



التمرين الأول: (05 نقاط)

$$\begin{cases} 6\ln U_0 + \ln U_3 + \ln U_5 = 16\ln \sqrt{6} \\ \ln U_7 - \ln U_4 = \ln 27 \end{cases} \quad (U_n) \text{ متتالية هندسية حدودها موجبة تماما معرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ :}$$

(1)- أوجد q أساس هذه المتتالية ، ثم حددها الأول U_0 . (2)- أكتب عبارة الحد العام U_n بدلالة n .

(3)- أحسب بدلالة n المجموعين : $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$

$$S'_n = \ln U_0 + \ln \frac{U_1}{4} + \ln \frac{U_2}{4^2} + \dots + \ln \frac{U_n}{4^n}$$

(4)- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 3^n على 10 .

(ب)- ما هو باقي قسمة العدد A_n على 10 حيث : $A_n = (S_n + 1)^{1444} - 2 \times 299^{2n+3} - 2023$ ؟

(5)- (أ)- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $(3n+4) \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 3^{2n} (3n+1) [10]$.

(ب)- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $(3n+4) \times 9^n + 7^{2n+1}$ مضاعفا للعدد 10.

(6)- N عددا طبيعيا يكتب $x222xxx$ في نظام التعداد ذي الأساس 3 و يكتب $4x3y$ في النظام التعداد ذي الأساس 7 أوجد x و y ثم أكتب N في النظام العشري .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(1)- (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال : $[0, \sqrt{6}]$ بـ : $f(x) = \frac{3}{\sqrt{6-x^2}}$ (كما هو موضح على الوثيقة المرفقة)

- لتكن المتتالية العددية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

(أ)- مثل على حامل محور الفواصل الحدود الأربعة الأولى لهذه المتتالية . (ب)- ضع تخمينا حول اتجاه تغير و تقارب هذه المتتالية .

(ج)- باستعمال مبدأ البرهان بالتراجع أثبت أنه : من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $0 \leq U_n \leq \sqrt{3}$

(د)- بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n^2 - 3)^2}{(3 + U_n \sqrt{6 - U_n^2}) \sqrt{6 - U_n^2}}$. استنتج إتجاه تغير المتتالية (U_n) .

- استنتج من (ج)- و (د)- أن المتتالية (U_n) متقاربة ، أحسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

$$(2) - \text{لتكن المتتالية } (V_n) \text{ المعرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ: } V_n = \frac{U_n^2}{3 - U_n^2}$$

أ- بين أن المتتالية (V_n) متتالية حساية يطلب تعيين أساسها r وحدها الأول .

ب- أكتب V_n ثم U_n بدلالة n ، أحسب للمرة الثانية : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

ج- أحسب بدلالة n الجداء P_n حيث : $P_n = (U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n)^2$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(I) - لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = e^{-\frac{x+1}{2}} - e^{-x-1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$$\|\vec{i}\| = 4cm$$

(1) - أحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، فسر هذه النتيجة بيانيا . (2) - بين أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

(3) - بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = e^{-x-1} \left(\frac{-1}{2} e^{\frac{x+1}{2}} + 1 \right)$ ، استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(4) - أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = -1$. (5) - أنشئ (T) و (C_f) .

(6) - ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x) = f(m)x + f(m)$.

(7) - λ وسيط حقيقي موجب تماما ، أحسب $S(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) ، والمستقيمت التي معادلاتها :

$$y = 0 , x = -1 \text{ و } x = \lambda . \text{ أحسب : } \lim_{x \rightarrow +\infty} S(\lambda) .$$

(II) - لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = f(x) + e^{-x-1}$. نسمي g' ، g'' ، ، $g^{(n)}$ الدوال المشتقة

النونية للدالة g حيث n عدد طبيعي غير معدوم .

(1) - برهن باستعمال مبدأ البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $g^{(n)}(x) = \left(\frac{-1}{2} \right)^n e^{-\frac{x+1}{2}}$

(2) - من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع : $S_n = g'(0) + g''(0) + \dots + g^{(n)}(0)$

أحسب S_n بدلالة n ، ثم $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

التعريف الرابع: (06 نقاط)

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{1 - \ln x}, & x \in]0, e[\cup]e, +\infty[\\ f(0) = 0 \end{cases} \quad I) - \text{ لتكن الدالة } f \text{ المعرفة على المجال } D = [0, e[\cup]e, +\infty[\text{ كما يلي :}$$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس (O, i, j) 1- أحسب: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ ، ماذا تستنتج ؟ فسر هذه النتيجة بيانيا .

2- 1) أحسب: $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow e^+} f(x)$ ، فسر النتيجة بيانيا . أحسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب-) أثبت أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته: $y = x$ بجوار . ثم ادرس وضعيته بالنسبة للمنحنى (C_f)

3- برهن أنه من أجل كل x من $]0, e[\cup]e, +\infty[$: $f'(x) = 1 + \frac{1}{x(1 - \ln x)^2}$

- استنتج اتجاه تغير الدالة f على $]0, e[\cup]e, +\infty[$ ، شكل جدول تغيرات الدالة f على D .

4- أ-) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 1$.

ب-) لتكن الدالة h المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بـ : $h(x) = x \ln x - x + 1$

- ادرس تغيرات الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها ، استنتج إشارة $h(x)$ على المجال $]0, +\infty[$.

- ادرس وضعية المماس (T) بالنسبة للمنحنى (C_f) . أنشئ (T) ، (Δ) و (C_f) .

II-) 1- ليكن التكاملين : $I = \int_{\frac{1}{2}}^1 (x \ln x) dx$ و $J = \int_{\frac{1}{2}}^1 (x + 1 - x \ln x) dx$

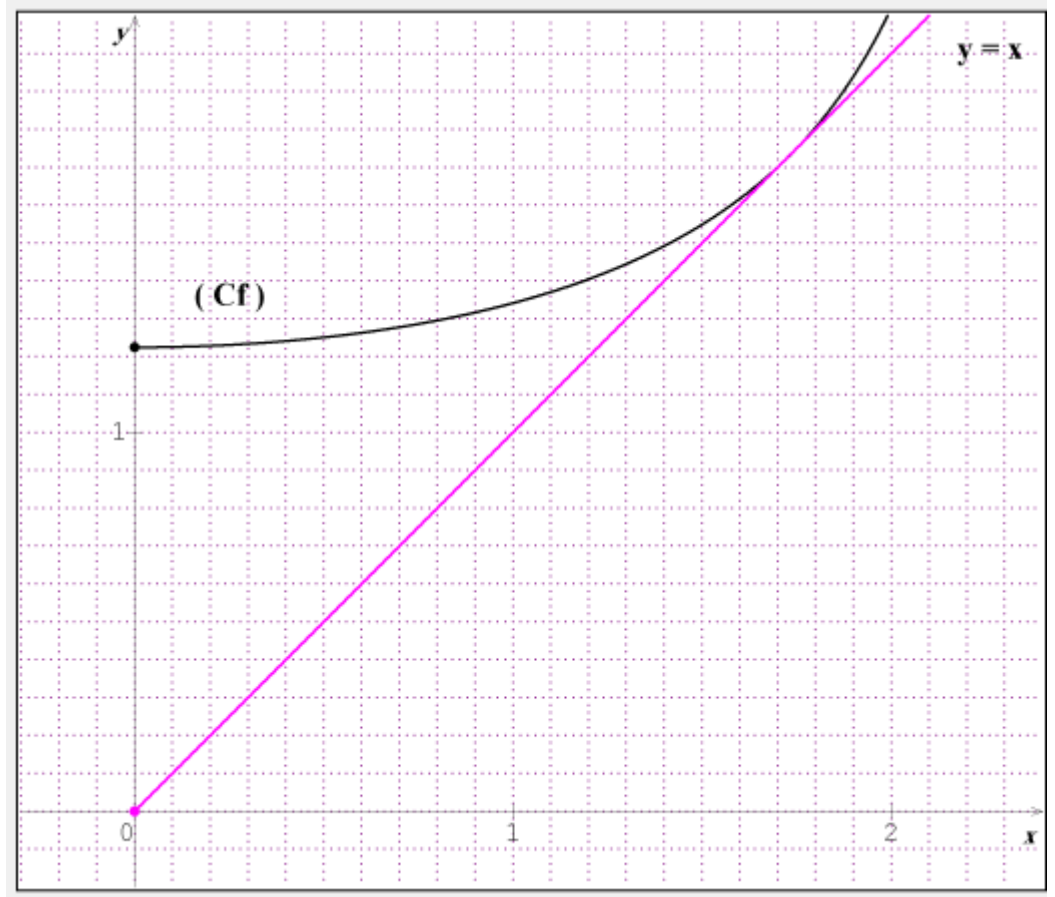
باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب I ، ثم استنتج القيمة المضبوطة لـ J .

2- أ-) برهن أنه إذا كان $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ فإن : $2x \leq f(x) \leq x + 1 - x \ln x$.

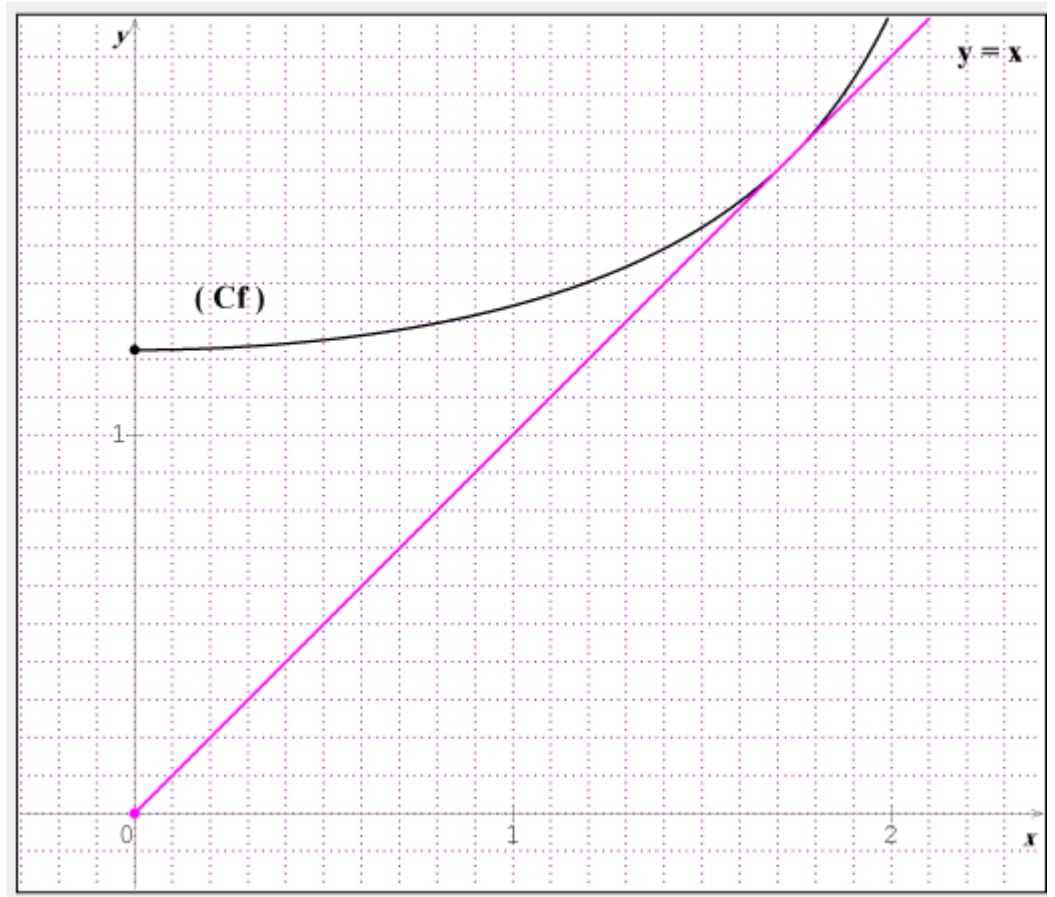
ب-) نسمي S مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمان التي معادلتهما :

$\frac{3}{4} \leq S \leq \frac{17}{16} - \frac{\ln 2}{8}$: برهن أن $x = 1$ و $x = \frac{1}{2}$.

الوثيعة الطرفة : التمرين الثاني الإسم واللعب :



الوثيعة الطرفة : التمرين الثاني الإسم واللعب :



الإجابة النموذجية + سلم التقييم :

التمرين الأول: (05 نقاط)

(1) - لدينا : $U_7 = q^3 U_4$ ، $LnU_7 - LnU_4 = Ln\left(\frac{U_7}{U_4}\right) = Ln\left(\frac{q^3 U_4}{U_4}\right) = Lnq^3 = 3Lnq$ ، ومنه :
 $LnU_7 - LnU_4 = Ln27 = Ln3^3 = 3Ln3$

..... $3Lnq = 3Ln3$ أي أن : $q = 3$ (0.5ن)

- لدينا : $U_5 = q^5 U_0$ ، $U_3 = q^3 U_0$ ، $6LnU_0 + LnU_3 + LnU_5 = 16Ln\sqrt{6}$ ، معناه :

..... (0.5ن) $U_0 = 2$ ومنه : $Ln(U_0^6 \times q^3 U_0 \times q^5 U_0) = 8Ln6$
 $Ln(U_0^8 \times q^8) = 8Ln(3U_0) = 8Ln6$
 $3U_0 = 6$

(2) - من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $U_n = U_0 \times q^n = 2 \times 3^n$ (0.25ن)

(3) - من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \frac{U_0}{1-q}(1-q^{n+1}) = \frac{2}{1-3}(1-3^{n+1}) = 3^{n+1} - 1$ (0.25ن)

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$:
 $S'_n = Ln(U_0 \times U_1 \times \dots \times U_n)$
 ومنه : $S'_n = Ln\left[(U_0)\left(U_0 \times \left(\frac{3}{4}\right)\right)\left(U_0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2\right) \dots \left(U_0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)\right]$
 $S'_n = Ln\left[U_0^{n+1} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{1+2+\dots+n}\right] = Ln\left[2^{n+1} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}\right] = Ln\left[2^{n+1} \times \frac{3^{\frac{n(n+1)}{2}}}{2^{n(n+1)}}\right]$

..... (0.5ن) $S'_n = Ln\left[2^{1-n^2} \times 3^{\frac{n(n+1)}{2}}\right] = (1-n^2)Ln2 + \left(\frac{n^2+n}{2}\right)Ln3$

(4) - (أ) $3^4 \equiv 1[10]$ ، $3^3 \equiv 7[10]$ ، $3^2 \equiv 9[10]$ ، $3^1 \equiv 3[10]$ ، $3^0 \equiv 1[10]$ (0.5ن)

$n =$	$4k$	$4k + 1$	$4k + 2$	$4k + 3$	$k \in \mathbb{N}$
$3^n \equiv$	1	3	9	7	$[10]$

..... (ب) $2023 \equiv 3[10]$

ومنه : $-2 \times 299^{2n+3} \equiv (-2 \times 9)[10] \equiv -18[10] \equiv 2[10]$ ، أي أن :
 $\begin{cases} 299 \equiv 9[10] \\ 299 \equiv 3^2[10] \\ 299^{2n+3} \equiv 3^{4n+6}[10] \\ 299^{2n+3} \equiv 3^{4(n+1)+2}[10] \end{cases}$

..... ومنه : $(S_n + 1)^{1444} \equiv 1[10]$ ، $(S_n + 1)^{1444} = 3^{1444n+1444} = 3^{4(361n+361)}$

(0.5ن)..... ومنه : باقي قسمة A_n على 10 هو 0 . $A_n \equiv 0 [10]$ أي أن : $A_n \equiv (1+2-3) [10]$

$$9^n = 3^{2n} - (-5)^{2n+1} \equiv 3^{2n} - (-3)^{2n+1} [10], 7^{2n+1} \equiv (-3)^{2n+1} [10], 7^{2n+1} \equiv -3^{2n+1} [10], \text{ (لأن } 2n+1 \text{ فردي) . ومنه :}$$

$$\begin{aligned} (3n+4) \times 9^n + 7^{2n+1} &\equiv (3n+4) 3^{2n} - 3^{2n+1} [10] \\ (3n+4) \times 9^n + 7^{2n+1} &\equiv 3^{2n} (3n+4-3) [10] \end{aligned}$$

(0.5ن)..... $(3n+4) \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 3^{2n} (3n+1) [10]$

(ب-) $(3n+4) \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0 [10]$: مضاعف للعدد 10 معناه : $(3n+4) \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0$ ومنه :

$$(3n+1) \equiv 0 [10], 3^{2n} (3n+1) \equiv 0 [10] \text{ (لأن ليس ضاعف للعدد 10)}$$

(0.5ن)..... $n = 10k + 3 (k \in \mathbb{N})$: ومنه $n \equiv 3 [10], 3n \equiv 9 [10], 3n \equiv -1 [10]$

$$\begin{aligned} N = \overline{x222xxx} &= x + 3x + 3^2x + 2 \times 3^3 + 2 \times 3^4 + 2 \times 3^5 + 3^6x \\ N &= 742x + 702 \quad (0 \leq x < 3) \end{aligned} \quad (6-)$$

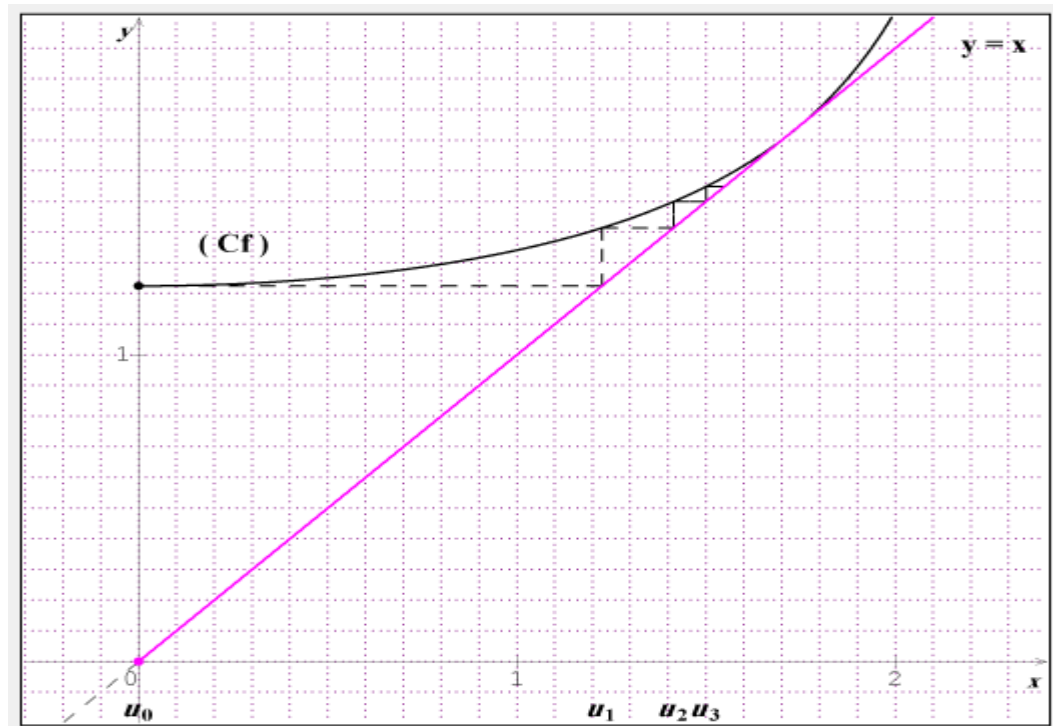
$$\begin{aligned} N = \overline{4x3y} &= y + 3 \times 7 + 49x + 4 \times 7^3 \\ \text{ومنّه :} \quad N &= y + 49x + 1393 \quad (0 \leq y < 7) \end{aligned}$$

مرفوض $y = 695 : x = 2$. مرفوض $y = -691 : x = 0$ ، $693x - y = 691$ ، $742x + 702 = y + 49x + 1393$

(0.75ن)(0.25ن)..... $N = 2 + 49 + 1393 = 1444$ - $y = 2, x = 1$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(1- أ-) تمثيل الأربع حدود الأولى للمتتالية (U_n) : (0.25ن).....



(ب-) (U_n) حدود متزايدة تماماً على $\mathbb{N}$ ، ومتقاربة . (0.25ن).....

(ج)- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq U_n \leq \sqrt{3}$. $0 \leq U_n \leq \sqrt{3}$ $P(n)$

من أجل $n = 0$: $U_0 = 0$ ، $0 \leq U_0 \leq \sqrt{3}$ ومنه : $P(0)$ محققة .

نفرض صحة $P(n)$: $0 \leq U_n \leq \sqrt{3}$ ونبرهن صحة $P(n+1)$: $0 \leq U_{n+1} \leq \sqrt{3}$.

لدينا : $0 \leq U_0 \leq \sqrt{3}$ ، بما أن الدالة متزايدة f تماماً على المجال $[0, \sqrt{3}]$ فإن : $f(0) \leq f(U_n) \leq f(\sqrt{3})$

$$0 \leq \frac{\sqrt{6}}{2} \leq U_{n+1} \leq \sqrt{3}$$

ومنه : $P(n+1)$ محققة . من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq U_n \leq \sqrt{3}$ (0.5ن)

(د)- من أجل كل $n \in \mathbb{N}$:

$$U_{n+1} - U_n = \frac{3}{\sqrt{6-U_n^2}} - U_n = \frac{3-U_n\sqrt{6-U_n^2}}{\sqrt{6-U_n^2}} = \frac{(3-U_n\sqrt{6-U_n^2})(3+U_n\sqrt{6-U_n^2})}{(3+U_n\sqrt{6-U_n^2})\sqrt{6-U_n^2}}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{9-U_n^2(6-U_n^2)}{(3+U_n\sqrt{6-U_n^2})\sqrt{6-U_n^2}} = \frac{9-6U_n^2+U_n^4}{(3+U_n\sqrt{6-U_n^2})\sqrt{6-U_n^2}}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n^2-3)^2}{(3+U_n\sqrt{6-U_n^2})\sqrt{6-U_n^2}}$$

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n^2-3)^2}{(3+U_n\sqrt{6-U_n^2})\sqrt{6-U_n^2}} \geq 0$: ومنه (U_n) متزايدة تماماً على $\mathbb{N}$. (0.25ن)(0.25ن)

(U_n) متزايدة تماماً على $\mathbb{N}$ ومحدودة من الأعلى بـ : $\sqrt{3}$ فهي متقاربة . (0.25ن)

$$: \text{ ومنه } (l^2-3)^2 = 0 , l^2(6-l^2) = 9 , l\sqrt{6-l^2} = 3 , l = \frac{3}{\sqrt{6-l^2}} (0 \leq l \leq \sqrt{3}) , \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$$

$l = \sqrt{3}$ أو $l = -\sqrt{3}$ مرفوضة لأن : $0 \leq l \leq \sqrt{3}$ (0.25ن)

$$V_{n+1} - V_n = \frac{U_{n+1}^2}{3-U_{n+1}^2} - V_n = \frac{\frac{9}{6-U_n^2}}{3-\frac{9}{6-U_n^2}} - V_n : \text{ من أجل كل } n \in \mathbb{N} \text{ (2-أ)}$$

$$: \text{ ومنه } V_{n+1} - V_n = \frac{9}{9-3U_n^2} - \frac{U_n^2}{3-U_n^2} = \frac{3}{3-U_n^2} - \frac{U_n^2}{3-U_n^2} = \frac{3-U_n^2}{3-U_n^2} V_{n+1} - V_n = 1$$

(V_n) متتالية حسابية أساسها $r=1$ ، وحدها الأول $V_0=0$ (0.25ن)(0.25ن)(0.25ن)

(ب)- من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $V_n = n$ (0.25ن)

$$U_n^2(1+V_n) = 3V_n \quad 3V_n - V_n \times U_n^2 = U_n^2, \quad V_n(3-U_n^2) = U_n^2, \quad V_n = \frac{U_n^2}{3-U_n^2} : \mathbb{N} \text{ من } n \text{ أجل كل}$$

$$U_n^2 = \frac{3V_n}{1+V_n}, \text{ ومنه } U_n = \sqrt{\frac{3V_n}{1+V_n}} \text{ أو } U_n = -\sqrt{\frac{3V_n}{1+V_n}} \text{ مرفوضة لأن } U_n \geq 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \sqrt{3} : \text{ ومنه } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n}{1+n} = 3, \quad U_n = \sqrt{\frac{3n}{1+n}}$$

$$P_n = \frac{3}{2} \times \left(\frac{3 \times 2}{3} \right) \times \left(\frac{3 \times 3}{4} \right) \times \dots \times \left(\frac{3 \times n}{n+1} \right) \quad P_n = U_1^2 \times U_2^2 \times \dots \times U_n^2 : \mathbb{N} \text{ من } n \text{ أجل كل (ج-)}$$

$$\text{ومنه : } P_n = \frac{3^n}{1+n} \dots \dots \dots (0.25 \text{ ن})$$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

$$(1-)(I) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \quad (C_f) \text{ يقبل مستقيما مقاربا أفقيا معادلته: } y = 0 \text{ بجوار } +\infty. \dots \dots \dots (0.25 \text{ ن})(0.25 \text{ ن})$$

$$(2- \text{ من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x-1} \left(e^{\frac{x+1}{2}} - 1 \right) : \text{ ومنه } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x-1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^{\frac{x+1}{2}} - 1 \right) = -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \dots \dots \dots (0.25 \text{ ن})$$

$$(3- f \text{ قابلة للإشتقاق على } \mathbb{R} : f'(x) = \frac{-1}{2} e^{\frac{x+1}{2}} + e^{-x-1} = e^{-x-1} \left(\frac{-1}{2} e^{\frac{x+1}{2}} + 1 \right) \dots \dots \dots (0.25 \text{ ن})$$

$$f'(x) = 0 \text{ يكافئ : } x = -1 + 2\ln 2$$

$$f \text{ متزايدة تماما على المجال }]-\infty, -1 + 2\ln 2] , f \text{ متناقصة تماما على المجال } [-1 + 2\ln 2, +\infty[\dots \dots \dots (0.25 \text{ ن})$$

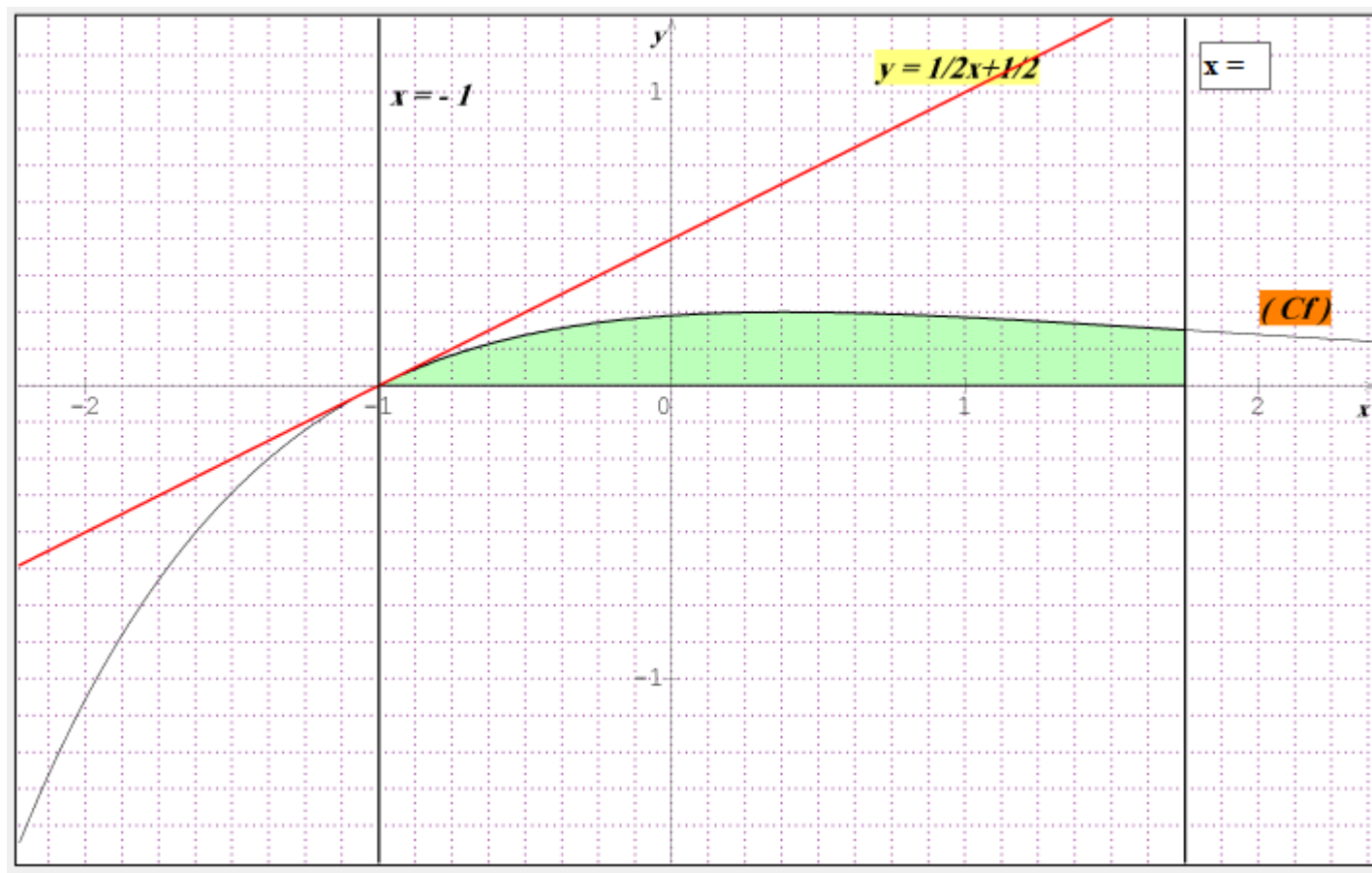
$$\text{جدول تغيرات الدالة } f : \dots \dots \dots (0.5 \text{ ن})$$

x	$-\infty$	$-1 + 2\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	+	$\circ$	-
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	0

$$(4- f'(-1) = \frac{1}{2}, (T) : y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$$

$$(T) : y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, f(-1) = 0 \dots \dots \dots (0.25 \text{ ن})$$

(5)- إنشاء (C_f) : (0.5ن)



(6)- حلول المعادلة $f(x) = f(m)x + f(m)$ هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيم الذي معادلته $y = f(m)x + f(m)$.
 - $f(m) \in]-\infty, 0]$ أي $m \in]-\infty, -1]$: للمعادلة حلا وحيدا .

$f(m) \in]0, \frac{1}{2}]$ أي $m \in]-1, +\infty[$: للمعادلة حلين (0.5ن)

- $f(m) = \frac{1}{2}$: المعادلة لا تقبل حلول

$$\int_{-1}^{\lambda} f(x) dx = \left[-2e^{-\frac{x+1}{2}} + e^{-x-1} \right]_{-1}^{\lambda} = -2e^{-\frac{\lambda+1}{2}} + e^{-\lambda-1} + 1 \quad (7)$$

(0.5ن)..... $S(\lambda) = \left(-2e^{-\frac{\lambda+1}{2}} + e^{-\lambda-1} + 1 \right) 16 \text{ cm}^2$

(0.25ن)..... $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} S(\lambda) = 16$

(11)- من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g(x) = e^{-\frac{x+1}{2}}$ ، $g^{(n)}(x) = \left(\frac{-1}{2} \right)^n e^{-\frac{x+1}{2}}$ $P(n)$

من أجل $n = 1$ $g'(x) = \frac{-1}{2} e^{-\frac{x+1}{2}}$ ومنه : $P(1)$ محققة .

نفرض صحة $P(n)$: $g^{(n)}(x) = \left(\frac{-1}{2}\right)^n e^{-\frac{x+1}{2}}$ ، نبرهن على صحة $P(n+1)$: $g^{(n+1)}(x) = \left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1} e^{-\frac{x+1}{2}}$.

$$g^{(n+1)}(x) = \left(g^{(n)}(x)\right)' = \left(\frac{-1}{2}\right)^n \left(\frac{-1}{2}\right) e^{-\frac{x+1}{2}} = \left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1} e^{-\frac{x+1}{2}}$$

ومنه : من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $g^{(n)}(x) = \left(\frac{-1}{2}\right)^n e^{-\frac{x+1}{2}}$ (0.5ن)

(2)- نضع : $U_n = g^{(n)}(0) = \left(\frac{-1}{2}\right)^n e^{-\frac{1}{2}}$ ، متتالية هندسية أساسها $q = \frac{-1}{2}$ و $U_1 = \frac{-e^{-\frac{1}{2}}}{2}$ حدها الأول .

$$S_n = \frac{-e^{-\frac{1}{2}}}{2} \left[1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n \right] = \frac{-e^{-\frac{1}{2}}}{3} \left[1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n \right] = \frac{-e^{-\frac{1}{2}}}{3} + \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{3} \left(\frac{-1}{2}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{-e^{-\frac{1}{2}}}{3}$$

التمرين الرابع : (06 نقاط)

(0.25ن).... $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$: ومنه $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x - x \ln x) = 0^+$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[1 + \frac{1}{x - x \ln x} \right] = 1 - (I$

الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند النقطة ذات فاصلة 0 . (C_f) يقبل نصف مماس عمودي عند النقطة O (0.25ن)(0.25ن)

(2)- (أ) $\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = +\infty$ (C_f) يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته $x = e$ (0.5ن) (0.25ن)

(ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 - \ln x} \right) = 0$: ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (0.25ن)

(ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 - \ln x} \right) = 0$: ومنه (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته : بجوار $+\infty$ (0.25ن)

$$f(x) - y = \frac{1}{1 - \ln x}$$

x	0	e	$+\infty$
$f(x) - y$		+	-
الوضعية		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) تحت (Δ)

(3)- f قابلة للإشتقاق على المجال $]0, e[\cup]e, +\infty[$: $f'(x) = 1 - \frac{\frac{-1}{x}}{(1 - \ln x)^2} = 1 + \frac{1}{x(1 - \ln x)^2}$ (0.25ن)

(0.25ن)..... $f'(x) > 0$ ومنه : f متزايدة تماما على المجالين : $]0, e[$ ، $]e, +\infty[$.

(0.25ن)..... - جدول تغيرات الدالة f :

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
$f(x)$	0	$+\infty$	$+\infty$

(0.25ن)..... $(T) : y = 2x$ ، $f(1) = 0$ ، $f'(1) = 2$ ، $(T) : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ - (4)

(0.25ن)..... ب- h قابلة للإشتقاق على المجال $]0, +\infty[$: $h'(x) = \ln x + \frac{1}{x} \times x - 1 = \ln x$:

(0.25ن)..... h متناقصة تماما على المجال $]0, 1[$ ، h متزايدة تماما على المجال $]1, +\infty[$.

(0.25ن)..... جدول تغيرات الدالة h :

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

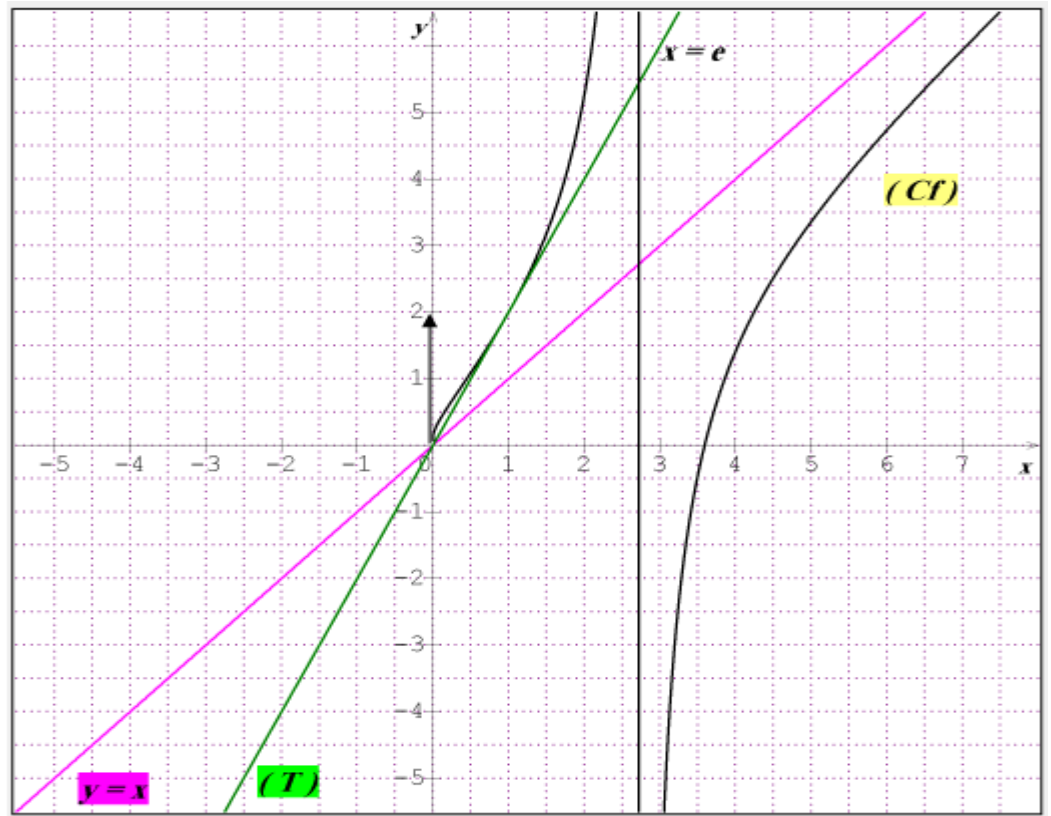
(0.25ن)..... من أجل كل x من $]0, +\infty[$: $h(x) \geq 0$] بالنسبة (0 قيمة حدية صغرى)

(0.25ن)..... وضعية (C_f) بالنسبة للمماس (T) : $f(x) - y = x + \frac{1}{1 - \ln x} - 2x = \frac{h(x)}{1 - \ln x}$

x	0	1	e	$+\infty$
$h(x)$	+	0	+	+
$1 - \ln x$	+	+	0	-
$f(x) - y$	+	+	-	-
الوضعية	(C_f) فوق (T)	(C_f) فوق (T)	(C_f) تحت (T)	(C_f) تحت (T)

$$(C_f) \cap (D) = \{A(1, 2)\}$$

(0.5ن)..... إنشاء (T) ، (Δ) و (C_f) :



$$I = \left[\frac{x^2}{2} \times \ln x \right]_{\frac{1}{2}}^1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} \right) dx = \frac{\ln 2}{8} - \left[\frac{x^2}{4} \right]_{\frac{1}{2}}^1, \quad \begin{matrix} u'(x) = x & u(x) = \frac{x^2}{2} \\ v(x) = \ln x & v'(x) = \frac{1}{x} \end{matrix} : I \text{ حساب } (1) - (II)$$

$$(0.25 \text{ ن}) \dots \dots \dots I = \frac{\ln 2}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{-3}{16} + \frac{\ln 2}{8}$$

$$(0.25 \text{ ن}) \dots \dots \dots J = \frac{17}{16} - \frac{\ln 2}{8} : \text{ومنه } J = \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{2} + \frac{3}{16} - \frac{\ln 2}{8}, \quad J = \int_{\frac{1}{2}}^1 (x+1) dx - I = \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_{\frac{1}{2}}^1 - I$$

$$(2) - (أ) : \text{لدينا } f(x) \geq 2x : (1) \dots \dots \dots (C_f) \text{ فوق } (T) \text{ على المجال } \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$$

$$: \text{ومنه } 1+x-x\ln x > 0, \quad 1-\ln x > 0, \quad \ln x \leq 0 : \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \text{ على المجال } f(x) - x - 1 + x\ln x = \frac{(1+x-x\ln x)\ln x}{1-\ln x}$$

$$(2) \dots \dots \dots f(x) \leq x+1-x\ln x$$

$$(0.25 \text{ ن}) \dots \dots \dots 2x \leq f(x) \leq x+1-x\ln x : x \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right] : (2) \text{ و } (1) \text{ من}$$

$$: \text{ومنه } \int_{\frac{1}{2}}^1 2x dx = \left[x^2 \right]_{\frac{1}{2}}^1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 2x dx \leq S \leq J, \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 2x dx \leq \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx \leq \int_{\frac{1}{2}}^1 (x+1-x\ln x) dx - (ب)$$

$$(0.25 \text{ ن}) \dots \dots \dots \frac{3}{4} \leq S \leq \frac{17}{16} - \frac{\ln 2}{8}$$