$ و قاسم لـ $10^{24}-1$ و بالتالي

d قاسم للعدد $(10^{11}-1)a-(10^{24}-1)b$ ومنه d قاسم للعدد 9 ينتج أن كل قاسم للعددين $10^{11}-1$ و $10^{24}-1$

هو قاسم للعدد 9 ، وبما أن 9 قاسم لكل من $10^{11}-1$ و $10^{24}-1$ فإن كل قاسم للعدد 9 هو قاسم لهما

و عليه $PGCD(10^{11}-1;10^{24}-1)=9$

➢ التمرين 13:

1) نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$ التالية: $91x+10y=1\ ...(E)$

أ. تحقق من وجود حلول للمعادلة (E) في المجموعة $\mathbb{Z}^2$

ب. باستعمال خوارزمية إقليدس عين حلا خاصا للمعادلة (E) ، ثم استنتج حلا خاصا للمعادلة (E') ذات المجهول $(x;y)$ التالية: $91x+10y=412\ ...(E')$

جـ. حل المعادلة (E')

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، العدد $A_n = 3^{2n} - 1$ مضاعف للعدد 8

3) نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E'') ذات المجهول $(x;y)$ التالية: $A_3 x + A_2 y = 3296 \quad ...(E'')$

أ. عين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E'')

ب. بين أن المعادلة (E'') تقبل حلا وحيدا $(x_0;y_0)$ من الأعداد الطبيعية يطلب تعينه

✓ **الحل:**

1) أ. بما أن $91 = 10(9) + 1$ فإن 91 أولي مع 10 و بالتالي حسب مبرهنة بيزو المعادلة (E) تقبل حلولا في المجموعة $\mathbb{Z}^2$

ب. بما أن $91 = 10(9) + 1$ فإن $91(1) + 10(-9) = 1$ ومنه الثنائية $(1;-9)$ حل خاص للمعادلة (E)

- استنتاج حل خاص للمعادلة (E') :

بما أن $91(1) + 10(-9) = 1$ فإن $91(412) + 10(-3708) = 412$ ومنه الثنائية $(412;-3078)$ حل خاص للمعادلة (E')

جـ. تعيين حلول المعادلة (E') : لدينا $91x + 10y = 412$ و $91(412) + 10(-3708) = 412$

إذن $91x + 10y = 91(412) + 10(-3708)$ ومنه $91(x-412) = 10(-3708 - y) \quad ...(*)$ و عليه 10يقسم $91(x-412)$

و بما أن 91 أولي مع 10 فإنه حسب مبرهنة قوص 10يقسم $(x-412)$ ومنه $x - 412 = 10k$ مع $k \in \mathbb{Z}$

أي أن $x = 10k + 412$ مع $k \in \mathbb{Z}$ و بالتعويض في المعادلة $(*)$ نجد $y = -91k - 3708$ مع $k \in \mathbb{Z}$

بالعكس بتعويض x و y في المعادلة المعطاة (E') نجد $91(10k + 412) + 10(-91k - 3708) = 412$ محققة

و عليه حلول المعادلة (E') هي الثنائيات المرتبة $(10k + 412; -91k - 3708)$ مع $k \in \mathbb{Z}$

1) بما أن مع $3^2 \equiv 1[8]$ فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $(3^2)^n \equiv 1^n [8]$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم؛ $3^{2n} \equiv 1[8]$ و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $A_n \equiv 0[8]$

2) أ. بما أن كلا من A_2 و A_3 من مضاعفات 8 فإن (E'') تكافئ $91x + 10y = 412$ أي أن (E'') تكافئ (E')

و عليه حلول المعادلة (E'') هي الثنائيات المرتبة $(10k + 412; -91k - 3708)$ مع $k \in \mathbb{Z}$

ب. المعادلة (E'') تقبل حل $(x_0;y_0)$ من الأعداد لطبيعية معناه $x_0 \geq 0$ و $y_0 \geq 0$

و بما أن $x_0 = 10k + 412$ و $y_0 = -91k - 3708$ فإن $x_0 \geq 0$ و $y_0 \geq 0$ تكافئ $10k + 412 \geq 0$ و $-91k - 3708 \geq 0$

ومنه $x_0 \geq 0$ و $y_0 \geq 0$ تكافئ $10k + 412 \geq 0$ و $-91k - 3708 \geq 0$

و عليه $x_0 \geq 0$ و $y_0 \geq 0$ تكافئ $-\frac{206}{5} \leq k \leq -\frac{3708}{91}$ وبما أن $k \in \mathbb{Z}$ فإن $k = -41$

ينتج أنه توجد ثنائية وحيدة من الأعداد الطبيعية التي هي حل للمعادلة (E'') هي $(2;23)$

➢ **التمرين14:**

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 0$ و $u_1 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n$

1) احسب u_2 و u_3

2) أ. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} = 4u_n + 1$

ب. تحقق أنه ومن أجل كل عدد طبيعي n ؛ $PGCD(u_n; u_{n+1}) = 1$

3) أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$

ب. عين من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $PGCD(4^{n+1} - 1; 4^n - 1)$

4) (v_n) هي المتتالية العددية المعرفة بـ : من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_n = u_n + \frac{1}{3}$

أ. بين أن (v_n) متتالية هندسية ، يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب. عين بدلالة n المجموع S_n التالي : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_{3n}$

5) أ.عين حسب قيم n باقي القسمة الاقليدية للعدد 4^n على 7

ب. عين الأعداد الطبيعية التي من أجلها يكون $9S_n + 8n$ مضاعفا للعدد 7

✓ **الحل:**

❖ **ما يجب أن تعلمه :**

1) الاستدلال بالتراجع : $P(n)$ خاصية متعلقة بعدد طبيعي n ، n_0 عدد طبيعي .

للبرهان على صحة الخاصية $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 ، يكفي :

1. نتأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 أي $P(n_0)$.

2. نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي n أكبر من أو يساوي n_0 (فرضية التراجع)

و نبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$

2) مبرهنة بيزو : يكون عددان صحيحان a و b أوليين فيما بينهما إذا و فقط إذا وجد عددان صحيحان u و v حيث

$au + bv = 1$

3) تعريف متتالية هندسية : نقول أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q (حيث $q \in \mathbb{R}^*$)

إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = u_n \times q$

4) مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية : إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها $q \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ فإن

S مجموع حدود متتابعة منها يحسب بـ : $S = (\text{الحد الأول من المجموع}) \times \dfrac{1-q^{\text{عددالحدود}}}{1-q}$

1) حساب u_2 و u_3 :

إن $u_2 = 5u_1 - 4u_0$ و بما أن $u_0 = 0$ و $u_1 = 1$ فإن $u_2 = 5$

و $u_3 = 5u_2 - 4u_1$ و بما أن $u_1 = 1$ و $u_2 = 5$ فإن $u_3 = 21$

2) أ. نبرهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} = 4u_n + 1$: نستعمل الاستدلال بالتراجع

(1) من أجل $n = 0$: $u_1 = 4u_0 + 1$ محققة ، لأن $u_0 = 0$ و $u_1 = 1$

(2) ليكن n عدد طبيعي معطى؛ لنفرض أن $u_{n+1} = 4u_n + 1$ و لنبرهن أن $u_{n+2} = 4u_{n+1} + 1$

لدينا $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n$ و بما أن فرضا $u_{n+1} = 4u_n + 1$ فإن $4u_n = u_{n+1} - 1$ ومنه $u_{n+2} = 5u_{n+1} - (u_{n+1} - 1)$

إذن $u_{n+2} = 4u_{n+1} + 1$ وعليه .

من (1) و (2) ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} = 4u_n + 1$.

ب. بما أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} = 4u_n + 1$ فإن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $(1) \times u_{n+1} + (-4) \times u_n = 1$

وعليه حسب مبرهنة بيزو فإن u_n و u_{n+1} أوليان فيما بينهما أي أن $PGCD(u_n ; u_{n+1}) = 1$

3) أ. نبرهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$: نستعمل الاستدلال بالتراجع

(1) من أجل $n = 0$: $u_0 = \frac{1}{3}(4^0 - 1) = 0$ محققة ، لأن $u_0 = 0$

(2) ليكن n عدد طبيعي كيفي؛ لنفرض أن $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$ و لنبرهن أن $u_{n+1} = \frac{1}{3}(4^{n+1} - 1)$

بما أن $u_{n+1} = 4u_n + 1$ وفرضا $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$ ، فإن $u_{n+1} = 4 \times \frac{1}{3}(4^n - 1) + 1$ ومنه $u_{n+1} = \frac{1}{3}(4^{n+1} - 4) + 1$

وعليه $u_{n+1}=\frac{1}{3}\left(4^{n+1}-4+3\right)$ و بالتالي $u_{n+1}=\frac{1}{3}\left(4^{n+1}-1\right)$

من (1) و (2) ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n=\frac{1}{3}\left(4^n-1\right)$

ب. بما أن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n=\frac{1}{3}\left(4^n-1\right)$ فإن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $3u_n=4^n-1$ و $3u_{n+1}=4^{n+1}-1$

وعليه $PGCD\left(4^{n+1}-1;4^n-1\right)=PGCD\left(3u_{n+1};3u_n\right)$ ومنه $PGCD\left(4^{n+1}-1;4^n-1\right)=3\times PGCD\left(u_{n+1};u_n\right)$

و بما أن $PGCD\left(u_n;u_{n+1}\right)=1$ فإن $PGCD\left(4^{n+1}-1;4^n-1\right)=3$

4) أ. من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_n=u_n+\frac{1}{3}$ إذن $v_{n+1}=u_{n+1}+\frac{1}{3}$ و بما أن $u_{n+1}=4u_n+1$ فإن $v_{n+1}=4u_n+1+\frac{1}{3}$

وعليه $v_{n+1}=4u_n+\frac{4}{3}$ ومنه $v_{n+1}=4\left(u_n+\frac{1}{3}\right)$ أي أن $v_{n+1}=4v_n$ و بالتالي المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=4$

و حدها الأول $v_0=u_0+\frac{1}{3}$ و بما أن $u_0=0$ فإن $v_0=\frac{1}{3}$

أ. إن S_n هو مجموع $(3n+1)$ حد متتابع من المتتالية الهندسية (v_n) وعليه $S_n=\frac{v_0}{1-q}\left(1-q^{3n+1}\right)$

ومنه $S_n=\frac{\frac{1}{3}}{-3}\left(1-4^{3n+1}\right)$ أي أن $S_n=\frac{1}{9}\left(4^{3n+1}-1\right)$

5) أ . تعيين حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الاقليدية للعدد 4^n على 7

التخمين : لما $n=0$: $4^0\equiv1[7]$ ، لما $n=1$: $4^1\equiv4[7]$ ، لما $n=2$: $4^2\equiv2[7]$ ، لما $n=3$: $4^3\equiv1[7]$

التعميم: من أجل كل عدد طبيعي k : $4^{3k}\equiv1[7]$ ، $4^{3k+1}\equiv4[7]$ ، $4^{3k+2}\equiv2[7]$

ب. تعيين الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $9S_n+8n$ مضاعفا للعدد 7 :

$9S_n+8n$ مضاعفا للعدد 7 إذا وفقط إذا كان $9S_n+8n\equiv0[7]$

بما أن $S_n=\frac{1}{9}\left(4^{3n+1}-1\right)$ فإن $9S_n=4^{3n+1}-1$ و بما أن $8\equiv1[7]$ فإن $8n\equiv n[7]$ ومنه $9S_n+8n\equiv\left(4^{3n+1}-1+n\right)[7]$

و عليه يكفي إيجاد الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $4^{3n+1}-1+n\equiv0[7]$ ، بما أن حسب التعميم السابق $4^{3n+1}\equiv4[7]$

فإنه يكفي إيجاد الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $3+n\equiv0[7]$ أي أن $n\equiv-3[7]$ ومنه $n\equiv4[7]$

ينتج أن $n=7\alpha+4$ مع α عدد طبيعي.

➢ التمرين15:

(I) a ، b و c أعداد طبيعية غير معدومة

برهن أنه إذا كان a أولي مع c فإن $PGCD(a;bc)=PGCD(a;b)$.

(II) n عدد طبيعي، حيث $n\geq2$. نعتبر العددان الطبيعيان α و β بحيث : $\alpha=n^2+n$ و $\beta=n+2$

1) بين أن: $PGCD(\alpha;\beta)=PGCD(\beta;2)$ ، ثم استنتج القيم الممكنة لـ $PGCD(\alpha;\beta)$

2) a و b عددان طبيعيان يكتبان في نظام التعداد الذي أساسه n ، كما يلي : $a=\overline{3520}$ و $b=\overline{384}$

أ. بين أن $3n+2$ قاسم لكل من a و b

ب. استنتج تبعا لقيم n و بدلالة n ، القيم الممكنة لــ $PGCD(a;b)$

جـ. عين α و β علما أن $PGCD(a;b)=2020$ ثم $PGCD(a;b)=2021$

✓ **الحل:**

(I) لنبرهن أنه إذا كان a أولي مع c فإن $PGCD(a;b\times c)=PGCD(a;b)$:

لنضع $d=PGCD(a;b)$ و $d'=PGCD(a;b\times c)$ و لنبرهن أن $d=d'$

(1) بما أن $d=PGCD(a;b)$ فإن d قاسم للعدد a و قاسم للعدد b ومنه d قاسم للعدد a و قاسم للعدد $b\times c$ ينتج أن d قاسم مشترك لكل من a و $b\times c$ و بما أن $d'=PGCD(a;b\times c)$ فإن $d\le d'$ ...(1)

(2) بما أن a أولي مع c فإنه حسب مبرهنة بيزو ، يوجد على الأقل عددان صحيحان α و β بحيث $\alpha a+\beta c=1$ و منه $\alpha(a\times b)+\beta(c\times b)=b$. و بما أن $d'=PGCD(a;b\times c)$ فإن d' قاسم للعدد a و قاسم للعدد $\alpha(a\times b)$ و قاسم للعدد $\beta(b\times c)$ و بالتالي d' قاسم للعدد $\alpha(a\times b)+\beta(c\times b)$ وعليه d' قاسم للعدد

ينتج أن d' قاسم للعدد b ينتج أن d' قاسم مشترك لكل من a و b و بما أن $d=PGCD(a;b)$ فإن $d'\le d$ ...(2)

من (1) و (2) نستنتج أن $d=d'$

(II)

1) نبين أن $PGCD(\alpha;\beta)=PGCD(\beta;2)$:

الطريقة الأولى :

بإجراء القسمة الاقليدية للعدد α على β نجد من أجل كل عدد طبيعي n، حيث $n\ge 2$: $\alpha=\beta(n-1)+2$

ومنه $PGCD(\alpha;\beta)=PGCD(\beta;2)$

استنتاج القيم الممكنة لـ $PGCD(\alpha;\beta)$: لنضع $d=PGCD(\alpha;\beta)$

بما أن $PGCD(\alpha;\beta)=PGCD(\beta;2)$ فإن $d=PGCD(\beta;2)$ و بالتالي d من قواسم العدد 2 إذن $d=1$ أو $d=2$

2) لدينا $a=3n^3+5n^2+2n$ مع $n>5$ و $b=3n^2+8n+4$ مع $n>8$ ومنه $a=3n^3+7n^2+2n$ و $b=3n^2+8n+4$ مع $n>8$

أ. من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $n>8$ فإن $a=n(3n^2+5n+2)$ ومنه $a=n(n+1)(3n+2)$ أي أن $a=\alpha(3n+2)$

ومنه $3n+2$ قاسم للعدد الطبيعي a و كذلك $b=(n+2)(3n+2)$ أي أن $b=\beta(3n+2)$ ومنه $3n+2$ قاسم للعدد الطبيعي b

ينتج أن $3n+2$ قاسم مشترك لكل من a و b

ب.

تذكير 1 : a و b عددان طبيعيان غير معدومين . k عدد طبيعي غير معدوم.
$PGCD(ka;kb)=k\times PGCD(a;b)$

إن $PGCD(a;b)=PGCD(\alpha(3n+2);\beta(3n+2))$

ومنه $PGCD(a;b)=(3n+2)\times PGCD(\alpha;\beta)$ أي أن $PGCD(a;b)=(3n+2)\times d$ و من ما سبق ينتج أن :

لما $d=1$: $PGCD(a;b)=(3n+2)$

لما $d=2$: $PGCD(a;b)=2(3n+2)$

من جهة أخرى $d=2$ معناه $PGCD(\beta;2)=2$ أي أن 2 قاسم للعدد $n+2$ و بما أن 2 قاسم للعدد 2 فإن 2 قاسم للعدد n و عليه منه $n=2k$ مع $k\in\mathbb{N}^*$ وبالتالي :

لما : $n=2k$ مع $k\in\mathbb{N}^*$ ؛ $PGCD(a;b)=2(3n+2)$

لما : $n=2k+1$ مع $k\in\mathbb{N}^*$ ؛ $PGCD(a;b)=3n+2$

جـ.

- بما أن $PGCD(a;b)=2020$ فإن $2(3n+2)=2020$ ومنه $3n+2=1010$ إذن $3n=1008$ وعليه $n=336$

ينتج أن $\alpha = 338$ و $\beta = 113232$

- بما أن $PGCD(a;b) = 2021$ فإن $3n+2 = 2021$ ومنه $3n = 2019$ إذن $n = 673$ وعليه $\alpha = 675$ و $\beta = 453602$

➢ التمرين 16 :

n عدد طبيعي أكبر من 5 ، لنضع $a = 3n-2$ و $b = 4n+5$

1) عين القيم الممكنة لـ $PGCD(a;b)$

2) بين أن العددين a و b مضاعفان للعدد 23 إذا وفقط إذا كان $(n+7)$ مضاعف للعدد 23

3) عين قيم n التي من أجلها يكون $PGCD(a;b) = 23$

4) نضع $\alpha = 3n^2 - 11n + 6$ و $\beta = 4n^2 - 7n - 15$

أ. بين أن $(n-3)$ قاسم لكل من α و β

ب. عين حسب قيم n و بدلالة n : $PGCD(\alpha;\beta)$

5) نضع $n = 5$:

أ. عين الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية حلول المعادلة (E) التالية : $\beta x - \alpha y = 46$

ب. جد الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) بحيث : $|y-x| \leq 40$

✓ الحل:

n عدد طبيعي أكبر من 5 ، لنضع $a = 3n-2$ و $b = 4n+5$

1) تعيين القيم الممكنة لـ $PGCD(a;b)$:

لنضع $d = PGCD(a;b)$ ومنه d يقسم a و d يقسم b و عليه d يقسم $-4a+3b$ أي أن d يقسم 23

و بما أن 23 عدد أولي فإن $d = 1$ أو $d = 23$

2) نبين أن العددين a و b مضاعفان للعدد 23 إذا وفقط إذا كان $(n+7)$ مضاعف للعدد 23 :

(1) لنبين أنه إذا كان a و b مضاعفان للعدد 23 فإن $(n+7)$ مضاعف للعدد 23 :

بما أن فرضا a و b مضاعفان للعدد 23 فإن $\begin{cases} a \equiv 0[23] \\ b \equiv 0[23] \end{cases}$ أي أن $\begin{cases} 3n-2 \equiv 0[23] \\ 4n+5 \equiv 0[23] \end{cases}$

ومنه $(4n+5)-(3n-2) \equiv 0[23]$ إذن $n+7 \equiv 0[23]$ أي أن $(n+7)$ مضاعف للعدد 23

(2) لنبين أنه إذا كان $(n+7)$ مضاعف للعدد 23 فإن a و b مضاعفان للعدد 23 :

بما أن فرضا $(n+7)$ مضاعف للعدد 23 فإن $n+7 \equiv 0[23]$ ومنه $3n+21 \equiv 0[23]$

إذن $3n \equiv 2[23]$ و عليه $3n-2 \equiv 0[23]$ وبالتالي a مضاعف للعدد 23.

من جهة أخرى $n+7 \equiv 0[23]$ ومنه $4n+28 \equiv 0[23]$ إذن $4n \equiv -5[23]$ و عليه

$4n+5 \equiv 0[23]$ وبالتالي b مضاعف للعدد 23.

(1) و (2) ينتج أن نبين أن العددين a و b مضاعفان للعدد 23 إذا وفقط إذا كان $(n+7)$ مضاعف للعدد 23

3) تعيين قيم n التي من أجلها يكون $PGCD(a;b) = 23$:

$PGCD(a;b) = 23$ معناه أن a و b مضاعفان للعدد 23 و من السؤال السابق نستنتج أن $(n+7)$ مضاعف للعدد 23

وبالتالي $n+7 \equiv 0[23]$ و عليه $n \equiv 16[23]$ ينتج أن $n = 23k+16$ مع k عدد طبيعي

4) نضع $\alpha = 3n^2 - 11n + 6$ و $\beta = 4n^2 - 7n - 15$

أ. نبين أن $(n-3)$ قاسم لكل من α و β :

لنبحث عن العددان الطبيعيان λ و φ بحيث من أجل كل عدد طبيعي n : $\alpha = (n-3)(\lambda n + \varphi)$

من أجل كل عدد طبيعي n : $\alpha = \lambda n^2 + (\varphi - 3\lambda)n - 3\varphi$ ومنه $\lambda = 3$ و $\varphi = -2$

وعليه من أجل كل عدد طبيعي n : $\alpha = (n-3)(3n-2)$ أي أن $(n-3)$ قاسم للعدد α

بنفس الطريقة نجد من أجل كل عدد طبيعي n : $\beta = (n-3)(4n+5)$ أي أن $(n-3)$ قاسم للعدد β

ب. تعيين حسب قيم n و بدلالة n : $PGCD(\alpha;\beta)$

نلاحظ أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\alpha = (n-3)a$ و $\beta = (n-3)b$ وبالتالي :

$PGCD(\alpha;\beta) = PGCD((n-3)a;(n-3)b)$ ومنه $PGCD(\alpha;\beta) = (n-3)\times PGCD(a;b)$

أي أن $PGCD(\alpha;\beta) = (n-3)\times d$ وعليه

- إذا كان $d = 1$ فإن $PGCD(\alpha;\beta) = (n-3)$
- إذا كان $d = 23$ فإن $PGCD(\alpha;\beta) = 23(n-3)$

و بما أن $d = 23$ تكافئ $n = 23k + 16$ مع k عدد طبيعي فإن

- إذا كان $n = 23k + 16$ فإن $PGCD(\alpha;\beta) = 23(n-3)$
- إذا كان $n = 23k + r$ مع فإن $r \in \{0;1;2;.....;15;17;....;22\}$ فإن $PGCD(\alpha;\beta) = (n-3)$

5) نضع $n = 5$:

أ. تعيين الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية حلول المعادلة التالية : $\beta x - \alpha y = 46$

من أجل $n = 5$: نجد المعادلة $50x - 26y = 46$ تكافئ $25x - 13y = 23$

لنبحث عن حل خاص للمعادلة $25x - 13y = 23$ وذلك باستعمال خوارزمية اقليدس:

لدينا $25 = 13(1) + 12$ و $13 = 12(1) + 1$ إذن $13 - 12(1) = 1$ و $12 = 25 - 13(1)$

و عليه $13 - (25-13)(1) = 1$ أي أن $13 - (25-13)(1) = 1$

ومنه $(25)(-1) - 13(-2) = 1$ ينتج أن $(25)(-23) - 13(-46) = 23$

وعليه $(-23;-46)$ حل خاص للمعادلة $25x - 13y = 23$

بما أن $25x - 13y = 23$ و $(25)(-23) - 13(-46) = 23$ فإن $25(x+23) = 13(y+46) \quad ...(*)$

إذن 13 يقسم $25(x+23)$ وبما أن 13 عدد أولي لا يقسم 25 فإن 13 أولي مع 25 و بالتالي حسب مبرهنة قوص 13 يقسم $(x+23)$ أي أن $x = 13p - 23$ مع $p \in \mathbb{N}^*$ أو $x = 13p + 3$ مع $p \in \mathbb{N}$

بتعويض قيمة x في العلاقة $(*)$ نجد $y = 25p + 4$ مع $p \in \mathbb{N}$

و بالعكس بتعويض x و y في المعادلة $25x - 13y = 23$ نجد $25(13p+3) - 13(25p+4) = 23$ محققة

و عليه $S = \{(13p+3;25p+4) / p \in \mathbb{N}\}$

ب. ايجاد الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) بحيث : $|y-x| \le 40$

$|y-x| \le 40$ تكافئ $|25p + 4 - 13p - 3| \le 40$ ومنه $|12p+1| \le 40$ ينتج أن $-40 \le 12p + 1 \le 40$

وعليه $-41 \le 12p \le 39$ أي أن $-\frac{41}{12} \le p \le \frac{39}{12}$ ومنه $p \in \{0;1;2;3\}$ و بالتالي الثنائيات $(x;y)$ المطلوبة هي :

$(3;4)$ ، $(16;29)$ ، $(29;54)$ و $(42;79)$

➢ التمرين 17 :

1) a ، b و c أعداد طبيعية بحيث : $1 \le a \le b \le c$

عين a ، b و c علما أن في نظام تعداد ذي الأساس a يكون $b + c = \overline{46}$ و $b \times c = \overline{545}$

2) نعتبر في المجموعة $\mathbb{N}^2$ المعادلة : $21x - 17y = 8 \quad ...(I)$

تحقق أن الثنائية $(2;2)$ حل للمعادلة (I)، ثم حل المعادلة (I)

3) أ. أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 9^n على 13

ب. بين أنه إذا كانت الثنائية $(\alpha;\beta)$ حل للمعادلة (I) فإن : $\left(3^{34\beta+20}-9^{21\alpha}-2\right)\equiv 0[13]$

جـ. بين أنه إذا كانت الثنائية $(\alpha;\beta)$ حل للمعادلة (I) و $\alpha\equiv 0[4]$ فإن : $\beta\equiv 0[4]$

✓ **الحل:** تعيين الأعداد الطبيعية a ، b و c :

لدينا $b+c=4a+6$ مع $a\geq 7$ و $b\times c=5a^2+4a+5$ مع $a\geq 5$ ومنه $\begin{cases} b+c=4a+6 \\ b\times c=5a^2+4a+5 \end{cases}$ مع $a\geq 7$

وعليه b و c هما حلي المعادلة من الدرجة الثانية التالية : $x^2-(4a+6)x+5a^2+4a+5=0\ ...(I)$

حساب المميز المختصر للمعادلة (I): لدينا $\Delta'=\left[-(2a+3)\right]^2-\left(5a^2+4a+5\right)$ ومنه $\Delta'=-a^2+8a+4$

لنعين إشارة $P(a)$ ، بحيث $P(a)=-a^2+8a+4$: إن المميز المختصر لكثير الحدود $P(a)$ هو $\delta=20$

وعليه جذري $P(a)$ هما : $a_1=\dfrac{-4+\sqrt{20}}{-1}$ و $a_2=\dfrac{-4-\sqrt{20}}{-1}$ أي أن $a_1=4-\sqrt{20}$ و $a_2=4+\sqrt{20}$

تذكير: المميز المختصر

نعتبر المعادلة $(I)...\ ax^2+bx+c=0$ مع a، b و c أعداد حقيقية بحيث $a\neq 0$

إذا كان $b=2b'$ مع b' عدد حقيقي. فإننا نسمي العدد الحقيقي $\Delta'=(b')^2-ac$ المميز المختصر للمعادلة (I)

1) إذا كان $\Delta'<0$ فإن المعادلة (I) لا تقبل حلول في المجموعة $\mathbb{R}$

2) إذا كان $\Delta'=0$ فإن المعادلة (I) تقبل حل مضاعف $x_0=\dfrac{-b'}{a}$

3) إذا كان $\Delta'>0$ فإن المعادلة (I) تقبل حلين متمايزين هما $x_1=\dfrac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$ أو $x_1=\dfrac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$

ملاحظة : يمكن استعمال المميز المختصر في تعيين حلول المعادلة (I) في مجموعة الأعداد المركبة

وعليه تعطى إشارة $P(a)$ على النحو التالي :

a	$-\infty$		a_1		a_2		$+\infty$
$P(a)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

ومنه $P(a)>0$ إذا وفقط إذا كان $a\in\left]a_1;a_2\right[$ و بما أن a عدد طبيعي فإن $a=8$

وعليه من اجل $a=8$: نجد $\Delta'=4$ ومنه حلي المعادلة (I) هما : $x_1=\dfrac{2a+3-\sqrt{\Delta'}}{1}=17$ و $x_2=\dfrac{2a+3+\sqrt{\Delta'}}{1}=21$

وبما أن $1\leq a\leq b\leq c$ فإن $a=8$ ، $b=17$ و $c=21$

1) نتحقق أن $(2;2)$ حل للمعادلة (I) ، ثم تعيين حلولها :

بما أن $21(2)-17(2)=8$ فإن $(2;2)$ حل للمعادلة (I)

- تعيين حلول المعادلة (I) : بما أن $21x-17y=8$ و $21(2)-17(2)=8$ فإن $21x-17y=21(2)-17(2)$

ومنه $21(x-2)=17(y-2)\ \ ...(*)$ وعليه 17 يقسم $21(x-2)$ وبما أن 21 أولي مع 17

(21 أولي مع 17 لأن 17 عدد أولي و لا يقسم 21) فإنه حسب مبرهنة قوص 17 يقسم $x-2$ ومنه $x-2=17k$ مع $k\in\mathbb{N}$

وعليه $x=17k+2$ مع $k\in\mathbb{N}$. بتعويض x في $(*)$ نجد $y=21k+2$ مع $k\in\mathbb{N}$.

بالعكس ك بتعويض x و y في (I) ، نجد $21(17k+2)-17(21k+2)=8$ محققة

و بالتالي حلول المعادلة (I) هي الثنائيات $(17k+2;21k+2)$ مع $k\in\mathbb{N}$

2) أ. دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي قسمة 9^n على 13 :

1)التخمين :
لما $n=0$: $9^0\equiv 1[13]$ ، لما $n=1$: $9^1\equiv 9[13]$ ، لما $n=2$: $9^2\equiv 3[13]$ ، لما $n=3$: $9^3\equiv 1[13]$

(2) التعميم : من أجل كل عدد طبيعي p ؛ $9^{3p}\equiv 1[13]$ ، $9^{3p+1}\equiv 9[13]$ ، $9^{3p+2}\equiv 3[13]$

ب. بما أن $9^{21\alpha}\equiv 1[13]$ (لأن $21\alpha=3(7\alpha)$) فإن $3^{34\beta+20}-9^{21\alpha}-2\equiv\left(3^{34\beta+20}-3\right)[13]$

ولدينا $3^{34\beta+20}=3^{2(17\beta+10)}$ ومنه $3^{34\beta+20}=9^{17\beta+10}$، و بما أن فرضا $(\alpha;\beta)$ حل للمعادلة (I) فإن $\beta=21k+2$ مع $k\in\mathbb{N}$

فإن $3^{34\beta+20}=9^{17(21k+2)+10}$ أي أن $3^{34\beta+20}=9^{21(17k)+44}$ ومنه $3^{34\beta+20}=9^{3(119k+14)+2}$ إذن $3^{34\beta+20}\equiv 3[13]$

إذن $3^{34\beta+20}-3\equiv 0[13]$ وبالتالي $3^{34\beta+20}-9^{21\alpha}-2\equiv 0[13]$

جـ. بما أن فرضا $(\alpha;\beta)$ حل للمعادلة (I) فإن $\alpha=17k+2$ و $\beta=21k+2$ مع $k\in\mathbb{N}$

و بما أن فرضا $\alpha\equiv 0[4]$ فإن $17k+2\equiv 0[4]$ ومنه $17k\equiv 2[4]$ و بما أن $17\equiv 1[4]$ فإن $k\equiv 2[4]$ ، وبما أن $21\equiv 1[4]$

فإن $21k\equiv k[4]$ وعليه $21k\equiv 2[4]$ ينتج أن $21k+2\equiv 0[4]$ أي أن $\beta\equiv 0[4]$

التمرين 18 :

نعتبر n عدد صحيح يختلف عن -2015 وعن 2 . نضع $f(n)=\dfrac{n+2015}{n-2}$

1) أ. بين أن $PGCD(n-2;n+2015)=PGCD(n-2;2017)$

ب. تحقق أن 2017 عدد أولي

جـ. استنتج القيم الممكنة لـ $PGCD(n-2;n+2015)$

د. عين الأعداد الصحيحة n التي من أجلها يكون $PGCD(n-2;n+2015)=2017$

2) عين الأعداد الصحيحة n التي من أجلها يكون $f(n)$ عدد صحيح

3) a و b عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما

أ. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ؛ a أولي مع b^n

ب. استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ a^n أولي مع b^n

4) نعتبر p عدد طبيعي و q عدد طبيعي غير معدوم ، بحيث : $p\neq q$ و $PGCD(p;q)=1$

أ. بين أن $PGCD\left(p^2;q^2-p^2\right)=1$

ب. بين أن : $f(n)=\left(\dfrac{p}{q}\right)^2$ إذا وفقط إذا كان $n=2+\dfrac{2017q^2}{p^2-q^2}$

جـ. عين p ، q و n بحيث $f(n)=\left(\dfrac{p}{q}\right)^2$ و $PGCD(p;q)=1$

الحل:

1) أ. من أجل كل عدد صحيح n ؛ $n+2015=(n-2)+2017$ ومنه $PGCD(n-2;n+2015)=PGCD(n-2;2017)$

ب. نتحقق أن 2017 عدد أولي : إن $\sqrt{2017}\simeq 44{,}91$

بما أن $2017\equiv 1[2]$ ، $2017\equiv 1[3]$ ، $2017\equiv 2[5]$ ، $2017\equiv 1[7]$ ، $2017\equiv 4[11]$ ، $2017\equiv 2[13]$ ، $2017\equiv 11[17]$

$2017\equiv 3[19]$ ، $2017\equiv 16[23]$ ، $2017\equiv 16[29]$ ، $2017\equiv 2[31]$ ، $2017\equiv 19[37]$ ، $2017\equiv 6[41]$ ، $2017\equiv 39[43]$

فإن 2017 عدد أولي

جـ. استنتاج القيم الممكنة لـ $PGCD(n-2;n+2015)$:

لنضع $d=PGCD(n-2;n+2015)$ ، بما أن $PGCD(n-2;n+2015)=PGCD(n-2;2017)$

فإن $d=PGCD(n-2;2017)$ وعليه d من قواسم 2017 و بما أن 2017 عدد أولي فإن $d=1$ أو $d=2017$

د. تعيين الأعداد الصحيحة n بحيث $PGCD(n-2;n+2015)=2017$:

لدينا 2017 قاسم لكل من $n-2$ و $n+2015$ معناه $n-2\equiv 0[2017]$ و $n+2015\equiv 0[2017]$

إذن $n\equiv 2[2017]$ و $n\equiv -2015[2017]$ ومنه $n\equiv 2[2017]$ لأن $-2015\equiv 2[2017]$ ينتج أن $n\equiv 2017k+2$ مع $k\in\mathbb{Z}$

2) تعيين الأعداد الصحيحة n التي من أجلها يكون $f(n)$ عددا صحيحا :

بما أن $\frac{2017}{n-2}=1+\frac{n+2015}{n-2}=f(n)$ فإن $f(n)$ عدد صحيح إذا وفقط إذا كان $n-2$ قاسما للعدد 2017

وعليه $n-2=-2017$ أو $n-2=-1$ أو $n-2=2017$ أو $n-2=1$ و بالتالي قيم n هي :

$n=-2015$ أو $n=1$ أو $n=2019$ أو $n=3$

3)

<u>خاصية:</u> إذا كان a عددا أوليا مع عددين صحيحين b و c فإن a أولي مع جدائهما $b\times c$

أ. نبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ؛ a أولي مع b^n :

(1) من أجل $n=1$ ؛ a أولي مع b محققة من المعطيات

(2) لنفرض أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ؛ a أولي مع b^n و لنبرهن أن a أولي مع b^{n+1}

بما أن فرضا a أولي مع b^n و a أولي مع b فإنه حسب الخاصية a أولي مع $b^n\times b$ أي أن a أولي مع b^{n+1}

من (1) و(2) ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ؛ a أولي مع b^n

ب. استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ؛ a^n أولي مع b^n :

ليكن n عدد طبيعي غير معدوم ، بما أنه إذا كان $PGCD(a;b)=1$ فإن $PGCD(a;b^n)=1$ أي أن $PGCD(b^n;a)=1$

وعليه $PGCD(b^n;a^n)=1$ أي أن $PGCD(a^n;b^n)=1$

4) أ. نبين أن $PGCD(p^2;q^2-p^2)=1$:

نضع $d=PGCD(p^2;q^2-p^2)$. بما أن d قاسم للعدد p^2 و d قاسم للعدد q^2-p^2 فإن d قاسم للعدد $p^2+(q^2-p^2)$

أي أن d قاسم للعدد q^2 وعليه d قاسم مشترك لكل من p^2 و q^2 وبالتالي d قاسم للعدد $PGCD(p^2;q^2)$

و بما أن $PGCD(p;q)=1$ فإن حسب3) $PGCD(p^2;q^2)=1$ ينتج أن $d=1$ ، أي أن $PGCD(p^2;q^2-p^2)=1$

ب. نبين أن $f(n)=\left(\frac{p}{q}\right)^2$ إذا و فقط إذا كان $n=2+\frac{2017q^2}{p^2-q^2}$:

(1) لنبرهن أنه إذا كان $f(n)=\left(\frac{p}{q}\right)^2$ فإن $n=2+\frac{2017q^2}{p^2-q^2}$:

لدينا فرضا $f(n)=\left(\frac{p}{q}\right)^2$ معناه $1+\frac{2017}{n-2}=\left(\frac{p}{q}\right)^2$ ومنه $\frac{2017}{n-2}=\left(\frac{p}{q}\right)^2-1$ أي أن $\frac{2017}{n-2}=\frac{p^2-q^2}{q^2}$

و عليه $\frac{n-2}{2017}=\frac{q^2}{p^2-q^2}$ و بالتالي $n-2=\frac{2017q^2}{p^2-q^2}$ إذن $n=2+\frac{2017q^2}{p^2-q^2}$

(2) لنبرهن أنه إذا كان $n=2+\frac{2017q^2}{p^2-q^2}$ فإن $f(n)=\left(\frac{p}{q}\right)^2$:

بما أن فرضا $n=2+\frac{2017q^2}{p^2-q^2}$ فإن $f(n)=1+\frac{2017}{2+\frac{2017q^2}{p^2-q^2}-2}$ ومنه $f(n)=1+\frac{2017}{\frac{2017q^2}{p^2-q^2}}$

ينتج أن $f(n)=1+\frac{p^2-q^2}{q^2}$ ومنه $f(n)=\left(\frac{p}{q}\right)^2$

من (1) و(2) ينتج أن $f(n)=\left(\frac{p}{q}\right)^2$ إذا و فقط إذا كان $n=2+\frac{2017q^2}{p^2-q^2}$

جـ. نعيين p ، q و n بحيث $f(n)=\left(\frac{p}{q}\right)^2$ و $PGCD(p;q)=1$:

بما أن $f(n)=\left(\frac{p}{q}\right)^2$ إذا و فقط إذا كان $n=2+\frac{2017q^2}{p^2-q^2}$ فإننا نبحث عن p ، q و n بحيث $n=2+\frac{2017q^2}{p^2-q^2}$

و بما أن n عدد صحيح فإن p^2-q^2 قاسم للعدد $2017q^2$ و بما أن $PGCD(p;q)=1$ فإن $PGCD(p^2;q^2-p^2)=1$

و بالتالي حسب مبرهنة قوص p^2-q^2 قاسم للعدد 2017

أي أن $p^2-q^2=-2017$ أو $p^2-q^2=-1$ أو $p^2-q^2=2017$ أو $p^2-q^2=1$ ومنه :

$(p-q)(p+q)=-2017$ أو $(p-q)(p+q)=-1$ أو $(p-q)(p+q)=2017$ أو $(p-q)(p+q)=1$

الجدول التالي يلخص قيم p و q المحصل عليها :

$p-q$	-2017	2017	1	-1	2017	1	1	-1
$p+q$	1	-1	-1	1	1	2017	1	-1
p	-1008	1008	0	0	1009	1009	1	-1
q	1009	-1009	-1	1	-1008	1008		

و بتعويض قيم p و q في العلاقة $n=2+\frac{2017q^2}{p^2-q^2}$ ، نجد قيم n هي : -1018079 ، -2015 ، 1016066

➢ التمرين 19 :

1) نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$ التالية : $195x-130y=65 \quad ....(E)$

أ. عين $PGCD(195;130)$ ، ثم استنتج أن المعادلة (E) تقبل حلولا في المجموعة $\mathbb{Z}^2$

ب. تحقق أن الثنائية $(1;1)$ حل للمعادلة (E) ، ثم استنتج حلول المعادلة (E)

جـ. ليكن n عدد طبيعي غير معدوم ، نضع $\alpha=14n+3$ و $\beta=21n+4$

بين أن الثنائية $(\alpha;\beta)$ حل للمعادلة (E) ،ثم استنتج أن α و β أوليان فيما بينهما.

2) نعتبر d القاسم المشترك الأكبر للعددين : $2n+1$ و $21n+4$

أ.عين القيم الممكنة للعدد d.

ب. بين أن $d=13$ إذا و فقط إذا كان $n\equiv 6[13]$

3) من أجل كل عدد طبيعي n حيث : $n>1$ ،نضع : $A=21n^2-17n-4$ و $B=28n^3-8n^2-17n-3$

أ . بين أن $n-1$ قاسم لكل من A و B

ب. عين حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B

جـ. جد $PGCD(A;B)$ في كل حالة من الحالتين : $n=2023$ و $n=2021$

✓ الحل:

1) أ. لدينا $195=130(1)+65$ و $130=65(2)+0$ ومنه $PGCD(195;130)=65$

* بما أن 65 قاسم للعدد 65 فإن المعادلة (E) تقبل حلولا في المجموعة $\mathbb{Z}^2$

ب. لدينا (E) تكافئ $3x-2y=1$ ، بما أن $3(1)-2(1)=1$ فإن الثنائية $(1;1)$ حل للمعادلة (E)

* **استنتاج حلول المعادلة** (E) **:** بما أن $3x-2y=1$ و $3(1)-2(1)=1$ فإن $3x-2y=3(1)-2(1)$

ومنه $...(*)$ $3(x-1)=2(y-1)$ و عليه 2 قاسم للعدد $3(x-1)$ و بما أن 2 أولي مع 3 فإنه حسب مبرهنة قوص 2 قاسم للعدد $x-1$ ومنه $x-1=2k$ أي أن $x=2k+1$ مع k عدد صحيح

بتعويض x في $(*)$ نجد $y=3k+1$ مع k عدد صحيح

- بالعكس بتعويض x و y في المعادلة (E) نجد $195(2k+1)-130(3k+1)=65$ محققة

ينتج أن حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(2k+1;3k+1)$ مع k عدد صحيح

جـ. بما أن $3(14n+3)-2(21n+4)=1$ فإن $(14n+3;21n+4)$ حل للمعادلة (E)

- بما أن $(3)\times(14n+3)+(-2)(21n+4)=1$ أي أن $(3)\times\alpha+(-2)\beta=1$ فإنه حسب مبرهنة بيزو α أولي مع β

2) أ. تعيين القيم الممكنة للعدد d :

بما أن d يقسم $2n+1$ ويقسم $21n+4$ ومنه d يقسم $21(2n+1)-2(21n+4)$ أي أن d يقسم 13

و بما أن 13 عدد أولي فإن $d=1$ أو $d=13$

ب. نبين أن $d=13$ إذا وفقط إذا كان $n\equiv 6[13]$:

(1) نبين أنه إذا كان $d=13$ فإن $n\equiv 6[13]$:

بما أن فرضا $d=13$ فإن 13 يقسم $2n+1$ ويقسم $21n+4$ ومنه $2n+1\equiv 0[13]$ و $21n+4\equiv 0[13]$

إذن $20n+10\equiv 0[13]$ و $21n+4\equiv 0[13]$ ومنه $(21n+4)-(20n+10)\equiv 0[13]$ وعليه $n-6\equiv 0[13]$

و بالتالي $n\equiv 6[13]$

(2) نبين أنه إذا كان $n\equiv 6[13]$ فإن $d=13$:

بما أن فرضا $n\equiv 6[13]$ فإن $n=13\alpha+6$ مع α عدد طبيعي ومنه $2n+1=2(13\alpha+6)+1$ أي أن $2n+1=13(2\alpha+1)$

و $21n+4=21(13\alpha+6)+4$ أي أن $21n+4=13(21\alpha+10)$ و عليه $d=PGCD(13(2\alpha+1);13(21\alpha+10))$

ومنه $d=13\times PGCD(2\alpha+1;21\alpha+10)$. و بما أن $(21)\times(2\alpha+1)+(-2)(21\alpha+10)=1$ فإن حسب مبرهنة بيزو $PGCD(2\alpha+1;21\alpha+10)=1$ و عليه $d=13$

من (1) و (2) ينتج أن نبين أن $d=13$ إذا وفقط إذا كان $n\equiv 6[13]$

3) أ. من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $n>1$: $A=(n-1)(21n+4)$ ومنه $n-1$ قاسم للعدد A

و $B=(n-1)(28n^2+20n+3)$ ومنه $n-1$ قاسم للعدد B

ب. إن $28n^2+20n+3=(2n+1)(14n+3)$ ومنه $A=(n-1)\beta$ و $B=(n-1)(2n+1)\alpha$

وعليه $PGCD(A;B)=PGCD((n-1)\beta;(n-1)(2n+1)\alpha)$ ومنه $PGCD(A;B)=(n-1)\times PGCD(\beta;(2n+1)\alpha)$

و بما أن α أولي مع β فإن $PGCD(\beta;(2n+1)\alpha)=PGCD(\beta;2n+1)$

ينتج أن $PGCD(A;B)=(n-1)\times PGCD(21n+4;2n+1)$ أي أن $PGCD(A;B)=(n-1)\times d$

وبالتالي: لما $d=1$: $PGCD(A;B)=n-1$ ، لما $d=13$: $PGCD(A;B)=13(n-1)$

و بما أن $d=13$ إذا وفقط إذا كان $n\equiv 6[13]$ فإن :

- لما $n=13\alpha+6$ مع α عدد طبيعي: $PGCD(A;B)=13(n-1)$
- لما $n=13\alpha+r$ مع α عدد طبيعي و $r\in\{0;1;2;3;4;5;7;8;9;10;11;12\}$: $PGCD(A;B)=n-1$

جـ. لما $n=2023$ أي أن $n=13(155)+8$: $PGCD(A;B)=2023-1=2022$

لما $n=2021$ أي أن $n=13(155)+6$: $PGCD(A;B)=13(2021-1)=26260$

التمرين 20 :

1) نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$ التالية: $3x-8y=5\ ...(E)$

أ. تحقق أن $(-1;-1)$ حل للمعادلة (E)

ب. استنتج حلول المعادلة (E)

2) n ، α و β أعداد طبيعية ،بحيث: $n=3\alpha+2$ و $n=8\beta+7$

أ. تحقق أن $(\alpha;\beta)$ حل للمعادلة (E)

ب. نعتبر الجملة (S) التالية: $(S):\begin{cases} n\equiv 2[3] \\ n\equiv 7[8] \end{cases}$. بين أن n حل للجملة (S) إذا وفقط إذا كان $n\equiv 23[24]$

3) k عدد طبيعي

أ. عين باقي قسمة 2^{2k} على 3 و باقي قسمة 7^{2k} على 8

ب. تحقق أن 1991 حل للجملة (S) ، ثم بين أن $(1991)^{2016}-1$ قابل للقسمة على 24

✓ **الحل:**

1) أ. نتحقق أن $(-1;-1)$ حل للمعادلة (E) : بما أن $3(-1)-8(-1)=5$ فإن $(-1;-1)$ حل للمعادلة (E)

ب. استنتاج حلول المعادلة (E) : لدينا $3(-1)-8(-1)=5$ و $3x-8y=5$ إذن $3x-8y=3(-1)-8(-1)$

ومنه $3(x+1)=8(y+1)$ ...$(*)$ ينتج أن 8 يقسم $3(x+1)$ بما أن 8 أولي مع 3 فإن حسب مبرهنة قوص 8 يقسم $x+1$

وعليه $x+1=8k$ أي أن $x=8k-1$ مع k عدد صحيح و بتعويض x في $(*)$ نجد $y=3k-1$ مع k عدد صحيح

بالعكس بتعويض x و y في المعادلة (E) نجد : $3(8k-1)-8(3k-1)=5$ محققة و عليه حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(8k-1;3k-1)$ مع k عدد صحيح

2) أ . نتحقق أن $(\alpha;\beta)$ حل للمعادلة (E) : بما أن $n=3\alpha+2$ و $n=8\beta+7$ فإن $8\beta+7=3\alpha+2$ وعليه $3\alpha-8\beta=5$ و بالتالي $(\alpha;\beta)$ حل للمعادلة (E) .

ب. نبين أن : n حل للجملة (S) إذا وفقط إذا كان $n\equiv 23[24]$

(1) نبين أنه إذا كان n حل للجملة (S) فإن $n\equiv 23[24]$:

بما أن فرضا n حل للجملة (S) فإن $\begin{cases} n\equiv 2[3] \\ n\equiv 7[8] \end{cases}$ ومنه $n=3\alpha+2$ و $n=8\beta+7$ و بما أن $(\alpha;\beta)$ حل للمعادلة (E)

فإن $\alpha=8k-1$ و $\beta=3k-1$ مع k عدد طبيعي غير معدوم وعليه $n=3(8k-1)+2$ مع k عدد طبيعي غير معدوم

أي أن $n=24k-1$ مع k عدد طبيعي غير معدوم ينتج أن $n\equiv -1[24]$ و بما أن $-1\equiv 23[24]$ فإن $n\equiv 23[24]$

(2) نبين أنه إذا كان $n\equiv 23[24]$ فإن n حل للجملة (S) :

بما أن فرضا $n\equiv 23[24]$ فإن $n=24\lambda+23$ مع λ عدد طبيعي ومنه $n=3\times(8\lambda)+23$ إذن $n\equiv 23[3]$

و بما أن $23\equiv 2[3]$ فإن $n\equiv 2[3]$ ، كذلك $n=8\times(3\lambda)+23$ إذن $n\equiv 23[8]$ و بما أن $23\equiv 7[8]$ فإن $n\equiv 7[8]$

ومنه n حل للجملة (S) .

من (1) و(2) نستنتج أن n حل للجملة (S) إذا وفقط إذا كان $n\equiv 23[24]$

3) أ . بما أن $2^2\equiv 1[3]$ و $7^2\equiv 1[8]$ فإن من أجل كل عدد طبيعي k : $2^{2k}\equiv 1[3]$ و $7^{2k}\equiv 1[8]$

و بالتالي باقي قسمة 2^{2k} على 3 هو 1 و باقي قسمة 7^{2k} على 8 هو 1

ب. نتحقق أن 1991 حل للجملة (S) :

بما أن $1991=82\times(24)+23$ فإن $1991\equiv 23[24]$ وهذا يكافئ حسب ما سبق أن 1991 حل للجملة (S)

- نبين أن $(1991)^{2016}-1$ قابل للقسمة على 24 :

بما أن 1991 حل للجملة (S) فإن $\begin{cases} 1991\equiv 2[3] \\ 1991\equiv 7[8] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} (1991)^{2016}\equiv 2^{2016}[3] \\ (1991)^{2016}\equiv 7^{2016}[8] \end{cases}$ و بما أن $2016=2(1008)$

فإن $2^{2016}\equiv 1[3]$ و $7^{2016}\equiv 1[8]$ وعليه $\begin{cases} (1991)^{2016}\equiv 1[3] \\ (1991)^{2016}\equiv 1[8] \end{cases}$ ينتج أن $\begin{cases} (1991)^{2016}-1\equiv 0[3] \\ (1991)^{2016}-1\equiv 0[8] \end{cases}$

ومنه $(1991)^{2016}-1$ قابل للقسمة على 3 و $(1991)^{2016}-1$ قابل للقسمة على 8 و بما أن 8 أولي مع 3 فإن $(1991)^{2016}-1$ قابل للقسمة على 24

➢ **التمرين 21 :**

a و b عددان طبيعيان غير معدومان حيث $a<b$ ، نضع $d=PGCD(a;b)$ و $m=PPCM(a;b)$

بحيث: $m^2-393d^2=2023\ ...(E)$

1) بين أن d^2 من قواسم 2023

2) استنتج القيم الممكنة لـ d

3) أ. عين قواسم العدد 20

ب. استنتج الثنائيات $(a;b)$ التي تحقق (E)

✓ **الحل:**

1) لنبين أن d^2 من قواسم 2023 :

(E) تكافئ $(d\times m)^2-393d^4=d^2\times 2023$ و بما أن $d\times m=a\times b$ فإن

(E) تكافئ $(a\times b)^2-393d^4=d^2\times 2023$

بما أن $d=PGCD(a;b)$ فإنه يوجد a' و b' من $\mathbb{N}^*$ بحيث $a=d\times a'$ و $b=d\times b'$ مع $PGCD(a';b')=1$

فإن (E) تكافئ $d^4(a'\times b')^2-393d^4=d^2\times 2023$ ينتج أن $d^2\left[(a'\times b')^2-393\right]=2023$

و بالتالي d^2 من قواسم 2023

2) استنتاج القيم الممكنة لـ d :

- لنعين قواسم 2023 : بما أن $2023=7\times 17^2$ فإن مجموعة قواسم 2023 هي :

$D_{2023}=\{1;7;17;119;289;2023\}$ و بما أن $d^2\in D_{2023}$ فإن $d^2=1$ أو $d^2=289$

وعليه $d=1$ أو $d=17$

3) أ . تعيين قواسم العدد 20 :

بما أن $20=2^2\times 5$ فإن $D_{20}=\{1;2;4;5;10;20\}$

ب. استنتاج الثنائيات $(a;b)$ التي تحقق (E):

بما أن $d^2\left[(a'\times b')^2-393\right]=2023$ و ($d=1$ أو $d=17$) فإن :

- لما $d=1$ نجد : $(a'\times b')^2-393=2023$ ومنه $(a'\times b')^2=2416$ مرفوضة لأن 2416 ليس مربع تام
- لما $d=17$ نجد : $(a'\times b')^2-393=7$ ومنه $(a'\times b')^2=400$ و عليه $a'\times b'=20$

و بما أن $a<b$ فإن $a'<b'$ و كذلك $PGCD(a';b')=1$ ، ينتج من هذا أن :

($a'=1$ و $b'=20$) أو ($a'=4$ و $b'=5$) وعليه الثنائيات $(a;b)$ المطلوبة هي : $(17;340)$ ، $(68;85)$

➢ **التمرين 22 :**

1) أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة 3^n على 11

2) استنتج باقي قسمة العدد A على 11 بحيث : $A=1444^{2023}-2023^{1444}+1962^{1954}-1954^{1962}$

3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $B_n\equiv 0[11]$

بحيث : $B_n=1444^{10n+6}-2023^{10n}+2024^n-168^{20n+13}+1983^{30n+17}-2008$

4) جد الأعداد الصحيحة β بحيث من أجل كل عدد طبيعي n : $1444^{5n+2}\times\beta-2023^{2n+1}\equiv 0[11]$

5) عين الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية بحيث : $1444^{x}+2005^{y}-2023\equiv 0[11]$

✓ **الحل:**

1) دراسة حسب قيم لعدد الطبيعي n ، بواقي قسمة 3^n على 11 :

$3^0\equiv 1[11]$ ، $3^1\equiv 3[11]$ ، $3^2\equiv 9[11]$ ، $3^3\equiv 5[11]$ ، $3^4\equiv 4[11]$ ، $3^5\equiv 1[11]$

التعميم : بما أن $3^5\equiv 1[11]$ فإنه من اجل كل عدد طبيعي k :

$3^{5k}\equiv 1[11]$ ، $3^{5k+1}\equiv 3[11]$ ، $3^{5k+2}\equiv 9[11]$ ، $3^{5k+3}\equiv 5[11]$ ، $3^{5k+4}\equiv 4[11]$

2) استنتاج باقي قسمة العدد A على 11 بحيث : $A=1444^{2023}-2023^{1444}+1962^{1954}-1954^{1962}$

لدينا : $1444\equiv 3[11]$ إذن $1444^{2023}\equiv 3^{2023}[11]$ و بما أن $2023\equiv 5k++3$ فإن $1444^{2023}\equiv 5[11]$

* $2023\equiv 10[11]$ و $10\equiv -1[11]$ إذن $2023\equiv -1[11]$ ومنه $2023^{1444}\equiv 1[11]$

- $1962\equiv 4[11]$ و $4\equiv 3^4[11]$ إذن $1962\equiv 3^4[11]$ ومنه $1962^{1954}\equiv 3^{7816}[11]$

  و بما أن $7816=5k+1$ فإن $1962^{1954}\equiv 3[11]$

- $1954\equiv 7[11]$ و $7\equiv -3^4[11]$ إذن $1954\equiv -3^4[11]$ ومنه $1954^{1962}\equiv 3^{7848}[11]$

  و بما أن $7848=5k+3$ فإن $1954^{1962}\equiv 5[11]$

و بالتالي $A\equiv(5-1+3-5)[11]$ أي أن $A\equiv 2[11]$ و عليه باقي قسمة A على 11 هو 2

3) نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $B_n\equiv 0[11]$ مع

$$B_n=1444^{10n+6}-2023^{10n}+2024^{n}-168^{20n+13}+1983^{30n+17}-2008$$

- بما أن $1444\equiv 3[11]$ فإن $1444^{10n+6}\equiv 3^{10n+6}[11]$ أي أن $1444^{10n+6}\equiv 3^{5(2n+1)+1}[11]$

  ومنه $1444^{10n+6}\equiv 3[11]$

- بما أن $2023\equiv -1[11]$ فإن $2023^{10n}\equiv 1[11]$
- $2024\equiv 0[11]$ فإن $2024^{n}\equiv 0[11]$
- $168\equiv 3[11]$ فإن $168^{20n+13}\equiv 3^{20n+13}[11]$ أي أن $168^{20n+13}\equiv 3^{5(4n+2)+3}[11]$

  ومنه $168^{20n+13}\equiv 5[11]$

- بما أن $1983\equiv 3[11]$ فإن $1983^{30n+17}\equiv 3^{30n+17}[11]$ أي أن $1983^{30n+17}\equiv 3^{5(6n+3)+2}[11]$

  ومنه $1983^{30n+17}\equiv 9[11]$

- $2008\equiv 6[11]$

ينتج أن : $B_n\equiv(3-1+0-5+9-6)[11]$ ومنه $B_n\equiv 0[11]$

4) إيجاد الأعداد الصحيحة β بحيث من أجل كل عدد طبيعي n : $1444^{5n+2}\times\beta-2023^{2n+1}\equiv 0[11]$

- بما أن $1444\equiv 3[11]$ فإن $1444^{5n+2}\equiv 3^{5n+2}[11]$ ومنه $1444^{5n+2}\times\beta\equiv 9\beta[11]$
- بما أن $2023\equiv -1[11]$ فإن $2023^{2n+1}\equiv -1[11]$ لأن $2n+1$ عدد فردي

وعليه نبحث عن β بحيث $9\beta+1\equiv 0[11]$:

$9\beta+1\equiv 0[11]$ ومنه $9\beta\equiv 10[11]$ إذن $-2\beta\equiv 10[11]$ وعليه $-\beta\equiv 5[11]$ نجد $\beta\equiv 6[11]$

و بالتالي $\beta=11\lambda+6$ مع λ عدد صحيح

5) عين الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية بحيث : $1444^x+2005^y-2023\equiv 0[11]$

بما أن $1444\equiv 3[11]$ فإن $1444^x\equiv 3^x[11]$ و $2005\equiv 3[11]$ فإن $2005^y\equiv 3^y[11]$ و $2023\equiv -1[11]$

فإننا نبحث عن $(x;y)$ بحيث : . $3^x+3^y\equiv 10[11]$

نلخص العمل في الجدول أدناه:

	$x=$	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$5k+4$
$y=$	$3^x\equiv$ / $3^y\equiv$	1	3	9	5	4
$5k'$	1	2	4	10	6	5
$5k'+1$	3	4	6	1	8	7
$5k'+2$	9	10	1	7	3	2
$5k'+3$	5	6	8	3	10	9
$5k'+4$	4	5	7	2	9	8

وعليه الثنائيات $(x;y)$ هي: $(5k;5k'+2)$ ، $(5k+2;5k')$ ، $(5k+3;5k'+3)$

التمرين 23:

1) عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية لكل من 2^n و 3^n على 5
2) استنتج باقي قسمة العدد $2023^{1444}-2022^{1443}-2021^{1442}+2019^{1441}$ على 5
3) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $3^{3n+2}+2^{n+4}\equiv 0[5]$
4) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـــ : $u_n=2^{n+1}-2\times 3^n$
   1. عين الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون u_n مضاعفا للعدد 5
   2. نعتبر المجموع S_n بحيث : $S_n=u_0+u_1+...+u_n$
      أ. أحسب S_0 ، S_1 ، S_2
      ب. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $S_n=2^{n+2}-3^{n+1}-1$
      جـ. عين حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي قسمة S_n على 5

الحل:

1) أ. تعيين باقي قسمة 2^n على 5 : لدينا $2^0\equiv 1[5]$ ، $2^1\equiv 2[5]$ ، $2^2\equiv 4[5]$ ، $2^3\equiv 3[5]$ ، $2^4\equiv 1[5]$

التعميم : من أجل كل عدد طبيعي k: $2^{4k}\equiv 1[5]$ ، $2^{4k+1}\equiv 2[5]$ ، $2^{4k+2}\equiv 4[5]$ ، $2^{4k+3}\equiv 3[5]$

ب. تعيين باقي قسمة 3^n على 5 : لدينا $3^0\equiv 1[5]$ ، $3^1\equiv 3[5]$ ، $3^2\equiv 4[5]$ ، $3^3\equiv 2[5]$ ، $3^4\equiv 1[5]$

التعميم : من أجل كل عدد طبيعي p : $3^{4p}\equiv 1[5]$ ، $3^{4p+1}\equiv 3[5]$ ، $3^{4p+2}\equiv 4[5]$ ، $3^{4p+3}\equiv 2[5]$

2) استنتاج باقي قسمة العدد $2023^{1444}-2022^{1443}-2021^{1442}+2020^{1441}$ على 5

لنضع $A=2023^{1444}-2022^{1443}-2021^{1442}+2020^{1441}$

- $2023\equiv 3[5]$ ومنه $2023^{1444}\equiv 3^{1444}[5]$ ، بما أن $1444\equiv 4p$ فإن $2023^{1444}\equiv 1[5]$
- $2022\equiv 2[5]$ ومنه $2022^{1443}\equiv 2^{1443}[5]$ ، بما أن $1443\equiv 4p+3$ فإن $2022^{1443}\equiv 3[5]$
- $2021\equiv 1[5]$ ومنه $2021^{1442}\equiv 1[5]$
- $2020\equiv 0[5]$ ومنه $2020^{1441}\equiv 0[5]$

و عليه $A\equiv(1-3-1+0)[5]$ أي أن $A\equiv 2[5]$ وبالتالي بلقي قسمة A على 5 هو 2

3) ليكن n عدد طبيعي ، لدينا $3^3\equiv 2[5]$ إذن $3^{3n}\equiv 2^n[5]$ و $3^2\equiv 4[5]$ إذن $3^{3n}\times 3^2\equiv 2^n\times 4[5]$

أي أن $3^{3n+2}\equiv 2^{n+2}[5]$ ومنه $3^{3n+2}+2^{n+4}\equiv(2^{n+2}+2^{n+4})[5]$ إذن $3^{3n+2}+2^{n+4}\equiv 2^{n+2}(1+2^2)[5]$

منه $3^{3n+2}+2^{n+4}\equiv 2^{n+2}\times 5[5]$ و عليه $3^{3n+2}+2^{n+4}\equiv 0[5]$

4) 1. u_n مضاعف للعدد 5 معناه $u_n\equiv 0[5]$ أي أن $2^{n+1}-2\times 3^n\equiv 0[5]$ ومنه $2(2^n-3^n)\equiv 0[5]$ وبما أن 2 أولي مع 5 فإن $2^n-3^n\equiv 0[5]$ ومنه $2^n\equiv 3^n[5]$ و هذا محقق حسب التعميمين السابقين لما $n=4\alpha$ و $n=4\alpha+2$ مع α عدد طبيعي

2. أ. حساب S_0 ، S_1 ، S_2 : إن S_n هو مجموع $(n+1)$ حد متتابع من المتتالية العددية (u_n)

إن $S_0=u_0$ أي أن $S_0=0$ ، $S_1=u_0+u_1$ أي أن $S_1=-2$ ، $S_2=u_0+u_1+u_2$ أي أن $S_2=-12$

ب. نبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $S_n=2^{n+2}-3^{n+1}-1$

(1) من أجل $n=0$: $S_0=2^2-3^1-1=0$ محققة لأن حسب أ. $S_0=0$

(2) ليكن n عدد طبيعي معطى : لنفرض أن $S_n=2^{n+2}-3^{n+1}-1$ و لنبرهن أن $S_{n+1}=2^{n+3}-3^{n+2}-1$

لدينا $S_{n+1}=u_0+u_1+\dots+u_n+u_{n+1}$ أي أن $S_{n+1}=S_n+u_{n+1}$ و بما أن $u_{n+1}=2^{n+2}-2\times 3^{n+1}$

وفرضا $S_n=2^{n+2}-3^{n+1}-1$ فإن $S_{n+1}=2^{n+2}-3^{n+1}-1+2^{n+2}-2\times 3^{n+1}$

إذن $S_{n+1}=2\times 2^{n+2}-3\times 3^{n+1}-1$ ومنه $S_{n+1}=2^{n+3}-3^{n+2}-1$

من (1) و (2) ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $S_n=2^{n+2}-3^{n+1}-1$

جـ. تعيين حسب قيم العدد الطبيعي n ؛باقي قسمة S_n على 5 :

إن $S_n=4\times 2^n-3\times 3^n-1$ ، باستعمال التعميمين السابقين و نلخص بواقي قسمة S_n على 5 في الجدول التالي:

n	4α	$4\alpha+1$	$4\alpha+2$	$4\alpha+3$	
$4\times 2^n\equiv$	4	3	1	2	$[5]$
$3\times 3^n\equiv$	3	4	2	1	$[5]$
$S_n\equiv$	0	5	3	0	$[5]$

التمرين 24:

1) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $(1+\sqrt{6})^n=\sum_{p=0}^{p=n}C_n^p(\sqrt{6})^p$

2) أ. عين قيمة كل من a ، b و c بحيث : $a=(1+\sqrt{6})^2$ ، $b=(1+\sqrt{6})^4$ و $c=(1+\sqrt{6})^6$

ب. بين أن العددين 847 و 342 أوليان فيما بينهما

3) نعتبر العددين الطبيعيين α_n و β_n بحيث من أجل كل عدد طبيعي n : $\left(1+\sqrt{6}\right)^n=\alpha_n+\beta_n\sqrt{6}$

أ. حدد قيمة كل من : α_1 ، β_1 و α_2 ، β_2 و α_4 ، β_4 و α_6 ، β_6

ب. عبر عن α_{n+1} و β_{n+1} بدلالة α_n و β_n

جـ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ؛ فإن 5 لا يقسم $\alpha_n+\beta_n$

4) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ؛ α_n و β_n أوليان فيما بينهما

✓ **الحل:**

تذكير : دستور ثنائي الحد : a و b عددان طبيعيان ، n عدد طبيعي $(n\geq 1)$ لدينا

$$(a+b)^n=\sum_{p=0}^{n}C_n^p a^{n-p}b^p=a^n+C_n^1a^{n-1}b+...+C_n^{n-1}a\ b^{n-1}+b^n$$

1) من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $\left(1+\sqrt{6}\right)^n=\sum_{p=0}^{p=n}C_n^p\times(1)^{n-p}\times\left(\sqrt{6}\right)^p$ ومنه $\left(1+\sqrt{6}\right)^n=\sum_{p=0}^{p=n}C_n^p\left(\sqrt{6}\right)^p$

2) أ. (1) : $\left(1+\sqrt{6}\right)^2=\sum_{p=0}^{p=2}C_2^p\left(\sqrt{6}\right)^p=C_2^0\left(\sqrt{6}\right)^0+C_2^1\left(\sqrt{6}\right)^1+C_2^2\left(\sqrt{6}\right)^2$

ومنه $\left(1+\sqrt{6}\right)^2=1+2\sqrt{6}+6=7+2\sqrt{6}$

(2) : $\left(1+\sqrt{6}\right)^4=\sum_{p=0}^{p=4}C_4^p\left(\sqrt{6}\right)^p=C_4^0\left(\sqrt{6}\right)^0+C_4^1\left(\sqrt{6}\right)^1+C_4^2\left(\sqrt{6}\right)^2+C_4^3\left(\sqrt{6}\right)^3+C_4^4\left(\sqrt{6}\right)^4$

ومنه $\left(1+\sqrt{6}\right)^4=1+4\sqrt{6}+(6\times 6)+4\times\left(6\sqrt{6}\right)+36=73+28\sqrt{6}$

(3) :

$$\left(1+\sqrt{6}\right)^6=\sum_{p=0}^{p=6}C_6^p\left(\sqrt{6}\right)^p=C_6^0\left(\sqrt{6}\right)^0+C_6^1\left(\sqrt{6}\right)^1+C_6^2\left(\sqrt{6}\right)^2+C_6^3\left(\sqrt{6}\right)^3+C_6^4\left(\sqrt{6}\right)^4+C_6^5\left(\sqrt{6}\right)^5+C_6^6\left(\sqrt{6}\right)^6$$

ومنه $\left(1+\sqrt{6}\right)^6=1+6\sqrt{6}+(15\times 6)+20\times\left(6\sqrt{6}\right)+(15\times 36)+6\times\left(36\sqrt{6}\right)+216=847+342\sqrt{6}$

ب. لدينا : $847=342(2)+163$ و $342=163(2)+16$ و $163=16(10)+3$ و $16=3(5)+1$ و $3=3(1)+0$

ومنه $PGCD(847;342)=1$

3) أ. (1) : $\left(1+\sqrt{6}\right)^1=1+\sqrt{6}$ ومنه $\alpha_1=1$ و $\beta_1=1$

(2) : $\left(1+\sqrt{6}\right)^2=7+2\sqrt{6}$ ومنه $\alpha_2=7$ و $\beta_2=2$

(3) : $\left(1+\sqrt{6}\right)^4=73+28\sqrt{6}$ ومنه $\alpha_4=73$ و $\beta_4=28$

(4) : $\left(1+\sqrt{6}\right)^6=847+342\sqrt{6}$ ومنه $\alpha_6=847$ و $\beta_6=342$

ب. بما أن $\left(1+\sqrt{6}\right)^n=\alpha_n+\beta_n\sqrt{6}$ فإن $\left(1+\sqrt{6}\right)^{n+1}=\left(1+\sqrt{6}\right)^n\times\left(1+\sqrt{6}\right)=\left(\alpha_n+\beta_n\sqrt{6}\right)\left(1+\sqrt{6}\right)$

ومنه $\left(1+\sqrt{6}\right)^{n+1}=(\alpha_n+6\beta_n)+(\alpha_n+\beta_n)\sqrt{6}$ و بما أن $\left(1+\sqrt{6}\right)^{n+1}=\alpha_{n+1}+\beta_{n+1}\sqrt{6}$

فإن $\alpha_{n+1}+\beta_{n+1}\sqrt{6}=(\alpha_n+6\beta_n)+(\alpha_n+\beta_n)\sqrt{6}$ ينتج $\alpha_{n+1}=\alpha_n+6\beta_n$ و $\beta_{n+1}=\alpha_n+\beta_n$

جـ. لنبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ؛ 5 لا يقسم $\alpha_n+\beta_n$

(1) من أجل $n=1$: $\alpha_1=1$ و $\beta_1=1$ ومنه 5 لا يقسم $\alpha_1+\beta_1$ محققة لأن 5 لا يقسم 2

(2) لنفرض أن 5 لا يقسم $\alpha_n+\beta_n$ و لنبرهن أن 5 لا يقسم $\alpha_{n+1}+\beta_{n+1}$

لنستعمل البرهان بالخلف؛ أي نفرض أن 5 يقسم $\alpha_{n+1}+\beta_{n+1}$

من جهة أخرى $\alpha_{n+1}+\beta_{n+1}=(\alpha_n+6\beta_n)+(\alpha_n+\beta_n)$ ومنه $\alpha_{n+1}+\beta_{n+1}=2\alpha_n+7\beta_n$

أي أن $\alpha_{n+1}+\beta_{n+1}=2(\alpha_n+\beta_n)+5\beta_n$ ينتج أن 5 يقسم $2(\alpha_n+\beta_n)+5\beta_n$

و بما أن 5 يقسم $5\beta_n$ فإن 5 يقسم $2(\alpha_n+\beta_n)$ و بما أن 5 أولي مع 2 فإن حسب مبرهنة قوص

5 يقسم $\alpha_n+\beta_n$ و ها تناقض مع فرضية التراجع (5 لا يقسم $\alpha_n+\beta_n$) و عليه 5 لا يقسم $\alpha_{n+1}+\beta_{n+1}$

و بالتالي من (1) و (2) ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n؛ 5 لا يقسم $\alpha_n+\beta_n$

4) لنبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ؛ α_n و β_n أوليان فيما بينهما

(1) من أجل $n=1$: $\alpha_1=1$ و $\beta_1=1$ ومنه α_1 أولي مع β_1

(2) لنفرض أن α_n أولي مع β_n و لنبرهن أن α_{n+1} أولي مع β_{n+1}

نعتبر $d=PGCD(\alpha_{n+1};\beta_{n+1})$ ومنه d يقسم α_{n+1} و d يقسم β_{n+1} وعليه d يقسم $\alpha_{n+1}-\beta_{n+1}$

و بما أن $\alpha_{n+1}-\beta_{n+1}=(\alpha_n+6\beta_n)-(\alpha_n+\beta_n)$ أي أن $\alpha_{n+1}-\beta_{n+1}=5\beta_n$ و عليه d يقسم $5\beta_n$

من جهة أخرى d يقسم $\alpha_{n+1}+\beta_{n+1}$ و حسب ما سبق 5 لا يقسم $\alpha_{n+1}+\beta_{n+1}$ منه $d\neq 5$ وعليه d يقسم β_n

ينتج كذلك d يقسم $\beta_{n+1}-\beta_n$ و بما أن $\beta_{n+1}-\beta_n=\alpha_n$ فإن d يقسم α_n

و بالتالي d قاسم مشترك لكل من α_n و β_n و بما أن فرضا $PGCD(\alpha_n;\beta_n)=1$ فإن $d=1$ أي أن $PGCD(\alpha_{n+1};\beta_{n+1})=1$

ينتج أنه من (1) و (2) ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ؛ α_n و β_n أوليان فيما بينهما

➢ التمرين 25:

من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع $A_n=3n^3-11n+48$ و $B_n=3n^2-9n+16$

1) بين أن A_n مضاعف للعدد $n+3$

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ B_n هو عدد طبيعي غير معدوم

3) بين أنه من أجل كل الأعداد الطبيعية غير المعدومة a ، b و c فإن $PGCD\,(a;b)=PGCD\,(bc-a;b)$

4) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n بحيث $n\geq 2$ ؛ $PGCD(3n^3-11n;n+3)=PGCD(48;n+3)$

5) أ. عين مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 48

ب. استنتج مجموعة الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $A=\dfrac{3n^3-11n}{n+3}$ عددا طبيعيا

✓ الحل:

1) نبين أن A_n مضاعف للعدد $n+3$:

لنبحث عن الأعداد الصحيحة α ، β و γ بحيث من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $A_n=(n+3)(\alpha n^2+\beta n+\gamma)$

من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $(n+3)(\alpha n^2+\beta n+\gamma)=\alpha n^3+(\beta+3\alpha)n^2+(\gamma+3\beta)n+3\gamma$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $3n^3-11n+48=\alpha n^3+(\beta+3\alpha)n^2+(\gamma+3\beta)n+3\gamma$

وعليه $\begin{cases}\alpha=3\\ \beta+3\alpha=0\\ \gamma+3\beta=-11\\ 3\gamma=48\end{cases}$ و بالتالي $\begin{cases}\alpha=3\\ \beta=-9\\ \gamma=16\end{cases}$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $A_n=(n+3)(3n^2-9n+16)$

بما أنّ $3n^2-9n+16$ هو مجموع أعداد صحيحة فإنه يكون عددا صحيحا وبالتالي A_n مضاعف للعدد $n+3$.

ملاحظة : يمكن استعمال القسمة الاقليدية للعدد A_n على $n+3$

2) نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ B_n هو عدد طبيعي غير معدوم :
مميز كثير الحدود $3x^2-9x+16$ هو $\Delta=-111$ إذن $\Delta<0$ ومعامل x^2 هو 3 (موجب)
إذن من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $3x^2-9x+16>0$ وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي n ، $3n^2-9n+16$ هو عدد صحيح موجب تماما أي هو عدد طبيعي غير معدوم .

3) نبين أنه من أجل كل الأعداد الطبيعية غير المعدومة a ، b و c فإن $PGCD(a;b)=PGCD(bc-a;b)$
لنضع $d=PGCD(a;b)$ و $d'=PGCD(bc-a;b)$ ولنبرهن أن d يقسم d' و d' يقسم d عندئذ $d=d'$

أ. لنبين d يقسم d' :
لدينا $d=PGCD(a;b)$ إذن d قاسم للعددين a و b وبالتالي d يقسم a و يقسم bc ومنه هو يقسم $bc-a$
وعليه d قاسم مشترك للعددين b و $bc-a$ و بما أن $d'=PGCD(bc-a;b)$ فإن d يقسم d'

ب. لنبين d' يقسم d:
لدينا $d'=PGCD(bc-a;b)$ إذن d' قاسم للعددين b و $bc-a$ و بالتالي d' يقسم bc ويقسم $bc-a$
ومنه d' يقسم الفرق $bc-(bc-a)$ أي d' يقسم a وبالتالي d' قاسم مشترك للعددين a و b.
وبما أن $d=PGCD(a;b)$ فإن d' يقسم d

من أ و ب ينتج أن $d=d'$

4) نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n بحيث $n\geq 2$ ؛ $PGCD(3n^3-11n;n+3)=PGCD(48;n+3)$
نستعمل النتيجة السابقة بوضع : $a=48$ ، $b=n+3$ و $c=3n^2-9n+16$
إذن $bc-a=3n^3-11n$ ومنه $p\gcd(48;n+3)=p\gcd(3n^3-11n;n+3)$

5) أ. تعيين مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 48 :
إن $48=2^4\times 3$ ومنه مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 48 هي : $\{1;2;3;4;6;8;12;16;24;48\}$.

ب. استنتاج مجموعة الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $A=\dfrac{3n^3-11n}{n+3}$ عددا طبيعيا
بما أن $A=\dfrac{3n^3-11n}{n+3}$ ؛ و $n+3>0$ فإن :
حتى يكون A عددا طبيعيا يجب أن يكون $3n^3-11n\geq 0$ و $n+3$ يقسم $3n^3-11n$.
$3n^3-11n\geq 0$ معناه $3n\left(n^2-\dfrac{11}{3}\right)\geq 0$ و $3n\left(n^2-\dfrac{11}{3}\right)\geq 0$ يكافئ $n=0$ أو $n\geq\sqrt{\dfrac{11}{3}}$
ومنه $3n^3-11n\geq 0$ ويكافئ $n=0$ أو $n\geq 2$

- لما $n=0$: $A=0$ و هو عدد طبيعي
- لما $n\geq 2$:

$n+3$ يقسم $3n^3-11n$ معناه $p\gcd(3n^3-11n;n+3)=n+3$ وبما أن $p\gcd(3n^3-11n;n+3)=p\gcd(n+3;48)$
فإن $p\gcd(n+3;48)=n+3$ و هذا يكافئ أنّ $n+3$ يقسم 48 معناه $n+3\in\{1;2;3;4;6;8;12;16;24;48\}$
باعتبار $n=0$ أو $n\geq 2$ نجد $n\in\{0;3;5;9;13;21;45\}$

➢ **التمرين 26:**

نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$ التالية : $(E)...\ 24x-76y=124$

1) جد القاسم المشترك الأكبر للعددين 24 و 76 ، ثم بين أن المعادلة (E) تقبل حلولا في المجموعة $\mathbb{Z}^2$

2) بين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإن $y\equiv -1[6]$

3) استنتج حلول المعادلة (E)

4) λ عدد طبيعي يكتب $\overline{2\beta\alpha34}$ في نظام التعداد الذي أساسه 5 و يكتب $\overline{4\beta3\alpha}$ في نظام التعداد الذي أساسها 7
عين العددين الطبيعيين α و β ، ثم اكتب λ في النظام العشري

5) أ. حلل العدد 1444 إلى جداء عوامل أولية ، ثم استنتج الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها يقسم 1444
ب. عين الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق : $m^2+37d^2=1444$
حيث : $d=PGCD(a;b)$ و $m=PPCM(a;b)$

✓ **الحل:**

1) ايجاد القاسم المشترك الأكبر للعددين 24 و 76 :
لدينا $76=24(3)+4$ و $24=4(6)+0$ إذن $PGCD(76;24)=4$

- نبين أن المعادلة (E) تقبل حلولا في المجموعة $\mathbb{Z}^2$: بما أن 4 تقسم 124 (لأن $124=31\times4$)
فإن المعادلة (E) تقبل حلولا في المجموعة $\mathbb{Z}^2$

2) نبين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإن $y\equiv-1[6]$:
لدينا (E) تكافئ $(E')...$ $6x-19y=31$ و عليه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإن
الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E') و بالتالي $-19y-1=6(-x+5)$ ومنه $-19y\equiv-1[6]$ و $19y\equiv-1[6]$ و بما أن $19\equiv1[6]$
فإن $y\equiv-1[6]$

3) استنتاج حلول المعادلة (E) : بما أنه نه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإن $y\equiv-1[6]$ ينتج
أن $y=6k-1$ مع $k\in\mathbb{Z}$ و بتعويض قيمة y في المعادلة (E') نجد $6x-19(6k-1)=31$

و عليه $x=19k+2$ مع $k\in\mathbb{Z}$ ينتج أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S=\{(19k+2;6k-1)/k\in\mathbb{Z}\}$

4) λ عدد طبيعي يكتب $\overline{2\beta\alpha34}$ في نظام التعداد الذي أساسه 5 و يكتب $\overline{4\beta3\alpha}$ في نظام التعداد الذي أساسها 7

- تعيين العددين الطبيعيين α و β :

لدينا $\lambda=2\times5^4+\beta\times5^3+\alpha\times5^2+3\times5+4$ مع $0\le\alpha\le4$ و $0\le\beta\le4$
و $\lambda=4\times7^3+\beta\times7^2+3\times7^1+\alpha$ مع $0\le\alpha\le6$ و $0\le\beta\le6$
ومنه $1393+49\beta+\alpha=1269+125\beta+25\alpha$ مع $0\le\alpha\le4$ و $0\le\beta\le4$
نجد $76\beta+24\alpha=124$ مع $0\le\alpha\le4$ و $0\le\beta\le4$
أي أن $24\alpha-76(-\beta)=124$ مع $0\le\alpha\le4$ و $0\le\beta\le4$
وبالتالي $\alpha=19k+2$ و $\beta=-6k+1$ مع $k\in\mathbb{Z}$ بما أن $0\le\alpha\le4$ فإن $0\le19k+2\le4$
وعليه $\frac{-2}{19}\le k\le\frac{2}{19}$ ومنه $k=0$ إذن $\alpha=2$
كذلك بما أن $0\le\beta\le4$ فإن $0\le-6k+1\le4$ و عليه $\frac{-1}{2}\le k\le\frac{1}{6}$ ومنه $k=0$ إذن $\beta=1$

- كتابة λ في النظام العشري : لدينا $\lambda=1393+49\beta+\alpha$ و بتعويض α و β نجد $\lambda=1444$

5) أ. تحليل العدد 1444 إلى جداء عوامل أولية : $1444=2^2\times19^2$
* استنتاج الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها يقسم 1444 : نعتبر a عدد طبيعي حيث a^2 من قواسم 1444
بما ان مجموعة قواسم 1444 هي $\{1;2;4;19;38;67;361;722;1444\}$ فإن $a^2\in\{1;4;361;1444\}$

ومنه $a \in \{1;2;19;38\}$

ب. تعيين الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق : $m^2+37d^2=1444$

حيث : $d=PGCD(a;b)$ و $m=PPCM(a;b)$

إن $m^2+37d^2=1444$ تكافئ $m^2\times d^2+37d^4=1444d^2$ ونعلم أن $m\times d=a\times b$ إذن

$m^2+37d^2=1444$ تكافئ $(a\times b)^2+37d^4=1444d^2$

من جهة أخرى يوجد عددان طبيعيان غير معدومان a' و b' بحيث $a=a'\times d$ و $b=b'\times d$ مع $PGCD(a';b')=1$

وعليه $(a'\times b')^2\times d^4+37d^4=1444d^2$ ومنه $d^2\left((a'\times b')^2+37\right)=1444$ وعليه d^2 من قواسم 1444

وبالتالي $d\in\{1;2;19;38\}$ ينتج أن :

- لما $d=1$ نجد $(a'\times b')^2=1407$ مرفوضة لأن 1407 ليس مربع تام
- لما $d=2$ نجد $(a'\times b')^2=324$ ومنه $a'\times b'=18$ نتحصل على :

a'	1	18	2	9
b'	18	1	9	2
a	2	36	4	18
b	36	2	18	4

- لما $d=19$ نجد $(a'\times b')^2=-33$ مرفوضة لأن $(a'\times b')^2>0$
- لما $d=38$ نجد $(a'\times b')^2=-36$ مرفوضة لأن $(a'\times b')^2>0$

و عليه الثنائيات $(a;b)$ المطلوبة هي : $(2;36)$ ، $(36;2)$ ، $(4;18)$، $(18;4)$.

➢ التمرين 27:

نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$ التالية : $(E)\ldots\ 420x-945y=525$

1) جد القاسم المشترك الأكبر للأعداد : 420 ، 525 و 945

2) أ. أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $x\equiv 8[9]$

ب. استنتج حلول المعادلة (E)

3) أ. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 9^n على 11

ب. عين الثنائيات الطبيعية $(x;y)$ التي هي حلول المعادلة (E) و التي تحقق $2022^{x-y}+y+2\equiv 0[11]$

4) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع $a=9n+8$ و $b=4n+3$ و ليكن $d=PGCD(a;b)$

أ. عين القيم الممكنة للعدد d

ب . عين الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $d=5$

5) نعتبر العددان الطبيعيان A و B بحيث $A=9n^2+17n+8$ و $B=4n^2+7n+3$

أ. بين أن العددين A و B يقبلان القسمة على $n+1$

ب. جد بدلالة n و حسب قيم n ، القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B

✓ الحل:

1) ايجاد القاسم المشترك الأكبر للأعداد : 420 ، 525 و 945

لنعين أولا $PGCD(945;525)$: لدينا $945=525(1)+420$ و $525=420(1)+105$ و $420=105(4)+0$

ومنه $PGCD(945;525)=105$ وعليه $PGCD(945;525;420)=PGCD(105;420)$

و بما أن $420=105(4)+0$ فإن $PGCD(945;525;420)=105$

2) أ. أثبات أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $x\equiv 8[9]$

إن (E) تكافئ (E')... $4x-9y=5$ و عليه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $4x-9y=5$

ومنه $4x=9y+5$ إذن $4x\equiv 5[9]$ وعليه $8x\equiv 10[9]$ و بما أن $8\equiv -1[9]$ و $10\equiv 1[9]$ فإن $-x\equiv 1[9]$

و بالتالي $x\equiv -1[9]$ أي أن $x\equiv 8[9]$

ب. استنتج حلول المعادلة (E)

بما أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $x\equiv 8[9]$ ينتج أن $x=9k+8$ مع $k\in\mathbb{Z}$

و بتعويض قيمة x في المعادلة (E') نجد $4(9k+8)-9y=5$ ومنه $9(y-4k)=27$ إذن $y=4k+3$

مع $k\in\mathbb{Z}$ ينتج أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S=\{(9k+8;4k+3)/k\in\mathbb{Z}\}$

3) أ. دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 9^n على 11 :

لدينا $9^0\equiv 1[11]$ ، $9^1\equiv 9[11]$ ، $9^2\equiv 4[11]$ ، $9^3\equiv 3[11]$ ، $9^4\equiv 5[11]$ ، $9^5\equiv 1[11]$

وعليه من أجل كل عدد طبيعي p :

$9^{5p}\equiv 1[11]$ ، $9^{5p+1}\equiv 9[11]$ ، $9^{5p+2}\equiv 4[11]$ ، $9^{5p+3}\equiv 3[11]$ ، $9^{5p+4}\equiv 5[11]$.

ب. تعيين الثنائيات الطبيعية $(x;y)$ التي هي حلول المعادلة (E) و التي تحقق $2022^{x-y}+y+2\equiv 0[11]$:

بما أن $(x;y)$ هي حلول المعادلة (E) فإن $x=9k+8$ و $y=4k+3$ مع $k\in\mathbb{N}$ وعليه $x-y=5k+5$

ومنه $2022^{x-y}+y+2\equiv 0[11]$ تكافئ $2022^{5k+5}+4k+3+2\equiv 0[11]$ و بما أن $2022\equiv 9[11]$

فإن $9^{5k+5}+4k+5\equiv 0[11]$ أي أن $9^{5(k+1)}+4k+5\equiv 0[11]$ وعليه $4k+6\equiv 0[11]$ ينتج أن $4k\equiv 5[11]$

ومنه $12k\equiv 15[11]$ و بما أن $12\equiv 1[11]$ و $15\equiv 4[11]$ فإن $k\equiv 4[11]$ وبالتالي $k=11l+4$ مع $l\in\mathbb{N}$

و عليه الثنائيات هي $(99l+44;44l+19)$ مع $l\in\mathbb{N}$

4) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع $a=9n+8$ و $b=4n+3$ و ليكن $d=PGCD(a;b)$

أ. تعيين القيم الممكنة للعدد d:

بما أن d يقسم a و b فإن d يقسم $4a-9b$ وعليه d يقسم 5 و بما أن 5 عدد أولي فإن $d=1$ أو $d=5$

ب . تعيين الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $d=5$:

بما أن $d=5$ فإن 5 يقسم a ويقسم b و عليه $a\equiv 0[5]$ و $b\equiv 0[5]$ ومنه $\begin{cases}9n+8\equiv 0[5]\\4n+3\equiv 0[5]\end{cases}$ وعليه $\begin{cases}9n+8\equiv 0[5]\\8n+6\equiv 0[5]\end{cases}$

و بالتالي $(9n+8)-(8n+6)\equiv 0[5]$ ينتج أن $n+2\equiv 0[5]$ ومنه $n\equiv 3[5]$ إذن $n=5\lambda+3$ مع $\lambda\in\mathbb{N}$

5) نعتبر العددان الطبيعيان A و B بحيث $A=9n^2+17n+8$ و $B=4n^2+7n+3$

أ. نبين أن العددين A و B يقبلان القسمة على $n+1$:

من اجل كل عدد طبيعي n ؛ $9n^2+17n+8=(n+1)(an+b)$ مع a و b عددان طبيعيان

ومنه $9n^2+17n+8=an^2+(a+b)n+b$ و عليه $a=9$ و $b=8$

وبالتالي من اجل كل عدد طبيعي n ؛ $9n^2+17n+8=(n+1)(9n+8)$ ينتج أن A يقبل القسمة على $n+1$

- من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $4n^2+7n+3=(n+1)(a'n+b')$ مع a' و b' عددان طبيعيان

ومنه $4n^2+7n+3=a'n^2+(a'+b')n+b'$ و عليه $a'=4$ و $b'=3$

وبالتالي من اجل كل عدد طبيعي n ؛ $4n^2+7n+3=(n+1)(4n+3)$ ينتج أن B يقبل القسمة على $n+1$

ب. ايجاد بدلالة n و حسب قيم n ، القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B:

بما أنه من اجل كل عدد طبيعي n ؛ $A=(n+1)a$ و $B=(n+1)b$ فإن :

$PGCD(A;B)=PGCD((n+1)a;(n+1)b)=(n+1)PGCD(a;b)$ ومنه : $PGCD(A;B)=(n+1)d$

وعليه لما: $d=1$ نجد $PGCD(A;B)=(n+1)$ و لما : $d=5$ نجد $PGCD(A;B)=5(n+1)$

وبالتالي لما : $n=5\lambda+3$ مع $\lambda\in\mathbb{N}$ نجد $PGCD(A;B)=5(n+1)$

لما: $n=5\lambda+r$ مع $\lambda\in\mathbb{N}$ و $r\in\{0;1;2;4\}$ نجد $PGCD(A;B)=(n+1)$

التمرين 28:

1) جد القاسم المشترك الأكبر لكل من 4^5-1 و 4^6-1

2) (u_n) هي المتتالية العددية المعرفة بــ: $u_0=0$ و $u_1=1$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+2}=5u_{n+1}-4u_n$

أحسب u_2 ، u_3 و u_4

3) أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1}=4u_n+1$

ب. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ u_n عدد طبيعي

جـ. استنتج من أجل كل عدد طبعي n ؛ القاسم المشترك الأكبر لكل من u_n و u_{n+1}

4) (v_n) هي المتتالية العددية المعرفة بــ: من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n+\frac{1}{3}$

أ. بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب. عين v_n ، ثم u_n بدلالة n

جـ. عين من أجل كل عدد طبعي n ؛ القاسم المشترك الأكبر لكل من 4^n-1 و $4^{n+1}-1$

الحل:

1) بما أن $4^6-1=(4-1)(4^5+4^4+4^3+4^2+4^1+1)$ و $4^5-1=(4-1)(4^4+4^3+4^2+4^1+1)$

أي أن $4^6-1=3\times1365$ و $4^5-1=3\times341$ ومنه $PGCD(4^6-1;4^5-1)=PGCD(3\times1365;3\times341)$

وعليه $PGCD(4^6-1;4^5-1)=3\times PGCD(1365;341)$ و بما أن $1365=4\times341+1$

أي أن $1365(1)+341(-4)=1$ فإن $PGCD(1365;341)=1$ ينتج أن $PGCD(4^6-1;4^5-1)=3$

2) حساب u_2 ، u_3 و u_4:

- $u_2=5u_1-4u_0$ وبما أن $u_0=0$ و $u_1=1$ فإن $u_2=5$

- $u_3 = 5u_2 - 4u_1$ وبما أن $u_1 = 1$ و $u_2 = 5$ فإن $u_3 = 21$
- $u_4 = 5u_3 - 4u_2$ وبما أن $u_2 = 5$ و $u_3 = 21$ فإن $u_4 = 85$

3) أ. نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} = 4u_n + 1$:

(1) من أجل : $n = 0$ ؛ $u_1 = 4u_0 + 1$ محققة لأن $u_0 = 0$ و $u_1 = 1$

(2) ليكن n عدد طبيعي كيفي ، لنفرض أن $u_{n+1} = 4u_n + 1$ و لنبرهن أن $u_{n+2} = 4u_{n+1} + 1$:

لدينا $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n$ و بما أن فرضا $u_{n+1} = 4u_n + 1$ فإن $4u_n = u_{n+1} - 1$

ومنه $u_{n+2} = 5u_{n+1} - (u_{n+1} - 1)$ وعليه $u_{n+2} = 4u_{n+1} + 1$

من (1) و (2) ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} = 4u_n + 1$

ب. نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ u_n عدد طبيعي :

(1) من أجل : $n = 0$ ؛ $u_0 = 0$ ومنه u_0 عدد طبيعي محققة

(2) ليكن n عدد طبيعي كيفي ، لنفرض أن u_n عدد طبيعي و لنبرهن أن u_{n+1} عدد طبيعي :

بما أن فرضا u_n عدد طبيعي فإن $4u_n + 1$ عدد طبيعي و عليه u_{n+1} عدد طبيعي

من (1) و (2) ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ u_n عدد طبيعي

جـ. استنتج من أجل كل عدد طبعي n ؛ القاسم المشترك الأكبر لكل من u_n و u_{n+1}

بما أن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} = 4u_n + 1$ فإن $(1) \times u_{n+1} + (-4) \times u_n = 1$

و عليه حسب مبرهنة بيزو فإن $PGCD(u_{n+1}; u_n) = 1$

4) (v_n) هي المتتالية العددية المعرفة بـ: من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n + \frac{1}{3}$

أ. نبين أن (v_n) متتالية هندسية مع تعيين أساسها و حدها الأول

من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{3}$ و بما أن $u_{n+1} = 4u_n + 1$ فإن $v_{n+1} = 4u_n + 1 + \frac{1}{3}$

أي أن $v_{n+1} = 4u_n + \frac{4}{3}$ ومنه $v_{n+1} = 4\left(u_n + \frac{1}{3}\right)$ وعليه $v_{n+1} = 4v_n$

ينتج أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 4$ و حدها الأول $v_0 = u_0 + \frac{1}{3}$ أي أن $v_0 = \frac{1}{3}$

ب. تعيين v_n ، ثم u_n بدلالة n:

بما أن (v_n) متتالية هندسية فإن من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_n = \frac{1}{3} \times 4^n$

و بما أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n + \frac{1}{3}$ فإن $u_n = v_n - \frac{1}{3}$ ومنه $u_n = \frac{1}{3} \times 4^n - \frac{1}{3}$ أي أن

$$u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$$

جـ. تعيين من أجل كل عدد طبعي n ؛ القاسم المشترك الأكبر لكل من $4^n - 1$ و $4^{n+1} - 1$:

بما ان من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$ فإن $4^n - 1 = 3u_n$ ومنه $4^{n+1} - 1 = 3u_{n+1}$

و عليه $PGCD\left(4^{n+1}-1;4^{n}-1\right)=PGCD\left(3u_{n+1};3u_{n}\right)=3PGCD\left(u_{n+1};u_{n}\right)$

و بما أن $PGCD\left(u_{n+1};u_{n}\right)=1$ فإن $PGCD\left(4^{n+1}-1;4^{n}-1\right)=3$

➢ **التمرين 29:**

نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$ التالية: $(E)...\ (x+1)^{2}=9+5y$

1) أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $x\equiv 1[5]$ أو $x\equiv 2[5]$

2) استنتج حلول المعادلة (E)

3) بين أنه من أجل كل عدد صحيح k : $p\gcd\left(5k^{2}+4k-1;5k+1\right)=p\gcd\left(k-3;8\right)$

4) A عدد طبيعي يكتب في نظام التعداد ذي الأساس x كمايلي: $\overline{121}$ و يكتب في نظام تعداد ذي الأساس y كمايلي : $\overline{59}$

بحيث x و y عددان طبيعيان يحققان $\begin{cases}p\gcd(x;y)=8\\ x\equiv 1[5]\end{cases}$. عين الثنائيات $(x;y)$

✓ **الحل:**

1) لتكن $(x;y)$ حل للمعادلة (E) إذن $(x+1)^{2}=9+5y$ ومنه $(x+1)^{2}-9=5y$

وعليه $(x+1+3)(x+1-3)=5y$ ينتج أن $(x+4)(x-2)=5y$ و بالتالي 5 يقسم $(x+4)(x-2)$

و بما أن 5 عدد أولي فإن 5 يقسم $(x+4)$ أو 5 يقسم $(x-2)$ ومنه $x+4\equiv 0[5]$ أو $x-2\equiv 0[5]$

إذن $x\equiv -4[5]$ أو $x\equiv 2[5]$ و عليه $x\equiv 1[5]$ أو $x\equiv 2[5]$.

2) استنتاج حلول المعادلة (E) :

بما أن $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإن $x\equiv 1[5]$ أو $x\equiv 2[5]$

أ. إذا كان $x\equiv 1[5]$ فإن $x=5k+1$ مع k عدد صحيح . بتعويض قيمة x في المعادلة (E) :

نجد $(5k+1+1)^{2}=9+5y$ أي أن $(5k+2)^{2}=9+5y$ ينتج أن $25k^{2}+20k+4=9+5y$

ومنه $25k^{2}+20k-5=5y$ و بالتالي $y=5k^{2}+4k-1$ إذن $S_{1}=\left\{\left(5k+1;y=5k^{2}+4k-1\right)/k\in\mathbb{Z}\right\}$

ب. إذا كان $x\equiv 2[5]$ فإن $x=5k+2$ مع k عدد صحيح. بتعويض قيمة x في المعادلة (E) :

نجد $(5k+2+1)^{2}=9+5y$ أي أن $(5k+3)^{2}=9+5y$ ينتج أن $25k^{2}+30k+9=9+5y$

ومنه $25k^{2}+30k=5y$ و بالتالي $y=5k^{2}+6k$ إذن $S_{2}=\left\{\left(5k+2;y=5k^{2}+6k\right)/k\in\mathbb{Z}\right\}$

من أ و ب ينتج أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي: $S_{1}\cup S_{2}$ أي هي :

$$\left\{\left(5k+1;y=5k^{2}+4k-1\right)/k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\left(5k+2;y=5k^{2}+6k\right)/k\in\mathbb{Z}\right\}$$

3) نبين أنه من أجل كل عدد صحيح k : $p\gcd\left(5k^{2}+4k-1;5k+1\right)=p\gcd\left(k-3;8\right)$

ليكن k عدد صحيح ، لدينا: $5k^{2}+4k-1=k(5k+1)+3k-1$

و : $5k+1=(3k-1)+2k+2$

و : $3k-1=(2k+2)+k-3$

و : $2k+2=2(k-3)+8$

و بالتالي : $p\gcd(5k^2+4k-1;5k+1)=p\gcd(5k+1;3k-1)$

و: $p\gcd(5k+1;3k-1)=p\gcd(3k-1;2k+2)$

و: $p\gcd(3k-1;2k+2)=p\gcd(2k+2;k-3)$

و: $p\gcd(2k+2;k-3)=p\gcd(k-3;8)$

و عليه: $p\gcd(5k^2+4k-1;5k+1)=p\gcd(k-3;8)$

4) تعيين الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية :

لدينا $A=1+2x+x^2$ مع $x>2$ و $A=5+9y$ مع $y>9$ و عليه $(x+1)^2=5y+9$ ينتج أن:

$(x;y)$ حل للمعادلة (E) وبما أن $x\equiv 1[5]$ فإن $x=5k+1$ و $y=5k^2+4k-1$ مع k عدد طبيعي غير معدوم

و بما أن $p\gcd(x;y)=8$ أي أن $p\gcd(5k^2+4k-1;5k+1)=8$

و بما أن $p\gcd(5k^2+4k-1;5k+1)=p\gcd(k-3;8)$ فإن $p\gcd(k-3;8)=8$ و عليه 8 يقسم $k-3$

ومنه $k-3\equiv 0[8]$ إذن $k\equiv 3[8]$ وعليه $k=8p+3$ و باتالي $x=5(8p+3)+1$ و $y=5(8p+3)^2+4(8p+3)-1$

ينتج أن الثنائيات المطلوبة هي : $(40p+16;320p^2+272p+56)$

➢ التمرين 30:

نعتبر في المجموعة $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$ التالية: $x^2(x+y)=y^2(x-y)^2 \ldots(E)$

و ليكن $d=p\gcd(x;y)$، نضع $x=da$ و $y=db$ مع $p\gcd(a;b)=1$

1) أ. بين أن : الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) يكافئ أن $db^2(a-b)^2=(a+b)a^2$

ب. استنتج أن $b=1$

2) أ. بين أن $a\neq 1$ و أن $(a-1)$ قاسم للعدد $(a+1)$

ب. استنتج أن $a=2$ أو $a=3$

3) عين حلول المعادلة (E)

✓ الحل:

1) أ. $(x;y)$ حل للمعادلة (E) يكافئ $x^2(x+y)=y^2(x-y)^2$ و بما أن $x=da$ و $y=db$

فإن $(x;y)$ حل للمعادلة (E) يكافئ $(da)^2(da+db)=(db)^2(da-db)^2$

و عليه $(x;y)$ حل للمعادلة (E) يكافئ $a^2d^3(a+b)=b^2d^4(a-b)^2$

ينتج أن $(x;y)$ حل للمعادلة (E) يكافئ $a^2(a+b)=b^2d(a-b)^2$

أي أن $(x;y)$ حل للمعادلة (E) يكافئ $db^2(a-b)^2=(a+b)a^2$

ب. استنتاج أن $b=1$:

بما أن $db^2(a-b)^2=(a+b)a^2$ فإن b يقسم $a^2(a+b)$ و بما أن $p\gcd(a;b)=1$ فإن $p\gcd(a^2;b)=1$

ومنه حسب مبرهنة قوص فإن b يقسم $(a+b)$ و بما أن b يقسم b فإن b يقسم $(a+b-b)$ أي أن b يقسم a

و بما أن $p\gcd(a;b)=1$ فإن $b=1$

2) أ. نبين أن $a\neq 1$ و أن $(a-1)$ قاسم للعدد $(a+1)$:

* **لنبين ان** $a\neq 1$ **(نستعمل البرهان بالخلف)** : لنفرض أن $a=1$ ، بما أن $b=1$ و $x=da$ و $y=db$

فإن $x=y=d$ و بما أن الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإن $d^2(d+d)=d^2(d-d)^2$ ينتج أن $2d^3=0$

وعليه $d=0$ و هذا تناقض لأن $p\gcd(x;y)\neq 0$ و بالتالي $a\neq 1$

- لنبين أن $(a-1)$ قاسم للعدد $(a+1)$:

بما أن $db^2(a-b)^2=(a+b)a^2$ و $b=1$ فإن $d(a-1)^2=a^2(a+1)$ وعليه $(a-1)$ قاسم للعدد $a^2(a+1)$

و بما أن $a-(a-1)=1$ فإن حسب مبرهنة بيزو $p\gcd(a;a-1)=1$ و عليه $p\gcd(a^2;a-1)=1$

ينتج من هذا أن : $(a-1)$ قاسم للعدد $a^2(a+1)$ و $p\gcd(a-1;a^2)=1$ وعليه حسب مبرهنة قوص

$(a-1)$ قاسم للعدد $(a+1)$

ب. استنتاج أن $a=2$ أو $a=3$:

بما أن $(a-1)$ قاسم للعدد $(a+1)$ و $(a-1)$ قاسم للعدد $(a-1)$ فإن $(a-1)$ قاسم للعدد $(a+1)-(a-1)$

أي أن $(a-1)$ قاسم للعدد 2 وعليه $(a-1)$ من قواسم العدد 2 و بما أن 2 عدد أولي فإن $a-1=1$ أو $a-1=2$

ينتج أن $a=2$ أو $a=3$

3) تعيين حلول المعادلة (E) :

بما أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإن ($a=2$ أو $a=3$) و $b=1$

و $(x;y)$ حل للمعادلة (E) يكافئ $db^2(a-b)^2=(a+b)a^2$ فإنه ينتج ك

لما $a=2$ و $b=1$: $d=12$ ومنه $(x;y)=(24;12)$

لما $a=3$ و $b=1$: $d=9$ ومنه $(x;y)=(27;9)$

انتهى

علمتني الرياضيات أنه يمكننا الوصول لنتيجة صحيحة بأكثر من طريقة ، فلا تظن أنك وحدك صاحب الحقيقة و أن كل من خالفك مخطئ

تمارين إضافية

➢ التمرين 01:

1) ما هو عدد الأعداد ذات اربع أرقام مختلفة في نظام التعداد ذي الأساس 7 ؟ برر إجابتك
2) ما هو عدد الأعداد ذات اربع أرقام مختلفة في نظام التعداد ذي الأساس 7 و التي تضم على الأقل رقما فرديا ؟ برر إجابتك
3) λ عدد طبيعي يكتب $\overline{abcd}$ في نظام التعداد ذي الأساس 7

أ. بين أن : λ مضاعف للعدد 6 إذا وفقط إذا كان $(a+b+c+d)$ قابل للقسمة على 6

ب. عين الشرط اللازم و الكافي حتى يقبل العدد λ القسمة على 7

4) N عدد طبيعي يكتب $\overline{1\beta0\alpha}$ في نظام التعداد ذي الأساس 7

عين α و β حتى يكون N قابل للقسمة على 42 ، ثم أكتب N في النظام العشري

➢ التمرين 02:

1) أ. أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 10

ب. استنتج باقي قسمة العدد $2023^{1444^{2023}}$ على 10

2) بين أنه من اجل كل عدد طبيعي n ؛ $2023^{4n+1}+1441^n+10^{2n}-2025\equiv 0[10]$

3) عين الأعداد الطبيعية n التي من اجلها يكون : $2023^{4n+1}+2023n\equiv 0[10]$

4) أ . عين حلول المعادلة التفاضلية $y'=y(\ln 3)\ \ ...(E)$

ب. نسمي f الحل الخاص للمعادلة التفاضلية (E) و الذي يحقق $f(0)=1$. بين أن $f(x)=3^x$

جـ. أحسب بدلالة n، المجموع S_n بحيث $S_n=f(0)+f(1)+...f(n)$.

د. ثم عين مجموعة الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $2S_n$ مضاعف للعدد 10

➢ التمرين 03:

(I) 1) ذكر نص برهنة بيزو

2) a و b عددان طبيعيان ، c عدد صحيح

بين أنه إذا كان a قاسم للعدد $b\times c$ و a أولي مع b فإن a قاسم للعدد c

(II) نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$ التالية: $4444x-1212y=2020\ \ ...(E)$

1) عين القاسم المشترك الأكبر للعددين 4444 و 1212 ثم استنتج أن المعادلة تقبل حلولا في المجموعة $\mathbb{Z}^2$

2) أ. بين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإن $x\equiv 1[3]$

ب. استنتج $(x_0;y_0)$ حلا خاصا للمعادلة (E) بحيث $1<x_0<6$

3) عين حلول المعادلة (E)

4) نعتبر $(x;y)$ حل للمعادلة (E) بحيث x و y عددان طبيعيان و ليكن d القاسم المشترك الأكبر لهما

أ. عين القيم الممكنة للعدد d

ب. عين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) بحيث يكون $d=5$

➢ التمرين04:

نعتبر العددان الطبيعيان x و y الأوليان فيما بينهما، و لنضع $S=x+y$ و $P=x\times y$

1) α عدد طبيعي غير معدوم .

بين أن كل قاسم للعدد α^2 هو قاسم للعدد α

2) بين أن $p\gcd(S;P)=1$

3) بين أن S و P مختلفي الشفعية

4) أ. عين قواسم العدد 84

ب. عين العددان الطبيعيان x و y الأوليان فيما بينهما، بحيث : $P\times S=84$

عين الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية بحيث : $\begin{cases} a+b=84 \\ a\times b=d^3 \end{cases}$ بحيث $d=p\gcd(a;b)$

➢ **التمرين 05:**

1) أ. عين مجموعة الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة: $8x-5y=3\ ...(E)$ علما أن $(1;1)$ حلا لها

ب. ليكن m عددا صحيحا بحيث توجد ثنائية $(p;q)$ من الأعداد الصحيحة تحقق:

$m=8p+10$ و $m=5q+13$، بين أن الثنائية $(p;q)$ هي حل للمعادلة (E).

واستنتج أن: $m\equiv 18[40]$

جـ. عين الأعداد الطبيعية m بحيث : $1962\leq m\leq 2018$.

2) ليكن n عددا طبيعيا.

أ. أثبت أنه من أجل عدد طبيعي k لدينا: $2^{3k}\equiv 1[7]$.

ب .ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد $1962^{2018}+2018^{1962}$ على 7؟

3) ليكن a و b عددان طبيعيان، نعتبر العدد الطبيعي N الذي يكتب في نظام التعداد الذي أساسه 6 كما يلي $\overline{1ba0a}$

أ. تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $6^{2n}\equiv 1[7]$ و $6^{2n+1}\equiv -1[7]$

ب. استنتج a و b بحيث $N\equiv 2[7]$ ، ثم أكتب N في النظام العشري

➢ **التمرين 06:**

(I) a ، b و c أعداد طبيعية غير معدومة.

برهن أنه إذا كان b أولي مع c فإن: $PGCD(ac;b)=PGCD(a;b)$

(II) من أجل كل عدد طبيعي n؛ $n\geq 5$ نضع : $a=n^3-n^2-12n$ و $b=2n^2-7n-4$

1) برهن أن $(n-4)$ قاسم لكل من a و b

2) نضع $\alpha=2n+1$ و $\beta=n+3$ ونعتبر d القاسم المشترك الأكبر لكل من α و β

أ. عين علاقة بين α و β مستقلة عن العدد الطبيعي n

ب. بين أن d من قواسم 5

جـ. برهن أن : α و β من مضاعفات 5 إذا وفقط إذا كان $(n-2)$ من مضاعفات 5

3) أ. تحقق أن $2n+1$ و n أوليان فيما بينهما

ب. عين حسب قيم n و بدلالة n القاسم المشترك الأكبر لكل من a و b

جـ. عين $PGCD(a;b)$ وذلك من أجل $n=2020$ ، $n=2022$

➢ **التمرين 07:**

1) أ. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 8^n على 13

ب . استنتج باقي قسمة $3-5^{1439}+102\times 38^{2018}$ على 13

2) أ. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $(5n+1)\times 64^n-5^{2n+3}\equiv(5n+6)8^{2n}[13]$

ب. عين الأعداد الطبيعية n ، التي من أجلها يكون : $\begin{cases}(5n+1)\times 64^n-5^{2n+3}\equiv 0[13] \\ n\equiv 0[2]\end{cases}$

3) N عدد طبيعي يكتب في نظام تعداد أساسه 8 كما يلي ؛ $\overline{374\alpha}$
عين العدد الطبيعي α ، ثم أكتب N في النظام العشري

➢ التمرين 08:

a و b عددان طبيعيان غير معدومان بحيث $a<b$. نعتبر S مجموعة الثنائيات $(a;b)$ التي تحقق $PGCD(a;b)=b-a$

1) أ. أحسب $PGCD(363;484)$

ب. هل الثنائية $(363;484)$ تنتمي إلى المجموعة S ؟ برر إجابتك

2) نعتبر n عدد طبيعي غير معدوم . بين أن الثنائية $(n;n+1)$ تنتمي إلى S

3) أ. بين أن : ($(a;b)$ تنتمي إلى S) يكافئ (يوجد k من $\mathbb{N}^*$ بحيث : $\begin{cases} a=k(b-a) \\ b=(k+1)(b-a) \end{cases}$)

ب. استنتج أنه من أجل كل $(a;b)$ من S ، فإن : $PPCM(a;b)=k(k+1)(b-a)$

4) أ. عين قواسم العدد 228

ب. استنتج مجموعة الثنائيات $(a;b)$ من S بحيث : $PPCM(a;b)=228$

➢ التمرين 09:

1) نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ ، المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$ التالية: $343x-729y=257 \;...(E)$

أ. بين أن العددين 343 و 729 أوليان فيما بينهما

ب. عين الثنائية $(x_0;y_0)$ التي هي حل للمعادلة (E) بحيث : $x_0+y_0=7$

جـ. حل المعادلة (E)

2) نعتبر العدد الطبيعي n الذي يكتب $\overline{\alpha68\alpha}$ في نظام التعداد الذي أساسه 9 ، و يكتب $\overline{\beta61\alpha}$ في نظام تعداد ذو الأساس 7
عين العددين الطبيعيين α و β ، ثم اكتب n في النظام العشري

➢ التمرين 10:

1) نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$ التالية : $195x-130y=65 \;...(E)$

أ. عين القاسم المشترك الأكبر للعددين 195و 130 ، ثم استنتج أن المعادلة (E) تقبل حلولا في المجموعة $\mathbb{Z}^2$

ب. بين أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة (E') حيث $3x-2y=1 \;...(E')$

جـ. عين حلول المعادلة (E') ، ثم استنتج حلول المعادلة (E)

2) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم

ا. بين ان الثنائية $(14n+3;21n+4)$ هي حل للمعادلة (E')

ب. استنتج أن العددين $21n+4$ و $14n+3$ أوليان فيما بينهما

3) نعتبر d القاسم المشترك الأكبر للعددين $21n+4$ و $2n+1$

أ . عين القيم الممكنة للعدد d

ب. برهن : $d=13$ إذا وفقط إذا كان $n\equiv 6[13]$

4) من اجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 2$ نضع $A=21n^2-17n-4$ و $B=28n^3--8n^2-17n-3$

أ. بين أن A و B يقبلان القسمة على $n-1$

ب. جد حسب قيم n و بدلالة n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B

جـ. عين $PGCD(A;B)$ في كل حالة من الحالتين : $n=2021$ ، $n=2023$

➢ التمرين 11:

نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$ التالية : (E)... $16x+59y=2006$

1) بين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإن x مضاعف للعدد 59

2) حل المعادلة (E)

3) عين الأعداد الطبيعية غير المعدومة a و b التي تحقق $16m+59d=2006$ مع $m=PPCM(a;b)$ و $d=PGCD(a;b)$

➢ التمرين 12:

1) عين مجموعة قواسم العدد 232

2) x و y عددان طبيعيان غير معدومان و نعتبر العددان الطبيعيان a و b حيث : $a=7x+11y$ و $b=2x+3y$

أ. هل توجد قيم لـ x و y تجعل $a=b$ ؟ برر إجابتك

ب. برهن أن $PGCD(a;b)=PGCD(x;y)$

3) عين الثنائيات من الأعداد الطبيعية و التي تحقق :

$(7x+11y)(2x+3y)=232$ و $PPCM(x;y)=x\times y$

($PPCM$ هو رمز المضاعف المشترك الأصغر)

➢ التمرين 13:

a و b عددان طبيعيان غير معدومان ، نضع $x=2a+3b$ و $y=3a+4b$

1) برهن أنه إذا كان a أولي مع b فإن x أولي مع y

2) عين الثنائيات $(\alpha;\beta)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق :

$(2\alpha+3\beta)(3\alpha+4\beta)=2200$ و $PGCD(\alpha;\beta)=5$

➢ التمرين 14:

(I) 1) عين باقي قسمة 6^{10} على 11 و باقي قسمة 6^{4} على 5

2) استنتج باقي قسمة 6^{40} على 11 و باقي قسمة 6^{40} على 5

3) بين ان العدد $6^{40}-1$ قابل للقسمة على 55

(II) x و y عددان صحيحان ، نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$ التالية :

$\alpha x-40y=1$ ...(E) مع α عدد صحيح

1) بين أنه إذا كان $\alpha=65$ فإن المعادلة (E) لا تقبل حلولا في المجموعة $\mathbb{Z}^2$

2) نعتبر $\alpha=17$:

أ. تحقق أن المعادلة (E) تقبل على الأقل حلا في المجموعة $\mathbb{Z}^2$

ب. باستعمال خوارزمية اقليدس عين حلا خاصا للمعادلة (E)

جـ . استنتج حلول المعادلة (E)

3) استنتج وجود عدد طبيعي وحيد x_0 أصغر من 40 يحقق : $17x_0\equiv 1[40]$

4) من أجل كل عدد طبيعي a ، بين أنه :

إذا كان $a^{17}\equiv b[55]$ و $a^{40}\equiv 1[55]$ فإن $b^{33}\equiv 1[55]$

➢ التمرين 15:

a عدد طبيعي غير معدوم

1) أ. بين أن $a\left(a^2-1\right)\equiv 0[6]$

ب. برهن أنه من أجل كل عدد طبعي n غير معدوم : $a\left(a^{2n}-1\right)\equiv 0[6]$

2) من أجل كل عدد طبعي n غير معدوم ، نضع : $S_n=a_1+a_2+....+a_n$ و $T_n=a_1^{2n+1}+a_2^{2n+1}+....+a_n^{2n+1}$

حيث a_1 ، a_2 ، .... ، a_n أعداد طبيعية غير معدومة

أ. بين أن S_n و T_n لهما نفس باقي القسمة على 6

ب. عين باقي قسمة S على 6 بحيث : $S=2002+2003+....+2022$

3) نعتبر العدد الطبيعي N الذي يكتب $\overline{abab}$ في نظام التعداد الذي أساسه 5 .

أ. برهن أن: N يقبل القسمة على 6 إذا وفقط إذا كان $a\equiv b[3]$

ب. استنتج أكبر قيمة للعدد N الذي يقبل القسمة على 6

➢ التمرين 16:

1) عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 4^n على 7

2) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $2023^n-2022^{2n}+2024^n\equiv 0[7]$

3) عين الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $2020^{6n+5}+1441^{6n+6}+2023^n-2022^{2n}+2024^n+5n\equiv 0[7]$

4) نضع من اجل كل عدد طبيعي n ؛ $S_n=1+4+4^2+...+4^{n-1}$

أ. بين أن : S_n مضاعف للعدد 7 إذا وفقط إذا كان $\left(4^n-1\right)\equiv 0[7]$

ب. استنتج قيم n التي من أجلها يكون S_n قابل للقسمة على 7

➢ التمرين 17:

نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$ التالية : $(E)...8x+5y=6$

1) أ. بين أن الثنائية $(2;-2)$ حل للمعادلة (E)

ب. استنتج حلول المعادلة (E)

2) نعتبر $(x;y)$ حل للمعادلة (E) بحيث x و y عددان طبيعيان وليكن d القاسم المشترك الأكبر لهما

أ. عين القيم الممكنة للعدد d

ب. عين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة التي من اجلها $d=3$

3) n عدد طبيعي ، نعتبر الجملة (S) التالية : $\begin{cases} n\equiv 2[5] \\ n\equiv -2[8] \end{cases}$

أ. بين أن : n حل للجملة (S) إذا وفقط إذا كان $n\equiv 22[40]$

ب. عين حسب قيم العدد الطبيعي n ، $n\geq 3$. باقي القسمة الاقليدية للعدد 22^n على 40

جـ. عين باقي قسمة 2022 على كل من 5 و 8

د. استنتج أن $\left((2022)^{2017}-32\right)$ قابل للقسمة على 40

➢ التمرين 18:

نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$ التالية : $(E)...5x-3y=2$

1) أ. بين أن الثنائية $(1;1)$ حل للمعادلة (E)

ب. استنتج حلول المعادلة (E)

2) ليكن m عدد صحيح بحيث توجد ثنائية $(p;q)$ من الأعداد الصحيحة بحيث : $m=8p+1$ و $m=5q+4$

أ. بين أن الثنائية $(p;q)$ حل للمعادلة (E) ، ثم استنتج أن : $m\equiv 9[40]$

ب. عين أصغر عدد طبيعي m أكبر من 2023

3) أ. بين أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $2^{3n}\equiv 1[7]$

ب. استنتج باقي القسمة الاقليدية للعدد 1444^{2023} على 7

4) ليكن a و b عددان طبيعيان حيث $0<a\leq 9$ و $0\leq b\leq 9$ و نعتبر العدد الطبيعي N لذي يكتب $a00b$ في النظام العشري

أ. تحقق من أن : $10^3\equiv -1[7]$

ب. استنتج الأعداد الطبيعية N التي تقبل القسمة على 7

➢ **التمرين 19:**

نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$ التالية : $3179x-1445y=2023 ...(E)$

1) عين القاسم المشترك الأكبر للعددين 3179 و 1445 ، ثم استنتج أن المعادلة (E) تقبل حلولا في المجموعة $\mathbb{Z}^2$

2) أ. بين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإن $x\equiv 2[5]$

ب. استنتج حلا خاصا $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E) بحيث $1<x_0<6$

3) أ . أذكر نص مبرهنة بيزو

ب. a و b عددان طبيعيان غير معدومان و c عدد صحيح ، برهن أنه :

إذا كان a قاسما لـ $b\times c$ وكان a أولي مع b فإن a قاسم للعدد c

4) عين حلول المعادلة (E)

5) نعتبر $(x;y)$ حل للمعادلة (E) حيث x و y عددان طبيعيان غير معدومان و ليكن d القاسم المشترك الأكبر لهما

أ. عين القيم الممكنة للعدد d

ب. عين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) بحيث يكون $d=7$

➢ **التمرين 20:**

1) أ. عين حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على كل من 7 و 5

ب. استنتج باقي قسمة العدد $2023^{1444}+2022^{1443}+2021^{1442}+2020^{1441}$ على 7

جـ. بين أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $2023^{12n+9}+2022^{4n+2}+2021^n+2020^n\equiv 1[5]$

2) نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$ التالية : $343x-648y=76 ...(E)$

أ. عين $PGCD(343;648)$ ، ثم بين ان المعادلة (E) تقبل حلولا في المجموعة $\mathbb{Z}^2$

ب. باستعمال خوارزمية اقليدس عين حلا خاصا للمعادلة (E)

جـ. استنتج حلول المعادلة (E)

3) نعتبر $(x;y)$ حل للمعادلة (E) حيث x و y عددان طبيعيان غير معدومان و ليكن d القاسم المشترك الأكبر لهما

أ. عين القيم الممكنة للعدد d

ب. عين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) بحيث يكون $d=38$

4) λ عدد طبيعي يكتب $\overline{\beta 1\alpha\beta}$ في نظام التعداد ذي الأساس 7 و يكتب $\overline{\alpha 1\alpha\alpha\beta}$ في نظام التعداد ذي الأساس 5

جد العددين α و β ، ثم اكتب λ في النظام العشري

➢ التمرين 21:

من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع $u_n = 2\times 5^n + 7$

1) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n ، u_n عدد فردي

2) أ.عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على 8

ب. استنتج أنه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \equiv 1[8]$

3) أ. برهن أنه إذا كان ($x\equiv 1[8]$ و $x\equiv 7[125]$) فإن ($x\equiv 257[1000]$)

ب. برهن أنه من اجل كل عدد طبيعي n؛ $n\geq 3$: $u_n \equiv 257[1000]$

جـ. عين آخر ثلاثة أرقام في العدد $\left(2\times 5^{2023}+7\right)\left(2\times 5^{1444}+7\right)$

4) أ. تحقق أنه من اجل عدد طبيعي n ، $5u_{2n} - u_{2n+1} = 28$

ب. نعتبر d القاسم المشترك الأكبر للعددين u_{2n} و u_{2n+1} ، بين أن $d \neq 7$

جـ. استنتج عندئذ d

➢ التمرين 22:

نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$ التالية : $5x-6y=3 \ldots(E)$

1) أ. بين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن x مضاعف للعدد 3

ب. استنتج حلا خاصا للمعادلة (E)

2) عين حلول المعادلة (E)

3) استنتج حلول الجملة (S) التالية : $(S)\ldots.$ $\begin{cases} x\equiv -1[6] \\ x\equiv -4[5] \end{cases}$

4) عين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة و التي تحقق $x^2-y^2<56$

➢ التمرين 23:

1) عين في المجموعة $\mathbb{Z}^2$،الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التالية : $18x+4y=84 \ \ldots(E)$

2) استنتج الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق $xy>0$

3) N عدد طبيعي يكتب $\overline{30\alpha\beta\gamma}$ في نظام التعداد ذي الأساس 5 ، و يكتب $\overline{55\alpha\beta}$ في نظام التعداد ذي الأساس 7

عين الأعداد الطبيعية α ، β و γ ثم اكتب N في النظام العشري

➢ التمرين 24:

نعتبر المتتالية العددية (a_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n ، بـ : $a_n = \dfrac{4^{2n+1}+1}{5}$

1) أحسب كلا من a_2 و a_3

2) برهن أنه من اجل كل عدد طبيعي n؛ $a_{n+1} = 16a_n - 3$

3) برهن أنه من اجل كل عدد طبيعي n؛ a_n عدد طبيعي

4) نضع من اجل كل عدد طبيعي n؛ $d_n = PGCD(a_n;a_{n+1})$

أ. عين القيم الممكنة للعدد d_n

ب. بين أنه من اجل كل عدد طبيعي n؛ $a_{n+1} \equiv a_n [3]$

جـ. تحقق من أن $a_0 \equiv 1[3]$ ، ثم استنتج أنه من اجل كل عدد طبيعي، u_n لا يقبل القسمة على 3

د. بين عندئذ أن u_n و u_{n+1} أوليان فيما بينهما

5) نضع من اجل كل عدد طبيعي n؛ $b_n = 2^{n+1}(2^n - 1) + 1$ و $c_n = 2^{n+1}(2^n + 1) + 1$

أ. تحقق أنه من اجل كل عدد طبيعي n ، $n \geq 2$: $5a_n = b_n \times c_n$

ب. بين أنه من اجل كل عدد طبيعي n ، $n \geq 2$: $b_n \equiv 0[5]$ أو $c_n \equiv 0[5]$

جـ. بين أنه من اجل كل عدد طبيعي n ، $n \geq 2$: $b_n > 5$ و $c_n > 5$

د. استنتج أن a_n ليس بعدد أولي

➢ التمرين 25:

1) نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$ التالية: $(E)...4x - 9y = 5$

أ. بين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $x \equiv 8[9]$

ب. استنتج عندئذ حلول المعادلة (E)

2) N عدد طبيعي يكتب $\overline{43}$ في نظام التعداد الذي أساسه x، و يكتب $\overline{98}$ في نظام التعداد الذي اساسه y حيث $x \leq 35$ و $y \leq 15$. عين القيم الممكنة لكل من x و y ، ثم اكتب N في النظام العشري

3) أ. عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 4^n على 9

ب. عين الثنائيات $(x;y)$ من الاعداد الطبيعية حلول المعادلة (E) بحيث يكون : $2023^x + 1444^y + 7 \equiv 0[9]$

4) من أجل كل عدد طبيعي n ، نعتبر العددان الطبيعيان a و b بحيث $a = 9n + 8$ و $b = 4n + 3$

و ليكن d قاسمهما المشترك الأكبر

أ. عين القيم الممكنة للعدد d

ب. عين a و b بحيث يكون $d = 5$

➢ التمرين 26:

1) عين حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة العدد 3^n على 10

2) عين باقي قسمة العدد $2027^{2023} + 2023^{2027}$ على 10

3) برهن أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $9^{2n} + 3^{4n+3} + 2 \equiv 0[10]$

4) عين قيم العدد الطبيعي n التي من اجلها يكون $n \times 7^{2n} - 9^n \equiv 0[10]$

5) أ. عين x أساس نظام التعداد الذي يكون فيه : $\overline{22} \times \overline{11} = \overline{1012}$.

ب. N عدد طبيعي يكتب $\overline{\alpha 140}$ في نظام التعداد ذي الأساس 9

عين العدد الطبيعي α حتى يكون N قابل للقسمة على 10

➢ التمرين 27:

1) نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$ التالية: $(E)...3x - 8y = 6$

أ. تحقق أن للمعادلة (E) حلولا في مجموعة الأعداد الصحيحة

ب. تحقق أن الثنائية $(-6;-3)$ حل للمعادلة (E) ، ثم استنتج حلول المعادلة (E)

2) a ، b و n أعدادا صحيحة بحيث : $\begin{cases} n = 3a + 1 \\ n = 8b + 7 \end{cases}$ و نعتبر الجملة (S) التالية $(S) : \begin{cases} n \equiv 1[3] \\ n \equiv 7[8] \end{cases}$

أ. بين أن الثنائية $(a;b)$ حل للمعادلة (E)

ب. بين أن : n حل للجملة (S) إذا وفقط إذا كان $n\equiv 7[24]$

3) تحقق أن 2023 حل للجملة ، ثم استنتج أن $2023^{1444}-1$ مضاعف للعدد 24

➢ **التمرين28:**

1) عين حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على 7

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $2023^{6n}+1444^{6n+7}+1962^{6n+4}1954-4\times 1954^{6n}\equiv 0[7]$

3) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $19^{6n+3}-5^{6n+4}+4n^2+1$ قابلا للقسمة على 7

4) x عدد طبيعي غير معدوم ، N عدد طبيعي يكتب $\overline{x104x}$ في نظام التعداد ذي الأساس 5 ، عين x حتى يكون N مضاعف للعدد 35 ، ثم اكتب N في النظام العشري

➢ **التمرين29:**

1) نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$ التالية : $8x+5y=1\ ....(E)$

أ. تحقق أن للمعادلة (E) حلولا في مجموعة الأعداد الصحيحة

ب. باستعمال خوارزمية اقليدس عين حلا خاصا للمعادلة (E)

جـ. استنتج حلول المعادلة (E)

2) a ، b و n أعدادا صحيحة بحيث : $\begin{cases} n=8a+1 \\ n=5b+2 \end{cases}$

أ. بين أن الثنائية $(a;b)$ حل للمعادلة (E)

ب. عين باقي قسمة العدد n على 40

3) أ. استنتج حلول المعادلة (E') ذات المجهول $(x;y)$ التالية : $8x+5y=100\ ....(E')$

ب. عين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E') و التي تنتمي إلى مجموعة الأعداد الطبيعية

➢ **التمرين30:**

نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$ التالية : $43x-13y=\lambda\ ....(E)$

حيث λ عدد صحيح

1) تحقق أن الثنائية $(-3\lambda;-10\lambda)$ حل للمعادلة (E)

2) عين حلول المعادلة (E)

3) N عدد طبيعي يكتب $\overline{\alpha\beta\alpha\beta\alpha}$ في نظام التعداد ذي الأساس 6 و يكتب $\overline{\beta 0\gamma\gamma\gamma}$ في نظام التعداد ذي الأساس 5

أ. بين أن α ، β و γ تحقق: $43\alpha-13\beta=\gamma$

ب. عين α ، β و γ ثم أكتب $(N+24)$ في النظام العشري

➢ **التمرين31:**

(u_n) و (v_n) المتتاليتان المعرفتان في مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=2u_n-1 \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0=1 \\ v_{n+1}=2v_n+3 \end{cases}$

1) برهن بالتراجع لأنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n=2^{n+1}+1$

2) عين $PGCD(u_8;u_9)$ ثم $PGCD(u_{2022};u_{2023})$

3) هل u_n و u_{n+1} أوليان فيما بينهما ؟ برر إجابتك

4) أ. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $2u_n - v_n = 5$

ب. عبر عن v_n بدلالة n

5) أ. عين حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 5

ب. نعتبر d_n القاسم المشترك الأكبر لكل من u_n و v_n

عين القيم الممكنة للعدد d_n ، ثم عين قيم التي من اجلها يكون $d_n = 1$

➢ **التمرين32 :**

1) أ. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 10

ب. عين باقي قسمة العدد $2023^{16n+6} - 2\times 9999^{2n+3} - 13$ على 10

2) أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $(3n+4)\times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 3^{2n}(3n+1)[10]$

ب. عين الأعداد الطبيعية n التي من اجلها يكون $(3n+4)\times 9^n + 7^{2n+1}$ مضاعف للعدد 10

3) يحتوي كيس على 4 كريات تحمل بواقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 10 ، نسحب منه كريتين على التوالي بحيث لا نعيد الكرية المسحوبة قبل السحب الموالي

أ. احسب احتمال كل حدث من الأحداث التالية :

A : الكريتين تحملان قاسما للعدد 18

B : على الأقل كرية من الكريتين تحمل عددا أوليا

C: مجموع الرقمين المسجلين على الكريتين يساوي مجموع أرقام العدد 2023

ب. نعتبر X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رقمين ناتجين من عملية السحب السابقة مجموعهما

عين قانون احتمال المتغير العشوائي X و أحسب أمله الرياضياتي

➢ **التمرين33 :**

1) نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$ التالية : $(E)...\ 18x + 4y = 84$

أ. بين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $x \equiv 0[2]$

ب. استنتج عندئذ حلول المعادلة (E)

جـ. عين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) و التي تحقق $xy \geq 0$

2) N عدد طبيعي يكتب $\overline{30\alpha\beta\gamma}$ في نظام التعداد ذي الأساس 5 و يكتب $\overline{55\beta\beta}$ في نظام التعداد ذي الأساس 7

عين α ، β و γ ثم أكتبه في النظام العشري

3) عين حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة 8^n على 13 و بواقي قسمة 14^n على 12

4) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $n > 2$: $(5n+1)\times 64^n - 5^{2n-5} \equiv 8^{2n}(5n+6)[13]$

5) عين الأعداد الطبيعية n التي من اجلها يكون: $\begin{cases} (5n+1)25^n \equiv 5^{2n-5}[13] \\ n \equiv 0[2] \end{cases}$