الفرض 2 في مادة الرياضيات

التمرين الأول

(I) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على N بـ : $u_0=\sqrt{e+1}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{1}{2}\sqrt{u_n^2+3e}$.

❶ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n>\sqrt{e}$.

❷ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}^2-u_n^2=\frac{3}{4}\left(e-u_n^2\right)$

❸ استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

❹ بين أن المتتالية (u_n) متقاربة.

(II) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على N كما يلي : $v_n=u_n^2-\alpha$ حيث α عدد حقيقي.

❶ عين قيمة α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$.

❷ اكتب v_n بدلالة n ثم بين أن : $u_n=\sqrt{e+\left(\frac{1}{4}\right)^n}$

❸ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

❹ احسب المجموعين : $S_n=u_0^2+u_1^2+\cdots\cdots+u_n^2$ و $T_n=\frac{1}{ln4}\left[ln\left(v_1\right)+\cdots\cdots+ln\left(v_{n-1}\right)\right]$

التمرين الثاني

✍ لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :
$$\begin{cases} f(x)=(x-1)^2ln\left|x-1\right|-2 & ;x\neq 1 \\ f(1)=-2 \end{cases}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

❶ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

❷ بين أنه من أجل كل $x\neq 1$: $f'(x)=(x-1)\left(2ln\left|x-1\right|+1\right)$.

❸ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

❹ بين أن المستقيم $x=1$ محور تناظر للمنحنى (C_f).

❺ نقبل أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطتين ذات الفاصلتين α و β حيث $2.82<\alpha<2.83$ ثم استنتج حصرا لـ β.

❻ ارسم (C_f) في المجال $[-2,4]$.

❼ باستعمال التكامل بالتجزئة جد الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto(x-1)^2ln\left(x-1\right)$ في المجال $]1,+\infty[$ و التي تنعدم من أجل القيمة 2.

❽ لتكن $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات : $y=-2$ ، $x=2$ و $x=\alpha$.

◄ بين أن : $A(\alpha)=\frac{1}{9}\left(-\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha-4\right)u.a$.

تصحيح الفرض

التمرين الأول :

① البرهان بالتراجع :

نسمي $P(n): U_n > \sqrt{e}$

- من أجل $n=0$:

$U_0 > \sqrt{e}$

$\sqrt{e+1} > \sqrt{e}$

ومنه $P(0)$ محققة.

- نفرض صحة $P(n)$ ونبرهن صحة $P(n+1): U_{n+1} > \sqrt{e}$

لدينا:

$U_n > \sqrt{e}$

$U_n^2 + 3e > 4e$

$\frac{1}{2}\sqrt{U_n^2+3e} > \sqrt{e}$

$U_{n+1} > \sqrt{e}$

ومنه $P(n+1)$ صحيحة.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n: $U_n > \sqrt{e}$

② تبيان أن: $U_{n+1}^2 - U_n^2 = \frac{3}{4}(e-U_n^2)$

$U_{n+1}^2 - U_n^2 = \frac{1}{4}(U_n^2+3e) - U_n^2$

$= \frac{3}{4}(e - U_n^2)$

③ استنتاج اتجاه تغير:

$U_{n+1}^2 - U_n^2 = \frac{3}{4}(-U_n^2+e)$

$(U_{n+1}-U_n)(U_{n+1}+U_n) = \frac{3}{4}(e-U_n^2)$

$U_{n+1}-U_n = \frac{3}{4}\,\frac{e-U_n^2}{U_{n+1}+U_n}$

لدينا: $U_n > \sqrt{e}$

أي $U_n^2 > e$

① — $\boxed{e - U_n^2 < 0}$

لدينا $U_n > 0$ و $U_{n+1} > 0$

ومنه ② — $\boxed{U_{n+1}+U_n > 0}$

من ① و ② نجد أن:

$U_{n+1} - U_n < 0$

ومنه المتتالية (U_n) متناقصة تماما.

④ بما أن (U_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد $\sqrt{e}$ فهي متقاربة.

Ⅱ ① تعيين قيمة α :

$V_{n+1} = U_{n+1}^2 - \alpha$

$= \frac{1}{4}(U_n^2+3e) - \alpha$

$= \frac{1}{4}U_n^2 + \frac{3e-\alpha}{4}$

$= \frac{1}{4}V_n$

بالمطابقة مع (V_n) نجد: $\frac{3e-\alpha}{4} = -\alpha$ تكافئ $\boxed{\alpha = e}$

② كتابة V_n بدلالة n :

$V_n = V_0 \cdot q^n = 1\left(\frac{1}{4}\right)^n$

$V_0 = U_0^2 - e = \sqrt{e+1}^2 - e = 1$

- تبيان أن : $U_n = \sqrt{e+\left(\frac{1}{4}\right)^n}$

لدينا: $V_n = U_n^2 - e$

أي $U_n^2 = V_n + e$

أي $U_n^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^n + e$

أي $U_n = \sqrt{e+\left(\frac{1}{4}\right)^n}$

③ حساب $\lim_{n\to+\infty} U_n$

$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{e+\left(\frac{1}{4}\right)^n} = \sqrt{e}$

④ حساب المجموع:

$S_n = U_0^2 + U_1^2 + \dots + U_n^2$

نعلم أن : $U_n^2 = V_n + e$

وعليه

$S_n = V_0 + e + V_1 + e + \dots + V_n + e$

$= (V_0+V_1+\dots+V_n) + (e+\dots+e)$

$= \frac{1}{1-\frac{1}{4}}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right] + e(n+1)$

$= \frac{4}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right] + e(n+1)$

- حساب المجموع T_n :

$T_n = \frac{1}{\ln 4}\left[\ln V_1 + \ln V_2 + \dots + \ln V_{n-1}\right]$

نعلم أن: $\ln V_{n-1} = \ln\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$= \ln 4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n = \ln 4 + \ln\left(\frac{1}{4}\right)^n$

$= \ln 4 - n\ln 4 = \ln 4(1-n)$

لدينا

$T_n = \frac{\ln V_1}{\ln 4} + \frac{\ln V_2}{\ln 4} + \dots + \frac{\ln V_{n-1}}{\ln 4}$

$= \frac{\cancel{\ln 4}(1-1)}{\cancel{\ln 4}} + \frac{\cancel{\ln 4}(1-2)}{\cancel{\ln 4}} + \dots + \frac{\cancel{\ln 4}(1-n)}{\cancel{\ln 4}}$

$= 0 - 1 - \dots + (1-n)$

نتحصل على مجموع متتالية حسابية أساسها -1 وحدها الأول

$T_n = H_1 + H_2 + \dots + H_n$

نضع: $H_n = 1-n$:

$T_n = \frac{n}{2}\left(0 + (1-n)\right)$

$\boxed{T_n = \frac{n(1-n)}{2}}$

التمرين الثاني:

① $\lim_{x\to-\infty} \underbrace{(x-1)^2}_{+\infty}\underbrace{\ln|x-1|}_{+\infty} - 2 = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{(x-1)^2}_{+\infty}\underbrace{\ln|x-1|}_{+\infty} - 2 = +\infty$

② تبيان أن: $f'(x) = (x-1)(2\ln|x-1|+1)$

لدينا

$f'(x) = 2(x-1)\ln|x-1| + (x-1)^2\cdot\frac{1}{x-1}$

$= 2(x-1)\ln|x-1| + (x-1)$

$= (x-1)\left[2\ln|x-1|+1\right]$

③ دراسة اتجاه تغير الدالة f :

$f'(x)=0$ معناه: $x=1$ أو $2\ln|x-1|+1=0$

$$2\ln|x-1|+1=0$$
أي $\ln|x-1|=-\frac{1}{2}$

أي $|x-1|=e^{-1/2}$

ومنه $x-1=\frac{1}{\sqrt{e}}$ أو $x-1=-\frac{1}{\sqrt{e}}$

أي $\boxed{x=\frac{1}{\sqrt{e}}+1}$ أو $\boxed{x=\frac{-1}{\sqrt{e}}+1}$

x	$-\infty$ ... $-\frac{1}{\sqrt{e}}+1$		1		$\frac{1}{\sqrt{e}}+1$ ... $+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$2\ln\lvert x-1\rvert+1$	$+$ 0	$-$	‖	$-$	0 $+$
$f'(x)$	$\ominus$ 0	$\oplus$	‖	$\ominus$	0 $\oplus$

الدالة f متناقصة تماما على المجالين $]-\infty,-\frac{1}{\sqrt{e}}+1]$ و $]1,1+\frac{1}{\sqrt{e}}]$

ومتزايدة تماما على المجالين: $]1-\frac{1}{\sqrt{e}};1[$ و $[\frac{1}{\sqrt{e}}+1,+\infty[$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$1-\frac{1}{\sqrt{e}}$	1	$1+\frac{1}{\sqrt{e}}$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-(\frac{1}{2e}+2)$ ↗	-2 ↘	$-(\frac{1}{2e}+2)$ ↗	$+\infty$

④ تبيان أن المستقيم $x=1$ محور تناظر لـ (C_f):

من أجل x و $(2-x)$ من D_f لدينا

$$f(2(1)-x)=f(2-x)$$
$$=(2-x-1)^2\ln|2-x-1|-2$$
$$=(-x+1)^2\ln|-x+1|-2$$
$$=(x-1)^2\ln|x-1|-2$$
$$=f(x)$$

ومنه المستقيم $x=1$ محور تناظر لـ (C_f)

⑤ حصر لـ β:

$2-\alpha=\beta$ ، وبالتالي:

$$2{,}82<\alpha<2{,}83$$
$$-2{,}83<-\alpha<-2{,}82$$
$$2-2{,}83<2-\alpha<2-2{,}82$$
$$\boxed{-0{,}83<\beta<-0{,}82}$$

⑥ الرسم:

⑦ ايجاد الدالة F اصلية باستعمال التكامل بالتجزئة والتي تنعدم:

$$\int_2^x \underbrace{(t-1)^2}_{v'}\underbrace{\ln(t-1)}_{u}\,dt$$

نضع:

$u=\ln(t-1)$ ، $u'=\frac{1}{t-1}$

$v=\frac{(t-1)^3}{3}$ ، $v'=(t-1)^2$

$$F(x)=\left[\frac{(t-1)^3}{3}\ln(t-1)\right]_2^x-\int_2^x\frac{(t-1)^3}{3}\times\frac{1}{t-1}\,dt$$

$$F(x)=\left[\frac{(x-1)^3}{3}\ln(x-1)\right]-\left[\frac{(2-1)^3}{3}\ln(2-1)\right]-\int_2^x\frac{(t-1)^2}{3}\,dt$$

$$F(x)=\frac{(x-1)^3}{3}\ln(x-1)-\frac{1}{3}\left[\frac{(t-1)^3}{3}\right]_2^x$$

$$F(x)=\frac{(x-1)^3}{3}\ln(x-1)-\frac{1}{9}\left[(x-1)^3-(2-1)^3\right]$$

$$F(x)=\frac{(x-1)^3}{3}\ln(x-1)-\frac{1}{9}\left((x-1)^3-1\right)$$

تبيان أن

$$A(\alpha)=\frac{1}{9}(-\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha-4)$$

لدينا

$$A(\alpha)=\int_2^\alpha f(x)-(-2)\,dx$$

(C_f) فوق المستقيم $y=-2$ لأن

$$f(x)-(-2)=\underbrace{(x-1)^2}_{>0}\underbrace{\ln|x-1|}_{>0}$$

لدينا

$$A(\alpha)=\int_2^\alpha (x-1)^2\ln(x-1)\,dx$$

$$=[F(\alpha)-F(2)]$$

$$=\frac{(\alpha-1)^3}{3}\ln(\alpha-1)-\frac{1}{9}\left((\alpha-1)^3-1\right)-\cancel{\frac{(2-1)^3}{3}\ln(2-1)}+\frac{1}{9}\left((2-1)^3-1\right)$$

نذكر أن $f(\alpha)=0$ أي $(\alpha-1)^2\ln|\alpha-1|-2=0$ أي

$$(\alpha-1)^2\ln|\alpha-1|=2$$

وبالتالي:

$$A(\alpha)=\frac{2(\alpha-1)}{3}-\frac{1}{9}\left((\alpha-1)^3-1\right)$$

$$A(\alpha)=\frac{1}{9}\left[6\alpha-6-\alpha^3+3\alpha^2-3\alpha+2\right]$$

$$A(\alpha)=\frac{1}{9}(-\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha-4)$$

u.a

Forland