

تعارين محلولة

في

الأعداد و الحساب

3AS

شعبة: تقني رياضي + رياضيات

شكر خاص للأستاذ: واضعي عبد الكريم

تجدون هذا الملف



تمارين القسمة و المولافقات في \mathbb{Z}

التمرين 01 :

1. أثبت أن العدد 251 أولي.
2. حل العدد 2008 إلى جداء عوامل أولية و استنتج الأعداد الطبيعية التي مكعب كل منها يقسم 2008.
3. عين الأعداد الطبيعية a و b بحيث : $m^3 + 35d^3 = 2008$ ، علماً أن : $m = PPCM(a, b)$; $d = PGCD(a, b)$

التمرين 02 :

1. أدرس تبعاً لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 7.
2. عين باقي القسمة الإقليدية للعدد 6^{2n} على 7.
3. عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $(5^n + 6^{2n} + 3)$ قابلاً للقسمة على 7.

التمرين 03 :

1. عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 4^n على 11.
2. عين مجموعة الأعداد الطبيعية n حيث : $(7 + 26^{10n+2} + 26^{10n+2} \times 1995^n)$ يقبل القسمة على 11.

التمرين 04 :

1. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 7.
2. أثبت أنه من أجل كل عدد الطبيعي n ، العدد $(3 + 2 \times 47^{12n+2} + 26^{6n+5})$ يقبل القسمة على 7.
3. عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $(26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 5n)$ قابلاً للقسمة على 7.

التمرين 05 :

عين كل الثنائيات (a, b) من الأعداد الطبيعية حيث :

$$(1) \begin{cases} a + b = 420 \\ PGCD(a, b) = 84 \end{cases}; (2) \begin{cases} a \times b = 360 \\ PGCD(a, b) = 6 \end{cases}; (3) \begin{cases} a^2 - b^2 = 825 \\ PGCD(a, b) = 5 \end{cases}; (4) \begin{cases} PPCM(a, b) = 90 \\ PGCD(a, b) = 18 \end{cases}$$

$$(5) a \leq b \text{ مع } PPCM(a, b) - 9PGCD(a, b) = 13$$

التمرين 06 :

- a, b, n أعداد طبيعية غير معدومة حيث : $b = n^2 + 2$; $a = 5n^2 + 7$
1. بين أن كل قاسم مشترك للعددين a و b يقسم 3
 2. بين أن $3 \equiv 1[3]$ إذا و فقط إذا $PGCD(a, b) = 1$
 3. استنتج حسب قيم n ، $PGCD(a, b)$

التمرين 07 :

- a, b, n أعداد طبيعية غير معدومة حيث : $b = 5n - 2$; $a = 2n + 3$
1. بين أنه إذا كان العددان a و b غير أوليين فيما بينهما فإن : $PGCD(a, b) = 19$
 2. عين قيم n التي يكون من أجلها $PGCD(a, b) = 19$

التمرين 08 :

- $b = 2n^2 + n$; $a = 2n^3 + 5n^2 + 4n + 1$
1. بين أن العدد $(2n+1)$ قاسم مشترك للعددين a و b .
 2. باستعمال مبرهنة بيزو بين أن $\text{PGCD}(n, n+1) = 1$ و $\text{PGCD}(n, n+1)^2 = 1$.
 3. استنتج $\text{PGCD}(a, b)$.

التمرين 09 :

- $A = n^4 + n^2 + 1$ عدد طبيعي. نضع : n
1. حل A إلى جداء عاملين من الدرجة الثانية (لاحظ أن : $A = n^4 + 2n^2 + 1 - n^2$)
 2. نضع : $b = n^2 - n + 1$; $a = n^2 + n + 1$
 - أ. بين أن العددان a و b فردين
 - ب. بين أن كل قاسم مشترك للعددين a و b يقسم $2n$ و $2(n^2 + 1)$
 - ج. بين أن العددان n و $n^2 + 1$ أوليان فيما بينهما
 - د. استنتج أن العددان a و b أوليان فيما بينهما

التمرين 10 :

- $b = 13n - 1$; $a = 11n + 3$ أعداد طبيعية غير معودمة حيث :
1. بين أن كل قاسم مشترك للعددين a و b يقسم 50
 2. باستعمال خوارزمية إقليدس عين حلا خاصا للمعادلة : $50x - 11y = 1$ ، ثم حل في \mathbb{Z} المعادلة : $50x - 11y = 3$
 3. استنتج قيم n التي يكون من أجلها : $\text{PGCD}(a, b) = 50$
 4. ما هي قيم n التي يكون من أجلها : $\text{PGCD}(a, b) = 25$

التمرين 11 :

- نعتبر في \mathbb{Z} المعادلة : $324x - 245y = 7 \dots (E)$
1. باستعمال خوارزمية إقليدس عين حلا خاصا للمعادلة (E) ، ثم حل في \mathbb{Z} هذه المعادلة
 2. بين أنه إذا كانت الثنائية (x, y) حلا للمعادلة (E) ، فإن : $x \equiv 0[7]$
 3. نضع : $\text{PGCD}(x, y) = d$
 - أ. بين أن القيم الممكنة للعدد d هي 1 و 7
 - ب. عين كل الثنائيات (x, y) حلول المعادلة (E) بحيث $7 \mid \text{PGCD}(x, y)$

التمرين 12 :

1. عين القاسم المشترك الأكبر للأعداد 1996 ، 1497 و 2994.
2. نعتبر المعادلة : $(1) \dots 2994x - 1497y = 1$ حيث : x و y عدادان صحيحان.
- أ- أثبت أن x مضاعف للعدد 3 و y مضاعف للعدد 2 ، ثم حل المعادلة (1) .
- ب- عين الحلول (x, y) بحيث يكون : $xy = 1950$

التمرين 13 :

1. حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة : $4x - 9y = 19 \dots (I)$
2. ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث (x, y) حل للمعادلة (I)
 - أ- ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟
 - ب- عين حلول المعادلة بحيث يكون $d = 19$
3. عين الثنائيات (a, b) الصحيحة حلول المعادلة : $4a^2 - 9b^2 = 19$

التمرين 14 :

1. حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة : $5x - 3y = 2$.
2. عدد طبيعي يكتب $\overline{55}$ في النظام ذي الأساس x و يكتب $\overline{37}$ في النظام ذي الأساس y حيث $12 \leq y \leq 20$; x ، ثم اكتب A في النظام العشري.

التمرين 15 :

1. حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة : $8x - 5y = 3 \dots$ (I)
2. ليكن m عدداً صحيحاً بحيث توجد ثنائية (p, q) من الأعداد الصحيحة تحقق : $m = 5q + 4$ و $m = 8p + 1$ و $m \equiv 9[40]$ هي حل للمعادلة (I) ، ثم استنتج أن :

 - أ- بين أن الثنائية (p, q) هي حل للمعادلة (I) ، ثم استنتج أن :
 - ب- عين أصغر عدد طبيعي m أكبر 2000
 3. ليكن n عدداً طبيعياً

 - أ- أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي k لدينا : $2^{3k} \equiv 1[7]$
 - ب- ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^{2009} على 7 ؟

4. ليكن a و b عددين طبيعيان حيث : $9 < a < b$ ، و $9 \leq b$ ، و نعتبر العدد N الذي يكتب في النظام العشري على الشكل : $N = a \times 10^3 + b$. نريد تعين من ضمن هذه الأعداد الطبيعية N تلك التي تقبل القسمة على 7

 - أ- تتحقق من أنّ : $10^3 \equiv -1[7]$
 - ب- استنتاج الأعداد الطبيعية N التي تقبل القسمة على 7

التمرين 16 :

اختر الإجابة الصحيحة مع التعليل :

1. في مجموعة الأعداد الصحيحة ، المعادلة $x^2 + x + 3 \equiv 0[5]$:

(أ) لا تقبل حلولاً	(ب) حلولها زوجية
(ج) حلولها تتحقق $x \equiv 2[5]$	(د) حلولها تتحقق $x \equiv 1[5]$ أو $x \equiv 3[5]$
2. حلول المعادلة $24x + 34y = 2$ هي :

(أ) $(-7k; 5k)$, $k \in \mathbb{Z}$	(ب) $(17k - 7; 5 - 12k)$, $k \in \mathbb{Z}$
(ج) المجموعة الخالية	(د) $(34k - 7; 5 - 24k)$, $k \in \mathbb{Z}$
3. عدد طبيعي يكتب في النظام ذي الأساس 5 : $\overline{421}$. كاتبه في النظام ذي الأساس 6 هي :

(أ) $\overline{111}$	(ب) $\overline{421}$
(ج) $\overline{222}$	(د) $\overline{303}$
4. باقي القسمة الإقليدية للعدد 1432^{2011} على العدد 3 هو :

(أ) 0	(ب) 1
(ج) 2	(د) 3
5. من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $b^2 - a = 1$; $a = n(n+2)$. بما أنّ $1 \equiv PGCD(a, b)$ هو :

(أ) $n + 1$	(ب) n
(ج) 2	(د) 1

التمرين 17 :

1. عددان طبيعيان a و b عدد طبيعي أولي حيث : $PGCD(a+b; ab) = p^2$
 - بين أن p^2 يقسم a^2 ، ثم استنتاج أن p يقسم b بطريقة مماثلة بين أن p يقسم a .
 - أثبت أن : $PGCD(a; b) = p^2$ أو $PGCD(a; b) = p$
2. نعتبر في \mathbb{N}^2 الجملة : $\begin{cases} PGCD(a+b; ab) = 49 \\ PPCM(a; b) = 231 \end{cases}$
 - بين أن : $PGCD(a; b) = 7$
 - عين كل الثنائيات (a, b) في \mathbb{N}^2 و التي تتحقق (E).

التمرين 18 :

$$c_n = 2 \times 10^n + 10, b_n = 2 \times 10^n - 1, a_n = 4 \times 10^n - 1$$

1. أحسب b_3 ، c_3 ، a_3 .

• بين أن a_n و c_n يقبلان القسمة على 3 ، وأن b_3 عدد أولي

• بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $b_n \times (c_n - 9) = a_{2n}$

استنتج تحليلا إلى جداء عوامل أولية للعدد a_6

• بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $\text{PGCD}(b_n, c_n) = \text{PGCD}(b_n, 11)$

استنتج أن b_n و c_n أوليان فيما بينهما

2. تعتبر في المجموعة \mathbb{Z}^2 المعادلة (E) ...

$$b_3x + c_3y = 1$$

• بين أن المعادلة (E) تقبل على الأقل حل في \mathbb{Z}^2

• تحقق أن $(-731, 727)$ حل للمعادلة (E) ، ثم حل في \mathbb{Z}^2 هذه المعادلة.

التمرين 19 :

ليكن n عددا طبيعيا

1. برهن أن العددين $4n^2 + 5n + 2$ و $n^2 + 3n + 2$ يقبلان القسمة على $(n+1)$

2. عين قيم n حتى يقبل العدد $19n^2 + 15n + 3$ القسمة على $(n+1)$

3. استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : العدد $19n^2 + 15n + 3$ لا يقبل القسمة على 2

التمرين 20 :

1. عين الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 584

2. عين العددين الطبيعيين a و b حيث $a > b$ اللذين يتحققان :

$$\begin{cases} a+b=32 \\ a^2+b^2=584 \end{cases}$$

التمرين 21 :

1. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليمية للعدد 3^n على 10

2. استنتج باقي القسمة الإقليمية على 10 للعدد $7^{1422} - 63 \times 9^{2001}$

3. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv (n-1) \times 3^{2n+1} [10]$

4. عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون : $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0 [10]$

التمرين 22 :

1. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليمية للعدد 4^n على 11

2. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن العدد الطبيعي k حيث :

يقبل القسمة على 11

3. عين قيم العدد الطبيعي n بحيث :

$$\begin{cases} 15^{5n+1} + 26^{5n+2} + 3n \equiv 0 [11] \\ 8 \leq n \leq 50 \end{cases}$$

التمرين 23 :

1. عين $\text{PGCD}(2688 ; 3024)$

2. أ. تحقق أن المعادلين (1) ... $-3360 = 2688x + 3024y$ و (2) ... $-10 = 8x + 9y$ متكافئان

ب. تحقق أن (2) ... (1) حل خاص للمعادلة (2)

3. نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعدد متاجنس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ المستويين (P) و (P') اللذين معادلتها على الترتيب

$(P'): 3x - y + 5z = 0$ و $(P): x + 2y - z = -2$

أ. بين أن المستويين (P) و (P') يتقاطعان وفق مستقيم (d)

ب. بين أن إحداثيات نقط (d) تتحقق المعادلة (2) ، ثم استنتج (E) مجموعة نقط (d) التي إحداثياتها أعداد صحيحة.

التمرين : 24 :

- لتكن a, b, x, y أربعة أعداد طبيعية غير معدومة حيث : $y = 3a + 4b$ و $x = 2a + 3b$

 1. بين أن $(y) = PGCD(x; y) = PGCD(a; b)$ ، ثم استنتج أنه إذا كان a و b أوليين فيما بينهما فإن x و y أوليان فيما بينهما.
 2. عين الثنائيات $(\alpha; \beta)$ من الأعداد الطبيعية بحيث : $(2\alpha + 3\beta)(3\alpha + 4\beta) = 2200$ و $PGCD(\alpha; \beta) = 5$.

التمرين : 25 :

- a و b عددين طبيعيان يكتبان على الترتيب 2310 ، 252 في نظام تعداد ذي الأساس n ، و ليكن $d = PGCD(a, b)$.
 1. برهن أن $(2n+1)$ يقسم كلا من a و b وأن $d = 2n + 1$ أو $d = 2(2n + 1)$.
 2. نأخذ $6n = ax + by$ المعادلة : $6n = -26$.

التمرين 26 :

- أ. ما هو باقي القسمة الإقليمية للعدد 6^{10} على 11؟ علل.

ب. ما هو باقي القسمة الإقليمية للعدد 6^4 على 5؟ علل.

ج. استنتاج أن $6^{40} \equiv 1[11]$ و أن $[5]^{40} \equiv 1[11]$

د. بين أن $6^{40} - 1$ يقبل القسمة على 55

x و y عدادان صحيحان

أ. بين أن المعادلة التالية ليس لها حلول : $65x - 40y = 1$... (E)

ب. بين أن المعادلة التالية تقبل على الأقل حلًا : $17x - 40y = 1$... (E')

ج. عين باستعمال خوارزمية إقليدس حلًا خاصاً للمعادلة (E')

د. حل المعادلة (E') واستنتج وجود عدد طبيعي وحيد x_0 أصغر من 40 حيث : $17x_0 \equiv 1[40]$

3. من أجل كل عدد طبيعي a ، بين أنه إذا كان : $b^{33} \equiv 1[55]$ و $a^{40} \equiv 1[55]$ فإن : $a^{17} \equiv b[55]$

التمرين 27 :

1. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليمية للعدد 3^n على 11
 2. ما هو باقي قسمة $8 - 58^{20n+13} + 7 \times 69^{10n+6} + 4$ على 11 ؟
 3. أوجد قيم n الطبيعية بحيث يكون $5 + 14^{5n+3} + n^2 + 36^{5n} \times n + 36^{5n+3}$ قابلاً للقسمة على 11
 4. أوجد الأعداد الصحيحة β التي تتحقق من أجل كل n من \mathbb{N} : $[11] \equiv 0[11] + 91^{3n+1} + 80^{3n+2} \times \beta$ ، ثم استنتج قيم β الصحيحة بحيث : $|\beta| \leq 20$
 5. أوجد الثنائيات (x, y) من \mathbb{N}^2 بحيث : $.14^x + 25^y \equiv 8[11]$

التمرين 28 :

1. حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة : $3x - 2y = 1 \dots (E)$

2. ليكن n عدداً طبيعياً غير معدوم

 - أ. بين أن الشائبة $(14n + 3, 21n + 4)$ هي حل للمعادلة (E)
 - ب. استنتج أن العددين $21n + 4$ و $14n + 3$ أوليان فيما بينهما

3. ليكن d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين : $21n + 4$ و $21n + 1$

 - أ. بين أن $d = 1$ أو $d = 13$
 - ب. بين أنه إذا كان $d = 13$ فإن $n \equiv 6[13]$

4. من أجل كل عدد طبيعي n حيث $2 \geq n \geq 0$ نضع : $A = 21n^2 - 17n - 4$ و $B = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$

 - أ. بين أن العددين A و B يقبلان القسمة على $(n - 1)$ في المجموعة \mathbb{Z}
 - ب. جد حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B

التمرين 29 :

1. نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة \mathbb{Z} المعادلة : (1) ... $11n - 24m = 1$
 - أ. ببر أن المعادلة (1) تقبل على الأقل حلًا
 - ب. عين مجموعة حلول المعادلة (1) علماً أن الثانية (5, 11) حل لها
 - أ. بيّن أن 9 يقسم $1 - 10^{11}$ و $1 - 10^{24}$.
 - ب. بيّن أنه مهما يكن الحل (n, m) فإن : $9 = (10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1)$
 - ج. بيّن أن $1 - 10^{11}$ يقسم $1 - 10^{24}$ وأن $1 - 10^{24}$ يقسم 9
- استنتج وجود عددين صحيحين N و M بحيث : $9 = (10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M$
- بيّن أن كل قاسم مشترك للعددين $1 - 10^{24}$ و $1 - 10^{11}$ يقسم 9
- استنتاج مما سبق $.PGCD(10^{11} - 1; 10^{24} - 1) = 9$

التمرين 30 :

x و y عدوان طبيعيان حيث $y \leq x < 0$ ، نضع $PPCM(x, y) = m$ و $PGCD(x, y) = d$ نريد تعين x و y حيث (*) ... $m^2 - 5d^2 = 2000$

1. برهن أنه إذا كانت الثانية (y, x) حل للمعادلة (*) فإن d^2 يكون قاسماً للعدد 2000
2. حل العدد 2000 إلى جداء عوامل أولية ، ثم استنتاج القواسم المربعة التامة للعدد 2000
3. برهن أن 5 هو قاسم مشترك للعددين d و m . ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟
4. استنتاج القيم الممكنة للعددين x و y .

التمرين 31 :

نعتبر في المجموعة \mathbb{Z}^2 المعادلة : (1) ... $16x + 59y = 2006$

1. حل إلى جداء عوامل أولية العدد 2006 ، ثم استنتاج أنه إذا كانت الثانية (y, x) حل للمعادلة (1) فإن x مضاعف للعدد 59
2. حل في المجموعة \mathbb{Z}^2 المعادلة (1)
3. عين الحلول (y, x) للمعادلة (1) التي تتنمي \mathbb{N}^{*2}
4. عين الأعداد الطبيعية غير المعدومة a و b التي تتحقق $16m + 59d = 2006$ حيث $.PPCM(x, y) = m$ و $d = 5$

التمرين 32 :

1. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليمية لكل من العددين 3^n و 4^n على 7
2. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $2006^{3n+2} + 1424^{6n+1}$ قابلاً للقسمة على 7
3. من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $u_n = 2 \times 3^n + 3 \times 4^n$
 - أ. أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$
 - ب. ما هي قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها S_n قابلاً للقسمة على 7

التمرين 33 :

1. نعتبر في المجموعة \mathbb{Z}^2 المعادلة : (1) ... $91x + 10y = 1$
 - أ. عين حلًا خاصاً للمعادلة (1) ، ثم استنتاج حلًا خاصاً للمعادلة (2) ... $91x + 10y = 412$
 - ب. حل في المجموعة \mathbb{Z}^2 المعادلة (2)
- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد الطبيعي $1 - n = 3^{2n}$ قابلاً للقسمة على 8
- نعتبر في المجموعة \mathbb{Z}^2 المعادلة : (3) ... $A_3x + A_2y = 3296$
 - أ. عين في المجموعة \mathbb{Z}^2 حلول المعادلة (3) ، ثم بيّن أن المعادلة (3) تقبل حلًا وحيدًا (α, β) من \mathbb{N}^2 يُطلب تعينه
 - ب. جد قيمة العدد الطبيعي $(\alpha + 1)A_2 + 10$

التمرين 34 :

- 1- أدرس تبعاً لقيم العدد الطبيعي n باقي قسمة 9^n على 11
- 2- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $(1431)^n + (1993)^{10n} + (2011)^{5n+1}$ يقبل القسمة على 11
- 3- عين العدد الطبيعي n بحيث :

$$\left. \begin{array}{l} 1431^n + 5n + (2011)^{5n+1} \\ 90 < n < 100 \end{array} \right\}$$

التمرين 36 :

a و b عدوان طبيعيان حيث :

$$\begin{cases} a = 5n + 3 \\ b = 2n + 1 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

1. أثبت أن العددين a و b أوليان فيما بينهما
2. نضع : $m \in \mathbb{N}$ ، $y = 2m - 1$ ، $x = 5m + 3$
- أ- عين علاقة بين x و y مسندة عن العدد الطبيعي m
- ب- نفرض أن $\text{PGCD}(x, y) = d$
 - عين القيم الممكنة لـ d
 - عين الثنائيات (x, y) حيث $d = 11$

التمرين 37 :

- 1- أدرس تبعاً لقيم العدد الطبيعي n باقي قسمة 4^{2n} على 5
- 2- عين باقي قسمة 3^n على 5
- 3- ما هو باقي قسمة 1428^{2009} على 5 ؟
- 4- ليكن العدد الطبيعي $A_n = 2 + 4^{2n} + 3^n$ حيث :
- عين قيم العدد الطبيعي n بحيث A_n يقبل القسمة على 5.

التمرين 38 :

1. حل في المجموعة \mathbb{Z}^2 المعادلة : $23x - 17y = 6$
2. استنتج الأعداد الطبيعية A الأصغر من 1000 حيث باقي قسمة A على 23 هو 2 و باقي قسمة A على 17 هو 8
3. أكتب الأعداد A المحصل عليها في النظام ذي الأساس 7.

التمرين 39 :

- 1- أدرس تبعاً لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 10
 - استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي k ، يقبل العدد $7^{4k} + 7^{4k+1} + 7^{4k+2} + 7^{4k+3}$ القسمة على 10
- 2- من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $S_n = 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^n$
 - أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_{n+4} \equiv S_n [10]$
 - أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد S_n على 10.

التمرين 40 :

أرقام نظام التعداد ذو الأساس 12 هي : 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 ، α ، β

- 1. ليكن N_1 العدد المكتوب في النظام ذي الأساس 12 على الشكل $\overline{\beta 1 \alpha}^{12}$. أكتب N_1 في النظام العشري
 - 2. ليكن N_2 العدد المكتوب في النظام العشري على الشكل 1131. أكتب N_2 في النظام ذي الأساس 12
 - 3. ليكن N العدد المكتوب في النظام ذي الأساس 12 على الشكل $\overline{a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0}^{12}$
- أ. بين أن $N \equiv a_0[3]$ ، ثم استنتج خاصية لقابلية القسمة على 3 لعدد مكتوب في النظام ذي الأساس 12
- تأكيد من ذلك باستعمال كتابة N_2 في النظام ذي الأساس 12
 - ب. بين أن $[11]N \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$ ، ثم استنتاج خاصية لقابلية القسمة على 11 لعدد مكتوب في النظام ذي الأساس 12
 - تأكيد من ذلك باستعمال كتابة N_1 في النظام ذي الأساس 12
4. ذكر أنه إذا كان a و b أوليان فيما بينهما و كان N يقبل القسمة على a و b فإن N يقبل القسمة على الجداء ab
- نعتبر $\overline{x4y}^{12} = N$. عين قيم x و y التي من أجلها يكون N قابلاً للقسمة على 33.

التمرين 41 :

نعتبر في المجموعة \mathbb{Z}^2 المعادلة : $8x + 5y = 1 \dots (E)$

1. جد حلاً خاصاً للمعادلة (E) ، ثم حل في المجموعة \mathbb{Z}^2 هذه المعادلة

2. ليكن N عدداً طبيعياً حيث يوجد عددان طبيعيان a و b يحققان : $\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$

أ. بين أن الثنائي $(a, -b)$ حل للمعادلة (E)

ب. جد باقي القسمة الإقلية للعدد N على 4

3. حل في المجموعة \mathbb{Z}^2 المعادلة : $8x + 5y = 100$

للاشتراك في رحلة ، دفع مجموعة أشخاص من الجنسين 100 قطعة نقدية ، حيث دفع كل ذكر 8 قطع نقدية و دفعت كل أنثى 5 قطع نقدية.

ما هو عدد الذكور و عدد الإناث في هذه المجموعة ؟

التمرين 42 :

n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2.

1. بين أن العددين n و $2n + 1$ أوليان فيما بينهما

2. نضع : $PGCD(\alpha, \beta) = d$ و $\beta = 2n + 1$ ، $\alpha = n + 3$

أ. ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟

ب. بين أن α و β مضاعفان للعدد 5 إذا و فقط إذا كان $(n - 2)$ مضاعفاً للعدد 5

3. نعتبر العددين a و b حيث : $b = 2n^2 - n - 1$; $a = n^3 + 2n^2 - 3n$

بين أن العددين a و b يقبلان القسمة على $(n - 1)$

4. نضع : $PGCD[n(n + 3), (2n + 1)] = d'$

أ. بين أن $d = d'$

ب. استنتاج $PGCD(a, b)$

ج. حدد $PGCD(a, b)$ من أجل $n = 2001$ ثم من أجل $n = 2002$

مواضيع القياسة و المواقف في البكالوريا

التمرين 01 : بكالوريا 2012 ر

1) نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة ذات المجهول ($y; x$) التالية : $31 = 2011x + 1432y \dots (1)$

أ. أثبت أن العدد 2011 أولي

ب. باستعمال خوارزمية إقليدس، عين حلا خاصا $(x_0; y_0)$ لالمعادلة (1)، ثم حل المعادلة (1)

2) أ. عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7، ثم جد باقي القسمة الإقليدية للعدد $2011^{1432^{2012}}$ على 7

ب. عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $0 \equiv 2010^n + 2011^n + 1432^n [7]$

3) عدد طبيعي يكتب $2\gamma\alpha$ في نظام التعداد الذي أساسه 9 حيث : α, β, γ بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة من متتالية حسابية متزايدة تماما و $(\beta; \gamma)$ حل لمعادلة (1) عين α, β و γ ، ثم اكتب N في النظام العشري.

التمرين 02 : بكالوريا 2012 ر

(u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} كما يلي : $u_0 = 16$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 6u_{n-1} - 9$

1) أ. احسب بواقي قسمة كل من u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 على 7

ب. خمن قيمة للعدد a و قيمة للعدد b بحيث : $u_{2k+1} \equiv b [7]$ و $u_{2k} \equiv a [7]$

2) أ. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+2} \equiv u_n [7]$

ب. برهن بالترافق أنه من أجل كل عدد طبيعي k ، $u_{2k} \equiv 2[7]$ و $u_{2k+1} \equiv 3[7]$ ، ثم استنتج أن :

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - \frac{9}{5}$

أ. بين أن المتتالية (v_n) هندسية ، يطلب تعين أساسها و حدتها الأولى

ب. احسب بدالة n كلا من u_n و S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

التمرين 03 : بكالوريا 2012 ت ر

1. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 9^n على 11

2. ما هو باقي قسمة 2011^{2012} على 11 ؟

3. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $(2011^{2012} + 4 \times 2011^{10n} + 2011^{15n+1} + \dots + 4 \times 2011^4 + 2011^2)$ يقبل القسمة على 11

4. عين الأعداد الطبيعية n بحيث يكون العدد $(2011^{2012} + 2n + 2)$ مضاعفا للعدد 11.

التمرين 04 : بكالوريا 2012 ت ر

نسمى (S) المجلة التالية : $\begin{cases} x \equiv 3[15] \\ x \equiv 6[7] \end{cases}$ حيث x عدد صحيح ($x \in \mathbb{Z}$)

1. بين أن العدد 153 حل للجملة (S)

2. إذا كان x_0 حل لـ (S) ، بين أن : $(x \text{ حل لـ } (S))$ يكافي $\left(\begin{array}{l} x - x_0 \equiv 0[15] \\ x - x_0 \equiv 0[7] \end{array} \right)$

3. حل الجملة (S)

4. يريد مكتبي وضع عدد من الكتب في علب ، فإذا استعمل علبة تتسع لـ 15 كتاب بقي لديه 3 كتب ، وإذا استعمل علبة تتسع لـ 7 كتاب بقي لديه 6 كتب. إذا علمت أن عدد الكتب التي بحوزته محصور بين 500 و 600 كتاب ، ما هو عدد هذه الكتب ؟

التمرين 05 : بكالوريا 2011 ر

(u_n) متالية حسابية متزايدة تماماً حدودها أعداد طبيعية تحقق :

$$\begin{cases} m = \text{PPCM} (u_3, u_5) \\ d = \text{PGCD} (u_3, u_5) \end{cases} \quad \text{حيث :} \quad \begin{cases} u_4 = 15 \\ m + d = 42 \end{cases}$$

1. عين الحدين u_3 و u_5 ، ثم استنتج u_0

2. أكتب (u_n) بدالة n ، ثم بين أن : 2010 حد من حدود (u_n) و عين رتبته

3. عين الحد الذي ابتدأ منه يكون مجموع 5 حدود مت大城市ة من (u_n) يساوي 10080

4. n عدد طبيعي غير معروف.

أ-. أحسب بدالة n المجموع S حيث : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{2n}$

ب-. استنتاج بدالة n المجموعين S_1 و S_2 حيث : $S_1 = u_0 + u_2 + u_4 + \dots + u_{2n}$ و $S_2 = u_1 + u_3 + u_5 + \dots + u_{2n-1}$

التمرين 06 : بكالوريا 2011 ر

1. نعتبر المعادلة : (E) ... $-13x - 7y = -1$ حيث : x و y عدادان صحيحان. حلّ المعادلة (E)

$$\begin{cases} a \equiv -1[7] \\ a \equiv 0[13] \end{cases} \quad 2. \text{ عين الأعداد الصحيحة النسبية } a \text{ بحيث :}$$

3. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقى القسمة الإقلية للعدد 9^n على كل من 7 و 13

4. ليكن العدد الطبيعي b المكتوب في نظام التعداد ذي الأساس 9 كما يلي : $\overline{\alpha 00\beta 086}$ حيث : α و β عدادان طبيعيان ، $\alpha \neq 0$. عين α و β حتى يكون b قابلاً للقسمة على 91.

التمرين 07 : بكالوريا 2011 ت ر

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية :

1. المعادلة $40 = 21x + 14y$ لا تقبل حلولاً في مجموعة الأعداد الصحيحة

2. في نظام التعداد ذي الأساس 7 يكون : $\overline{3421} + \overline{1562} = \overline{5413}$

3. باقى القسمة الإقلية للعدد : $3^{2011} + 3^2 + \dots + 3 + 1$ على 7 هو : 6

التمرين 08 : بكالوريا 2011 ت ر

من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$

1. تحقق أن $-3[7] - 4 \equiv 6[7]$ ، ثم بين أن $A_3 \equiv 6[7]$
2. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقلية لكل من العددين 2^n و 3^n على 7
3. بين أنه إذا كان n فرديا فإن $A_n + 1$ يقبل القسمة على 7 و استنتج باقي القسمة الإقلية للعدد A_{2011} على 7
4. ما هو باقي القسمة الإقلية للعدد A_{1432} على 7 ؟

التمرين 09 : بكالوريا 2010 ر

1. نعتبر المعادلة : $(1) \dots 7x + 65y = 2009$ ، حيث x و y عدادان صحيحان.
أ. بين أنه إذا كانت الثانية (y, x) حل للمعادلة (1) فإن y مضاعف للعدد 7
ب. حل المعادلة (1)

2. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقلية لكل من العددين 2^n على 9
3. عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يقبل العدد $2^{6n} + 3n + 2$ القسمة على 9
4. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2^{6n} - 1$
أ. تتحقق أن u_n يقبل القسمة على 9
ب. حل المعادلة : $(2) \dots (7u_1)x + (u_2)y = 126567$ ذات المجهول (x, y) ، حيث x و y عدادان صحيحان.
ت. عين الثنائية (x_0, y_0) حل المعادلة (2) حيث x_0 و y_0 عدادان طبيعيان مع $25 \geq y_0$.

التمرين 10 : بكالوريا 2010 ر

1. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $1 - 3^{3n}$ يقبل القسمة على 13
2. استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يقبل كل من العددين $3^{3n+2} - 9$ و $3^{3n+1} - 3$ القسمة على 13
3. عين حسب قيم n ، باقي القسمة الإقلية للعدد 3^{3n} على 13 ، و استنتاج باقي قسمة 2010^{2010} على 13
4. نضع من أجل كل عدد طبيعي p : $A_p = 3^p + 3^{2p} + 3^{3p}$
أ. من أجل $3n = p$ ، عين باقي القسمة الإقلية للعدد A_p على 13
ب. برهن أنه إذا كان $1 + 3n = p$ ، فإن A_p يقبل القسمة على 13
ج. عين باقي القسمة الإقلية للعدد A_p على 13 من أجل $2 + 3n = p$
5. يكتب العدادان الطبيعيان a و b في نظام العد ذي الأساس 3 كما يلي :
$$b = \overline{1000100010000} \quad a = \overline{1001001000}$$

أ. تتحقق أن العددين الطبيعيين a و b يكتبان على الشكل A_p في النظام العشري
ب. استنتاج باقي القسمة الإقلية لكل من العددين a و b على 13.

التمرين 11 : بكالوريا 2010 ت ر

- نعتبر العدد الطبيعي n الذي يكتب في نظام العد ذي الأساس 7 كما يلي : $n = \overline{11\alpha 00}$ حيث α عدد طبيعي
1. عين α حتى يكون n قابلا للقسمة على 3
 2. عين العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 5. استنتاج قيمة α حتى يكون n قابلا للقسمة على 15
 3. نأخذ $4 = \alpha$ ، أكتب العدد n في النظام العشري.

التمرين 12 : بكالوريا 2010 ت ر

1. عين حسب قيم العدد الطبيعي n ، باوقي القسمة الإقلية للعدد 10^n على 13
2. تحقق أن : $0[13] \equiv 1 + 10^{2008} + (10^{2008})^2$
3. عين قيم العدد الطبيعي n حيث يكون : $10^{2n} + 10^n + 1 \equiv 0[13]$.

التمرين 13 : بكالوريا 2009 ر

x عدد طبيعي أكبر من 1 و y عدد طبيعي. $A = \overline{5566}$ عدد طبيعي يكتب في نظام التعداد ذي الأساس x بالشكل

1. أشر العباره $(5x^2 + 6)(x + 1)$ ، ثم أوجد علاقة تربط بين x و y إذا علمت أن $(2 + 2y)(2 + y)$
- ب. أحسب x و y إذا علمت أن x عدد أولي أكبر من 12 ، ثم اكتب تبعاً لذلك العدد A في نظام التعداد العشري

2. أ. عين الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 584

- ب. عين الأعداد الطبيعية a و b حيث $b > a$ التي تتحقق :

$$\begin{cases} a + b = 32 \\ a^2 + b^2 = 584 \end{cases}$$

التمرين 14 : بكالوريا 2009 ت ر

1. أ. عين الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها يقسم 2009
- ب. u_0 و a عدوان طبيعيان غير معدومين ، (u_n) متالية هندسية أساسها a و حدتها الأول u_0 بحيث :

$$u_1^2 + u_2^2 + 35a^2 = 2009$$

- ب. أحسب a و u_0

2. نضع $a = 2$ ، $u_0 = 2$ ، أحسب u_n بدلالة n

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

- أ. عبر عن S_n بدلالة n

- ب. عين العدد الطبيعي n حتى يكون $S_n = 800$

التمرين 15 : بكالوريا 2009 ت ر

1. حل المعادلة التفاضلية : $y' = (\ln 2)y$
2. نسمي f الحل الخاص لهذه المعادلة الذي يتحقق $f(0) = 1$ ، عين عباره (x)
3. n عدد طبيعي.
- أ. أدرس باوقي القسمة الإقلية على 7 للعدد 2^n
- ب. استنتج باوقي القسمة الإقلية على 7 للعدد $4 - f(2009)$
- أ. أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = f(0) + f(1) + \dots + f(n)$
- ب. عين قيم العدد الطبيعي n التي يقبل من أجلها S_n القسمة على 7

التمرين 16 : بكالوريا 2008 ر

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث : $3x - 21y = 78$

1. أ. بيّن أن (E) تقبل حلولاً في \mathbb{Z}^2
- ب. أثبت أنه إذا كانت الثانية (y, x) من \mathbb{Z}^2 حللاً للمعادلة (E) فإن $[7]x \equiv 5$ حللاً للمعادلة (E). استنتاج حلول المعادلة (E)
- أ. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باوقي القسمة الإقلية للعدد 5^n على 7
- ب. عين الثنائيات (y, x) من \mathbb{N}^2 التي هي حلولاً للمعادلة (E) و تتحقق $5^x + 5^y \equiv 3[7]$

التمرين 17 : بكالوريا 2008 ت ر

عدد طبيعي أكبر من 5

$$b = 2n + 3 \quad a = n - 2 \quad a \text{ و } b \text{ عداد طبيعيان حيث :}$$

أ. ما هي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b ؟ب. بين أن العددين a و b من مضاعفات 7 إذا و فقط إذا كان $n + 5$ مضاعفاً للعدد 7ج. عين قيم n التي يكون من أجلها $\text{PGCD}(a; b) = 7$

$$q = n^2 - 7n + 10 \quad p = 2n^2 - 7n - 15 \quad \text{حيث :}$$

أ. بين أن كل العددين p و q يقبل القسمة على 5ب. عين تبعاً لقيم n و بدلالة n ، $\text{PGCD}(p; q)$.**التمرين 18 : بكالوريا 2008 ت ر**نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x و y : (I) ... $4x - 9y = 319$ 1. تأكيد أن الثنائية $(1, 82)$ حل للمعادلة (I)

أ- حل المعادلة (I)

2. عين الثنائيات (a, b) الصحيحة حلول المعادلة : (II) ... $4a^2 - 9b^2 = 319$ 3. استنتج الثنائيات (x_0, y_0) حلول المعادلة (I) بحيث x_0 و y_0 مربعين تامين.**التمرين 19 : بكالوريا 2007** n عدد طبيعي أكبر تماماً من 2 ، و نعتبر الأعداد الطبيعية : $c = 2n + 3$ ، $b = 4n + 3$ ، $a = 2n + 1$ و $b = 4n + 3$ ، $a = 2n + 1$ و $c = 2n + 3$ 1. أثبت أن العددين a و b أوليان فيما بينهما و استنتج أن الأعداد a ، b و c أولية فيما بينها2. عين تبعاً لقيم العدد n قيمة القاسم المشترك الأكبر للعددين b و c 3. عين قيمة n بحيث يكون : $\text{PPCM}(b; c) = 1305$ و $\text{PGCD}(b; c) = 7$ 4. أكتب العدد b^2 في نظام العد الذي أساسه a 5. نفرض أن $(a; b; c)$ هي إحداثيات نقطة (0) في الفضاء المنسوب إلى معلم متعمد و متجانس $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ أ- بين أن النقطة (0) تتتمى إلى مستقيم (Δ) يطلب تعينهب- أكتب معادلة المستوي (P) الذي يشمل المبدأ O و يحوي المستقيم (Δ) .**التمرين 20 : بكالوريا 2005** n عدد طبيعي ، و نعتبر العددين الطبيعين : $\beta = n^2 + n + 2$ و $\alpha = n^2 + 2$ 1. برهن أن (n) $\text{PGCD}(\alpha; \beta) = \text{PGCD}(\beta; n)$ 2. استنتاج القيم الممكنة لـ $\text{PGCD}(\alpha; \beta)$ 3. a و b عدادان طبيعيان يُكتَبان في نظام العد الذي أساسه n على الشكل : $a = 3520$ و $b = 384$ أ. برهن أن العدد $3n + 2$ قاسم مشترك للعددين a و b ب. استنتاج تبعاً لقيم n أن $\text{PGCD}(a; b)$ هو 2 أو $3n + 2$ أو $2(3n + 2)$ ج. عين العددين α و β علماً أن $\text{PGCD}(a; b) = 41$ **التمرين 21 : بكالوريا 2004**ليكن λ عدداً صحيحاً و نعتبر في المجموعة \mathbb{Z}^2 المعادلة (1) ... $43x - 13y = \lambda$ 1. تحقق أن $(-3\lambda; -10\lambda)$ حل للمعادلة (1) و اعط مجموعة حلول هذه المعادلة2. n عدد طبيعي يُكتَب في نظام العد الذي أساسه 6 على الشكل : $\overline{\alpha\beta\alpha\beta\alpha}$ و يُكتَب في نظام العد الذي أساسه 5على الشكل $\overline{\beta\gamma\gamma\gamma\beta}$ ، حيث α و β و γ أعداد طبيعيةأ. تتحقق أن $43\alpha - 13\beta = \gamma$ ب. عين الأعداد α و β و γ و اكتب العدد n في النظام العشري.

التمرين 22 : بكالوريا 2003

1. α و β عدوان طبيعيان أوليان فيما بينهما و $\beta > \alpha$. عين α و β بحيث يكون : $\alpha(\alpha^2 - 19) = 35\beta$
2. (u_n) متالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q حيث $u_0 > q > 0$ عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما و $u_0 > q$
- أ. عين u_0 و q إذا علمت أن : $35u_0^2 + 19u_1 - u_0q^3 = 0$
 - ب. أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$
 - ج. عين قيم n بحيث يقبل العدد S_n القسمة على 30.

التمرين 23 : بكالوريا 2001

1. α و β عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما. عين α و β بحيث يكون : $\beta(\beta^3 - 1) = 28\alpha^2$
2. e, d, c, b, a أعداد طبيعية غير معدومة تشكل بهذا الترتيب حودا متتابعة لمتالية هندسية أساسها q عين هذه الأعداد إذا علمت أن العددين a و q عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما و أن $b = e - 28a^3$

التمرين 24 : بكالوريا 2001

1. عين $(PGCD(225; 180))$
2. حل في المجموعة \mathbb{Z}^2 المعادلة (1) ... $225x - 180y = 90$ (لاحظ أن (3;1) حل خاص)
3. عين مجموعة الثنائيات $(y; x)$ حلول المعادلة (1) التي تحقق $x < y + 1$
4. عددان طبيعيان يكتبان في نظام العد أساسه α على الشكل : $a = \overline{52}$ و $b = \overline{252}$ و يكتبان في نظام العد أساسه β على الشكل : $a = \overline{44}$ و $b = \overline{206}$. عين α و β ثم a و b .

التمرين 25 : بكالوريا 2000

1. حل في المجموعة \mathbb{Z}^2 المعادلة (1) ... $9x - 14y = 13$ (لاحظ أن (3;1) حل خاص)
2. نعتبر في المجموعة \mathbb{Z}^2 المعادلة (2) ... $45x - 28y = 130$
- أ. بين أنّه إذا كان $(y; x)$ حل للمعادلة (2) فإن x مضاعف للعدد 2 و أن y مضاعف للعدد 5
 - ب. عين مجموعة حلول المعادلة (2)
3. عدد طبيعي يكتب في نظام العد الذي أساسه 9 على الشكل : $\overline{2\alpha\alpha 3}$ و يكتب في نظام العد الذي أساسه 7 على الشكل $\overline{5\beta\beta 6}$ حيث α و β عددان طبيعيان عين العددين α و β و اكتب العدد n في النظام العشري.

التمرين 26 : بكالوريا 1996

1. حل كلا من العددين 1995 و 105 إلى جداء عوامل أولية
2. α و β عددان طبيعيان حيث $\beta < \alpha$. حل في المجموعة \mathbb{N}^2 المعادلة $\alpha\beta = 105$
3. a و b عددان طبيعيان غير معدومين وغير أوليين فيما بينهما بحيث $a < b$
- عین a و b بحيث يكون : $PPCM(a; b) = 1995$ حيث d هو $PGCD(a; b)$ و m هو $\left\{ \begin{array}{l} 95d + 19m \\ d < 7 \end{array} \right.$

التمرين 27 : بكالوريا 1994

1. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليمية للعدد 2^n على 10. استنتج رقم آحاد العدد 1994^{1414}
2. (u_n) متالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $u_n = 2^n$
- أ. تتحقق أن (u_n) هندسية
 - ب. احسب بدلالة n العدد : $S_n = (5 + 2^1) + (5 + 2^2) + (5 + 2^3) + \dots + (5 + 2^n)$
 - ج. أوجد قيم العدد n بحيث يكون العدد S_n مضاعفاً للعدد 10.

1. حل في المجموعة \mathbb{Z}^2 المعادلة $84 = 18x + 4y$ و عين مجموعة الحلول $(x ; y)$ التي تتحقق $x y > 0$
2. عدد طبيعي يُكتب في نظام العد الذي أساسه 5 على الشكل $\overline{30\alpha\beta\gamma}$ و يُكتب في نظام العد الذي أساسه 7 على الشكل $\overline{55\alpha\beta\gamma}$ ، حيث α و β و γ أعداد طبيعية
عين الأعداد α و β و γ و اكتب العدد n في النظام العشري.



حلول تمارين القسمة و المولففات

التمرين 01:

بما أن العدد 251 لا يقبل القسمة على كل من 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 و 13 فهو إذن أولي ;

الأعداد الطبيعية التي مكعب كل منها يقسم 2008 هي 1 و 2 ;

$$3) m^3 + 35d^3 = 2008; a = da', b = db'; PGCD(a', b') = 1$$

$$m \times d = a \times b \Rightarrow m = \frac{a \times b}{d} = \frac{da' \times db'}{d} = da'b'$$

$$m^3 + 35d^3 = 2008 \Rightarrow (da'b')^3 + 35d^3 = 2008 \Rightarrow d^3[(a'b')^3 + 35] = 2008 \Rightarrow d^3/2008 \Rightarrow d \in \{1,2\}$$

مستحيل لأن a' و b' عدوان صحيحان

$$d = 1: (a'b')^3 + 35 = 2008 \Rightarrow (a'b')^3 = 1973 \Rightarrow a'b' = \sqrt[3]{1973} \approx 12,54$$

$$d = 2: 2^3[(a'b')^3 + 35] = 2008 \Rightarrow (a'b')^3 = 216 \Rightarrow a'b' = \sqrt[3]{216} = 6$$

$$(a', b') \in \{(1,6); (6,1); (2,3); (3,2)\} \Rightarrow (a, b) \in \{(2,12); (12,2); (4,6); (6,4)\}$$

التمرين 02:

$$1) 5^0 \equiv 1[7]; 5^1 \equiv 5[7]; 5^2 \equiv 4[7]; 5^3 \equiv 6[7]; 5^4 \equiv 2[7]; 5^5 \equiv 3[7]; 5^6 \equiv 1[7]$$

$$5^{6k} \equiv 1[7]; 5^{6k+1} \equiv 5[7]; 5^{6k+2} \equiv 4[7]; 5^{6k+3} \equiv 6[7]; 5^{6k+4} \equiv 2[7]; 5^{6k+5} \equiv 3[7]$$

$$2) 6 \equiv -1[7] \Rightarrow 6^{2n} \equiv (-1)^{2n}[7] \Rightarrow 6^{2n} \equiv 1[7]$$

$$3) 5^n + 6^{2n} + 3 \equiv 0[7] \Rightarrow 5^n + 1 + 3 \equiv 0[7] \Rightarrow 5^n + 4 \equiv 0[7] \Rightarrow 5^n \equiv 3[7] \Rightarrow n = 6k + 5, k \in \mathbb{N}$$

التمرين 03:

$$1) 4^0 \equiv 1[11]; 4^1 \equiv 4[11]; 4^2 \equiv 5[11]; 4^3 \equiv 9[11]; 4^4 \equiv 3[11]; 4^5 \equiv 1[11]$$

$$4^{5k} \equiv 1[11]; 4^{5k+1} \equiv 4[11]; 4^{5k+2} \equiv 5[11]; 4^{5k+3} \equiv 9[11]; 4^{5k+4} \equiv 3[11]$$

$$2) 1995 \equiv 4[11] \Rightarrow 1995^n \equiv 4^n[11]; 26 \equiv 4[11] \Rightarrow 26^{10n+2} \equiv 4^{10n+2}[11] \Rightarrow 26^{10n+2} \equiv 4^{5(2n)+2}[11] \\ \Rightarrow 26^{10n+2} \equiv 5[11]$$

$$6 \times 1995^n + 26^{10n+2} + 7 \equiv 0[11] \Rightarrow 6 \times 4^n + 5 + 7 \equiv 0[11] \Rightarrow 6 \times 4^n + 1 \equiv 0[11] \\ \Rightarrow 6 \times 4^n \equiv 10[11]$$

n	$5k$	$5k + 1$	$5k + 2$	$5k + 3$	$5k + 4$	
$4^n \equiv$	1	4	5	9	3	[11]
$6 \times 4^n \equiv$	6	2	8	10	7	[11]

$$6 \times 4^n \equiv 10[11] \Rightarrow n = 5k + 3, k \in \mathbb{N}$$

التمرين 04:

$$1) 5^0 \equiv 1[7]; 5^1 \equiv 5[7]; 5^2 \equiv 4[7]; 5^3 \equiv 6[7]; 5^4 \equiv 2[7]; 5^5 \equiv 3[7]; 5^6 \equiv 1[7]$$

$$5^{6k} \equiv 1[7]; 5^{6k+1} \equiv 5[7]; 5^{6k+2} \equiv 4[7]; 5^{6k+3} \equiv 6[7]; 5^{6k+4} \equiv 2[7]; 5^{6k+5} \equiv 3[7]$$

$$2) 26 \equiv 5[7] \Rightarrow 26^{6n+5} \equiv 5^{6n+5}[7] \Rightarrow 26^{6n+5} \equiv 3[7]$$

$$47 \equiv 5[7] \Rightarrow 47^{12n+2} \equiv 5^{12n+2}[7] \Rightarrow 47^{12n+2} \equiv 5^{6(2n)+2}[7] \Rightarrow 47^{12n+2} \equiv 4[7] \Rightarrow 2 \times 47^{12n+2} \equiv 1[7]$$

$$26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 3 \equiv 3 + 1 + 3[7] \Rightarrow 26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 3 \equiv 0[7]$$

$$3) 26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 5n \equiv 0[7] \Rightarrow 3 + 1 + 5n \equiv 0[7] \Rightarrow 5n + 4 \equiv 0[7] \Rightarrow 5n \equiv 3[7]$$

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	[7]
$5n \equiv$	0	5	3	1	6	4	2	[7]

$$5n \equiv 3[7] \Rightarrow n \equiv 2[7] \Rightarrow n = 7k + 2; k \in \mathbb{N}$$

طريقة ثانية: لما يكون معامل المجهول في الطرف الأول للمعادلة (5) أولاً مع التردد (7)، نضيف التردد إلى الطرف الثاني للمعادلة (3) حتى نحصل على عدد قابل لقسمة على معامل المجهول، فيكون حل المعادلة كالتالي:

$$5n \equiv 3[7] \Rightarrow 5n \equiv 10[7] \Rightarrow n \equiv 2[7] \Rightarrow n = 7k + 2; k \in \mathbb{N}$$

التمرين 05:

$$PGCD(a, b) = d \Rightarrow a = da'; b = db'; PGCD(a', b') = 1$$

$$PGCD(a, b) = d; PPCM(a, b) = m \Rightarrow m \times d = a \times b \Rightarrow m = \frac{a \times b}{d} = \frac{da' \times db'}{d} = da'b'$$

$$1) \begin{cases} a + b = 420 \\ PGCD(a, b) = 84 \end{cases} \Rightarrow 84a' + 84b' = 420 \Rightarrow 84(a' + b') = 420 \Rightarrow a' + b' = 5$$

$$(a', b') \in \{(1,4); (4,1); (2,3); (3,2)\} \Rightarrow (a, b) \in \{(84,336); (336,84); (168,252); (252,168)\}$$

$$2) \begin{cases} a \times b = 360 \\ PGCD(a, b) = 6 \end{cases} \Rightarrow 6a' \times 6b' = 360 \Rightarrow 36(a' \times b') = 360 \Rightarrow a' \times b' = 10$$

$$(a', b') \in \{(1,10); (10,1); (2,5); (5,2)\} \Rightarrow (a, b) \in \{(6,60); (60,6); (12,30); (30,12)\}$$

$$3) \begin{cases} a^2 - b^2 = 825 \\ PGCD(a, b) = 5 \end{cases} \Rightarrow (5a')^2 - (5b')^2 = 825 \Rightarrow 25(a'^2 - b'^2) = 825 \Rightarrow a'^2 - b'^2 = 33 \\ \Rightarrow (a' - b')(a' + b') = 33$$

$$\begin{cases} a' - b' = 1 \\ a' + b' = 33 \end{cases} \Rightarrow 2a' = 34 \Rightarrow a' = 17 \Rightarrow b' = 16 \Rightarrow (a, b) = (85,80)$$

$$\begin{cases} a' - b' = 3 \\ a' + b' = 11 \end{cases} \Rightarrow 2a' = 14 \Rightarrow a' = 7 \Rightarrow b' = 4 \Rightarrow (a, b) = (35,20)$$

ملاحظة: الحالات $\begin{cases} a' - b' = 11 \\ a' + b' = 3 \end{cases}$ و $\begin{cases} a' - b' = 33 \\ a' + b' = 1 \end{cases}$ مرفوضتان لأن $a' > b'$

$$4) \begin{cases} PPCM(a,b) = 90 \\ PGCD(a,b) = 18 \end{cases}; m = da'b' \Rightarrow a' \times b' = \frac{m}{d} = \frac{90}{18} = 5$$

$$(a',b') \in \{(1,5);(5,1)\} \Rightarrow (a,b) \in \{(18,90);(90,18)\}$$

$$5) PPCM(a,b) - 9PGCD(a,b) = 13 \Rightarrow m - 9d = 13 \Rightarrow da'b' - 9d = 13 \Rightarrow d(a'b' - 9) = 13 \Rightarrow d/13$$

$$\Rightarrow d \in \{1,13\}$$

$$d = 1: a'b' - 9 = 13 \Rightarrow a'b' = 22 \Rightarrow (a',b') \in \{(1,22);(2,11)\} \Rightarrow (a,b) \in \{(1,22);(2,11)\}$$

$$d = 13: a'b' - 9 = 13 \Rightarrow a'b' = 26 \Rightarrow (a',b') \in \{(1,26);(2,13)\} \Rightarrow (a,b) \in \{(13,26);(2,13)\}$$

التمرين 06:

$$a = 5n^2 + 7; b = n^2 + 2; PGCD(a,b) = d$$

$$1) d/a \text{ و } d/b \Rightarrow d/5b - a \Rightarrow d/5n^2 + 10 - 5n^2 - 7 \Rightarrow d/3$$

$$2) PGCD(a,b) = 3 \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 0[3] \\ b \equiv 0[3] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5n^2 + 7 \equiv 0[3] \\ n^2 + 2 \equiv 0[3] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n^2 + 1 \equiv 0[3] \\ n^2 \equiv 1[3] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n^2 \equiv 2[3] \\ n^2 \equiv 1[3] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n^2 \equiv 1[3] \\ n^2 \equiv 1[3] \end{cases}$$

3)

$n \equiv$	0	1	2	[3]
$n^2 \equiv$	0	1	1	[3]

$$n^2 \equiv 1[3] \Rightarrow n \equiv 1[3] \vee n \equiv 2[3]$$

$$n = 3k : PGCD(a,b) = 1; n = 3k + 1 \vee n = 3k + 2 : PGCD(a,b) = 3$$

التمرين 07:

$$a = 2n + 3; b = 5n - 2; PGCD(a,b) = d$$

$$1) d/a \text{ و } d/b \Rightarrow d/5a - 2b \Rightarrow d/10n + 15 - 10n + 4 \Rightarrow d/19 \Rightarrow d = 1 \vee d = 19$$

إذا كان العددان a و b غير أوليين فيما بينهما فإن $d \neq 1$ منه $d = 19$

$$2) PGCD(a,b) = 19 \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 0[19] \\ b \equiv 0[19] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n + 3 \equiv 0[19] \\ 5n - 2 \equiv 0[19] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n \equiv 16[19] \\ 5n \equiv 2[19] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \equiv 8[19] \\ 5n \equiv 40[19] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \equiv 8[19] \\ n \equiv 8[19] \end{cases}$$

$$PGCD(a,b) = 19 \Rightarrow n = 19k + 8; k \in \mathbb{N}$$

التمرين 08:

$$a = 2n^3 + 5n^2 + 4n + 1; b = 2n^2 + n$$

العدد $(2n+1)$ قاسم مشترك للعددين a و b

2) $(n+1) - (n) = 1 \Rightarrow PGCD(n,n+1) = 1$ (حسب نظرية بيزو)

$(n+1)^2 - n(n+2) = 1 \Rightarrow PGCD[n, (n+1)^2] = 1$ (حسب نظرية بيزو)

3) $PGCD(a, b) = (2n+1)PGCD(n^2 + 2n + 1, n) = (2n+1)\underbrace{PGCD[(n+1)^2, n]}_1 = 2n+1$

التمرين 09:

$$A = n^4 + n^2 + 1$$

1) $A = n^4 + 2n^2 + 1 - n^2 = (n^2 + 1)^2 - n^2 = (n^2 + 1 - n)(n^2 + 1 + n) = (n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1)$

2) $a = n^2 + n + 1 ; b = n^2 - n + 1$

- $a = n(n+1) + 1 ; b = n(n-1) + 1$

بما أن جداء عددين متتابعين هو عدد زوجي ، فإن العددين $n(n+1)$ و $n(n-1)$ زوجيان ، و منه يكون العددان a و b فردان

- d/a و $d/b \Rightarrow d/a - b \Rightarrow d/2n$; d/a و $d/b \Rightarrow d/a + b \Rightarrow d/2n^2 + 2 \Rightarrow d/2(n^2 + 1)$
- $n^2 + 1 - n(n) = 1 \Rightarrow PGCD(n^2 + 1, n) = 1$ (حسب نظرية بيزو)
- d/a و $d/b \Rightarrow d/a - b$ و $d/a + b \Rightarrow d/PGCD(a - b, a + b) \Rightarrow d/PGCD(2n, 2(n^2 + 1))$
 $PGCD(2n, 2(n^2 + 1)) = 2 \times PGCD(n, n^2 + 1) = 2 \Rightarrow d/2 \Rightarrow d = 1 \vee d = 2$

بما أن العددين a و b فرديان ، منه العددان أوليان فيما بينهما.

التمرين 10:

$$a = 11n + 3 ; b = 13n - 1$$

1) d/a و $d/b \Rightarrow d/13a - 11b \Rightarrow d/50$

2) $50x - 11y = 1$

$$50 = 11(4) + 6 \Rightarrow 6 = 50 - 11(4)$$

$$11 = 6 + 5 \Rightarrow 5 = 11 - 6$$

$$6 = 5 + 1 \Rightarrow 1 = 6 - 5$$

$$1 = 6 - 5 = 6 - (11 - 6) = 2(6) - 11 = 2[50 - 11(4)] - 11 = 50(2) - 11(9) \Rightarrow (x_0, y_0) = (2, 9)$$

$$50(2) - 11(9) = 1 \Rightarrow 50(6) - 11(27) = 3$$

$$\begin{cases} 50x - 11y = 3 \\ 50(6) - 11(27) = 3 \end{cases} \Rightarrow 50(x - 6) - 11(y - 27) = 0 \Rightarrow 50(x - 6) = 11(y - 27)$$

$$\begin{cases} 11/50(x - 6) \\ PGCD(11, 50) = 1 \end{cases} \Rightarrow 11/(x - 6) \Rightarrow x - 6 = 11k \Rightarrow x = 11k + 6 ; k \in \mathbb{Z}$$

$$50(x - 6) = 11(y - 27) \Rightarrow 50(11k) = 11(y - 27) \Rightarrow y - 27 = 50k \Rightarrow y = 50k + 27 ; k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{(11k + 6 ; 50k + 27)\} ; k \in \mathbb{Z}$$

$$3) PGCD(a, b) = 50 \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 0[50] \\ b \equiv 0[50] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11n + 3 \equiv 0[50] \\ 13n - 1 \equiv 0[50] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11n \equiv 47[50] \\ 13n \equiv 1[50] \end{cases} \Rightarrow n \equiv 27[50]$$

$$\Rightarrow n = 50k + 27 ; k \in \mathbb{N}$$

$$4) PGCD(a, b) = 25 \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 0[25] \\ b \equiv 0[25] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11n + 3 \equiv 0[25] \\ 13n - 1 \equiv 0[25] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11n \equiv 22[25] \\ 13n \equiv 1[25] \end{cases} \Rightarrow n \equiv 2[25]$$

$$\Rightarrow n = 25k + 2 ; k \in \mathbb{N} (\text{زوجي } k)$$

التمرين 11:

$$324x - 245y = 7 \dots (E)$$

$$1) 324 = 245 + 79 \Rightarrow 79 = 324 - 245$$

$$245 = 79(3) + 8 \Rightarrow 8 = 245 - 79(3)$$

$$79 = 8(9) + 7 \Rightarrow 7 = 79 - 8(9)$$

$$7 = 79 - 8(9) = 79 - 9[245 - 79(3)] = 245(-9) + 79(28) = 245(-9) + 28[324 - 245]$$

$$7 = 324(28) - 245(37) \Rightarrow (x_0, y_0) = (28, 37)$$

$$\begin{cases} 324x - 245y = 7 \\ 324(28) - 245(37) = 7 \end{cases} \Rightarrow 324(x - 28) - 245(y - 37) = 0 \Rightarrow 324(x - 28) = 245(y - 37)$$

$$\begin{cases} 245/324(x - 28) \\ PGCD(245, 324) = 1 \end{cases} \Rightarrow 245/(x - 28) \Rightarrow x - 28 = 245k \Rightarrow x = 245k + 28 ; k \in \mathbb{Z}$$

$$324(x - 28) = 245(y - 37) \Rightarrow 324(245k) = 245(y - 37) \Rightarrow y - 37 = 324k \Rightarrow y = 324k + 37 ; k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{(245k + 28, 324k + 37)\} ; k \in \mathbb{Z}$$

$$2) 324x - 245y = 7 \Rightarrow 324x = 245y + 7 \Rightarrow 324x = 7(35y + 1)$$

$$\begin{cases} 7/324x \\ PGCD(7, 324) = 1 \end{cases} \Rightarrow 7/x \Rightarrow x \equiv 0[7]$$

$$3) PGCD(x, y) = d$$

- $d|x \wedge d|y \Rightarrow d|324x - 245y \Rightarrow d|7 \Rightarrow d = 1 \vee d = 7$
- $d = 7 \Rightarrow y \equiv 0[7] \Rightarrow 324k + 37 \equiv 0[7] \Rightarrow 2k + 2 \equiv 0[7] \Rightarrow 2k \equiv 5[7] \Rightarrow k \equiv 6[7]$

$$\Rightarrow k = 7k' + 6 \Rightarrow x = 245(7k' + 6) + 28 = 1715k' + 1498 ; k' \in \mathbb{Z}$$

$$y = 324(7k' + 6) + 37 = 2268k' + 1981 ; k' \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{(1715k' + 1498, 2268k' + 1981)\} ; k' \in \mathbb{Z}$$

التمرين 12:

$$1) 1996 = 2^2 \times 499 ; 1497 = 3 \times 499 ; 2994 = 2 \times 3 \times 499 \Rightarrow PGCD(1996, 1497, 2994) = 499$$

$$2) 1996x - 1497y = 2994 \dots (1)$$

- (1) $\Rightarrow 4x - 3y = 6 \Rightarrow 4x = 3y + 6 \Rightarrow 4x = 3(y + 2) ; \left\{ \begin{array}{l} 3/4x \\ PGCD(3,4) = 1 \end{array} \right. \Rightarrow 3/x \Rightarrow x \equiv 0[3]$

$$(1) \Rightarrow 4x - 3y = 6 \Rightarrow 3y = 4x - 6 \Rightarrow 3y = 2(2x - 3) ; \left\{ \begin{array}{l} 2/3y \\ PGCD(2,3) = 1 \end{array} \right. \Rightarrow 2/y \Rightarrow y \equiv 0[2]$$

- $4x - 3y = 6 \Rightarrow 3y = 4x - 6 = 4(3k) - 6 = 12k - 6 = 3(4k - 2) \Rightarrow y = 4k - 2$

$$S = \{(3k; 4k - 2)\} ; k \in \mathbb{Z}$$

- $xy = 1950 \Rightarrow 3k(4k - 2) = 1950 ; 12k^2 - 6k - 1950 = 0 ; \Delta' = 9 + 12(1950) = 23409$

$$k' = \frac{3 - 153}{12} = -12,5 \text{ مرفوضة} ; k'' = \frac{3 + 153}{12} = 13 ; (x; y) = (39; 50)$$

التمرين 13:

$$1) 4x - 9y = 19 \Rightarrow 4x = 9y + 19 \Rightarrow 9y + 19 \equiv 0[4] \Rightarrow y + 3 \equiv 0[4] \Rightarrow y \equiv 1[4] \Rightarrow y = 4k + 1$$

$$4x = 9(4k + 1) + 19 = 36k + 28 = 4(9k + 7) \Rightarrow x = 9k + 7 \Rightarrow S = \{(9k + 7; 4k + 1)\} ; k \in \mathbb{Z}$$

$$2) d | x \text{ و } d | y \Rightarrow d | 4x - 9y \Rightarrow d | 19 \Rightarrow d = 1 \text{ أو } d = 19$$

$$d = 19 \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 0[19] \\ y \equiv 0[19] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9k + 7 \equiv 0[19] \\ 4k + 1 \equiv 0[19] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9k \equiv 12[19] \\ 4k \equiv 18[19] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \equiv 14[19] \\ k \equiv 14[19] \end{cases} \Rightarrow k = 19k' + 14$$

$$x = 9(19k' + 14) + 7 = 171k' + 133 ; y = 4(19k' + 14) + 1 = 76k' + 57 ; k' \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{(171k' + 133 ; 76k' + 57)\} ; k' \in \mathbb{Z}$$

$$3) 4a^2 - 9b^2 = 19 \Rightarrow (2a - 3b)(2a + 3b) = 19$$

نلاحظ أنه إذا كانت الثنائية $(a; b)$ حلًا للمعادلة ، فكذلك الثنائيات $(b; a)$ ، $(-a; -b)$ ، $(-a; b)$ و $(a; -b)$ ، لذا سنبحث عن الثنائية الموجبة فقط ، و وبالتالي يكون $(2a - 3b) < (2a + 3b)$

$$(2a - 3b)(2a + 3b) = 19 \Rightarrow \begin{cases} 2a - 3b = 1 \\ 2a + 3b = 19 \end{cases} \Rightarrow 4a = 20 \Rightarrow a = 5 ; b = 3$$

$$S = \{(5; 3) ; (-5; 3) ; (5; -3) ; (-5; -3)\}$$

التمرين 14:

$$1) 5x - 3y = 2 \Rightarrow 5x - 2 = 3y \Rightarrow 5x - 2 \equiv 0[3] \Rightarrow 2x \equiv 2[3] \Rightarrow x \equiv 1[3] \Rightarrow x = 3k + 1$$

$$3y = 5x - 2 \Rightarrow 3y = 5(3k + 1) - 2 = 15k + 3 = 3(5k + 1) \Rightarrow y = 5k + 1$$

$$S = \{(3k + 1; 5k + 1)\} ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} A = \overline{55}_x \\ A = \overline{37}_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 5 + 5x \\ A = 7 + 3y \end{cases} \Rightarrow 5x + 5 = 3y + 7 \Rightarrow 5x - 3y = 2 \Rightarrow (x; y) = (3k + 1; 5k + 1)$$

$$\begin{cases} 5 < x \leq 12 \\ 7 < y \leq 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 < 3k + 1 \leq 12 \\ 7 < 5k + 1 \leq 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 < 3k \leq 11 \\ 6 < 5k \leq 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{3} < k \leq \frac{11}{3} \\ \frac{6}{5} < k \leq \frac{19}{5} \end{cases} \Rightarrow k = 2 \text{ أو } k = 3$$

- $k = 2 \Rightarrow (x; y) = (7; 11) \Rightarrow A = 5(7) + 5 = 40$
- $k = 3 \Rightarrow (x; y) = (10; 16) \Rightarrow A = 5(10) + 5 = 55$

التمرين 15 :

1) $8x - 5y = 3$

$$8(1) - 5(1) = 3 \Rightarrow 8(x-1) - 5(y-1) = 0 \Rightarrow 8(x-1) = 5(y-1)$$

$$\begin{cases} 5/8(x-1) \\ PGCD(5; 8) = 1 \end{cases} \Rightarrow 5/(x-1) \Rightarrow x-1 = 5k \Rightarrow x = 5k+1$$

$$8(x-1) = 5(y-1) \Rightarrow 8(5k) = 5(y-1) \Rightarrow y-1 = 8k \Rightarrow y = 8k+1$$

$$S = \{(5k+1; 8k+1)\}; k \in \mathbb{Z}$$

2) $m = 8p + 1 = 5q + 4 \Rightarrow 8p - 5q = 3 \Rightarrow (p; q) \in S$

$$m = 8p + 1 = 8(5k+1) + 1 = 40k + 9 \Rightarrow m \equiv 9[40]$$

$$m > 2000 \Rightarrow 40k + 9 > 2000 \Rightarrow 40k > 1991 \Rightarrow k > \frac{1991}{40} \Rightarrow k > 49,775 \Rightarrow k = 50 \Rightarrow m = 2009$$

3) $2^{3k} = (2^3)^k = 8^k; 8 \equiv 1[7] \Rightarrow 8^k \equiv 1[7] \Rightarrow 2^{3k} \equiv 1[7]$

$$2^{2009} = 2^2 \times 2^{2007} = 4 \times 2^{3(669)} \Rightarrow 2^{2009} \equiv 4[7]$$

4) $N = \overline{a00b} = 10^3a + b$

$$10 \equiv 3[7] \Rightarrow 10^3 \equiv 3^3[7] \Rightarrow 10^3 \equiv 27[7] \Rightarrow 10^3 \equiv 27 - 28[7] \Rightarrow 10^3 \equiv -1[7]$$

$$10^3 \equiv -1[7] \Rightarrow 10^3a + b \equiv -a + b[7] \Rightarrow N \equiv -a + b[7]$$

$$N \equiv 0[7] \Rightarrow -a + b \equiv 0[7] \Rightarrow a \equiv b[7]$$

$$(a, b) \in \{(1,1); (2,2); (3,3); (4,4); (5,5); (6,6); (7,7); (8,8); (9,9); (7,0); (1,8); (8,1); (2,9); (9,2)\}$$

$$N \in \{1001; 2002; 3003; 4004; 5005; 6006; 7007; 8008; 9009; 7000; 1008; 8001; 2009; 9002\}$$

التمرين 16 :

1) $x^2 + x + 3 \equiv 0[5] \Rightarrow x^2 + x + 3 - 5x \equiv 0[5] \Rightarrow x^2 - 4x + 3 \equiv 0[5] \Rightarrow (x-1)(x-3) \equiv 0[5]$

$$\Rightarrow x \equiv 1[5] \text{ أو } x \equiv 3[5] \quad (\text{الجواب د})$$

2) $24x + 34y = 2; 24(17k - 7) + 34(5 - 12k) = 408k - 168 + 170 - 408k = 2 \quad (\text{الجواب أ})$

الجواب ج) $N = \overline{421}_5 = 1 + (2 \times 5) + (4 \times 5^2) = 111 = 18 \times 6 + 3 = (3 \times 6^2) + 3 = \overline{303}_6$

الجواب ب) $1432 \equiv 1[3] \Rightarrow 1432^{2011} \equiv 1[3]$

الجواب ج) (بيزو) $a = n(n+2); b = n+1; b^2 - a = 1 \Rightarrow PGCD(a, b) = 1$

التمرين 17:

$$1) PGCD(a+b; ab) = p^2 \Rightarrow \begin{cases} p^2 \mid a+b \\ p^2 \mid ab \end{cases} \Rightarrow p^2 \mid a(a+b) - ab \Rightarrow p^2 \mid a^2 \Rightarrow p \mid a^2 \Rightarrow p \mid a \quad (\text{لأن } p \text{ أولي})$$

$$PGCD(a+b; ab) = p^2 \Rightarrow \begin{cases} p^2 \mid a+b \\ p^2 \mid ab \end{cases} \Rightarrow p^2 \mid b(a+b) - ab \Rightarrow p^2 \mid b^2 \Rightarrow p \mid b^2 \Rightarrow p \mid b \quad (\text{لأن } p \text{ أولي})$$

$$PGCD(a, b) = d \Rightarrow \begin{cases} d \mid a \\ d \mid b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid a+b \\ d \mid ab \end{cases} \Rightarrow d \mid p^2 \Rightarrow d \in \{1, p, p^2\}$$

بما أن p يقسم a و b فهو يختلف عن 1 لأن p أولي ، إذن $1 \neq PGCD(a, b) = p$ ، منه $PGCD(a, b) \neq 1$

$$2) \begin{cases} p^2 = 49 \\ m = 231 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 7 \\ m = 231 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 7 \\ m = 231 \end{cases} \text{ أو } \Rightarrow \begin{cases} d = 49 \\ m = 231 \end{cases} \quad (231 \text{ لا يقسم 49}) \Rightarrow d = 7$$

$$d = 7 \Rightarrow a = 7a'; b = 7b'; PGCD(a', b') = 1$$

$$m = 231 \Rightarrow d \cdot a' \cdot b' = 231 \Rightarrow a' \cdot b' = 33 \Rightarrow (a', b') \in \{(1, 33); (33, 1); (3, 11); (11, 3)\}$$

$$\Rightarrow (a, b) \in \{(7, 231); (231, 7); (21, 77); (77, 21)\}$$

التمرين 18:

$$a_n = 4 \times 10^n - 1 \quad b_n = 2 \times 10^n - 1 \quad c_n = 2 \times 10^n + 10$$

$$1) b_3 = 2 \times 10^3 - 1 = 1999; c_3 = 2 \times 10^3 + 10 = 2010$$

$$\bullet \quad 10 \equiv 1[3] \Rightarrow 10^n \equiv 1[3]; 4 \equiv 1[3] \Rightarrow 4 \times 10^n - 1 \equiv 0[3] \Rightarrow a_n \equiv 0[3]$$

$$10 \equiv 1[3] \Rightarrow 10^n \equiv 1[3]; 2 \equiv -1[3] \Rightarrow 2 \times 10^n + 10 \equiv 0[3] \Rightarrow c_n \equiv 0[3]$$

$$\sqrt{1999} \approx 44,7$$

بما أن العدد 1999 لا يقبل القسمة على أي من الأعداد التالية $\{1; 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43\}$ فهو إذن أولي.

$$\bullet \quad b_n \times (c_n - 9) = (2 \times 10^n - 1)(2 \times 10^n + 10 - 9) = (2 \times 10^n - 1)(2 \times 10^n + 1) \\ = 4 \times 10^{2n} - 1 = a_{2n}$$

$$a_6 = a_{2(3)} = b_3 \times (c_3 - 9) = 1999 \times 2001 = 1999 \times 3 \times 23 \times 29$$

$$c_n = b_n + 11 \Rightarrow PGCD(b_n, c_n) = PGCD(b_n, 11)$$

$$d = PGCD(b_n, c_n) \Rightarrow d = PGCD(b_n, 11) \Rightarrow d = 1 \quad \text{أو} \quad d = 11$$

بما أن العدد b_3 أولي ، إذن $d \neq 1$ منه

$$2) 1999x + 2010y = 1 \dots (E)$$

بما أن العدد 1999 أولي ، فإن $PGCD(1999, 2010) = 1$ ، منه المعادلة (E) تقبل على الأقل حلًا في \mathbb{Z}^2

$$\begin{cases} 1999x + 2010y = 1 \\ 1999(-731) + 2010(727) = 1 \end{cases} \Rightarrow 1999(x + 731) + 2010(y - 727) = 0 \Rightarrow 1999(x + 731) = 2010(-y + 727)$$

$$\begin{cases} 2010 \mid 1999(x + 731) \\ PGCD(1999, 2010) = 1 \end{cases} \Rightarrow 2010 \mid (x + 731) \Rightarrow x + 731 = 2010k \Rightarrow x = 2010k - 731$$

$$1999(2010k) = 2010(-y + 727) \Rightarrow -y + 727 = 1999k \Rightarrow y = -1999k + 727$$

$$S = \{(2010k - 731; -1999k + 727)\}; k \in \mathbb{Z}$$

التمرين 19 :

$$1) n^2 + 5n + 4 = (n+1)(n+4) \Rightarrow (n+1) \text{ يقبل القسمة على } (n^2 + 5n + 4)$$

$$n^2 + 3n + 2 = (n+1)(n+2) \Rightarrow (n+1) \text{ يقبل القسمة على } (n^2 + 3n + 2)$$

$$2) 3n^2 + 15n + 19 = (n+1)(3n+12) + 7 ; (n+1)/(3n^2 + 15n + 19) \Rightarrow (n+1)/7 \Rightarrow n = 0 \vee n = 6$$

$$3) n^2 + 3n + 2 / 3n^2 + 15n + 19 \Rightarrow n + 1 / 3n^2 + 15n + 19 \Rightarrow n = 0 \vee n = 6$$

- $n = 0 : 2/19$ (مستحيل)
- $n = 6 : 56/217$ (مستحيل)

نستنتج إذا أن العدد 19 لا يقبل القسمة على العدد 2

التمرين 20 :

$$1) 584 = 2^3 \times 73 \Rightarrow 1 \text{ و } 2 \text{ الأعداد التي مربعاتها تقسم العدد 584 هي }$$

$$2) PGCD(a, b) = d ; a = da'; b = db'; PGCD(a', b') = 1$$

$$\begin{cases} a + b = 32 \\ a^2 + b^2 = 584 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d(a' + b') = 32 \\ d^2(a'^2 + b'^2) = 584 \end{cases} ; d^2/584 \Rightarrow d = 1 \vee d = 2$$

$$\bullet \quad d = 1 : \begin{cases} a' + b' = 32 \\ a'^2 + b'^2 = 584 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b' = 32 - a' \\ a'^2 + (32 - a')^2 = 584 \end{cases}$$

$$a'^2 + (32 - a')^2 = 584 \Rightarrow 2a'^2 - 64a' + 1024 = 584 \Rightarrow 2a'^2 - 64a' + 440 = 0$$

$$\Rightarrow a'^2 - 32a' + 220 = 0 ; \Delta' = 36 ; a' = 10 \vee a' = 22$$

$$(a', b') \in \{(10, 22); (22, 10)\} \Rightarrow (a, b) \in \{(10, 22); (22, 10)\}$$

$$\bullet \quad d = 2 : \begin{cases} a' + b' = 16 \\ a'^2 + b'^2 = 146 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b' = 16 - a' \\ a'^2 + (16 - a')^2 = 146 \end{cases}$$

$$a'^2 + (16 - a')^2 = 146 \Rightarrow 2a'^2 - 32a' + 256 = 146 \Rightarrow 2a'^2 - 32a' + 110 = 0$$

$$\Rightarrow a'^2 - 16a' + 55 = 0 ; \Delta' = 9 ; a' = 5 \vee a' = 11$$

$$(a', b') \in \{(5, 11); (11, 5)\} \Rightarrow (a, b) \in \{(10, 22); (22, 10)\}$$

التمرين 21 :

$$1) \ 3^0 \equiv 1[10] ; 3^1 \equiv 3[10] ; 3^2 \equiv 9[10] ; 3^3 \equiv 7[10] ; 3^4 \equiv 1[10]$$

$$3^{4k} \equiv 1[10] ; 3^{4k+1} \equiv 3[10] ; 3^{4k+2} \equiv 9[10] ; 3^{4k+3} \equiv 7[10]$$

$$2) 63 \equiv 3[10] ; 9 \equiv -1[10] \Rightarrow 9^{2002} \equiv 1[10] ; 7 \equiv -3[10] \Rightarrow 7^{1422} \equiv 3^{4(355)+2}[10] \Rightarrow 7^{1422} \equiv 9[10]$$

$$\underbrace{63}_{\equiv 3[10]} \times \underbrace{9^{2002}}_{\equiv 1[10]} - \underbrace{7^{1422}}_{\equiv 9[10]} \equiv -6[10] \Rightarrow 63 \times 9^{2002} - 7^{1422} \equiv 4[10]$$

$$3) 3n \times 9^n = 3n \times 3^{2n} = 3^{2n+1} \times n ; 7 \equiv -3[10] \Rightarrow 7^{2n+1} \equiv -3^{2n+1}[10]$$

$$3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 3^{2n+1} \times n - 3^{2n+1}[10] \Rightarrow 3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv (n-1) \times 3^{2n+1}[10]$$

$$4) 3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0[10] \Rightarrow (n-1) \times 3^{2n+1} \equiv 0[10]$$

بما أن العدد $1 + 2n$ فردي ، فإن $[10] 3^{2n+1} \equiv 7[10]$ أو $3^{2n+1} \equiv 3[10]$ ، نستنتج أن الموافقة السابقة تتحقق لـ $n \equiv 1[10]$ أي

التمرين 22 :

$$1) 4^0 \equiv 1[11] ; 4^1 \equiv 4[11] ; 4^2 \equiv 5[11] ; 4^3 \equiv 9[11] ; 4^4 \equiv 3[11] ; 4^5 \equiv 1[11]$$

$$4^{5k} \equiv 1[11] ; 4^{5k+1} \equiv 4[11] ; 4^{5k+2} \equiv 5[11] ; 4^{5k+3} \equiv 9[11] ; 4^{5k+4} \equiv 3[11]$$

$$2) 15 \equiv 4[11] \Rightarrow 15^{5n+1} \equiv 4^{5n+1}[11] \Rightarrow 15^{5n+1} \equiv 4[11]$$

$$26 \equiv 4[11] \Rightarrow 26^{5n+2} \equiv 4^{5n+2}[11] \Rightarrow 26^{5n+2} \equiv 5[11] \Rightarrow 2 \times 26^{5n+2} \equiv 10[11]$$

$$125 \equiv 4[11] \Rightarrow 125^{5n+3} \equiv 4^{5n+3}[11] \Rightarrow 125^{5n+3} \equiv 9[11] \Rightarrow 3 \times 125^{5n+3} \equiv 5[11]$$

$$k = 15^{5n+1} - 2 \times 26^{5n+2} + 3 \times 125^{5n+3} + 1 \Rightarrow k \equiv 4 - 10 + 5 + 1[11] \Rightarrow k \equiv 0[11]$$

$$3) 15^{5n+1} + 26^{5n+2} + 3n \equiv 0[11] \Rightarrow 4 + 5 + 3n \equiv 0[11] \Rightarrow 3n + 9 \equiv 0[11] \Rightarrow 3n \equiv 2[11]$$

$$\Rightarrow 3n \equiv 24[11] \Rightarrow n \equiv 8[11] \Rightarrow n = 11k + 8$$

$$8 \leq n \leq 50 \Rightarrow 8 \leq 11k + 8 \leq 50 \Rightarrow 0 \leq 11k \leq 42 \Rightarrow 0 \leq k \leq 3,8 \Rightarrow k \in \{0; 1; 2; 3\}$$

$$\Rightarrow n \in \{8; 19; 30; 41\}$$

التمرين 23 :

$$1) 2688 = 2^7 \times 3 \times 7 ; 3024 = 2^4 \times 3^3 \times 7 ; PGCD(2688; 3024) = 2^4 \times 3 \times 7 = 336$$

$$2) \text{أ) } 2688x + 3024y = -3360 \dots (1) \Rightarrow 8x + 9y = -10 \dots (2) \quad (\text{بعد القسمة على 336})$$

$$\text{ب) } 8(1) + 9(-2) = -10 \Rightarrow \text{ حل خاص للمعادلة (2)} \quad (1; -2)$$

$$3) (P) : x + 2y - z = -2 ; (P') : 3x - y + 5z = 0$$

$$\text{أ. } \vec{n}(1; 2; -1) ; \vec{n'}(3; -1; 5) ; \frac{1}{3} \neq \frac{2}{-1} \Rightarrow \vec{n} \nparallel \vec{n'} \Rightarrow (P) \cap (P') = (d)$$

$$\text{ب. } M(x; y; z) \in (d) \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ 3x - y + 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 10y - 5z = -10 \\ 3x - y + 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow 8x + 9y = -10$$

نستنتج أن إحداثيات نقط (d) تحقق المعادلة (2)

$$\begin{cases} 8x + 9y = -10 \\ 8(1) + 9(-2) = -10 \end{cases} \Rightarrow 8(x-1) + 9(y+2) = 0 \Rightarrow 8(x-1) = 9(-y-2)$$

$$\begin{cases} 9/8(x-1) \\ PGCD(8; 9) = 1 \end{cases} \Rightarrow 9/(x-1) \Rightarrow x-1 = 9k \Rightarrow x = 9k+1 ; k \in \mathbb{Z}$$

$$8(9k) = 9(-y-2) \Rightarrow -y-2 = 8k \Rightarrow y = -8k-2 ; k \in \mathbb{Z}$$

نستنتج أنّ مجموعة نقط (d) التي إحداثياتها أعداد صحيحة هي : $\{(k; z) \in \mathbb{Z}^2 \mid (k; z) = M(9k+1; -8k-2; z)\}$ حيث

التمرين 24 :

$$1) PGCD(a; b) = d ; PGCD(x; y) = d'$$

$$\begin{cases} d/a \Rightarrow d/2a+3b \\ d/b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/x \Rightarrow d/d' \\ d/y \end{cases}$$

$$\begin{cases} d'/x \Rightarrow d'/2a+3b \\ d'/y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d'/3(2a+3b)-2(3a+4b) \\ d'/3(3a+4b)-4(2a+3b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d'/a \Rightarrow d'/d \\ d'/b \end{cases}$$

$$d/d' \text{ و } d'/d \Rightarrow d = d'$$

$$d = 1 \Rightarrow d' = 1$$

$$2) x = 2\alpha + 3\beta ; y = 3\alpha + 4\beta ; PGCD(x; y) = PGCD(\alpha; \beta) = 5 ; x = 5x'; y = 5y'; PGCD(x'; y') = 1$$

$$\begin{cases} xy = 2200 \\ d = 5 \end{cases} \Rightarrow 25x'y' = 2200 \Rightarrow x'y' = 88 \Rightarrow (x', y') \in \{(1, 88); (8, 11)\}$$

$$\Rightarrow (x, y) \in \{(5, 440); (40, 55)\}$$

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 5 \\ 3\alpha + 4\beta = 440 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1300 \\ \beta = -865 \end{cases} \quad (\text{مُرفوض لأن العدد } \beta \text{ طبيعي})$$

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 40 \\ 3\alpha + 4\beta = 55 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = 10 \end{cases} \Rightarrow (\alpha; \beta) = (5; 10)$$

التمرين 25 :

$$1) a = \overline{2310}_n = 2n^3 + 3n^2 + n ; b = \overline{252}_n = 2n^2 + 5n + 2$$

$$2n^3 + 3n^2 + n = (2n+1)(n^2+n) \Rightarrow (2n+1)/a$$

$$2n^2 + 5n + 2 = (2n+1)(n+2) \Rightarrow (2n+1)/b$$

$$d = PGCD(a; b) = (2n+1) \times \underbrace{PGCD(n^2+n; n+2)}_{d'}$$

$$n^2 + n = (n+2)(n-1) + 2 \Rightarrow d' = PGCD(n+2; 2) \Rightarrow d' = 1 \vee d' = 2$$

$$d = (2n+1) \times d' \Rightarrow d = 2n+1 \vee d = 2(2n+1)$$

$$2) n = 6 : a = 546 ; b = 104 ; d = 26$$

نلاحظ أنَّ الثانية (5; -1) حلٌ خاصٌ للمعادلة؛

$$\begin{cases} 21x + 4y = -1 \\ 21(-1) + 4(5) = -1 \end{cases} \Rightarrow 21(x+1) + 4(y-5) = 0 \Rightarrow 21(x+1) = 4(-y+5)$$

$$\begin{cases} 4/21(x+1) \\ PGCD(4; 21) = 1 \end{cases} \Rightarrow 4/(x+1) \Rightarrow x+1 = 4k \Rightarrow x = 4k-1 ; k \in \mathbb{Z}$$

$$21(4k) = 4(-y+5) \Rightarrow -y+5 = 21k \Rightarrow y = -21k+5 ; k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{(4k-1; -21k+5) ; k \in \mathbb{Z}\}$$

التمرين 26 :

1)

أ. $6^{10} = (6^2)^5 = 36^5 ; 36 \equiv 3[11] \Rightarrow 36^5 \equiv 3^5[11] ; 3^5 = 243 \Rightarrow 3^5 \equiv 1[11] \Rightarrow 6^{10} \equiv 1[11]$

ب. $6 \equiv 1[5] \Rightarrow 6^4 \equiv 1[5]$

ج. $6^{10} \equiv 1[11] \Rightarrow (6^{10})^4 \equiv 1[11] \Rightarrow 6^{40} \equiv 1[11] ; 6^4 \equiv 1[5] \Rightarrow (6^4)^{10} \equiv 1[5] \Rightarrow 6^{40} \equiv 1[5]$

د. $\begin{cases} 6^{40} \equiv 1[11] \\ 6^{40} \equiv 1[5] \end{cases} \Rightarrow 6^{40} \equiv 1[55] \Rightarrow 6^{40} - 1 \equiv 0[55] (PGCD(11,5) = 1)$

2)

أ. $65x - 40y = 1 \dots (E) ; PGCD(65,40) = 5 ; 1 \nmid 5 ; S = \emptyset$

المعادلة تقبل على الأقل حلاً

ج. $40 = 17 \times 2 + 6 ; 6 = 40 - 17 \times 2$

$$17 = 6 \times 2 + 5 ; 5 = 17 - 6 \times 2$$

$$6 = 5 + 1 ; 1 = 6 - 5$$

$$\begin{aligned} 1 &= 6 - 5 = 6 - (17 - 6 \times 2) = 17(-1) + 6(3) = 17(-1) + 3(40 - 17 \times 2) \\ &\quad = 17(-7) - 40(-3) \Rightarrow (x_0, y_0) = (-7, -3) \end{aligned}$$

د. $\begin{cases} 17x - 40y = 1 \\ 17(-7) - 40(-3) = 1 \end{cases} \Rightarrow 17(x+7) - 40(y+3) = 0 \Rightarrow 17(x+7) = 40(y+3)$

$$\begin{cases} 40/17(x+7) \\ PGCD(40; 17) = 1 \end{cases} \Rightarrow 40/(x+7) \Rightarrow x+7 = 40k \Rightarrow x = 40k-7 ; k \in \mathbb{Z}$$

$$17(40k) = 40(y+3) \Rightarrow y+3 = 17k \Rightarrow y = 17k-3 ; k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{(40k-7; 17k-3) ; k \in \mathbb{Z}\}$$

$$17x_0 \equiv 1[40] \Rightarrow 17x_0 = 40\alpha + 1 \Rightarrow 17x_0 - 40\alpha = 1 \Rightarrow x_0 = 40k - 7$$

$$0 \leq x_0 \leq 40 \Rightarrow 0 \leq 40k - 7 \leq 40 \Rightarrow 7 \leq 40k \leq 47 \Rightarrow 0,175 \leq k \leq 1,175 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow x_0 = 33$$

$$\begin{aligned} 3) \begin{cases} a^{17} \equiv b[55] \\ a^{40} \equiv 1[55] \end{cases} &\Rightarrow b^{33} \equiv (a^{17})^{33}[55] \Rightarrow b^{33} \equiv a^{561}[55] \Rightarrow b^{33} \equiv a^{560} \times a[55] \\ &\Rightarrow b^{33} \equiv (a^{40})^{14} \times a[55] \Rightarrow b^{33} \equiv a[55] \end{aligned}$$

التمرين 27 :

1) $3^0 \equiv 1[11] ; 3^1 \equiv 3[11] ; 3^2 \equiv 9[11] ; 3^3 \equiv 5[11] ; 3^4 \equiv 4[11] ; 3^5 \equiv 1[11]$

$$3^{5k} \equiv 1[11] ; 3^{5k+1} \equiv 3[11] ; 3^{5k+2} \equiv 9[11] ; 3^{5k+3} \equiv 5[11] ; 3^{5k+4} \equiv 4[11]$$

$$2) 69 \equiv 3[11] \Rightarrow 69^{10n+6} \equiv 3^{10n+6}[11] \Rightarrow 69^{10n+6} \equiv 3^{5(2n+1)+1}[11] \Rightarrow 69^{10n+6} \equiv 3[11]$$

$$\Rightarrow 4 \times 69^{10n+6} \equiv 1[11]$$

$$58 \equiv 3[11] \Rightarrow 58^{20n+13} \equiv 3^{20n+13}[11] \Rightarrow 58^{20n+13} \equiv 3^{5(4n+2)+3}[11] \Rightarrow 58^{20n+13} \equiv 5[11]$$

$$\Rightarrow 7 \times 58^{20n+13} \equiv 2[11]$$

$$4 \times 69^{10n+6} + 7 \times 58^{20n+13} - 8 \equiv 1 + 2 - 8[11] \Rightarrow 4 \times 69^{10n+6} + 7 \times 58^{20n+13} - 8 \equiv 6[11]$$

$$3) 36 \equiv 3[11] \Rightarrow 36^{5n} \equiv 3^{5n}[11] \Rightarrow 36^{5n} \equiv 1[11] \Rightarrow 36^{5n} \times n \equiv n[11]$$

$$14 \equiv 3[11] \Rightarrow 14^{5n+3} \equiv 3^{5n+3}[11] \Rightarrow 14^{5n+3} \equiv 5[11]$$

$$n^2 + 36^{5n} \times n + 14^{5n+3} + 5 \equiv 0[11] \Rightarrow n^2 + n + 10 \equiv 0[11]$$

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	[11]
$n^2 \equiv$	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1	[11]
$n^2 + n + 10 \equiv$	10	1	5	0	8	7	8	0	5	1	10	[11]

$$n^2 + n + 10 \equiv 0[11] \Rightarrow n \equiv 3[11] \text{ or } n \equiv 7[11] \Rightarrow n = 11k + 3 \text{ or } n = 11k + 7 ; k \in \mathbb{Z}$$

$$4) 80 \equiv 3[11] \Rightarrow 80^{3n+2} \equiv 3^{3n+2}[11] ; 91 \equiv 3[11] \Rightarrow 91^{3n+1} \equiv 3^{3n+1}[11]$$

$$80^{3n+2} \times \beta + 91^{3n+1} \equiv 0[11] \Rightarrow 3^{3n+2} \times \beta + 3^{3n+1} \equiv 0[11] \Rightarrow 3^{3n+1}(3\beta + 1) \equiv 0[11]$$

$$\Rightarrow 3\beta + 1 \equiv 0[11] \Rightarrow 3\beta \equiv 10[11] \Rightarrow \beta \equiv 7[11] \Rightarrow \beta = 11k + 7 ; k \in \mathbb{Z}$$

$$|\beta| \leq 20 \Rightarrow -20 \leq \beta \leq 20 \Rightarrow -20 \leq 11k + 7 \leq 20 \Rightarrow -27 \leq 11k \leq 13 \Rightarrow -2,45 \leq k \leq 1,18$$

$$\Rightarrow k \in \{-2; -1; 0; 1\} \Rightarrow \beta \in \{-15; -4; 7; 18\}$$

$$5) 14 \equiv 3[11] \Rightarrow 14^x \equiv 3^x[11] ; 25 \equiv 3[11] \Rightarrow 25^y \equiv 3^y[11]$$

	$x =$	$5k$	$5k + 1$	$5k + 2$	$5k + 3$	$5k + 4$
$y =$	$\begin{matrix} 3^x \equiv \\ 3^y \equiv \end{matrix}$	1	3	9	5	4
$5k'$	1	2	4	10	6	5
$5k' + 1$	3	4	6	1	8	7
$5k' + 2$	9	10	1	7	3	2
$5k' + 3$	5	6	8	3	10	9
$5k' + 4$	4	5	1	2	9	8

$$3^x + 3^y \equiv 8[11] \Rightarrow (x, y) \in \{(5k + 1; 5k' + 3), (5k + 3; 5k' + 1), (5k + 4; 5k' + 4)\} ; (k, k') \in \mathbb{N}^2$$

التمرين 28 :

$$1) \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 3(1) - 2(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow 3(x - 1) - 2(y - 1) = 0 \Rightarrow 3(x - 1) = 2(y - 1)$$

$$\begin{cases} 2/3(x - 1) \\ PGCD(2; 3) = 1 \end{cases} \Rightarrow 2/(x - 1) \Rightarrow x - 1 = 2k \Rightarrow x = 2k + 1 ; k \in \mathbb{Z}$$

$$3(2k) = 2(y - 1) \Rightarrow y - 1 = 3k \Rightarrow y = 3k + 1 ; k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{(2k + 1; 3k + 1)\} ; k \in \mathbb{Z}$$

2)

- أ. $3(14n + 3) - 2(21n + 4) = 42n + 9 - 42n - 8 = 1 \Rightarrow (14n + 3; 21n + 4) \in S$
 ب. $3(14n + 3) - 2(21n + 4) = 1 \Rightarrow PGCD(14n + 3; 21n + 4) = 1$ (بizzo)

3) $d = PGCD(2n + 1; 21n + 4)$

أ. $\begin{cases} d \mid 2n + 1 \\ d \mid 21n + 4 \end{cases} \Rightarrow d \mid 21(2n + 1) - 2(21n + 4) \Rightarrow d \mid 13 \Rightarrow d = 1 \text{ أو } d = 13$
 ب. $d = 13 \Rightarrow \begin{cases} 2n + 1 \equiv 0[13] \\ 21n + 4 \equiv 0[13] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n \equiv 12[13] \\ 8n \equiv 9[13] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n \equiv 12[13] \\ 8n \equiv 48[13] \end{cases} \Rightarrow n \equiv 6[13]$

4) $A = 21n^2 - 17n - 4 ; B = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$

- أ. $21n^2 - 17n - 4 = (n - 1)(21n + 4) ; 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3 = (n - 1)(28n^2 + 20n + 3)$
 ب. $PGCD(A; B) = (n - 1) \times PGCD(21n + 4; 28n^2 + 20n + 3)$

$$PGCD(A; B) = (n - 1) \times PGCD(21n + 4; (14n + 3)(2n + 1))$$

بما أن العدين $4 + 21n$ و $3 + 14n$ أوليان فيما بينهما ، فإن :

$$PGCD(A; B) = (n - 1) \times PGCD(21n + 4; 2n + 1)$$

و منه نستنتج أن:

- $n = 13k + 6 : PGCD(21n + 4; 2n + 1) = 13 \Rightarrow PGCD(A; B) = 13(n - 1)$
- $n \neq 13k + 6 : PGCD(21n + 4; 2n + 1) = 1 \Rightarrow PGCD(A; B) = n - 1$

التمرين 29 :

1) $11n - 24m = 1 \dots (1)$

أ. المعادلة تقبل على الأقل حلًا $\Rightarrow PGCD(11, 24) = 1$
 ب. $\begin{cases} 11n - 24m = 1 \\ 11(11) - 24(5) = 1 \end{cases} \Rightarrow 11(n - 11) - 24(m - 5) = 0 \Rightarrow 11(n - 11) = 24(m - 5)$

$$\begin{cases} 24 \mid 11(n - 11) \\ PGCD(24; 11) = 1 \end{cases} \Rightarrow 24 \mid (n - 11) \Rightarrow n - 11 = 24k \Rightarrow n = 24k + 11 ; k \in \mathbb{Z}$$

$$11(24k) = 24(m - 5) \Rightarrow m - 5 = 11k \Rightarrow m = 11k + 5 ; k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{(24k + 11; 11k + 5)\} ; k \in \mathbb{Z}$$

2)

أ. $10 \equiv 1[9] \Rightarrow 10^{11} \equiv 1[9] \Rightarrow 10^{11} - 1 \equiv 0[9] \Rightarrow 9 \mid 10^{11} - 1$
 $10 \equiv 1[9] \Rightarrow 10^{24} \equiv 1[9] \Rightarrow 10^{24} - 1 \equiv 0[9] \Rightarrow 9 \mid 10^{24} - 1$
 ب. $(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = (10^{11(24k+11)} - 1) - 10(10^{24(11k+5)} - 1)$
 $= 10^{264k+121} - 1 - 10^{264k+121} + 10 = 9$

طريقة ثانية :

$$11n - 24m = 1 \Rightarrow 11n = 24m + 1 \Rightarrow (10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 10^{11n} - 10^{24m+1} + 9 = 9$$

$$\begin{aligned} \text{ج. } 10^{11n} - 1 &= (10^{11})^n - 1 = (10^{11} - 1)(10^{11(n-1)} + 10^{11(n-2)} + \dots + 10^{11} + 1) \Rightarrow 10^{11} - 1 \mid 10^{11n} - 1 \\ 10^{24m} - 1 &= (10^{24})^m - 1 = (10^{24} - 1)(10^{24(m-1)} + 10^{24(m-2)} + \dots + 10^{24} + 1) \Rightarrow 10^{24} - 1 \mid 10^{24m} - 1 \\ (10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) &= 9 \Rightarrow (10^{11} - 1)(10^{11(n-1)} + \dots + 1) - 10(10^{24} - 1)(10^{24(m-1)} + \dots + 1) = 9 \\ \Rightarrow N &= (10^{11(n-1)} + 10^{11(n-2)} + \dots + 10^{11} + 1), M = (10^{24(m-1)} + 10^{24(m-2)} + \dots + 10^{24} + 1) \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} d \mid 10^{11} - 1 \\ d \mid 10^{24} - 1 \end{cases} \Rightarrow d \mid (10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M \Rightarrow d \mid 9$$

$$\therefore \begin{cases} d \mid 9 \\ 9 \mid 10^{11} - 1 \Rightarrow PGCD(10^{11} - 1; 10^{24} - 1) = 9 \\ 9 \mid 10^{24} - 1 \end{cases}$$

التمرين 30 :

$$1) PGCD(x, y) = d \Rightarrow x = dx'; y = dy'; PGCD(x', y') = 1$$

$$PPCM(x, y) = m \Rightarrow m \cdot d = x \cdot y \Rightarrow m \cdot d = d^2 \cdot x' \cdot y' \Rightarrow m = d \cdot x' \cdot y' \Rightarrow m^2 = d^2 \cdot x'^2 \cdot y'^2$$

$$m^2 - 5d^2 = 2000 \Rightarrow d^2 \cdot x'^2 \cdot y'^2 - 5d^2 = 2000 \Rightarrow d^2(x'^2 \cdot y'^2 - 5) = 2000 \Rightarrow d^2 \mid 2000$$

القواسم المربعة التامة للعدد 2000 هي : $2^4 \times 5^3 = 20 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1$

$$3) m^2 - 5d^2 = 2000 \Rightarrow m^2 = 5d^2 + 2000$$

$$5 \mid 5d^2 + 2000 \Rightarrow 5 \mid m^2 \Rightarrow 5 \mid m \quad (\text{لأن } 5 \text{ عدد أولي}) \Rightarrow m = 5k$$

$$5d^2 = m^2 - 2000 = (5k)^2 - 2000 = 5(5k^2 - 400) \Rightarrow d^2 = 5k^2 - 400 = 5(k^2 - 80) \Rightarrow 5 \mid d^2 \Rightarrow 5 \mid d$$

$$\begin{cases} 5 \mid d \\ d^2 \mid 2000 \end{cases} \Rightarrow d \in \{5; 10; 20\}$$

4) $d = 5 : m^2 = 5(5)^2 + 2000 = 2125$ (مفترض لأن العدد 2125 ليس مربع تام)

$$d = 10 : m^2 = 5(10)^2 + 2000 = 2500 \Rightarrow m = 50$$

(مفترض لأن العدد 4000 ليس مربع تام)

$$m = d \cdot x' \cdot y' \Rightarrow x' \cdot y' = \frac{m}{d} = 5 \Rightarrow (x', y') = (1, 5) \Rightarrow (x, y) = (10, 50)$$

التمرين 31 :

$$1) 2006 = 2 \times 17 \times 59$$

$$16x + 59y = 2006 \Rightarrow 16x = 2006 - 59y = 59(34 - y)$$

$$\begin{cases} 59 \mid 16x \\ PGCD(59; 16) = 1 \end{cases} \Rightarrow 59 \mid x \Rightarrow x = 59k ; k \in \mathbb{Z}$$

$$2) 16x = 59(34 - y) \Rightarrow 16(59k) = 59(34 - y) \Rightarrow 34 - y = 16k \Rightarrow y = -16k + 34 ; k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{(59k; -16k + 34) ; k \in \mathbb{Z}\}$$

$$3) \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 59k > 0 \\ -16k + 34 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k > 0 \\ k < \frac{34}{16} \end{cases} \Rightarrow 0 < k < 2,125 \Rightarrow k \in \{1; 2\} \Rightarrow (x, y) \in \{(59, 18); (118, 2)\}$$

$$4) 16m + 59d = 2006 \Rightarrow \begin{cases} m = 59 \\ d = 18 \end{cases} \text{ أو } (59 \text{ لا يقسم 18}) \quad \begin{cases} m = 118 \\ d = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 118 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow a \cdot b = m \cdot d = 236 \Rightarrow d^2 \cdot a' \cdot b' = 236 \Rightarrow a' \cdot b' = \frac{236}{4} = 59 \Rightarrow (a', b') \in \{(59, 1); (1, 59)\} \\ \Rightarrow (a, b) \in \{(118, 2); (2, 118)\}$$

التمرين 32 :

$$1) 3^0 \equiv 1[7]; 3^1 \equiv 3[7]; 3^2 \equiv 2[7]; 3^3 \equiv 6[7]; 3^4 \equiv 4[7]; 3^5 \equiv 5[7]; 3^6 \equiv 1[7]$$

$$3^{6k} \equiv 1[7]; 3^{6k+1} \equiv 3[7]; 3^{6k+2} \equiv 2[7]; 3^{6k+3} \equiv 6[7]; 3^{6k+4} \equiv 4[7]; 3^{6k+5} \equiv 5[7]$$

$$4^0 \equiv 1[7]; 4^1 \equiv 4[7]; 4^2 \equiv 2[7]; 4^3 \equiv 1[7] \Rightarrow 4^{3k} \equiv 1[7]; 4^{3k+1} \equiv 4[7]; 4^{3k+2} \equiv 2[7]$$

$$2) 2006 \equiv 4[7]; 2006^{3n+2} \equiv 4^{3n+2}[7] \Rightarrow 2 \times 2006^{3n+2} \equiv 4[7]$$

$$1424 \equiv 3[7]; 1424^{6n+1} \equiv 3^{6n+1}[7] \Rightarrow 1424^{6n+1} \equiv 3[7] \Rightarrow 2 \times 2006^{3n+2} + 1424^{6n+1} \equiv 0[7]$$

$$3) u_n = 2 \times 3^n + 3 \times 4^n$$

$$\begin{aligned} \text{أ. } S_n &= u_0 + \dots + u_n = (2 + 2 \times 3 + 2 \times 3^2 + \dots + 2 \times 3^n) + (3 + 3 \times 4 + 3 \times 4^2 + \dots + 3 \times 4^n) \\ S_n &= 2(1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n) + 3(1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^n) = 2 \left(\frac{3^{n+1} - 1}{2} \right) + 3 \left(\frac{4^{n+1} - 1}{3} \right) \\ S_n &= 3^{n+1} + 4^{n+1} - 2 \end{aligned}$$

$$\text{ب. } S_n \equiv 0[7] \Rightarrow 3^{n+1} + 4^{n+1} - 2 \equiv 0[7] \Rightarrow 3^{n+1} + 4^{n+1} \equiv 2[7]$$

$n+1 =$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	
$3^{n+1} \equiv$	1	3	2	6	4	5	[7]
$4^{n+1} \equiv$	1	4	2	1	4	2	[7]
$3^{n+1} + 4^{n+1} \equiv$	2	0	4	0	1	0	[7]

$$3^{n+1} + 4^{n+1} \equiv 2[7] \Rightarrow n+1 = 6k \Rightarrow n = 6k-1; k \in \mathbb{N}^*$$

التمرين 33 :

$$1) 91x + 10y = 1 \dots (1); 91x + 10y = 412 \dots (2)$$

$$\text{أ. } 91(1) + 10(-9) = 1 \Rightarrow (1) \text{ حل خاص للمعادلة } (-9, 1)$$

$$91(412) + 10(-3708) = 412 \Rightarrow (412, -3708) \text{ حل خاص للمعادلة } (2)$$

$$\text{ب. } \begin{cases} 91x + 10y = 412 \\ 91(412) + 10(-3708) = 412 \end{cases} \Rightarrow 91(x - 412) + 10(y + 3708) = 0 \Rightarrow 91(x - 412) = 10(-y - 3708)$$

$$\begin{cases} 10 | 91(x - 412) \\ PGCD(10; 91) = 1 \end{cases} \Rightarrow 10 | (x - 412) \Rightarrow x - 412 = 10k \Rightarrow x = 10k + 412; k \in \mathbb{Z}$$

$$91(10k) = 10(-y - 3708) \Rightarrow -y - 3708 = 91k \Rightarrow y = -91k - 3708; k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{(10k + 412; -91k - 3708)\}; k \in \mathbb{Z}$$

$$2) A_n = 3^{2n} - 1 = 9^n - 1 ; 9 \equiv 1[8] \Rightarrow 9^n \equiv 1[8] \Rightarrow 9^n - 1 \equiv 0[8] \Rightarrow A_n \equiv 0[8]$$

$$3) A_3x + A_2y = 3296 \Rightarrow 728x + 80y = 3296 \Rightarrow 91x + 10y = 412 \Rightarrow S = \{(10k + 412; -91k - 3708) ; k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\begin{cases} \alpha \geq 0 \\ \beta \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10k + 412 \geq 0 \\ -91k - 3708 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \geq -41,2 \\ k \leq -40,7 \end{cases} \Rightarrow k = -41 \Rightarrow (\alpha, \beta) = (2, 23)$$

$$(\alpha + \beta)A_2 + 10 = 25 \times 80 + 10 = 2010$$

التمرين 34 :

$$1) 9^0 \equiv 1[11] ; 9^1 \equiv 9[11] ; 9^2 \equiv 4[11] ; 9^3 \equiv 3[11] ; 9^4 \equiv 5[11] ; 9^5 \equiv 1[11]$$

$$9^{5k} \equiv 1[11] ; 9^{5k+1} \equiv 9[11] ; 9^{5k+2} \equiv 4[11] ; 9^{5k+3} \equiv 3[11] ; 9^{5k+4} \equiv 5[11]$$

$$2) 1431 \equiv 1[11] \Rightarrow 1431^n \equiv 1[11] ; 1993 \equiv -9[11] \Rightarrow 1993^{10n} \equiv 9^{5(2n)}[11] \Rightarrow 1993^{10n} \equiv 1[11]$$

$$2011 \equiv 9[11] \Rightarrow 2011^{5n+1} \equiv 9^{5n+1}[11] \Rightarrow 2011^{5n+1} \equiv 9[11]$$

$$1431^n + 1993^{10n} + 2011^{5n+1} \equiv 0[11]$$

$$3) \begin{cases} 1431^n + 5n + 2011^{5n+1} \equiv 0[11] \\ 90 < n < 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5n + 10 \equiv 0[11] \\ 90 < n < 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5n \equiv 1[11] \\ 90 < n < 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \equiv 9[11] \\ 90 < n < 100 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = 11k + 9 \\ 90 < n < 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 11k + 9 \\ 90 < 11k + 9 < 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 11k + 9 \\ 7,36 < k < 8,27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 11k + 9 \\ k = 8 \end{cases} \Rightarrow n = 97$$

التمرين 35 :

$$1) B(1; 3; 5) ; \vec{n}(-2; 1; 1) ; (Q): x - 2y + 4z - 9 = 0$$

$$\vec{n}(-2; 1; 1) ; \vec{n}'(1; -2; 4) ; \vec{n} \cdot \vec{n}' = -2 - 2 + 4 = 0 \Rightarrow (P) \perp (Q)$$

$$2) d(B; (\Delta)) = d(B; (Q)) = \frac{|1 - 2(3) + 4(5) - 9|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \frac{6}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{7}$$

$$3) M(x; y; z) \in (P) \Rightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow -2(x - 1) + (y - 3) + (z - 5) = 0 \Rightarrow -2x + y + z - 6 = 0$$

$$4) (\Delta): \begin{cases} x = 2k - 5 \\ y = 3k - 5 ; k \in \mathbb{R} \\ z = k + 1 \end{cases} ; A(-9; -4; -1)$$

$$\text{أ. } -2(-9) - 4 - 1 - 6 = 7 \Rightarrow A \notin (P) ; -9 - 2(-4) + 4(-1) - 9 = -14 \Rightarrow A \notin (Q)$$

$$\text{بـ. } AM^2 = (2k - 5 + 9)^2 + (3k - 5 + 4)^2 + (k + 1 + 1)^2 = (2k + 4)^2 + (3k - 1)^2 + (k + 2)^2 \\ = 4k^2 + 16k + 16 + 9k^2 - 6k + 1 + k^2 + 4k + 4 = 14k^2 + 14k + 21 = 7(2k^2 + 2k + 3)$$

$$\text{جـ. } f(k) = 2k^2 + 2k + 3$$

- $f'(k) = 4k + 2 = 2(2k + 1)$

$k < -\frac{1}{2} : f'(k) < 0 \Rightarrow f(k) \text{ متناقصة} ; k \geq -\frac{1}{2} : f'(k) \geq 0 \Rightarrow f(k) \text{ متزايدة}$

- $AM \Rightarrow f'(k) = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{2} \Rightarrow M\left(-6; -\frac{13}{2}; \frac{1}{2}\right)$

دـ. $PGCD(2k - 5; 3k - 5) = d$

- $d \mid 2k - 5$ و $d \mid 3k - 5 \Rightarrow d \mid 2(3k - 5) - 3(2k - 5) \Rightarrow d \mid 5$
- $d = 5 \Rightarrow \begin{cases} 2k - 5 \equiv 0[5] \\ 3k - 5 \equiv 0[5] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2k \equiv 0[5] \\ 3k \equiv 0[5] \end{cases} \Rightarrow k \equiv 0[5] \Rightarrow k = 5\alpha ; \alpha \in \mathbb{N}$

مجموعـة النقط M من المستقيم (Δ) التي تكون إحداثياتها أعدادا طبيعية هي : (1) $\alpha \in \mathbb{N}^*$ حيث $M(10\alpha - 5; 15\alpha - 5; 5\alpha + 1)$
أول حل طبيعي هو : $M_0(5; 10; 6)$

التمرين 36 :

$$\begin{cases} a = 5n + 3 \\ b = 2n + 1 \end{cases}; n \in \mathbb{N}$$

$$1) 2a - 5b = 1 \Rightarrow PGCD(a, b) = 1 \quad (\text{بيزو})$$

$$2) x = 5m + 3; y = 2m - 1; m \in \mathbb{N}$$

$$\text{أ. } 2x - 5y = 11$$

$$\text{ب. } PGCD(x, y) = d$$

$$\bullet \quad d \mid x \text{ و } d \mid y \Rightarrow d \mid 2x - 5y \Rightarrow d \mid 11 \Rightarrow d = 1 \text{ أو } d = 11$$

$$\bullet \quad d = 11 \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 0[11] \\ y \equiv 0[11] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5m + 3 \equiv 0[11] \\ 2m - 1 \equiv 0[11] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5m \equiv 8[11] \\ 2m \equiv 1[11] \end{cases} \Rightarrow m \equiv 6[11] \Rightarrow m = 11k + 6$$

$$\Rightarrow x = 5(11k + 6) + 3 = 55k + 33; y = 2(11k + 6) - 1 = 22k + 11; k \in \mathbb{N}$$

التمرين 37 :

$$1) 4 \equiv -1[5] \Rightarrow 4^{2n} \equiv 1[5]$$

$$2) 3^0 \equiv 1[5]; 3^1 \equiv 3[5]; 3^2 \equiv 4[5]; 3^3 \equiv 2[5]; 3^4 \equiv 1[5]$$

$$3^{4k} \equiv 1[5]; 3^{4k+1} \equiv 3[5]; 3^{4k+2} \equiv 4[5]; 3^{4k+3} \equiv 2[5]$$

$$3) 1428 \equiv 3[5] \Rightarrow 1428^{2009} \equiv 3^{2009}[5] \Rightarrow 1428^{2009} \equiv 3^{4(502)+1}[5] \Rightarrow 1428^{2009} \equiv 3[5]$$

$$4) A_n = 2 + 4^{2n} + 3^n$$

$$A_n \equiv 0[5] \Rightarrow 3^n + 3 \equiv 0[5] \Rightarrow 3^n \equiv 2[5] \Rightarrow n = 4k + 3; k \in \mathbb{N}$$

التمرين 38 :

$$1) 23x - 17y = 6$$

$$23(1) - 17(1) = 6 \Rightarrow 23(x - 1) - 17(y - 1) = 0 \Rightarrow 23(x - 1) = 17(y - 1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 17/23(x - 1) \\ PGCD(17; 23) = 1 \end{array} \right. \Rightarrow 17/(x - 1) \Rightarrow x - 1 = 17k \Rightarrow x = 17k + 1$$

$$23(x - 1) = 17(y - 1) \Rightarrow 23(17k) = 17(y - 1) \Rightarrow y - 1 = 23k \Rightarrow y = 23k + 1$$

$$S = \{(17k + 1; 23k + 1)\}; k \in \mathbb{Z}$$

$$2) A = 23x + 2 = 17y + 8 \Rightarrow 23x - 17y = 6 \Rightarrow (x; y) = (17k + 1; 23k + 1)$$

- $k = 0 : (x; y) = (1; 1); A = 25 = \overline{34}_7$
- $k = 1 : (x; y) = (18; 24); A = 416 = \overline{1133}_7$
- $k = 2 : (x; y) = (35; 47); A = 807 = \overline{2232}_7$

التمرين 39 :

$$1) 7^0 \equiv 1[10]; 7^1 \equiv 7[10]; 7^2 \equiv 9[10]; 7^3 \equiv 3[10]; 7^4 \equiv 1[10];$$

$$7^{4k} \equiv 1[10]; 7^{4k+1} \equiv 7[10]; 7^{4k+2} \equiv 9[10]; 7^{4k+3} \equiv 3[10]$$

$$7^{4k} + 7^{4k+1} + 7^{4k+2} + 7^{4k+3} \equiv 1 + 7 + 9 + 3[10] \Rightarrow 7^{4k} + 7^{4k+1} + 7^{4k+2} + 7^{4k+3} \equiv 0[10]$$

$$2) S_n = 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^n$$

- $S_{n+4} - S_n = 7^{n+1} + 7^{n+2} + 7^{n+3} + 7^{n+4} \Rightarrow S_{n+4} - S_n \equiv 0[10] \Rightarrow S_{n+4} \equiv S_n[10]$
- $S_n = 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^n$
 - ✓ $n = 4k : S_n \equiv 1[10]$
 - ✓ $n = 4k + 1 : S_n \equiv 8[10]$
 - ✓ $n = 4k + 2 : S_n \equiv 7[10]$
 - ✓ $n = 4k + 3 : S_n \equiv 0[10]$

التمرين 40 :

$$1) N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{12} = 10 + 12 + 11 \times 12^2 = 1606$$

$$2) N_2 = 1131 = 7 \times 12^2 + 10 \times 12 + 3 = \overline{7 \alpha 3}^{12}$$

$$3) \dot{N} = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}^{12} = a_0 + \underbrace{a_1 \times 12}_{\equiv 0[12]} + \dots + \underbrace{a_n \times 12^n}_{\equiv 0[12]} \Rightarrow N \equiv a_0[12]$$

$$\Rightarrow N = 12k + a_0 = 3(4k) + a_0 = 3k' + a_0 \Rightarrow N \equiv a_0[3]$$

نتيجة : يقبل عدد القسمة على 3 إذا كان رقم آحاده في النظام ذي الأساس 12 مضاعفاً لـ 3

$$N_2 = \overline{7 \alpha 3}^{12} \Rightarrow N_2 \equiv 3[3] \Rightarrow N_2 \equiv 0[3] (1131 = 3 \times 377)$$

$$\text{بـ)} 12 \equiv 1[11] \Rightarrow 12^p \equiv 1[11] \Rightarrow a_p 12^p \equiv a_p[11]$$

$$N = a_0 + a_1 \times 12 + \dots + a_n \times 12^n \Rightarrow N \equiv a_0 + a_1 + \dots + a_n[11]$$

نتيجة : يقبل عدد القسمة على 11 إذا كان مجموع أرقامه في النظام ذي الأساس 12 مضاعفاً لـ 11

$$N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{12}; \beta + 1 + \alpha = 11 + 1 + 10 = 22 = 2 \times 11 \Rightarrow N_1 \equiv 0[11] (1606 = 11 \times 146)$$

$$4) N = \overline{x 4 y}^{12}; N \equiv 0[33] \Rightarrow \begin{cases} N \equiv 0[3] \\ N \equiv 0[11] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \equiv 0[3] \\ x + y + 4 \equiv 0[11] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \in \{0; 3; 6; 9\} \\ x + y + 4 \equiv 0[11] \end{cases}$$

- $y = 0: x + 4 \equiv 0[11] \Rightarrow x \equiv 7[11] \Rightarrow x = 7 \Rightarrow (x; y) = (7; 0)$
- $y = 3: x + 7 \equiv 0[11] \Rightarrow x \equiv 4[11] \Rightarrow x = 4 \Rightarrow (x; y) = (4; 3)$
- $y = 6: x + 10 \equiv 0[11] \Rightarrow x \equiv 1[11] \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (x; y) = (1; 6)$
- $y = 9: x + 2 \equiv 0[11] \Rightarrow x \equiv 9[11] \Rightarrow x = 9 \Rightarrow (x; y) = (9; 9)$

$$8x + 5y = 1 \dots (E)$$

1) $8(2) + 5(-3) = 1 \Rightarrow (E)$ حل خاص للمعادلة $(2, -3)$ الثانية

$$8(x-2) + 5(y+3) = 0 \Rightarrow 8(x-2) = 5(-y-3)$$

$$\begin{cases} 5/8(x-2) \\ PGCD(5;8) = 1 \end{cases} \Rightarrow 5/(x-2) \Rightarrow x-2 = 5k \Rightarrow x = 5k+2$$

$$8(5k) = 5(-y-3) \Rightarrow -y-3 = 8k \Rightarrow y = -8k-3$$

$$S = \{(5k+2 ; -8k-3)\}; k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \begin{cases} N = 8a+1 \\ N = 5b+2 \end{cases}$$

أ. $8a = N-1 ; 5b = N-2 ; 8a-5b = N-1-N+2 = 1 \Rightarrow (E)$ حل للمعادلة $(a, -b)$ الثانية

$$\hookrightarrow a = 5k+2 \Rightarrow N = 8(5k+2)+1 = 40k+17 \Rightarrow N \equiv 17[40]$$

$$3) 8x + 5y = 100 ; 8(200) + 5(-300) = 100 \Rightarrow S = \{(5k+200 ; -8k-300)\}; k \in \mathbb{Z}$$

$$4) \begin{cases} 8x + 5y = 100 \\ x > 0, y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5k+200 > 0 \\ -8k-300 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k > -40 \\ k < -37,5 \end{cases} \Rightarrow k \in \{-38, -39\} \Rightarrow (x, y) \in \{(10, 4); (5, 12)\}$$

$$1) (2n+1) - 2(n) = 1 \Rightarrow PGCD(n, 2n+1) = 1 \text{ (بيزو)}$$

$$2) \alpha = n+3 ; \beta = 2n+1 ; PGCD(\alpha, \beta) = d$$

$$\text{أ. } d/\alpha \text{ و } d/\beta \Rightarrow d/2\alpha - \beta \Rightarrow d/5$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} \alpha \equiv 0[5] \\ \beta \equiv 0[5] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n+3 \equiv 0[5] \\ 2n+1 \equiv 0[5] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \equiv 2[5] \\ 2n \equiv 4[5] \end{cases} \Rightarrow n \equiv 2[5] \Rightarrow n-2 \equiv 0[5]$$

$$3) a = n^3 + 2n^2 - 3n = (n-1)(n^2 + 3n) ; b = 2n^2 - n - 1 = (n-1)(2n+1)$$

$$4) PGCD[n(n+3), (2n+1)] = d'$$

$$\text{أ. } d/n+3 \text{ و } d/2n+1 \Rightarrow d/n(n+3) \text{ و } d/2n+1 \Rightarrow d/PGCD[n(n+3), (2n+1)] \Rightarrow d/d'$$

$$d' | n(n+3) \text{ و } d' | 2n+1 \Rightarrow d' | n+3 \text{ و } d' | 2n+1 \Rightarrow d' | PGCD(n+3, 2n+1) \Rightarrow d' | d$$

$$d/d' \text{ و } d'/d \Rightarrow d = d'$$

$$\text{ب. } PGCD(a, b) = (n-1)PGCD[n(n+3), (2n+1)] = (n-1)d' = (n-1)d$$

- $n = 5k+2 : d = 5 \Rightarrow PGCD(a, b) = 5(n-1)$

- $n \neq 5k+2 : d = 1 \Rightarrow PGCD(a, b) = n-1$

$$\text{ج. } n = 2001 = 5(400) + 1 \Rightarrow PGCD(a, b) = 2001 - 1 = 2000$$

$$n = 2002 = 5(400) + 2 \Rightarrow PGCD(a, b) = 5(2002 - 1) = 5 \times 2001 = 10005$$