مذكرة رقم: 01

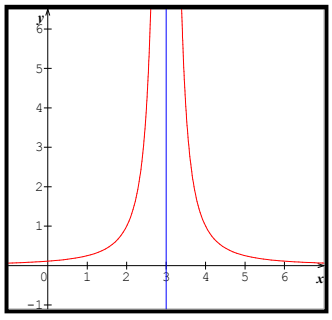
التاريخ: ربيع الثاني 1438هـ الموافق لـ جانفي 2017م	المحور رقم 06: النهايات السلوك التقاربي لمنحن.	المدة: 02 ساعة
القسم: 02ع تج+02تر+02ر	الموضوع: نهاية غير منتهية عند عدد حقيقي.	الأستاذ: بوعزة مصطفى

الكفاءات المستهدفة:

- حساب نهاية دالّة عند عدد حقيقي.
- معرفة شرط وجود مستقيم مقارب يُوازي أحد محوري المعلم.

المراحل	سير الدرس	المدة	الملاحظات

نهاية غير منتهية عند عدد حقيقي:



01. أمثلة:

مثال01: (معالجة النشاط 01 ص110)

الهدف: نهاية غير منتهية لدّالة عند عدد حقيقي.

الدّالة f معرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}$،

1. بعد حساب $f'(x)$ و دراسة إشارتها تشكيل جدول تغيرات الدالة f:

أ- حساب $f'(x)$:

تذكير: $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)'=\dfrac{-nu'}{u^{n+1}}$

f دّالة معرفة وقابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}-\{3\}$ ولدينا: $f'(x)=\dfrac{-2}{(x-3)^3}$.

ب- إشارة $f'(x)$:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
-2	$-$				$-$
$x-3$	$-$		0		$+$
$f'(x)$	$+$		‖		$-$

ج- جدول تغيّرات الدالة f:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		‖		$-$
$f(x)$	↗		‖		↘

2. إكمال، باستعمال آلة حاسبة، جدول القيم:

x	2,9	2,99	2,999	2,9999	3,0001	3,001	3,01	3,1
$f(x)$	10^2	10^4	10^6	10^8	10^8	10^6	10^4	10^2

3. الملاحظة: نلاحظ أنّه كلما إقترب x من 3 إلا وأخذ $f(x)$ قيما كبيرة جدا.

4 . تبيين أنه حتى يكون $f(x)\geq 10^{8}$ يكفي أن يكون x عنصرا من $]3-10^{-4};3[\cup]3;3+10^{-4}[$:

(أ)بفرض أنّ: $x\in]3-10^{-4};3[$ أي: $3-10^{-4}\leq x<3$

ومنه: $-10^{-4}\leq x-3<0$ وعليه: $(x-3)^{2}\leq 10^{-8}$

إذن: $f(x)\geq 10^{8}$.

(ب)بفرض أنّ: $x\in]3;3+10^{-4}]$ أي: $3<x\leq 3+10^{-4}$

ومنه: $0<x-3\leq 10^{-4}$ وعليه: $(x-3)^{2}\leq 10^{-8}$

إذن: $f(x)\geq 10^{8}$.

5 . تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A يكون $f(x)\geq A$ لما $x\in\left]3-\frac{1}{\sqrt{A}};3\right[\cup\left]3;3+\frac{1}{\sqrt{A}}\right]$:

إذا كان $3-\frac{1}{\sqrt{A}}\leq x\leq 3+\frac{1}{\sqrt{A}}$ مع $(x\neq 3)$ فإنّ: $-\frac{1}{\sqrt{A}}\leq x-3\leq\frac{1}{\sqrt{A}}$

أي: $|x-3|\leq\frac{1}{\sqrt{A}}$ ومنه: $(x-3)^{2}\leq\frac{1}{A}$

إذن: $\boxed{f(x)\geq A}$.

نتيجة:

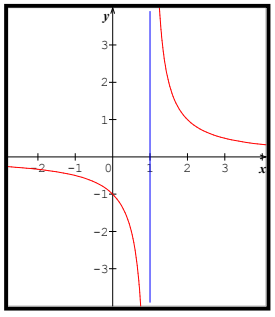
$f(x)$ تأخذ قيما كبيرة بالقدر الذي نُريد شريطة أن يأخذ x قيما قريبة من العدد 3 بالقدر الكافي.

نقول في هذه الحالة أنّ نهاية f هي $+\infty$ عند 3 (أولما يؤول x إلى3) ونكتب: $\boxed{\lim\limits_{x\to 3}f(x)=+\infty}$.

ملاحظة:

نلاحظ أن المنحنى الممثل للدالة f يقترب بالقدر الذي نُريد من المستقيم ذو المعادلة $x=3$.

نقول في هذه الحالة أنّ المستقيم ذو المعادلة $x=3$ هو مستقيم مقارب لمنحنى الدالة f .



مثال01: (معالجة النشاط 02 ص110)

الهدف:نهاية غير منتهية لدّالة عند عدد من اليمين(أو من اليسار) .

الدّالة g معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي: $g(x)=\frac{1}{x-1}$ ،

1 . بعد حساب $g'(x)$ و دراسة إشارتها تشكيل جدول تغيرات الدالة g :

أ-حساب $g'(x)$:

g دّالة معرفة وقابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}-\{1\}$ ولدينا: $g'(x)=\frac{-1}{(x-1)^{2}}<0$.

تذكير: $\left(\frac{1}{u}\right)'=\frac{-u'}{u^{2}}$.

ج-جدول تغيّرات الدالة g :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$	$-$		‖		$-$
$g(x)$	↘	$+\infty$	‖	$-\infty$	↘

2. إكمال، باستعمال آلة حاسبة، جدولي القيم:

x	0,9	0,99	0,999	0,9999		x	1,0001	1,001	1, 01	1, 1
$g(x)$	-10	-10^2	-10^3	-10^4		$g(x)$	10^4	10^3	10^2	10

3. الملاحظة: نلاحظ أنّه كلما إقترب x من 1 فإنّ $|g(x)|$ تأخذ قيماً كبيرة أكثر فأكثر.

4. تبيين أنّه إذا كان: $x \in]1;1+10^{-10}]$ فإنّ: $g(x) \geq 10^{10}$ ،

وإذا كان: $x \in [1-10^{-10};1[$ فإنّ: $g(x) \leq -10^{10}$:

(أ) بفرض أنّ: $x \in [1-10^{-10};1[$ أي: $1-10^{-10} \leq x < 1$

ومنه: $-10^{-10} \leq x-1 < 0$ وعليه: $-\frac{1}{10^{-10}} \geq \frac{1}{x-1}$

إذن: $\boxed{g(x) \leq -10^{10}}$.

(ب) بفرض أنّ: $x \in]1;1+10^{-10}]$ أي: $1 < x \leq 1+10^{-10}$

ومنه: $0 < x-1 \leq 10^{-10}$ وعليه: $\frac{1}{x-1} \geq \frac{1}{10^{-10}}$

إذن: $\boxed{f(x) \geq 10^{10}}$.

5. تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A إذا كان: $x \in \left]1;1+\frac{1}{A}\right]$ فإنّ: $g(x) \geq A$ ،

وإذا كان: $x \in \left[1-\frac{1}{A};1\right[$ فإنّ: $g(x) \leq -A$:

نُعوض 10^{10} بـ A في البرهان السابق.

نتيجة:

بوضع $g(x) = g_2(x) = g_1(x)$ حيث g_1 و g_2 دالّتان معرفتان على $]1;+\infty[$ و $]-\infty;1[$ على الترتيب.

من خلال الجدول:

◄ يأخذ $g_1(x)$ قيماً كبيرة بالقدر الذي نُريد شريطة أن يأخذ x قيماً قريبة من العدد 1 بالقدر الكافي ومنه: $\boxed{\lim\limits_{x \to 1} g_1(x) = +\infty}$.

◄ تأخذ $|g_2(x)|$ $(g_2(x) < 0)$ قيما كبيرة بالقدر الذي نُريد شريطة أن يأخذ x قيما قريبة من العدد 1 بالقدر الكافي ومنه: $\boxed{\lim\limits_{x \to 1} g_2(x) = -\infty}$.

- نقول أنّ نهاية g هي $+\infty$ عند 1 من اليمين وأنّ نهاية g هي $-\infty$ عند 1 من اليسار

ونكتب: $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} g(x) = -\infty}$ و $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} g(x) = +\infty}$.

ملاحظة:

نلاحظ أن المنحنى الممثل للدالة g يقترب بالقدر الذي نُريد من المستقيم ذو المعادلة $x = 1$.

◄ نقول في هذه الحالة أنّ المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ هو مستقيم مقارب لمنحنى الدالة g .

تعريف01:

القول أن نهاية الدالة f عند x_0 بقيم أكبر هي $+\infty$ يعني أنّه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A ، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما α بحيث: إذا كان $0<x-x_0<\alpha$ يكون $f(x)>A$

ونكتب: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)=+\infty$.

تعريف02:

القول أن نهاية الدالة f عند x_0 بقيم أصغر هي $+\infty$ يعني أنّه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A ، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما α بحيث: إذا كان $0<x_0-x<\alpha$ يكون $f(x)>A$

ونكتب: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)=+\infty$.

تعريف03:

القول أن نهاية الدالة f عند x_0 بقيم أكبر هي $-\infty$ يعني أنّه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A ، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما α بحيث: إذا كان $0<x-x_0<\alpha$ يكون $f(x)<-A$

ونكتب: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)=-\infty$.

تعريف04:

القول أن نهاية الدالة f عند x_0 بقيم أكبر هي $-\infty$ يعني أنّه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A ، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما α بحيث: إذا كان $0<x_0-x<\alpha$ يكون $f(x)<-A$

ونكتب: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)=-\infty$.

مبرهنة:

نقبل دون برهان النتائج التالية:

(1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{(x-a)^2}=+\infty$ ، (2) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}\dfrac{1}{x-a}=-\infty$ ، (3) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}\dfrac{1}{x-a}=+\infty$.

أمثلة:

1/ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^2}=+\infty$ ؛ 2/ $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{1}{(x+3)^2}=+\infty$ ؛ 3/ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(1-x)^2}=+\infty$ ؛

4/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ ؛ 5/ $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}}\dfrac{1}{x-3}=-\infty$ ؛ 6/ $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}}\dfrac{1}{x-3}=+\infty$ ؛

7/ $\lim\limits_{\substack{x\to \sqrt{2}\\ <}}\dfrac{1}{\sqrt{2}-x}=+\infty$ ؛ 8/ $\lim\limits_{\substack{x\to \sqrt{2}\\ >}}\dfrac{1}{\sqrt{2}-x}=-\infty$.

2. المستقيم المقارب الموازي لمحور التراتيب

تعريف:

ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم و ليكن a عدد حقيقي.

إذا كانت النهاية (أو النهاية من اليمين أو من اليسار) للدالة f عند العدد a هي $+\infty$ أو $-\infty$ ⊲

أي: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ ،

نقول أن المستقيم ذو المعادلة $x=a$ (الموازي لمحور التراتيب) مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) .

تمرين محلول رقم 01 و02 ص113 من الكتاب المدرسي.

تمرين:لتكن الدّالة f المعرفة بـ $f(x)=-2+\dfrac{1}{(x-2)^2}$ على $[1;2[\cup]2;3]$.

1)احسب $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ، ماذا تستنتج؟

2)احسب $f'(x)$ ثم شكّل جدول تغيّرات الدّالة f .

3)ارسم في معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ المنحنى (C_f) .

الحل:

واجب منزلي:في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$، ارسم التمثيل البياني للدّالة "مقلوب"

-بقراءة بيانية عيّن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\dfrac{1}{x}$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{1}{x}$ ؛ ماذا تستنتج بالنسبة لمنحنى الدالة "مقلوب"؟

ملاحظات حول سير الحصة:.....

.....

انتهى.

مذكرة رقم: 02

التاريخ: ربيع الثاني 1438هـ الموافق لـ جانفي 2017م	المحور رقم 06: النهايات السلوك التقاربي لمنحن.	المدة: 02 ساعة
القسم: 02ع تج+02تر+02ر	الموضوع: نهاية منتهية عند ما لانهاية.	الأستاذ: بوعزة مصطفى

الكفاءات المستهدفة:

- حساب نهاية دالّة عند ما لانهاية.
- معرفة شرط وجود مستقيم مقارب يُوازي أحد محوري المعلم .

المراحل	سير الدرس	المدة	الملاحظات

الانطلاق

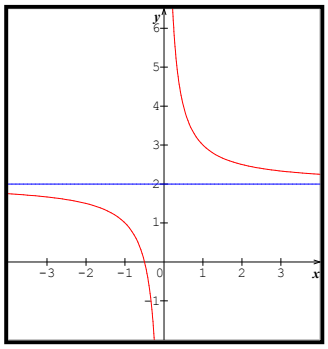
بناء المفاهيم

التقويم

نهاية منتهية عند ما لا نهاية:

01. مثال: (معالجة النشاط 04 ص111)

الهدف: نهاية منتهية لدّالة عند مالانهاية.



الدّالة h معرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ كما يلي: $h(x)=\dfrac{2x+1}{x}$،

1. تبيين أنّ $h(x)=a+\dfrac{b}{x}$ حيث a و b عددان حقيقيان يُطلب تعيينهما:

لدينا: $\dfrac{1}{x}=2+\dfrac{1}{x}$ إذن: $h(x)=\dfrac{2x+1}{x}=\dfrac{2x}{x}+\dfrac{1}{x}$ $\boxed{h(x)=2+\dfrac{1}{x}}$.

2. بعد حساب $h'(x)$ و دراسة إشارتها تشكيل جدول تغيرات الدالة h:

أ- حساب $h'(x)$:

h دّالة معرفة وقابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}-\{0\}$ ولدينا: $h'(x)=\dfrac{-1}{x^2}<0$.

ب- جدول تغيّرات الدالة h:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	‖	$-$
$h(x)$	؟ ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ ؟

3. إكمال جدولي القيم:

x	-10	-10^3	-10^5	-10^7	x	10	10^3	10^5	10^7
$h(x)$	1,9	1,999	1,99999	1,9999999	$h(x)$	2, 1	2,001	2,000 01	2,000000 1

4. الملاحظة:

نلاحظ أنه كلما أخذت $|x|$ قيماً كبيرة أكثر فأكثر، $h(x)$ تقترب من العدد 2 .

5. تبيين أنه إذا كان: $x \geq 10^6$ فإنّ: $h(x) \in]2;2+10^{-6}]$ ،

وإذا كان: $x \leq -10^6$ فإنّ: $h(x) \in [2-10^{-6};2[$:

(أ) بفرض أنّ: $x \geq 10^6$ ومنه: $0 < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{10^6}$

وعليه: $2 < 2+\frac{1}{x} \leq 2+10^{-6}$ إذن: $\boxed{h(x) \in]2;2+10^{-6}]}$.

(ب) بفرض أنّ: $x \leq -10^6$ ومنه: $0 > \frac{1}{x} \geq \frac{-1}{10^6}$

وعليه: $2 > 2+\frac{1}{x} \geq 2-10^{-6}$ إذن: $\boxed{h(x) \in [2-10^{-6};2[}$.

6. تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما e ، يوجد عدد حقيقي موجب تماما B

بحيث: إذا كان: $x \geq B$ فإنّ: $h(x) \in]2;2+e]$:

$h(x) \in]2;2+e]$ معناه: $2 < h(x) \leq 2+e$

ومنه: $0 < \frac{1}{x} \leq e$ وعليه: $x \geq \frac{1}{e}$ (بما أنّ $e > 0$ فإنّ $\frac{1}{e} > 0$)

نأخذ $B = \frac{1}{e}$ نجد: $x \geq B$.

7. تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما e ، يوجد عدد حقيقي موجب تماما B

بحيث: إذا كان: $x \leq -B$ فإنّ: $h(x) \in [2-e;2[$:

$h(x) \in [2-e;2[$ معناه: $2-e \leq h(x) < 2$

ومنه: $-e \leq \frac{1}{x} < 0$ وعليه: $x \leq -\frac{1}{e}$ (بما أنّ $e > 0$ فإنّ $\frac{1}{e} > 0$)

نأخذ $B = \frac{1}{e}$ نجد: $x \leq -B$.

نتيجة:

◄يُبين لنا الجدول الأول أنّ $h(x)$ تأخذ قيما قريبة من العدد 2 بالقدر الذي نُريد شريطة أن يأخذ x قيما موجبة جد كبيرة.

نقول في هذه الحالة أنّ نهاية h هي 2 عند $+\infty$ ، ونكتب: $\boxed{\lim_{x \to +\infty} h(x) = 2}$.

◄يُبين لنا الجدول الثاني أنّ $h(x)$ تأخذ قيما قريبة من العدد 2 بالقدر الذي نُريد شريطة أن يكون x سالبا وتأخذ $|x|$ قيما جد كبيرة.

نقول في هذه الحالة أنّ نهاية h هي 2 عند $-\infty$ ، ونكتب: $\boxed{\lim_{x \to -\infty} h(x) = 2}$.

ملاحظة:

نلاحظ أن المنحنى الممثل للدالة h يقترب عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$) من المستقيم ذو المعادلة $y = 2$.

◄نقول في هذه الحالة أنّ المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ هو مستقيم مقارب لمنحنى الدالة h عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$)

تعريف01:

القول أن نهاية الدالة f عند $+\infty$ هي l يعني أنّه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما e، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما B بحيث: إذا كان $x > B$ يكون $0 \le |f(x)-l| < e$

ونكتب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.

تعريف02:

القول أن نهاية الدالة f عند $+\infty$ هي l يعني أنّه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما e، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما B بحيث: إذا كان $x < -B$ يكون $0 \le |f(x)-l| < e$

ونكتب: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$.

مبرهنة:

نقبل دون برهان النتائج التالية: (1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+a} = 0$ ، (2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x+a} = 0$.

أمثلة:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$ ؛ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{7-x} = 0$ ؛ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ ؛

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{(1-x)^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{1}{x-1}\times\dfrac{1}{x-1}\right] = 0$ ؛

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-x}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\right] = -\dfrac{1}{2}$ ؛ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^5} = 0$.

2. المستقيم المقارب الموازي لمحور التراتيب

تعريف:

ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم و ليكن b عدد حقيقي.

القول أن المستقيم ذو المعادلة $y = b$ (الموازي لمحور الفواصل) مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ (على التربيب عند $-\infty$)

يعني أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ (على التربيب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$)

تمرين محلول رقم 01 و02 ص115 من الكتاب المدرسي.

تمرين: لتكن الدّالة f المعرفة بـ $f(x) = -1 + \dfrac{1}{x}$ على $\mathbb{R}^*$.

1) احسب النهايات التالية: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ؛ $\lim\limits_{\substack{<\\x\to0}} f(x)$ ؛ $\lim\limits_{\substack{>\\x\to0}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$، فسّر النتائج المحصل عليها بيانياً.

2) احسب $f'(x)$ ثم شكّل جدول تغيّرات الدّالة f.

3) ارسم في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ المستقيمات المقاربة ثمّ المنحنى (C_f).

الحل:

تمارين مهمة: تمارين 04، 07، 09، 11، 12، 16، 43، 44، 47 و48 ص131-137.

ملاحظات حول سير الحصة: . . . . . .

. . . . . .

انتهى.

مذكرة رقم: 03

التاريخ: ربيع الثاني 1438هـ الموافق لـ جانفي 2017م	المحور رقم 06: النهايات السلوك التقاربي لمنحن .	المدة: 02 ساعة
القسم: 02ع تج+02تر+02ر	الموضوع: نهاية غير منتهية عند مالانهاية .	الأستاذ: بوعزة مصطفى

الكفاءات المستهدفة:

- حساب نهاية دّالة عند مالانهاية .

المراحل	سير الدرس	المدة	الملاحظات

الانطلاق

بناء المفاهيم

التقويم

نهاية غير منتهية عند مالانهاية:

01 . مثال: (معالجة النشاط 03 ص110)

الهدف: نهاية غير منتهية لدّالة عند مالانهاية .

الدّالة k معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $k(x)=x^2$ ، (k هي الدالة "مربع")

1 . تشكّيل جدول تغيرات الدالة k :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	0	$+$	
$k(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

2 . إكمال جدولي القيم:

x	-10	-10^2	-10^3	-10^4		x	10	10^2	10^3	10^4
$k(x)$	10^2	10^4	10^6	10^8		$k(x)$	10^2	10^4	10^6	10^8

3 . الملاحظة: نلاحظ أنّ $k(x)$ تأخذ قيما كبيرة جدا أكثر فأكثر كلما أخذت $|x|$ قيما كبيرة جدا .

4 . تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A ، يوجد عدد حقيقي موجب تماما B بحيث: إذا كان: $x\geq B$ فإنّ: $k(x)\geq A$ ، وإذا كان: $x\leq -B$ فإنّ: $k(x)\geq A$:

$x\geq B$ يعني $x^2\geq B^2$ وبالتالي يكفي أخذ: $A=B^2$ أي: $k(x)\geq A$.

$x\leq -B$ يعني $x^2\geq B^2$ وبالتالي يكفي أخذ: $A=B^2$ أي: $k(x)\geq A$.

نتيجة:

◄يُبين لنا الجدول الأول أنّ $k(x)$ تأخذ قيما كبيرة جداً شريطة أن يأخذ x قيما موجبة جد كبيرة.

نقول في هذه الحالة أنّ نهاية k هي $+\infty$ عند $+\infty$ ، ونكتب: $\lim\limits_{x\to+\infty}k(x)=+\infty$.

◄يُبين لنا الجدول الثاني أنّ $k(x)$ تأخذ قيما كبيرة جداً شريطة أن يكون x سالبا وتأخذ $|x|$ قيما جد كبيرة.

نقول في هذه الحالة أنّ نهاية k هي $+\infty$ عند $-\infty$ ، ونكتب: $\lim\limits_{x\to-\infty}k(x)=+\infty$.

تعريف01:

القول أن نهاية الدالة f عند $+\infty$ هي $+\infty$ يعني أنّه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A ، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما B بحيث: إذا كان $x > B$ يكون $f(x) > A$

ونكتب: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

تعريف02:

القول أن نهاية الدالة f عند $+\infty$ هي $-\infty$ يعني أنّه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A ، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما B بحيث: إذا كان $x > B$ يكون $f(x) < -A$

ونكتب: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

تعريف03:

القول أن نهاية الدالة f عند $-\infty$ هي $+\infty$ يعني أنّه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A ، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما B بحيث: إذا كان $x < -B$ يكون $f(x) > A$

ونكتب: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

تعريف04:

القول أن نهاية الدالة f عند $-\infty$ هي $-\infty$ يعني أنّه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A ، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما B بحيث: إذا كان $x < -B$ يكون $f(x) < -A$

ونكتب: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

أمثلة:

1/ $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ ؛ 2/ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ ؛ 3/ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ ؛

4/ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-x^2\right) = -\infty$ ؛ 5/ $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-x^2\right) = -\infty$.

تمرين: باستعمال التعريف أثبت مايلي:

1/ $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ ؛ 3/ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ ؛ 4/ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-x^2\right) = -\infty$ ؛ 5/ $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-x^2\right) = -\infty$.

الحل:

تمارين 08، 10، 13، 15، 17ص131-132 .

ملاحظات حول سير الحصة: . . . . . .

. . . . . .

انتهى.

مذكرة رقم: 04

التاريخ: ربيع الثاني 1438هـ الموافق لـ جانفي 2017م	المحور رقم 06: النهايات السلوك التقاربي لمنحن.	المدة: 01 ساعة
القسم: 02ع تج+02تر+02ر	الموضوع: نهاية منتهية عند عدد حقيقي.	الأستاذ: بوعزة مصطفى

الكفاءات المستهدفة:

- حساب نهاية دالّة عند عدد حقيقي.

المراحل	سير الدرس	المدة	الملاحظات

الانطلاق

بناء المفاهيم

التقويم

نهاية منتهية عند عدد حقيقي:

01. مثال: (معالجة النشاط 05 ص111)

الهدف: نهاية منتهية لدّالة عند عدد حقيقي.

الدّالة f معرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x-2}$.

1. إكمال جدولي القيم:

x	1,997	1,998	1,999		2,001	2,002	2,003
$f(x)$	2,997	2,998	2,999		3,001	3,002	3,003

2. الملاحظة:

نلاحظ كلما اقترب x من 2 إلا واقترب $f(x)$ من 3 .

3. تبسيط عبارة $f(x)$، بعد تحليل العبارة x^2-x-2:

بمأنّ 2 جذر لكثير الحدود x^2-x-2 فإنّ: $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$.

وبالتالي: $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x-2}=\dfrac{(x-2)(x+1)}{x-2}=x+1$.

4. تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما e، يوجد عدد حقيقي موجب تماما α بحيث: إذا كان $0<|x-2|<\alpha$ يكون $0\le|f(x)-3|<e$:

$0\le|f(x)-3|<e$ يعني $0\le|x+1-3|<e$ ومنه: $0\le|x-2|<e$

وبالتالي يكفي أخذ: $\alpha\le e$ نجد: $0<|x-2|<\alpha$.

نتيجة:

يُبين لنا الجدول أنّ $f(x)$ تقترب من 3 شريطة أن يأخذ x قيما قريبة من 2.

نقول في هذه الحالة أنّ نهاية f هي 3 عند 2، ونكتب: $\boxed{\lim_{x\to 2}k(x)=3}$.

تعريف01:

القول أن نهاية الدالة f عند x_0 هي l يعني أنّه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما e، يوجد عدد حقيقي موجب تماما α بحيث: إذا كان $0<|x-x_0|<\alpha$ يكون $0\le|f(x)-l|<e$

ونكتب: $\boxed{\lim_{x\to x_0}f(x)=l}$.

ملاحظة:

$0<|x-x_0|<\alpha$ تعني $x\in]x_0-\alpha;x_0[\cup]x_0;x_0+\alpha[$.

$0\le|f(x)-l|<e$ تعني $f(x)\in]l-e;l+e[$.

أمثلة:

1/ $\lim\limits_{x\to 2}(-3x+1)=-5$ ؛ 2/ $\lim\limits_{x\to -3}(2x)=-6$ ؛ 3/ $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}=0$ ؛

4/ $\lim\limits_{x\to -3}(x^2)=9$ ؛ 5/ $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

تمرين: f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-\dfrac{3}{5}x+1$.

باستعمال التعريف أثبت أنّ: $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=-\dfrac{1}{5}$.

الحل:

ملاحظات حول سير الحصة: . . . . . .

. . . . . .

انتهى.