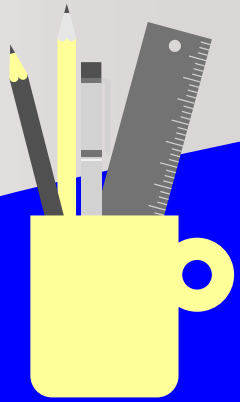
السنة الثالثة للشعب العلمية

# مجلة الشهاب

## في عموميات على الدوال

الأستاذ : لبوخ فؤاد

- ★تمارين محلولة في الإشتقاقية
- ★تمارين محلولة في النهايات
- ★تمارين محلولة في الإستمرارية
- ★12 تمرين دراسة دالة



$f(x)$

Limits

# المحتويات


الإستمرارية ..... 01
تذكير ..... 01
تمارين ..... 04
الحلول ..... 08
النهايات ..... 20
تذكير ..... 20
تمارين ..... 24
الحلول ..... 26
الإستمرارية ..... 33
تذكير ..... 33
تمارين ..... 35
الحلول ..... 36
دراسة دالة ..... 39
تمارين ..... 39

# الإشتقاقية

## العدد المشتق-الدالة المشتقة

**تعريف 1:** $f$ دالة معرفة على مجال $I$ من $\mathbb{R}$. $a$ و $a+h$ عددان حقيقيان من $I$ مع $h \neq 0$. نقول أن $f$ تقبل الاشتقاق عند $a$ إذا قبلت النسبة $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ نهاية محدودة لما يؤول $h$ إلى0. تسمى هذه النهاية العدد المشتق للدالة $f$ عند $a$ و نرمز لها بالرمز $f'(a)$.

و بالتالي : $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ أو $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (تم وضع $x=a+h$)

**تعريف 2:** $f$ دالة معرفة على مجال $I$ من $\mathbb{R}$. نقول أن الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $I$ إذا وفقط إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من $I$.

تسمى الدالة التي ترفق بكل $x$ من $I$ العدد المشتق $f'(x)$ الدالة المشتقة للدالة $f$ على $I$. ويرمز لها بـ $f'$. و نكتب $f':x\mapsto f'(x)$

**التفسير البياني للعدد المشتق :** $f$ دالة معرفة على مجال $I$ من $\mathbb{R}$ و ليكن $(C)$ تمثيلها البياني في معلم $(O;I,J)$. إذا قبلت $f$ الاشتقاق عند $x_0$ فإن $(C)$ يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ مماسا $(T)$ معامل توجيهه $f'(x_0)$ و معادلته: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

## المشتقات المتتابعة

**تعريف :** $f$ دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال $I$ من $\mathbb{R}$. إذا قبلت الدالة $f'$ هي الأخرى الاشتقاق على $I$ فإن دالتها المشتقة $(f')'$ تسمى المشتقة الثانية للدالة $f$ و نرمز لها بالرمز $f''$. إذا قبلت الدالة $f''$ هي الأخرى الاشتقاق على $I$ فإن دالتها المشتقة $(f'')'$ تسمى المشتقة الثالثة للدالة $f$ و نرمز لها بالرمز $f'''$. تسمى الدوال $f'$، $f''$، $f'''$،...، $f^{(n)}$،... المشتقات المتتابعة للدالة $f$.

نقطة الإنعطاف : ☜ $A(x_0;f(x_0))$ نقطة إنعطاف إذا وفقط إذا إخترق المماس عندها المنحنى $(C)$.

☜ إذا إنعدمت الدالة المشتقة الثانية $f''$ عند $x_0$ مغيرة إشارتها فإن $A(x_0;f(x_0))$ نقطة إنعطاف.

☜ إذا إنعدمت الدالة المشتقة $f'$ عند $x_0$ بدون أن تغير من إشارتها فإن $A(x_0;f(x_0))$ نقطة إنعطاف.

## التقريب التآلفي-طريقة أولر

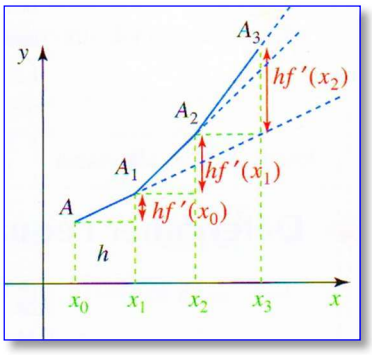
**التقريب التآلفي :** $f$ دالة معرفة على مجال مفتوح $I$.

إذا قبلت $f$ الاشتقاق عند $x$ من $I$ فإنه توجد دالة $\varepsilon$ بحيث من أجل كل عدد حقيقي $h$ حيث $x+h$ ينتمي إلى $I$ لدينا:

$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+h\varepsilon(h)$ مع $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$.

من أجل $h$ قريب من 0 نكتب عندئذ: $f(x+h)\approx f(x)+hf'(x)$

يسمى $f(x)+hf'(x)$ التقريب التآلفي لـ $f(x+h)$ من أجل $h$ قريب من 0، المرفق بالدالة $f$.




**طريقة أولر :** تستعمل هذه الطريقة لإنشاء تمثيلات بيانية تقريبية لدالة $f$ بمعرفة $f'$ و $y_0=f(x_0)$

و ذلك بإنشاء النقط $A_n(x_n;y_n)$ حيث $x_n=x_{n-1}+h$ و $y_n=f(x_{n-1})+hf'(x_{n-1})$

مع $n\geq 1$. بربط النقط $A_0$، $A_1$، $A_2$،... نحصل على تمثيل بياني تقريبي لـ $f$

مرتبط باختيار $h$ الذي يسمى الخطوة. و يزداد دقة كلما إقترب $h$ أكثر إلى 0.

| الدالة $f$ | مجالات قابلية الإشتقاق | الدالة المشتقة $f'$ |
|---|---|---|
| $x \mapsto a$ | $\mathbb{R}$ | $x \mapsto 0$ |
| $x \mapsto ax+b$ | $\mathbb{R}$ | $x \mapsto a$ |
| $x \mapsto x^2$ | $\mathbb{R}$ | $x \mapsto 2x$ |
| $x \mapsto x^n \ (n \in \mathbb{N})$ | $\mathbb{R}$ | $x \mapsto nx^{n-1}$ |
| $x \mapsto \frac{1}{x}$ | $]0,+\infty[$ و $]-\infty,0[$ | $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ |
| $x \mapsto \frac{1}{x^n} \ (n \in \mathbb{N})$ | $]0,+\infty[$ و $]-\infty,0[$ | $x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$ |
| $x \mapsto \sqrt{x}$ | $]0,+\infty[$ | $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $x \mapsto \sin x$ | $\mathbb{R}$ | $x \mapsto \cos x$ |
| $x \mapsto \cos x$ | $\mathbb{R}$ | $x \mapsto -\sin x$ |
| $u+v$ | متعلقة بشروط كل دالة | $u'+v'$ |
| $u.v$ | | $u'.v+u.v'$ |
| $\lambda u \ (\lambda \in \mathbb{R})$ | | $\lambda u'$ |
| $\frac{1}{u}$ | | $-\frac{u'}{u^2}$ |
| $\frac{u}{v}$ | | $\frac{u'v-uv'}{v^2}$ |
| $x \mapsto u(ax+b)$ | | $x \mapsto au'(ax+b)$ |

## إشتقاق دالة مركبة

**مبرهنة :** إذا قبلت الدالة $u$ الاشتقاق على مجال $I$ من $\mathbb{R}$ و قبلت الدالة $v$ الاشتقاق على $u(I)$

فإن الدالة $v \circ u$ تقبل الاشتقاق على $I$ و لدينا من أجل كل $x$ من $I$ : $(v \circ u)'(x) = v'[u(x)] \times u'(x)$

**مشتقة الدالة** $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ : إذا كانت الدالة $u$ قابلة للاشتقاق على مجال $I$ من $\mathbb{R}$ و كانت موجبة تماما على $I$ فإن الدالة $\sqrt{u}$ تقبل الاشتقاق على $I$ و لدينا: $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ .

**مشتقة الدالة** $x \mapsto \left[u(x)\right]^n$ ( $n$ عدد طبيعي بحيث $n \geq 2$ ) : إذا كانت الدالة $u$ قابلة للاشتقاق على مجال $I$ من $\mathbb{R}$ فإن الدالة $u^n$ تقبل الاشتقاق على $I$ و لدينا: $\left(u^n\right)' = n u' u^{n-1}$ .

**مشتقة الدالة** $x \mapsto \dfrac{1}{\left[u(x)\right]^n}$ ( $n$ عدد طبيعي بحيث $n \geq 1$ ) :إذا كانت الدالة $u$ قابلة للاشتقاق على مجال $I$ من $\mathbb{R}$ ولا تنعدم على $I$ فإن الدالة $\dfrac{1}{u^n}$ تقبل الاشتقاق على $I$ و لدينا : $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$ .

## اتجاه تغير دالة

**مبرهنة 1:** $f$ دالة قابلة للاشتقاق على مجال $I$ من $\mathbb{R}$ .

☜ إذا كان من أجل كل $x$ من $I$ ، $f'(x) > 0$ ما عدا ممكن من أجل عدد محدود من القيم التي تنعدم الدالة $f$ من أجلها، فإن الدالة $f$ متزايدة تماما على $I$ .

☜ إذا كان من أجل كل $x$ من $I$ ، $f'(x) < 0$ ما عدا ممكن من أجل عدد محدود من القيم التي تنعدم الدالة $f$ من أجلها، فإن الدالة $f$ متناقصة تماما على $I$ .

☜ إذا كان من أجل كل $x$ من $I$ ، $f'(x) = 0$ فإن الدالة $f$ ثابتة على $I$ .

**القيم الحدية المحلية :** $f$ دالة معرفة على مجال $I$ من $\mathbb{R}$ و $x_0$ عدد حقيقي من $I$ .

☜ القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى للدالة $f$ يعني أنه يوجد مجال مفتوح $J$ محتوى في $I$ و يشمل $x_0$ بحيث من أجل كل $x$ من $J$ ، $f(x) \leq f(x_0)$ .

☜ القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة $f$ يعني أنه يوجد مجال مفتوح $J$ محتوى في $I$ و يشمل $x_0$ بحيث من أجل كل $x$ من $J$ ، $f(x) \geq f(x_0)$ .

☜ القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية للدالة $f$ يعني أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى أو صغرى .

**مبرهنة 2:** $f$ دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح $I$ من $\mathbb{R}$ و $x_0$ عدد حقيقي من $I$ .

إذا انعدمت الدالة المشتقة $f'$ عند $x_0$ مغيرة إشارتها فإن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية للدالة $f$.

# تمارين

## التمرين 01

أدرس قابلية الإشتقاق للدالة $f$ عند العدد $a$ في كل حالة:

1. $f(x)=|x|$ ، $a=0$.
2. $f(x)=\sqrt{x}$ ، $a=0$.
3. $f(x)=(x-1)^2$ ، $a=1$.
4. $f(x)=x^2-3x$ ، $a=-2$.
5. $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ ، $a=0$.
6. $f(x)=\sqrt{-2x}$ ، $a=-3$.

## التمرين 02

لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3$ .

1. برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم $h$ :

$$\frac{(3+h)^3-27}{h}=h^2+9h+27$$

2. استنتج أن الدالة $f$ تقبل الاشتقاق عند العدد 3 ، وعين $f'(3)$.

## التمرين 03

$f$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\sqrt{x^2+3}$.

1. تحقق أنه من أجل كل $h$ غير معدوم يكون:

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{h+2}{\sqrt{h^2+2h+4}+2}$$

2. استنتج أن الدالة $f$ تقبل الاشتقاق عند 1 مبينا $f'(1)$.

## التمرين 04

أحسب مشتقة الدالة $f$ في كل حالة :

1. $f(x)=3x^3-x^2+2x-1$ ، $D_f=\mathbb{R}$.
2. $f(x)=4(2x-3)^7$ ، $D_f=\mathbb{R}$.
3. $f(x)=(x^3-x+1)(x^4+2x^3-3x+2)$ ، $D_f=\mathbb{R}$
4. $f(x)=\dfrac{3x-1}{2x-2}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$.
5. $f(x)=\dfrac{-x^2+2x-1}{x-3}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{3\}$.
6. $f(x)=\dfrac{2x}{(-2x+3)^2}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.
7. $f(x)=-x+1-\dfrac{2}{x-3}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{3\}$.
8. $f(x)=\sqrt{2x-1}$ ، $D_f=\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.
9. $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x-3}}$ ، $D_f=]3;+\infty[$.
10. $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{2x-1}}+3x-1$ ، $D_f=\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.
11. $f(x)=(2x-3)\sqrt{3x-1}$ ، $D_f=\left[\dfrac{1}{3};+\infty\right[$.

## التمرين 05

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$

$f$ دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، و $A$ نقطة من منحنيها $(C)$ .

في كل حالة من الحالات الآتية ، أكتب معادلة لمماس المنحني $(C)$ عند النقطة $A$ والذي معامل توجيهه هو $a$ :

1. $A(2\ ;\ 0)$ و $a=1$ .
2. $A(-2\ ;\ 3)$ و $a=\dfrac{3}{2}$ .
3. $A(-1\ ;\ 3)$ و $a=-2$ .
4. $A(2\ ;\ \sqrt{2})$ و $a=\sqrt{2}$ .

## التمرين 06

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$

$f$ دالة قابلة للاشتقاق على $D_{f'}$ ، و $A$ نقطة فاصلتها $x_0$ من منحنيها $(C)$ . في كل حالة من الحالات الآتية ، أكتب معادلة لمماس المنحني $(C)$ عند النقطة $A$ :

1. $f(x)=\dfrac{3x-1}{2x-2}$ ، $x_0=2$ ، $D_{f'}=\mathbb{R}-\{1\}$ .
2. $f(x)=-x^3+2x$ ، $x_0=-3$ ، $D_{f'}=\mathbb{R}$ .
3. المماس معامل توجيهه يساوي 1 ، $f(x)=\dfrac{x-2}{x}$ ، $D_{f'}=\mathbb{R}^*$
4. المماس موازي للمستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة : $y=-2x+1$ ، $f(x)=x^2-1$ ، $D_{f'}=\mathbb{R}$ .
5. المماس عمودي على المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة : $y=2x-1$ ، $f(x)=2x^2+1$ ، $D_{f'}=\mathbb{R}$ .
6. المماس موازي لمحور الفواصل ، $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ ، $D_{f'}=\mathbb{R}-\{1\}$

## التمرين 07

1. عين أحسن تقريب تآلفي للعدد $(-2+h)^2$ عندما ينتهي $h$ إلى 0 .

- عين قيمة تقريبية لكل من الأعداد : $(-2{,}04)^2$ ؛ $(-1{,}98)^2$ ؛ $(-2{,}001)^2$ .

2. عين أحسن تقريب تآلفي للعدد $\sqrt{2+h}$ عندما ينتهي $h$ إلى 0 .

- عين قيمة تقريبية لكل من الأعداد : $\sqrt{2{,}04}$ ؛ $\sqrt{1{,}98}$ ؛ $\sqrt{2{,}001}$ .

3. عين أحسن تقريب تآلفي للعدد $\dfrac{1}{h-1}$ عندما ينتهي $h$ إلى 0 .

- عين قيمة تقريبية لكل من الأعداد : $\dfrac{-1}{0{,}99}$ ؛ $\dfrac{1}{-1{,}003}$ ؛ $\dfrac{1}{-0{,}93}$ .

4. $f$ تقبل الاشتقاق عند كل قيمة $a$ من المجموعة $\mathbb{R}$ حيث أن :

$f(2)=3$ ، $f'(2)=4$ و $f'(2{,}1)=2$

- باستعمال أحسن تقريب تآلفي للدالة $f$ عند 2 ، عين قيمة مقربة للعدد $f(2{,}1)$ .
- باستعمال أحسن تقريب تآلفي للدالة $f$ عند 2,1 ، عين قيمة مقربة للعدد $f(2{,}2)$ .

## التمرين 08

أحسب مشتقة الدالة $f$ في كل حالة :

1. $f(x)=\sqrt{x^2+2}$ ، $D_f=\mathbb{R}$ .
2. $f(x)=4\left(2x^3-3\right)^7$ ، $D_f=\mathbb{R}$ .

3. $D_f=[0;\pi]$ ، $f(x)=\sqrt{\sin x}$

4. $D_f=\mathbb{R}$ ، $f(x)=\sin\left[\cos\left(2x^2-1\right)\right]$

5. $D_f=\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ ، $f(x)=\frac{3}{\sqrt{\cos x}}$

6. $D_f=\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ ، $f(x)=\tan x$

7. $D_f=\mathbb{R}$ ، $f(x)=\sqrt{3(\cos x)^2+1}$

## التمرين 09

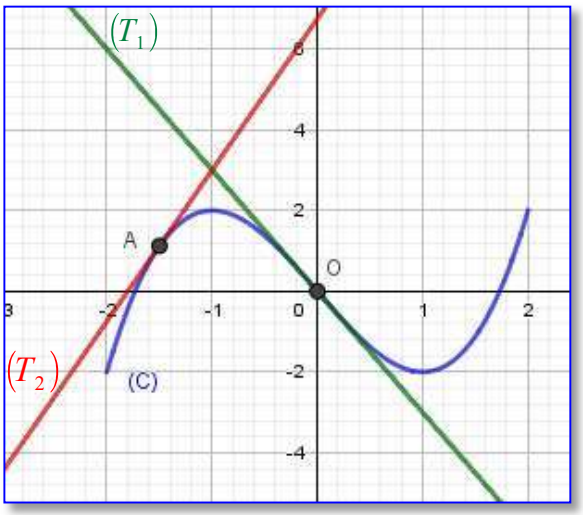
لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $f(x)=ax+\frac{b}{x-1}$ ، حيث $a$ و $b$ عددين حقيقيين، وليكن $(C)$ منحنى الدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، عين $a$ و $b$ في الحالات التالية:

1. $(C)$ يقبل مماسا أفقيا عند النقطة $A(2;1)$ .
2. $(C)$ يقبل مماسا عند النقطة $A(0;2)$ موازيا للمستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة: $y=2x-1$ .
3. $(C)$ يشمل النقطتان $A(2;4)$ و $A(3;4)$ .

## التمرين 10

لنعتبر التمثيل البياني لـ $(C)$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، منحنى الدالة $f$ المعرفة على $[-2;2]$ حيث:

- $(T_1)$ مماس للمنحنى عند النقطة $O$ .
- $(T_2)$ مماس للمنحنى عند النقطة $A\left(\frac{-3}{2};\frac{9}{8}\right)$ .




بقراءة بيانية عين:

1. شفعية الدالة مع التبرير.
2. جدول تغيرات الدالة $f$ .
3. $f'(-1)$ ، $f'(1)$ ، $f'(0)$ و $f''(0)$
4. $f'\left(\frac{-3}{2}\right)$ علما أن النقطة $C\left(\frac{-1}{2};\frac{39}{8}\right)$ تنتمي إلى المماس $(T_2)$
5. معادلة كلا من المماسين $(T_1)$ و $(T_2)$
6. جدول إشارة $f'(x)$ .

## التمرين 11

I. لتكن الدالة $g$ المعرفة على $[-3;1]$ بـ: $g(x)=x^2+2x$

- أدرس اشارة $g(x)$ على $[-3;1]$ .

II. لتكن الدالة $f$ المعرفة على $[-3;1]$ بـ: $f(x)=\frac{x^2+7x+7}{(x+1)^2+1}$ ، و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ .

1. أثبت أنه من أجل كل $x\in[-3;1]$ : $f(x)=1+\frac{5x+5}{x^2+2x+2}$
2. أ. أثبت أنه من أجل كل $x\in]-3;1[$ : $f'(x)=\frac{-5g(x)}{\left(x^2+2x+2\right)^2}$

ب. استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ و شكل جدول تغيراتها على $[-3;1]$ .

3. أ. اكتب معادلة المماس $(\Delta)$ لـ $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1- .

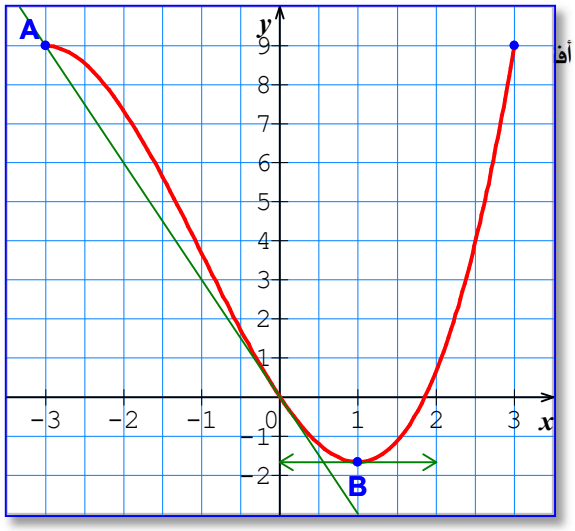
ب. أدرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$ .

ج. ماذا تستنتج ؟

4. أنشئ في نفس المعلم المنحنى $(C_f)$ والمستقيم $(\Delta)$ .

## التمرين 12

الشكل الموالي هو التمثيل البياني $\mathcal{C}$ لدالة $f$ معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال $[-3;3]$ في معلم متعامد ومتجانس $(O;I,J)$




المنحني $\mathcal{C}$ يحقق الشروط التالية :

يمر بمبدأ المعلم $O$ ، ويشمل النقطة $A(-3;9)$ ، يقبل في النقطة $B$ التي فاصلتها 1 مماسا أفـ

ويقبل المستقيم $(OA)$ كمماس عند النقطة $O$ .

1. ما هو معامل توجيه المستقيم $(OA)$ ؟

2. نفرض أن $f$ معرفة على $[-3;3]$ بـ: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

حيث $a$ ، $b$ ، $c$ و $d$ أعداد حقيقية .

أ. بين باستعمال الشروط السابقة أن : $a=\frac{1}{3}$ ، $b=1$ ، $c=-3$ و $d=0$

ب. حلل $f'(x)$ و استنتج اتجاه تغير الدالة $f$.

# الحلـــول

## التمرين 01

دراسة قابلية الإشتقاق للدالة $f$ عند العدد $a$ في كل حالة :

1. $f(x)=|x|$ ، $a=0$ :

لدينا : $\lim\limits_{x\to 0^{<}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^{<}}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^{<}}\dfrac{-x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^{<}}-1=-1$

و $\lim\limits_{x\to 0^{>}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^{>}}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^{>}}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^{>}}1=1$

أي أن : $f'_g(0)\neq f'_d(0)$

وبالتالي $f$ غير قابلة للإشتقاق عند العدد $0$ .

$|x|=\begin{cases}x & ;x\geq 0\\ -x & ;x\leq 0\end{cases}$

إذا كان $f'_g(a)\neq f'_d(a)$

فإن الدالة $f$ غير قابلة للاشتقاق عند العدد $a$ .

حيث :

$\lim\limits_{x\to a^{<}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{h\to 0^{<}}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'_g(a)$

و

$\lim\limits_{x\to a^{>}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{h\to 0^{>}}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'_d(a)$

2. $f(x)=\sqrt{x}$ ، $a=0$ :

لدينا : $\lim\limits_{x\to 0^{>}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^{>}}\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^{>}}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$ ، وبالتالي $f$ غير قابلة للإشتقاق عند العدد $0$ .

3. $f(x)=(x-1)^2$ ، $a=1$ :

لدينا : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h+1)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{[(h+1)-1]^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}h=0$ ، وبالتالي $f$ قابلة للإشتقاق عند العدد $1$ .

4. $f(x)=x^2-3x$ ، $a=-2$ :

لدينا : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-2)-f(-2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(h-2)^2-3(h-2)-10}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2-4h+4-3h+6-10}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(h-7)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}h-7=-7$

وبالتالي $f$ قابلة للإشتقاق عند العدد $-2$ .

5. $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ ، $a=0$ :

لدينا : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(x+1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-x-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x}{x+1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{x+1}=-1$

وبالتالي $f$ قابلة للإشتقاق عند العدد $0$ .

6. $f(x)=\sqrt{-2x}$ ، $a=-3$ :

لدينا : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-3)-f(-3)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{-2(h-3)}-\sqrt{6}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{-2h+6}-\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{-2h+6}+\sqrt{6}\right)}{h\left(\sqrt{-2h+6}+\sqrt{6}\right)}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-2h+6-6}{h\left(\sqrt{-2h+6}+\sqrt{6}\right)}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-2}{\sqrt{-2h+6}+\sqrt{6}}=\dfrac{-1}{\sqrt{6}}$

وبالتالي $f$ قابلة للإشتقاق عند العدد $-3$ .

تم إستعمال المرافق لإبراز المتطابقة الشهيرة :

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

## التمرين 02

الدالة $f$ معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3$ .

1. من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم $h$ ، لدينا :

$$\frac{(3+h)^3-27}{h}=\frac{(3+h)(3+h)^2-27}{h}=\frac{(3+h)\left(9+h^2+6h\right)-27}{h}=\frac{h^3+9h^2+27h+27-27}{h}=h^2+9h+27$$

و عليه فإنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم $h$ :

$$\frac{(3+h)^3-27}{h}=h^2+9h+27$$

2. لدينا :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(h+3\right)-f\left(3\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^3-3^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^3-27}{h}=\lim_{h\to 0}h^2+9h+27=27$$

و التالي $f$ قابلة للإشتقاق عند العدد 3 و $f'(3)=27$.

## التمرين 03

الدالة $f$ معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f\left(x\right)=\sqrt{x^2+3}$.

1. من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم $h$ ، لدينا :

$$\frac{f\left(1+h\right)-f\left(1\right)}{h}=\frac{\sqrt{\left(1+h\right)^2+3}-\sqrt{4}}{h}=\frac{\left(\sqrt{\left(1+h\right)^2+3}-2\right)\left(\sqrt{\left(1+h\right)^2+3}+2\right)}{h\left(\sqrt{\left(1+h\right)^2+3}+2\right)}$$

تم إستعمال المرافق لإبراز المتطابقة الشهيرة :

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

$$=\frac{\left(1+h\right)^2+3-4}{h\left(\sqrt{\left(1+h\right)^2+3}+2\right)}=\frac{h^2+2h}{h\left(\sqrt{\left(1+h\right)^2+3}+2\right)}$$

$$=\frac{\not{h}\left(h+2\right)}{\not{h}\left(\sqrt{h^2+2h+4}+2\right)}=\frac{h+2}{\sqrt{h^2+2h+4}+2}$$

و عليه فإنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم $h$ :

$$\frac{f\left(1+h\right)-f\left(1\right)}{h}=\frac{h+2}{\sqrt{h^2+2h+4}+2}$$

2. لدينا :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(h+1\right)-f\left(1\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h+2}{\sqrt{h^2+2h+4}+2}=\frac{2}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{2}$$

و التالي $f$ قابلة للإشتقاق عند العدد 1 و $f'(1)=\frac{1}{2}$.

## التمرين 04

حساب مشتقة الدالة $f$ في كل حالة :

1. $f\left(x\right)=3x^3-x^2+2x-1$ ، $D_f=\mathbb{R}$ :

الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x)=3\times 3x^2-2x+2=9x^2-2x+2$$

2. $f\left(x\right)=4\left(2x-3\right)^7$ ، $D_f=\mathbb{R}$ :

الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x)=4\times 7\times 2\left(2x-3\right)^6=56\left(2x-3\right)^6$$

3. $D_f=\mathbb{R}$ ، $f(x)=\left(x^3-x+1\right)\left(x^4+2x^3-3x+2\right)$ :

الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة :

$$f'(x)=\underbrace{\left(3x^2-1\right)}_{u'}\underbrace{\left(x^4+2x^3-3x+2\right)}_{v}+\underbrace{\left(x^3-x+1\right)}_{u}\underbrace{\left(4x^3+6x^2-3\right)}_{v'}=7x^6+12x^5-5x^4-16x^3+12x^2+6x-5$$

4. $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$ ، $f(x)=\dfrac{3x-1}{2x-2}$ :

الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}-\{1\}$ ودالتها المشتقة :

$$f'(x)=\frac{3(2x-2)-2(3x-1)}{(2x-2)^2}=\frac{-4}{(2x-2)^2}$$

5. $D_f=\mathbb{R}-\{3\}$ ، $f(x)=\dfrac{-x^2+2x-1}{x-3}$ :

الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}-\{3\}$ ودالتها المشتقة :

$$f'(x)=\frac{(-2x+2)(x-3)-1\left(-x^2+2x-1\right)}{(x-3)^2}=\frac{-x^2+6x-5}{(x-3)^2}$$

6. $D_f=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$ ، $f(x)=\dfrac{2x}{(-2x+3)^2}$ :

الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$ ودالتها المشتقة :

$$f'(x)=\frac{2(-2x+3)^2-2(-2)(-2x+3).2x}{\left[(-2x+3)^2\right]^2}=\frac{2\cancel{(-2x+3)}\left[(-2x+3)+4x\right]}{\cancel{(-2x+3)}(-2x+3)^3}=\frac{4x+6}{(-2x+3)^3}$$

7. $D_f=\mathbb{R}-\{3\}$ ، $f(x)=-x+1-\dfrac{2}{x-3}$ :

الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}-\{3\}$ ودالتها المشتقة :

$$f'(x)=-1-\frac{-2\times(x-3)'}{(x-3)^2}=-1+\frac{2\times1}{(x-3)^2}=-1+\frac{2}{(x-3)^2}$$

8. $D_f=\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ ، $f(x)=\sqrt{2x-1}$ :

الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ ودالتها المشتقة :

$$f'(x)=\frac{(2x-1)'}{2\sqrt{2x-1}}=\frac{2}{2\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

9. $D_f=]3;+\infty[$ ، $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x-3}}$ :

الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $]3;+\infty[$ ودالتها المشتقة :

$$f'(x)=\frac{2\sqrt{x-3}-\dfrac{1}{\cancel{2}\sqrt{x-3}}\times\cancel{2}x}{\left(\sqrt{x-3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{x-3}-\dfrac{x}{\sqrt{x-3}}}{x-3}=\frac{\dfrac{2(x-3)-x}{\sqrt{x-3}}}{x-3}=\frac{x-6}{\sqrt{x-3}(x-3)}$$

**10.** $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{2x-1}}+3x-1$ ، $D_f=\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ :

الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ ودالتها المشتقة :

$$f'(x)=\frac{-3\times\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2x-1}\left(\sqrt{2x-1}\right)^2}+3=\frac{-3}{\sqrt{2x-1}(2x-1)}+3$$

**11.** $f(x)=(2x-3)\sqrt{3x-1}$ ، $D_f=\left[\dfrac{1}{3};+\infty\right[$ :

الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $\left]\dfrac{1}{3};+\infty\right[$ ودالتها المشتقة :

$$f'(x)=(2x-3)'\sqrt{3x-1}+\left(\sqrt{3x-1}\right)'(2x-3)=2\sqrt{3x-1}+\frac{3}{2\sqrt{3x-1}}(2x-3)=\frac{4(3x-1)+3(2x-3)}{2\sqrt{3x-1}}=\frac{18x-13}{2\sqrt{3x-1}}$$

## التمرين 05

كتابة معادلة المماس في كل حالة :

**1.** $A(2\ ;\ 0)$ و $a=1$ :

لدينا معامل توجيه المماس هو $f'(2)$ وبالتالي $f'(2)=a=1$ ، ومنه معادلة المماس :

$(T):\ y=f'(2)(x-2)+f(2)$ تصبح : $(T):\ y=x-2$ $\quad(f(2)=0)$

**2.** $A(-2\ ;\ 3)$ و $a=\dfrac{3}{2}$ :

لدينا معامل توجيه المماس هو $f'(-2)$ وبالتالي $f'(-2)=a=\dfrac{3}{2}$ ، ومنه معادلة المماس :

$(T):\ y=f'(-2)(x+2)+f(-2)$ تصبح : $(T):\ y=\dfrac{3}{2}x+6$ $\quad(f(-2)=3)$

**3.** $A(-1\ ;\ 3)$ و $a=-2$ :

لدينا معامل توجيه المماس هو $f'(-1)$ وبالتالي $f'(-1)=a=-2$ ، ومنه معادلة المماس :

$(T):\ y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$ تصبح : $(T):\ y=-2x+1$ $\quad(f(-1)=3)$

**4.** $A(2\ ;\ \sqrt{2})$ و $a=\sqrt{2}$ :

لدينا معامل توجيه المماس هو $f'(2)$ وبالتالي $f'(2)=a=\sqrt{2}$ ، ومنه معادلة المماس :

$(T):\ y=f'(2)(x-2)+f(2)$ تصبح : $(T):\ y=\sqrt{2}x-\sqrt{2}$ $\quad(f(2)=\sqrt{2})$

## التمرين 06

كتابة معادلة المماس في كل حالة :

**1.** $f(x)=\dfrac{3x-1}{2x-2}$ ، $x_0=2$ ، $D_{f'}=\mathbb{R}-\{1\}$ :

الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}-\{1\}$ ودالتها المشتقة :

$$f'(x)=\frac{3(2x-2)-2(3x-1)}{(2x-2)^2}=\frac{-4}{(2x-2)^2}$$

وبالتالي $f'(2)=-1$ ؛ ومنه معادلة المماس : $(T):\ y=f'(2)(x-2)+f(2)$

تصبح : $(T): y=-x+\frac{9}{2}$ $\left(f(2)=\frac{5}{2}\right)$

**2.** $f(x)=-x^3+2x$ ، $x_0=-3$ ، $D_{f'}=\mathbb{R}$ :

الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة : $f'(x)=-3x^2+2$

وبالتالي $f'(-3)=-25$ ؛ ومنه معادلة المماس : $(T): y=f'(-3)(x+3)+f(-3)$

تصبح : $(T): y=-25x-54$ $(f(-3)=21)$

**3.** المماس معامل توجيهه يساوي 1 ، $f(x)=\frac{x-2}{x}$ ، $D_{f'}=\mathbb{R}^*$ :

أولا نبحث عن قيمة $x_0$ ؛ الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ودالتها المشتقة : $f'(x)=\frac{1x-1(x-2)}{x^2}=\frac{2}{x^2}$

المماس معامل توجيهه يساوي 1 معناه : $f'(x_0)=1$ أي أن : $\frac{2}{x_0^2}=1$ يكافئ $x_0^2=2$

وبالتالي : $\begin{cases} x_0=\sqrt{2} \\ \text{أو} \\ x_0=-\sqrt{2} \end{cases}$ ، وهذا يعني أن المنحنى $(C)$ يقبل عند النقطة $A$ مماسين معادلتيهما :

$(T_2): y=f'(-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})+f(-\sqrt{2})$ ، $(T_1): y=f'(\sqrt{2})(x-\sqrt{2})+f(\sqrt{2})$

أي : $(T_2): y=x+\frac{\sqrt{2}+4}{\sqrt{2}}$ ، $(T_1): y=x+\frac{\sqrt{2}-4}{\sqrt{2}}$ $\left(f(\sqrt{2})=\frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}};f(-\sqrt{2})=\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}\right)$

**4.** المماس موازي للمستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة : $y=-2x+1$ ، $f(x)=x^2-1$ ، $D_{f'}=\mathbb{R}$ :

أولا نبحث عن قيمة $x_0$ ؛ الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة : $f'(x)=2x$

المماس موازي للمستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة : $y=-2x+1$ يعني أن معامل توجيه

المماس هو $-2$ ( معامل توجيه $(\Delta)$ ) وبالتالي $f'(x_0)=-2$ أي $2x_0=-2$

وهذا يكافئ : $x_0=-1$ .

ومنه معادلة المماس : $(T): y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$

تصبح : $(T): y=-2x-2$ $(f(-1)=0)$

**5.** المماس عمودي على المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة : $y=2x-1$ ، $f(x)=2x^2+1$ ، $D_{f'}=\mathbb{R}$ :

أولا نبحث عن قيمة $x_0$ ؛ الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة : $f'(x)=4x$

المماس عمودي على المستقيم $(\Delta)$ يعني أن : $2\times f'(x_0)=-1$ أي $8x_0=-1$

يكافئ : $x_0=\frac{-1}{8}$ ؛ ومنه معادلة المماس : $(T): y=f'\left(\frac{-1}{8}\right)\left(x+\frac{1}{8}\right)+f\left(\frac{-1}{8}\right)$

تصبح : $(T): y=\frac{-1}{2}x+\frac{31}{32}$ $\left(f\left(\frac{-1}{8}\right)=\frac{33}{32}\right)$

**5.** المماس موازي لمحور الفواصل ، $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$ ، $D_{f'}=\mathbb{R}-\{1\}$ :

أولا نبحث عن قيمة $x_0$ ؛ الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}-\{1\}$ ودالتها المشتقة :

المستقيمان المتوازيان يكون لهما نفس معامل التوجيه

المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ معامل توجيهه هو العدد $a$

المستقيمان المتعامدان يكون جداء معاملا توجيههما مساوي لـ $-1$

المستقيم الموازي لمحور الفواصل يكون معامل توجيهه معدوما

$$f'(x)=\frac{2x(x-1)-1\times(x^2+1)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$$

المماس موازي لمحور الفواصل معناه أن $f'(x_0)=0$ أي $\frac{{x_0}^2-2x_0-1}{(x_0-1)^2}=0$ يكافئ: ${x_0}^2-2x_0-1=0$ ....(1)

لحل المعادلة (1) نحسب المميز $\Delta$ : $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times(-1)=8$ ؛ بما أن $\Delta>0$ فإن للمعادلة (1) حلين متمايزين هما :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2+2\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2} \quad \text{و} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2-2\sqrt{2}}{2}=1-\sqrt{2}$$

وهذا يعني أن المنحنى $(C)$ يقبل عند النقطة $A$ مماسين معادلتيهما : $(T_1): y=f'\left(1+\sqrt{2}\right)\left[x-\left(1+\sqrt{2}\right)\right]+f\left(1+\sqrt{2}\right)$ ،

$$(T_2): y=f'\left(1-\sqrt{2}\right)\left[x-\left(1-\sqrt{2}\right)\right]+f\left(1-\sqrt{2}\right)$$

أي : $(T_1): y=2+2\sqrt{2}$ ، $(T_2): y=2-2\sqrt{2}$ $\left(f\left(1+\sqrt{2}\right)=2+2\sqrt{2}\,;f\left(1-\sqrt{2}\right)=2-2\sqrt{2}\right)$

## التمرين 07

**1.-** تعيين أحسن تقريب تآلفي للعدد $(-2+h)^2$ عندما ينتهي $h$ إلى 0 :

لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^2$ ، لدينا : $f(-2+h)\simeq hf'(-2)+f(-2)$

الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة : $f'(x)=2x$ ؛ وعليه : $f'(-2)=-4$

ومنه : $f(-2+h)\simeq-4h+4$ وبالتالي أحسن تقريب تآلفي هو : $(-2+h)^2\simeq-4h+4$

- تعيين قيمة تقريبية لكل من الأعداد : $(-2,04)^2$ ؛ $(-1,98)^2$ ؛ $(-2,001)^2$

$$(-2,04)^2=\left(-2+(-0,04)\right)^2\simeq-4\times(-0,04)+4\simeq4,16 \quad ; \quad (-1,98)^2\left(-2+(0,02)\right)^2\simeq-4\times(0,02)+4\simeq3,92$$

$$(-2,001)^2\left(-2+(-0,001)\right)^2\simeq-4\times(-0,001)+4\simeq4,004$$

**2.-** تعيين أحسن تقريب تآلفي للعدد $\sqrt{2+h}$ عندما ينتهي $h$ إلى 0 :

لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}_+$ بـ : $f(x)=\sqrt{x}$ ، لدينا : $f(2+h)\simeq hf'(2)+f(2)$

الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ ودالتها المشتقة : $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ؛ وعليه : $f'(2)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

ومنه : $f(2+h)\simeq\frac{1}{2\sqrt{2}}h+\sqrt{2}$ وبالتالي أحسن تقريب تآلفي هو : $\sqrt{2+h}\simeq\frac{1}{2\sqrt{2}}h+\sqrt{2}$

- تعيين قيمة تقريبية لكل من الأعداد : $\sqrt{2,04}$ ؛ $\sqrt{1,98}$ ؛ $\sqrt{2,001}$

$$\sqrt{2,04}=\sqrt{2+(0,04)}\simeq\frac{1}{2\sqrt{2}}\times(0,04)+\sqrt{2}\simeq1,428355698 \quad ; \quad \sqrt{1,98}=\sqrt{2+(-0,02)}\simeq\frac{1}{2\sqrt{2}}\times(-0,02)+\sqrt{2}\simeq1,407142495$$

$$\sqrt{2,001}=\sqrt{2+(0,01)}\simeq\frac{1}{2\sqrt{2}}\times(0,01)+\sqrt{2}\simeq1,417749096$$

**3.-** تعيين أحسن تقريب تآلفي للعدد $\frac{1}{h-1}$ عندما ينتهي $h$ إلى 0 :

لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x)=\frac{1}{x}$ ، لدينا : $f(-1+h)\simeq hf'(-1)+f(-1)$

الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ودالتها المشتقة: $f'(x)=\dfrac{-1}{x^2}$؛ وعليه: $f'(-1)=-1$

ومنه: $f(-1+h)\simeq -h-1$ وبالتالي أحسن تقريب تألفي هو: $\dfrac{1}{h-1}\simeq -h-1$

- تعيين قيمة تقريبية لكل من الأعداد: $\dfrac{-1}{0,99}$ ؛ $\dfrac{1}{-1,003}$ ؛ $\dfrac{1}{-0,93}$

$$\frac{1}{-1,003}=\frac{1}{-1+(-0,03)}\simeq -(-0,03)-1\simeq -0,97 \quad ; \quad \frac{-1}{0,99}=\frac{1}{-0,99}=\frac{1}{-1+(0,01)}\simeq -(0,01)-1\simeq -1,01$$

$$\frac{1}{-0,93}=\frac{1}{-1+(0,07)}\simeq -(0,07)-1\simeq -1,07$$

3- لدينا $f(2)=3$ ، $f'(2)=4$ و $f'(2,1)=2$ وبالتالي: أحسن تقريب تألفي عند 2 هو:

$f(2+h)\simeq hf'(2)+f(2)\simeq 4h+3$ حيث $h$ قريب من 0

وعليه: $f(2,1)=f(2+0.1)\simeq 4\times 0.1+3$ أي أن $f(2,1)\simeq 3,4$

- لدينا $f'(2,1)=2$ وبالتالي: أحسن تقريب تألفي عند 2,1 هو: $f(2,1+h)\simeq hf'(2,1)+f(2,1)\simeq 2h+3,4$ حيث $h$ قريب من 0 ؛

وعليه: $f(2,2)=f(2,1+0.1)\simeq 2\times 0.1+3,4$ أي أن $f(2,1)\simeq 3,6$

## التمرين 08

حساب مشتقة الدالة $f$ في كل حالة:

1. $f(x)=\sqrt{x^2+2}$ ، $D_f=\mathbb{R}$:

الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة: $f'(x)=\dfrac{(x^2+2)'}{2\sqrt{x^2+2}}=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$

2. $f(x)=4\left(2x^3-3\right)^7$ ، $D_f=\mathbb{R}$:

الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة: $f'(x)=4\times 7\times\left(2x^3-3\right)'\left(2x^3-3\right)^6=168x^2\left(2x^3-3\right)^6$

3. $f(x)=\sqrt{\sin x}$ ، $D_f=[0;\pi]$:

الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $]0;\pi[$ ودالتها المشتقة: $f'(x)=\dfrac{(\sin x)'}{2\sqrt{\sin x}}=\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

4. $f(x)=\sin\left[\cos\left(2x^2-1\right)\right]$ ، $D_f=\mathbb{R}$:

الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة:

$$f'(x)=\left(\cos\left(2x^2-1\right)\right)'\cos\left[\cos\left(2x^2-1\right)\right]=-\left(2x^2-1\right)'\sin\left(2x^2-1\right)\cos\left[\cos\left(2x^2-1\right)\right]=-4x\sin\left(2x^2-1\right)\cos\left[\cos\left(2x^2-1\right)\right]$$

5. $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{\cos x}}$ ، $D_f=\left]\dfrac{-\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$:

الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $\left]\dfrac{-\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ ودالتها المشتقة:

$$f'(x)=\frac{-3\left(\sqrt{\cos x}\right)'}{\left(\sqrt{\cos x}\right)^2}=\frac{-3\dfrac{(\cos x)'}{2\sqrt{\cos x}}}{\cos x}=\frac{-3\dfrac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}}{\cos x}=\frac{3\sin x}{2\sqrt{\cos x}\,\cos x}$$

**6.** $f(x)=\tan x$ ، $D_f=\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ :

الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ ودالتها المشتقة :

$\cos^2 x+\sin^2 x=1$

$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$

$$f'(x)=(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos x.\cos x-(-\sin x)\sin x}{(\cos x)^2}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\begin{cases}1+\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)^2=1+\tan^2 x\\ \dfrac{1}{\cos^2 x}\end{cases}$$

**7.** $f(x)=\sqrt{3(\cos x)^2+1}$ ، $D_f=\mathbb{R}$ :

$\sin(2x)=2\sin x.\cos x$

الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة :

$$f'(x)=\frac{\left(3(\cos x)^2+1\right)'}{2\sqrt{3(\cos x)^2+1}}=\frac{3\times 2(\cos x)'\cos x}{2\sqrt{3(\cos x)^2+1}}=\frac{-3\times 2\sin x.\cos x}{2\sqrt{3(\cos x)^2+1}}=\frac{-3\sin(2x)}{2\sqrt{3(\cos x)^2+1}}$$

## التمرين 09

الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}-\{1\}$ ودالتها المشتقة : $f'(x)=a+\dfrac{-b(x-1)'}{(x-1)^2}=a-\dfrac{b}{(x-1)^2}$

تعيين $a$ و $b$ بحيث :

**1.** $(C)$ يقبل مماسا أفقيا عند النقطة $A(2;1)$ :

النقطة $A(2;1)$ تنتمي إلى $(C)$ معناه : $f(2)=1$ $(f(2)=2a+b)$

$(C)$ يقبل مماسا أفقيا عند النقطة $A(2;1)$ معناه : $f'(2)=0$ $(f'(2)=a-b)$

وبالتالي نحل الجملة : $\begin{cases}2a+b=1\\ a-b=0\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}2a+b=1\\ a=b\end{cases}$ أي أن $\begin{cases}2a+a=1\\ a=b\end{cases}$ وبالتالي : $a=b=\frac{1}{3}$

**2.** $(C)$ يقبل مماسا عند النقطة $A(0;2)$ موازيا للمستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة : $y=2x-1$ :

النقطة $A(0;2)$ تنتمي إلى $(C)$ معناه : $f(0)=2$ $(f(0)=-b)$

$(C)$ يقبل مماسا عند النقطة $A(0;2)$ موازيا للمستقيم $(\Delta)$ معناه : $f'(0)=2$ $(f'(0)=a-b)$

وبالتالي نحل الجملة : $\begin{cases}-b=2\\ a-b=2\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}b=-2\\ a=2+b\end{cases}$ وبالتالي : $\begin{cases}b=-2\\ a=0\end{cases}$

**3.** $(C)$ يشمل النقطتان $A(2;4)$ و $A(3;4)$ :

النقطة $A(2;4)$ تنتمي إلى $(C)$ معناه : $f(2)=4$ $(f(2)=2a+b)$

النقطة $A(3;4)$ تنتمي إلى $(C)$ معناه : $f(3)=4$ $\left(f(3)=3a+\frac{b}{2}\right)$

وبالتالي نحل الجملة: $\begin{cases}2a+b=4\\3a+\dfrac{b}{2}=4\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}2a+b=4\\6a+b=8\end{cases}$ أي أن $6a+b-(2a+b)=8-4$

ومنه: $a=1$ وبتعويضها في $2a+b=4$ نجد $b=2$ ؛ والتالي: $\begin{cases}b=2\\a=1\end{cases}$

## التمرين 10

1. شفعية الدالة: الدالة فردية لأن: تمثيل المنحنى $(C)$ متناظر بالنسبة إلى مبدأ المعلم $O$ .

2. جدول تغيرات الدالة $f$ :

| $x$ | $-2$ | | $-1$ | | $1$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-2$ | ↗ | $2$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $2$ |

3. $f'(-1)$ ، $f'(1)$ ، $f'(0)$ و $f''(0)$:

- لدينا $f(-1)$ و $f(1)$ قيمتان حديتان محليتان للدالة $f$ وبالتالي: $f'(-1)=f'(1)=0$

- لدينا $f'(0)$ هو معامل توجيه المماس $(T_1)$ ، وبالتالي: $f'(0)=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{6-0}{-2-0}=-3$

- لدينا المماس $(T_1)$ يخترق المنحنى $(C)$ في النقطة $O$ ومنه $O$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى $(C)$ وهذا يعني أن $f''(0)=0$.

4. لدينا $f'\left(\dfrac{-3}{2}\right)$ هو معامل توجيه المماس $(T_2)$ الذي يشمل النقطتان $A\left(\dfrac{-3}{2};\dfrac{9}{8}\right)$ و $C\left(\dfrac{-1}{2};\dfrac{39}{8}\right)$

وبالتالي: $f'\left(\dfrac{-3}{2}\right)=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{\frac{39}{8}-\frac{9}{8}}{\frac{-1}{2}-\frac{-3}{2}}=\dfrac{15}{4}$

5. معادلة المماس: $(T_1): y=f'(0)(x-0)+f(0)$ تصبح: $(T_1): y=-3x$ $(f(0)=0)$

- معادلة المماس: $(T_2): y=f'\left(\dfrac{-3}{2}\right)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)+f\left(\dfrac{-3}{2}\right)$ تصبح: $(T_2): y=\dfrac{15}{4}x+\dfrac{27}{4}$ $\left(f\left(\dfrac{-3}{2}\right)=\dfrac{9}{8}\right)$

6. جدول إشارة $f'(x)$:

| $x$ | $-2$ | | $-1$ | | $1$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

## التمرين 11

I. دراسة إشارة $g(x)$ على $[-3;1]$ :

لدينا $g(x)=0$ تكافئ $x^2+2x=0$ أي $x(x+2)=0$ وهذا يعني أن $\begin{cases}x=0\\ \text{أو}\\x=-2\end{cases}$

وبالتالي إشارة $g(x)$ على $[-3;1]$ تكون:

| $x$ | $-3$ | | $-2$ | | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

II ـ 1. من أجل كل $x \in [-3;1]$ لدينا : $1+\dfrac{5x+5}{x^2+2x+2}=\dfrac{x^2+2x+2+5x+5}{x^2+2x+2}=\dfrac{x^2+7x+7}{x^2+2x+1+1}=\dfrac{x^2+7x+7}{(x+1)^2+1}=f(x)$

و منه من أجل كل $x \in [-3;1]$ : $f(x)=1+\dfrac{5x+5}{x^2+2x+2}$

2. أ. الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $]-3;1[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x)=\frac{5(x^2+2x+2)-(2x+2)(5x+5)}{(x^2+2x+2)^2}=\frac{-5(-x^2-2x-2+2x^2+4x+2)}{(x^2+2x+2)^2}=\frac{-5(x^2+2x)}{(x^2+2x+2)^2}=\frac{-5g(x)}{(x^2+2x+2)^2}$$

و منه من أجل كل $]-3;1[$ : $f'(x)=\dfrac{-5g(x)}{(x^2+2x+2)^2}$

ب ـ إشارة $f'(x)$ :

| $x$ | $-3$ | | $-2$ | | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-5g(x)$ | $-$ | $\|$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $(x^2+2x+2)^2$ | $+$ | $\|$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | $-$ | $\|$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

ـ إتجاه تغير الدالة $f$ : ـ الدالة $f$ متناقصة تماما على المجالين $[-3;-2]$ و $[0;1]$ .

ـ الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $[-2;0]$

ـ جدول تغير الدالة $f$ :

| $x$ | $-3$ | | $-2$ | | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-1$ | ↘ | $\frac{-3}{2}$ | ↗ | $\frac{7}{2}$ | ↘ | $3$ |

3. أ. معادلة المماس $(\Delta)$ :

$(\Delta): y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$ تصبح : $(\Delta): y=5x+6$ $\left(f'(-1)=5 ; f(-1)=1\right)$

ب. وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$ : ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$

لدينا :

$$f(x)-y=1+\frac{5x+5}{(x+1)^2+1}-5x-6=-5x-5+\frac{5x+5}{(x+1)^2+1}=(5x+5)\left[-1+\frac{1}{(x+1)^2+1}\right]=(5x+5)\frac{-(x+1)^2}{(x+1)^2+1}$$

جدول الإشارة :

$5x+5=0$ تكافئ $x=-1$

و $-(x+1)^2=0$ تكافئ $x=-1$

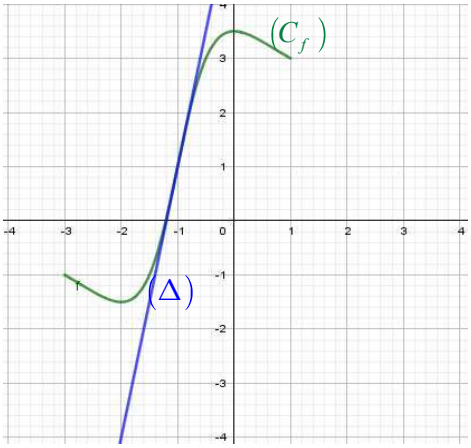
من الجدول نجد أن :

- $(C_f)$ يقع فوق $(\Delta)$ لما: $x \in [-3;-1]$
- $(C_f)$ يقع تحت $(\Delta)$ لما: $x \in [-1;1]$
- المماس $(\Delta)$ يخترق $(C_f)$ لما: $x = -1$

| $x$ | $-3$ | | $-1$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $5x+5$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ |
| $-(x+1)^2$ | $-$ | $-$ | $0$ | $-$ | $-$ |
| $(x+1)^2+1$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)-y$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ |

ج. الاستنتاج : بما أن $(\Delta)$ يخترق $(C_f)$ لما $x = -1$ فإن $(C_f)$ يقبل نقطة انعطاف إحداثياها $A(-1;1)$ .

1. الإنشاء :




## التمرين 12

1. تحديد معامل توجيه المستقيم $(OA)$ :

لدينا النقطتان $O$ و $A(-3;9)$ تنتميان إلى المستقيم $(OA)$

و بالتالي معامل توجيهه هو : $-3$ لأن : $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{9-0}{-3-0}=-3$

2. أ. تحديد $a$ ، $b$ ، $c$ و $d$ :

الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $[-3;3]$ ودالتها المشتقة : $f'(x)=3ax^2+2bx+c$

- لدينا النقطة $O$ تنتمي إلى $\mathcal{C}$ معناه $f(0)=0$ ومنه : $d=0$
- معامل توجيه المماس $(OA)$ هو $-3$ معناه $f'(0)=-3$ ومنه : $c=-3$
- لدينا النقطة $A$ تنتمي إلى $\mathcal{C}$ معناه $f(-3)=9$ ومنه : $-27a+9b=0$
- يقبل في النقطة $B$ مماسا أفقيا معناه $f'(1)=0$ ومنه : $3a+2b=3$

يبقى أن نحل الجملة $\begin{cases}-27a+9b=0\\3a+2b=3\end{cases}$ التي تكافئ $\begin{cases}-27a+9b=0\\27a+18b=27\end{cases}$ ، ومنه $27a+18b-27a+9b=27$

و عليه فإن $b=1$ وبتعويضها في $3a+2b=3$ نجد $a=\dfrac{1}{3}$ ؛ وبالتالي $\boxed{a=\dfrac{1}{3}\ ،\ b=1\ ،\ c=-3\ ،\ d=0}$

ب. لدينا : $f'(x)=3ax^2+2bx+c=x^2+2x-3$

لتحليل $f'(x)$ نحل المعادلة $x^2+2x-3=0$....(2) ؛ مميز هذه المعادلة هو : $\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times1\times(-3)=16$

و بالتالي للمعادلة (2) حلين متمايزين هما : $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-2+4}{2}=1$ و $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-2-4}{2}=-3$

ومنه : $f'(x)=a(x-x_1)(x-x_2)=(x-1)(x+3)$

ـ لدينا جدول إشارة $f'(x)$ على $[-3;3]$ الآتي :

| $x$ | $-3$ | | $1$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $(x-1)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $(x+3)$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

من الجدول نجد أن :

ـ الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $[1;3]$ .

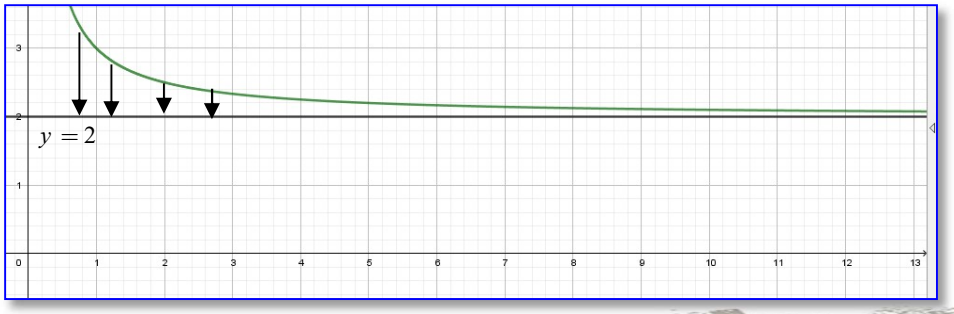
ـ الدالة $f$ متناقصة تماما على المجال $[-3;1]$ .

## نهاية منتهية عند اللانهاية

**تعريف :** $f$ دالة معرفة على مجال من الشكل $]x_0;+\infty[$ $(]-\infty;x_0[)$ و $l$ عدد حقيقي.

القول أن نهاية $f$ عند $+\infty$ $(-\infty)$ هي $\ell$ يعني أن كل مجال مفتوح شامل للعدد $\ell$ يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل $x$ كبير (صغير) بالقدر الكافي. نكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell\right)$ ونقرأ $f(x)$ يؤول إلى $\ell$ لما يؤول $x$ إلى $+\infty$ $(-\infty)$.

**التفسير البياني :** منحنى الدالة $f$ يقبل مستقيما مقاربا أفقيا ( موازي لمحور الفواصل ) بجوار $+\infty$ $(-\infty)$ معادلته : $y=\ell$ .




## نهاية غير منتهية عند اللانهاية

**تعريف 1:** $f$ دالة معرفة على مجال من الشكل $]x_0;+\infty[$ $(]-\infty;x_0[)$ .

القول أن نهاية $f$ عند $+\infty$ $(-\infty)$ هي $+\infty$ يعني أن كل مجال من الشكل $]A;+\infty[$ $(A\in\mathbb{R})$ يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل $x$ كبير (صغير) بالقدر الكافي. نكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\right)$ ونقرأ $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ لما يؤول $x$ إلى $+\infty$ $(-\infty)$ .

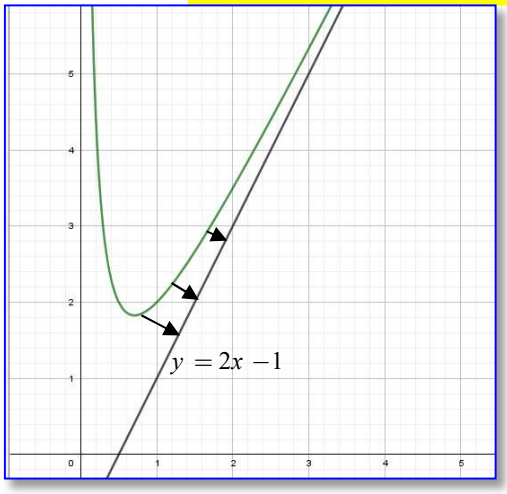
**تعريف 2:** $f$ دالة معرفة على مجال من الشكل $]x_0;+\infty[$ $(]-\infty;x_0[)$ .

القول أن نهاية $f$ عند $+\infty$ $(-\infty)$ هي $+\infty$ يعني أن كل مجال من الشكل $]-\infty;B[$ $(B\in\mathbb{R})$ يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل $x$ كبير (صغير) بالقدر الكافي. نكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty\right)$ ونقرأ $f(x)$ يؤول إلى $-\infty$ لما يؤول $x$ إلى $+\infty$ $(-\infty)$ .

**المستقيم المقارب المائل :** ـ ليكن $(C_f)$ التمثيل البياني لدالة $f$ في معلم وليكن $(\Delta)$ المستقيم ذو المعادلة: $y=ax+b$ ، القول أن المستقيم $(\Delta)$ مستقيم مقارب للمنحنى $(C_f)$ عند $+\infty$ ( على الترتيب عند $-\infty$ ) يعني أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ ( على الترتيب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ )

ـ إذا كانت الدالة $f$ معرفة كما يلي: $f(x)=ax+b+h(x)$

مع $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=0$ فإن المستقيم ذا المعادلة $y=ax+b$ هو مستقيم مقارب للمنحنى الممثل للدالة $f$ عند $+\infty$ أو $-\infty$ .



## نهاية منتهية عند عدد حقيقي

**تعريف :** $f$ دالة معرفة على مجموعة من الشكل $]b;x_0[\cup]x_0;a[$ و $\ell$ عدد حقيقي.

القول أن نهاية $f$ عند $x_0$ هي $\ell$ يعني أن كل مجال مفتوح شامل للعدد $\ell$ يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل $x$ قريب بالقدر الكافي من $x_0$. نكتب $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ ونقرأ $f(x)$ يؤول إلى $\ell$ لما يؤول $x$ إلى $x_0$.

## نهاية غير منتهية عند عدد حقيقي

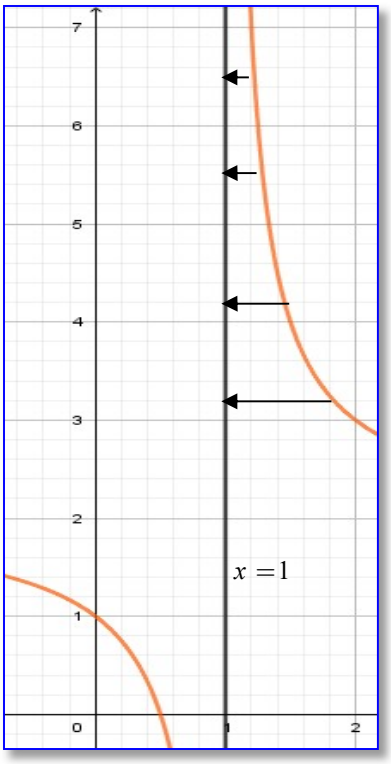
**تعريف 1:** $f$ دالة معرفة على مجموعة من الشكل $]b;x_0[\cup]x_0;a[$.

القول أن نهاية $f$ عند $x_0$ هي $+\infty$ يعني أن كل مجال من الشكل $]A;+\infty[$ $(A\in\mathbb{R})$ يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل $x$ قريب بالقدر الكافي من $x_0$. نكتب $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ونقرأ $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ لما يؤول $x$ إلى $x_0$.

**تعريف 2:** $f$ دالة معرفة على مجموعة من الشكل $]b;x_0[\cup]x_0;a[$.

القول أن نهاية $f$ عند $x_0$ هي $-\infty$ يعني أن كل مجال من الشكل $]-\infty;B[$ $(B\in\mathbb{R})$ يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل $x$ قريب بالقدر الكافي من $x_0$. نكتب $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$

ونقرأ $f(x)$ يؤول إلى $-\infty$ لما يؤول $x$ إلى $x_0$.




**التفسير البياني :** ليكن $(C_f)$ التمثيل البياني لدالة $f$ في معلم.

القول أن المستقيم ذو المعادلة $x=a$ مستقيم مقارب للمنحنى $(C_f)$

يعني أن نهاية الدالة $f$ عند $x_0$ (من اليسار أو من اليمين) هي $+\infty$ أو $-\infty$.

$f$ و $g$ دالتان. $a$ يمثل عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$.

**نهاية مجموع دالتين :**

| $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ | $l\in\mathbb{R}$ | $l\in\mathbb{R}$ | $l\in\mathbb{R}$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ | $l'\in\mathbb{R}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)$ | $l+l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | ح ع ت | $-\infty$ |

**نهاية جداء دالتين :**

| $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ | $l\in\mathbb{R}$ | $l>0$ | $l>0$ | $l<0$ | $l<0$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ | $l'\in\mathbb{R}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\times g(x)\big)$ | $l\times l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | ح ع ت |

**نهاية حاصل قسمة دالتين :**

| $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ | $l\in\mathbb{R}$ | $l$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $0$ | $\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ | $l'\in\mathbb{R}^*$ | $\infty$ | $l'>0$ | $l'<0$ | $l'>0$ | $l'<0$ | $0$ | $\infty$ | $0^+$ | $0^-$ | $0^+$ | $0^-$ |
| $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$ | $\dfrac{l}{l'}$ | $0$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | ح ع ت | ح ع ت | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

حيث : ☜ ح ع ت هي إختصار للجملة : "**حالة عدم التعيين**".

☜ $0^+$ $\left(0^-\right)$ هي نهاية من يمين الصفر ( يسار الصفر ) .

**نهاية كثير حدود عند اللانهاية :** النهاية عند $+\infty$ ( $-\infty$ ) لدالة كثير حدود هي نهاية حدها الأعلى درجة عند $+\infty$ ( $-\infty$ ) .

**نهاية دالة ناطقة عند اللانهاية :** النهاية عند $+\infty$ ( $-\infty$ ) لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة عند $+\infty$ ( $-\infty$ ) .

**ملاحظة :** ☜ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$ حيث $n$ عدد طبيعي غير معدوم .

☜ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=\begin{cases}+\infty\ ;\ n \text{ عدد زوجي}\\ -\infty\ ;\ n \text{ عدد فردي}\end{cases}$ حيث $n$ عدد طبيعي غير معدوم .

☜ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}|x|=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}|x|=\lim\limits_{x\to-\infty}-x=+\infty$

☜ $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 0}}\dfrac{1}{x}=+\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{<\\ x\to 0}}\dfrac{1}{x}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ .

**نهاية دالة مركبة :** $a$ ، $b$ و $c$ تمثل أعدادا حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$ . $u$ ، $v$ و $f$ دوال حيث $f=v\circ u$.

إذا كانت $\lim\limits_{x\to a} u(x)=b$ و إذا كانت $\lim\limits_{x\to b} v(x)=c$ فإن $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c$

☜ $f$، $g$ و $h$ دوال و $l$ عدد حقيقي. إذا كانت $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to\pm\infty} h(x)=l$ و إذا كان من أجل $x$ كبير بالقدر الكافي $g(x)\le f(x)\le h(x)$ فإن $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=l$.

☜ $f$ و $g$ دالتان. إذا كانت $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=+\infty$ و إذا كان من أجل $x$ كبير بالقدر الكافي $f(x)\ge g(x)$ فإن $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$.

☜ $f$ و $g$ دالتان. إذا كانت $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=-\infty$ و إذا كان من أجل $x$ كبير بالقدر الكافي $f(x)\le g(x)$ فإن $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-\infty$.

☜ $f$، $g$ و $h$ دوال، $l$ و $a$ عددان حقيقيان. إذا كانت $\lim\limits_{x\to a} g(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to a} h(x)=l$ و إذا كان من أجل $x$ كبير بالقدر الكافي $g(x)\le f(x)\le h(x)$ فإن $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$.

☜ $f$ و $g$ دالتان و $a$ عدد حقيقي. إذا كانت $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$ و إذا كان من أجل $x$ كبير بالقدر الكافي $f(x)\ge g(x)$ فإن $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$.

☜ $f$ و $g$ دالتان و $a$ عدد حقيقي. إذا كانت $\lim\limits_{x\to a} g(x)=-\infty$ و إذا كان من أجل $x$ كبير بالقدر الكافي $f(x)\le g(x)$ فإن $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$.

# تمارين

## التمرين 01

أحسب نهاية الدالة $f$ عند $a$ في كل حالة:

1. $f(x)=-x^3+2x^2-x+1$ ، $a=-\infty$ ؛ $a=+\infty$.
2. $f(x)=|x|-1$ ، $a=-\infty$.
3. $f(x)=\dfrac{x^2-3x^3+1}{x-1}$ ، $a=-\infty$.
4. $f(x)=\dfrac{x^2-3x^3+1}{x^4-1}$ ، $a=+\infty$.
5. $f(x)=\dfrac{x^2-3x^3+1}{x^3-1}$ ، $a=\pm\infty$.
6. $f(x)=\dfrac{x^2-2x-1}{(x^2-1)^2}$ ، $a=1$ ؛ $a=-1$.
7. $f(x)=1+\dfrac{x^2+7x+7}{(x+1)^2+1}$ ، $a=\pm\infty$.

## التمرين 02

أحسب نهاية الدالة $f$ عند أطراف مجموعة تعريفها $D_f$ مع تحديد المستقيمات المقاربة في كل حالة:

1. $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$.
2. $f(x)=\dfrac{x-3}{4-2x}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$.
3. $f(x)=\dfrac{x+3x^2-1}{x^2-1}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$.
4. $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-x-6}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{-2;3\}$.
5. $f(x)=\dfrac{-1}{x+1}+2x-1$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$.
6. $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-4x+4}-x+1$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$.

## التمرين 03

بإستعمال التحليل أحسب نهاية الدالة $f$ عند $a$ في كل حالة:

1. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}$ ، $a=2$.
2. $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-5}{x^2-1}$ ، $a=1$.
3. $f(x)=\dfrac{x^3+27}{x+3}$ ، $a=-3$.
4. $f(x)=\dfrac{2x^3+3x^2-x-2}{x^2-x-2}$ ، $a=-1$.
5. $f(x)=\dfrac{2x^3-12x+18}{9-x^2}$ ، $a=-3$.

## التمرين 04

أحسب النهايات التالية:

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+3}-x$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-\sqrt{x^2+3}$.
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+3}-\sqrt{x-4}$.
5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2x^2-x+1}-\sqrt{x^2+3}$.
6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}$.
7. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x+12}-4}{x-4}$.
8. $\lim\limits_{x\to11}\dfrac{5-\sqrt{3x-8}}{2x-22}$.
9. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos x+1}{2x-2\pi}$.
10. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{\sin^2 x}$.
11. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

## التمرين 05

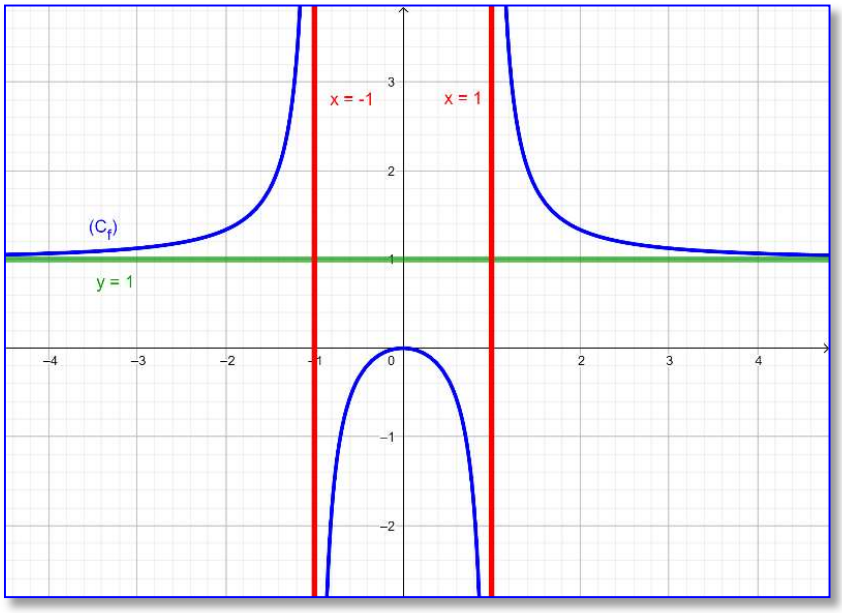
باستعمال مبرهنات النهاية بالمقارنة عين النهايات التالية :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}$ .
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sin x}{x^2+1}$ .
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+\cos x}{x+1}$ .
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}2x+\sin x$ .

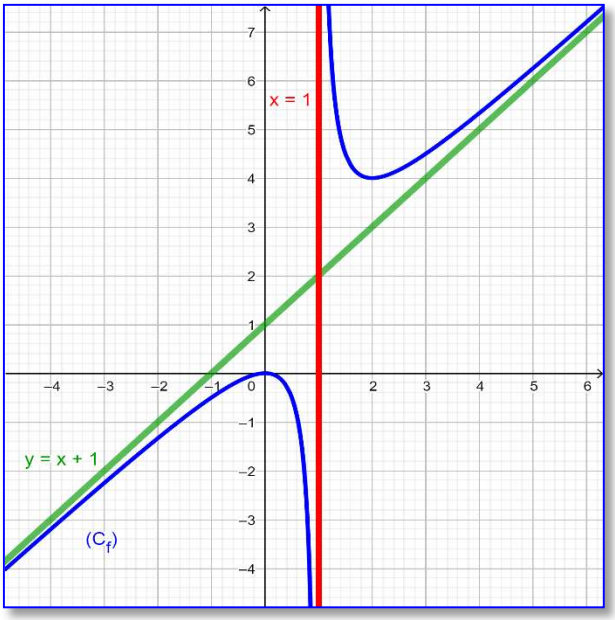
## التمرين 06

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$

$(C_f)$ تمثيل لمنحنى الدالة $f$ المعرفة على $D_f$ . عين في كل حالة $D_f$ و خمن النهايات عند أطراف مجموعة التعريف $D_f$




- الشكل 01 -




- الشكل 02 -

# الحلـــول

## التمرين 01

$|x|=\begin{cases} x & ;x\geq 0 \\ -x & ;x\leq 0 \end{cases}$

1. $f(x)=-x^3+2x^2-x+1$ ، $a=-\infty$ ؛ $a=+\infty$ :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} -x^3=-\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} -x^3=+\infty$

2. $f(x)=|x|-1$ ، $a=-\infty$ : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} |x|-1=\lim\limits_{x\to-\infty} -x-1=+\infty$

3. $f(x)=\dfrac{x^2-3x^3+1}{x-1}$ ، $a=-\infty$ : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-3x^3+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3x^3}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} -3x^2=-\infty$

4. $f(x)=\dfrac{x^2-3x^3+1}{x^4-1}$ ، $a=+\infty$ : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-3x^3+1}{x^4-1}=\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3x^3}{x^4}=\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3}{x}=0$

5. $f(x)=\dfrac{x^2-3x^3+1}{x^3-1}$ ، $a=\pm\infty$ : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2-3x^3+1}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x^3}=\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x}=0$

6. $f(x)=\dfrac{x^2-2x-1}{(x^2-1)^2}$ ، $a=1$ ؛ $a=-1$ :

$\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{2}{(x^2-1)^2}=+\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1} \dfrac{-2}{(x^2-1)^2}=-\infty$

$(x^2-1)^2\to 0^+$ ، $(x^2-1)^2\to 0^+$

7. $f(x)=1+\dfrac{x^2+7x+7}{(x+1)^2+1}$ ، $a=\pm\infty$ : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} 1+\dfrac{x^2+7x+7}{(x+1)^2+1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty} 1+\dfrac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=\lim\limits_{x\to\pm\infty} 1+1=2$

## التمرين 02

1. $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$ :

- عند $-\infty$ و $+\infty$ : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}}=1$

و بالتالي منحنى الدالة $f$ يقبل مستقيما مقاربا أفقيا ( موازي لمحور الفواصل ) بجوار $\pm\infty$ معادلته : $y=1$ .

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x-1$ | − | 0 | + |

- عند العدد 1 بقيم أكبر ( يمين العدد 1 ) : $\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ >}} \dfrac{2}{x-1}=+\infty$ ، $x-1\to 0^+$

- عند العدد 1 بقيم أصغر ( يسار العدد 1 ) : $\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ <}} \dfrac{2}{x-1}=-\infty$ ، $x-1\to 0^-$

و بالتالي منحنى الدالة $f$ يقبل مستقيما مقاربا عموديا ( موازي لمحور التراتيب ) معادلته : $x=1$.

2. $f(x)=\dfrac{x-3}{4-2x}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$ :

- عند $-\infty$ و $+\infty$ : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\cancel{x}}{-2\cancel{x}}=\dfrac{-1}{2}$

و بالتالي منحنى الدالة $f$ يقبل مستقيما مقاربا أفقيا ( موازي لمحور الفواصل ) بجوار $\pm\infty$ معادلته : $y=\dfrac{-1}{2}$ .

| $x$ | $-\infty$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $4-2x$ | + | 0 | − |

- عند العدد 2 بقيم أكبر (يمين العدد 2): $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \dfrac{1}{4-2x}=+\infty$ ($4-2x\to 0^-$)

- عند العدد 2 بقيم أصغر (يسار العدد 2): $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \dfrac{-1}{4-2x}=-\infty$ ($4-2x\to 0^+$)

و بالتالي منحنى الدالة $f$ يقبل مستقيما مقاربا عموديا (موازي لمحور التراتيب) معادلته: $x=1$.

3. $f(x)=\dfrac{x+3x^2-1}{x^2-1}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$:

- عند $-\infty$ و $+\infty$: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3x^2}{x^2}=3$

و بالتالي منحنى الدالة $f$ يقبل مستقيما مقاربا أفقيا (موازي لمحور الفواصل) بجوار $\pm\infty$ معادلته: $y=3$ .

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $x^2-1$ | + | 0 | − | 0 + |

- عند يمين العدد 1: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{3}{x^2-1}=+\infty$ ($x^2-1\to 0^+$)

- عند يسار العدد 1: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{3}{x^2-1}=-\infty$ ($x^2-1\to 0^-$)

- عند يمين العدد $-1$: $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \dfrac{1}{x^2-1}=-\infty$ ($x^2-1\to 0^-$)

- عند يسار العدد $-1$: $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \dfrac{3}{x^2-1}=+\infty$ ($x^2-1\to 0^+$)

و بالتالي منحنى الدالة $f$ يقبل مستقيمان مقاربان عموديان معادلتيهما: $x=1$ و $x=-1$.

4. $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-x-6}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{-2;3\}$:

- عند $-\infty$ و $+\infty$: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x}=0$

و بالتالي منحنى الدالة $f$ يقبل مستقيما مقاربا أفقيا بجوار $\pm\infty$ و الذي هو مستقيم محور الفواصل ($y=3$).

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $x^2-x-6$ | + | 0 | − | 0 + |

- عند يمين العدد 3: $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} \dfrac{2}{x^2-x-6}=+\infty$ ($x^2-x-6\to 0^+$)

- عند يسار العدد 3: $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} \dfrac{2}{x^2-x-6}=-\infty$ ($x^2-x-6\to 0^-$)

- عند يمين العدد $-2$: $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} \dfrac{-3}{x^2-x-6}=+\infty$ ($x^2-x-6\to 0^-$)

- عند يسار العدد $-2$: $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} \dfrac{-3}{x^2-x-6}=-\infty$ ($x^2-x-6\to 0^+$)

و بالتالي منحنى الدالة $f$ يقبل مستقيمان مقاربان عموديان معادلتيهما: $x=3$ و $x=-2$.

5. $f(x)=\dfrac{-1}{x+1}+2x-1$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$ :

- عند $-\infty$ و $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{x+1}+2x-1=+\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-1}{x+1}+2x-1=-\infty$ . ($\dfrac{-1}{x+1}\to 0$)

لدينا: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-1}{x+1}=0$ و $f(x)=\dfrac{-1}{x+1}+2x-1$

و بالتالي المستقيم ذو المعادلة $y=2x-1$ هو مستقيم مقارب مائل لمنحنى الدالة $f$ بجوار $\pm\infty$ .

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x+1$ | $-$ | $0$ | $+$ |

- عند يمين العدد $-1$ : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \dfrac{-1}{\underbrace{x+1}_{0^+}}-3=-\infty$

- عند يسار العدد $-1$ : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \dfrac{-1}{\underbrace{x+1}_{0^-}}-3=+\infty$

و بالتالي منحنى الدالة $f$ يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته : $x=-1$.

6. $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-4x+4}-x+1$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$ :

- عند $-\infty$ و $+\infty$ :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x^2}-x+1=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\cancel{x}^{0}}-x+1=-\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{x^2}-x+1=\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{\cancel{x}^{0}}-x+1=+\infty$ .

لدينا : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2}{x}=0$ و $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-4x+4}-x+1$

و بالتالي المستقيم ذو المعادلة $y=-x+1$ هو مستقيم مقارب مائل لمنحنى الدالة $f$ بجوار $\pm\infty$ .

| $x$ | $-\infty$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x^2-4x+4$ | $+$ | $0$ | $+$ |

- عند العدد $2$ : $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4}{x^2-4x+4}-1=+\infty$

( يمكن الإستغناء عن جدول الإشارة و ذلك بملاحظة أن $x^2-4x+4=(x-2)^2$ )

و بالتالي منحنى الدالة $f$ يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته : $x=2$.

## التمرين 03

**سنحاول أن نتنوع في الطرق لتحليل كثيرات الحدود**

**لماذا نستعمل التحليل ؟ : بطبيعة الحال عند انعدام كثيري الحدود للبسط و المقام عند نفس العدد يعني أنه جذر مشترك لهما و للتخلص منه نقوم بالتحليل .**

1. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}$ ، $a=2$ :

لدينا $x_1=2$ جذر لكثير الحدود $x\mapsto x^2-3x+2$ ، وليكن $x_2$ الجذر الثاني و بالتالي : $x_1\times x_2=2x_2=\dfrac{c}{a}=2$

ومنه $x_2=1$ وعليه : $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$ ، وهذا يعني أن :

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\cancel{(x-2)}(x-1)}{\cancel{x-2}}=\lim\limits_{x\to 2} x-1=1$

2. $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-5}{x^2-1}$ ؛ $a=1$ :

سنستعمل القسمة الإقليدية ؛ لدينا 1 جذر لكثير الحدود $x\mapsto 2x^2+3x-5$ و بالتالي يتم إجراء القسمة على $x-1$ :

$$\begin{array}{r|l} \cancel{2x^2}+3x-5 & x-1 \\ \hline -\cancel{2x^2}-2x & \\ \hline 5x-5 & 2x+5 \\ \hline -5x-5 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

و بالتالي : $2x^2+3x-5=(x-1)(2x+5)$

ولدينا $x^2-1=(x-1)(x+1)$ ، وهذا يعني أن :

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x+5)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+5}{x+1}=\frac{7}{2}$$

3. $f(x)=\dfrac{x^3+27}{x+3}$ ، $a=-3$ :

**الطريقة الأولى :** لدينا : $x^3+27=x^3-(-3)^3=(x+3)\left(x^2-3x+(-3)^2\right)=x^3+27=(x+3)(x^2-3x+9)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

وبالتالي : $\lim_{x\to -3} f(x)=\lim_{x\to -3}\dfrac{(x+3)(x^2-3x+9)}{x+3}=\lim_{x\to -3} x^2-3x+9=27$

**الطريقة الثانية :** نستعمل طريقة المطابقة ؛ لدينا $-3$ جذر لكثير الحدود $x\mapsto x^3+27$ وبالتالي توجد أعداد حقيقية $b$ , $c$ بحيث :

$x^3+27=(x+3)(x^2+bx+c)\ldots(i)$ والتي تكافئ :

$$x^3+27=x^3+(3+b)x^2+(c+3b)x+3c$$

بالمطابقة ( نطابق بين معاملات الحدود ذات نفس الدرجة ) نجد : $\begin{cases}3+b=0\ldots(1)\\ c+3b=0\ldots(2)\\ 3c=27\quad\ldots(3)\end{cases}$ ؛ من المعادلتين $(1)$ و $(3)$ نجد أن $b=-3$ و $c=9$ وتبقى

المعادلة $(2)$ للتحقق من صحة القيم .

وبالتالي بعويضهم في المساواة $(i)$ يصبح لدينا : $x^3+27=(x+3)(x^2-3x+9)$

ومنه : $\lim_{x\to -3} f(x)=\lim_{x\to -3}\dfrac{(x+3)(x^2-3x+9)}{x+3}=\lim_{x\to -3} x^2-3x+9=27$

4. $f(x)=\dfrac{2x^3+3x^2-x-2}{x^2-x-2}$ ، $a=-1$ :

لدينا $x_1=-1$ جذر لكثير الحدود $x\mapsto x^2-x-2$ ، وليكن $x_2$ الجذر الثاني وبالتالي : $x_1\times x_2=-x_2=\dfrac{c}{a}=-2$

ومنه $x_2=2$ وعليه : $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$ ، وبالنسبة لتحليل كثير الحدود $x\mapsto 2x^3+3x^2-x-2$ سنستعمل طريقة القسمة الاقليدية ولكون $-1$ جذر لكثير الحدود $x\mapsto 2x^3+3x^2-x-2$ نجري القسمة على $x+1$ :

| | |
|---|---|
| $2x^3+3x^2-x-2$ | $x+1$ |
| $-(2x^3+2x^2)$ | |
| $x^2-x-2$ | $2x^2+x-2$ |
| $-(x^2+x)$ | |
| $-2x-2$ | |
| $-(-2x-2)$ | |
| $0$ | |

وبالتالي : $2x^3+3x^2-x-2=(x+1)(2x^2+x-2)$

ومنه : $\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(2x^2+x-2)}{(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to -1}\dfrac{2x^2+x-2}{x-2}=\dfrac{1}{3}$

.5 $f(x)=\dfrac{2x^3-12x+18}{9-x^2}$ ، $a=-3$ :

آخر طريقة سنستعملها هي طريقة هرنر ؛ لدينا $-3$ جذر لكثير الحدود $x \mapsto 2x^3-12x+18$ و بالتالي توجد أعداد حقيقية $h_1$ , $h_2$ و $h_3$ بحيث :

$$2x^3-12x+18=(x+3)\left(h_1x^2+h_2x+h_3\right)\ldots(E)$$

و منه لدينا :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $a=2$ | $b=0$ | $c=-12$ | $d=18$ |
| $\alpha=-3$ | | $-6$ | $18$ | $-18$ |
| | $h_1=2$ | $h_2=-6$ | $h_3=6$ | $0$ |

و منه المساواة $(E)$ تصبح : $2x^3-12x+18=(x+3)\left(2x^2-6x+6\right)$ ؛ ولدينا $9-x^2=(3-x)(3+x)$

وعليه : $\lim\limits_{x\to-3} f(x)=\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{(x+3)\left(2x^2-6x+6\right)}{(x+3)(3-x)}=\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x^2-6x+6}{3-x}=7$ .

## التمرين 04

.1 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x+1}$ :

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2}=\lim_{x\to-\infty}|x|=\lim_{x\to-\infty}-x=+\infty$$

.2 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+3}-x$ :

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+3}-x=+\infty \quad (+\infty-(-\infty))$$

.3 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-\sqrt{x^2+3}$ :

$$\lim_{x\to+\infty}x^2-\sqrt{x^2+3}=\lim_{x\to+\infty}x^2-\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}x^2-\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}x^2-|x|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^2-x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(x-\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}\right)=+\infty \quad (+\infty,\ +\infty,\ 0)$$

تم إستعمال المرافق لإبراز المتطابقة الشهيرة :

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

.4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+3}-\sqrt{x-4}$ :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+3}-\sqrt{x-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-4}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-4}\right)}{\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-4}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+3-(x-4)}{\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-4}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{7}{\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-4}\right)}=0 \quad (+\infty,\ 0)$$

.5 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2x^2-x+1}-\sqrt{x^2+3}$ :

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{2x^2-x+1}-\sqrt{x^2+3}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2\left(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}|x|\sqrt{2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-|x|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}-x\sqrt{2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{2x^2-x+1}-\sqrt{x^2+3}=\lim_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}\right)=+\infty$$

($x\to-\infty$, $-\infty$; $-\sqrt{2}+1$)

6. $\lim_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}$ :

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{x+9}-3\right)\left(\sqrt{x+9}+3\right)}{x\left(\sqrt{x+9}+3\right)}=\lim_{x\to0}\frac{x+9-9}{x\left(\sqrt{x+9}+3\right)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x\left(\sqrt{x+9}+3\right)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x+9}+3}=\frac{1}{6}$$

7. $\lim_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x+12}-4}{x-4}$ :

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x+12}-4}{x-4}=\lim_{x\to4}\frac{\left(\sqrt{x+12}-4\right)\left(\sqrt{x+12}+4\right)}{(x-4)\left(\sqrt{x+12}+4\right)}=\lim_{x\to4}\frac{x+12-16}{(x-4)\left(\sqrt{x+12}+4\right)}=\lim_{x\to4}\frac{x-4}{(x-4)\left(\sqrt{x+12}+4\right)}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{1}{\sqrt{x+12}+4}=\frac{1}{8}$$

8. $\lim_{x\to11}\dfrac{5-\sqrt{3x-8}}{2x-22}$ :

$$\lim_{x\to11}\frac{5-\sqrt{3x-8}}{2x-22}=\lim_{x\to11}\frac{\left(5-\sqrt{3x-8}\right)\left(5+\sqrt{3x-8}\right)}{(2x-22)\left(5+\sqrt{3x-8}\right)}=\lim_{x\to11}\frac{25-(3x-8)}{(2x-22)\left(5+\sqrt{3x-8}\right)}=\lim_{x\to11}\frac{-3x+33}{(2x-22)\left(5+\sqrt{3x-8}\right)}$$

$$=\lim_{x\to11}\frac{-3(x-11)}{2(x-11)\left(5+\sqrt{3x-8}\right)}$$

$$=\lim_{x\to11}\frac{-3}{2\left(5+\sqrt{3x-8}\right)}=\frac{-3}{20}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

9. $\lim_{x\to\pi}\dfrac{\cos x+1}{2x-2\pi}$ : نستعمل تعريف العدد المشتق

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\cos x+1}{2x-2\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{\cos x-(-1)}{2(x-\pi)}=\lim_{x\to\pi}\frac{1}{2}\frac{g(x)-g(\pi)}{x-\pi}=g'(\pi)=-\sin(\pi)=0$$

حيث $g(x)=\cos x$ $\left(f'(x)=-\sin x\right)$

$$\left(\cos^2x+\sin^2x=1\right)\Rightarrow\left(\cos^2x-1=-\sin^2x\right)$$

10. $\lim_{x\to\pi}\dfrac{\cos x+1}{2x-2\pi}$ :

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{\sin^2x}=\lim_{x\to0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{\left(\sin^2x\right)(\cos x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{\cos^2x-1}{\left(\sin^2x\right)(\cos x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin^2x}{\left(\sin^2x\right)(\cos x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{-1}{(\cos x+1)}=\frac{-1}{2}$$

$$\left(\cos^2x+\sin^2x=1\right)\Rightarrow\left(1-\cos^2x=\sin^2x\right)$$

11. $\lim_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ :

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{1}{(1+\cos x)}=\frac{1}{2}$$

($\frac{\sin x}{x}\to1$)

## التمرين 05

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}$ : لدينا : $-1\le\sin x\le 1$ و $x>0$ لما يكون $x$ كبير بالقدر الكافي

وبالتالي : $\dfrac{-1}{x}\le\dfrac{\sin x}{x}\le\dfrac{1}{x}$ .

ومن كون $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ فإنه حسب مبرهنات النهاية بالمقارنة : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$ .

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sin x}{x^2+1}$ : لدينا : $-1\le\sin x\le 1$ و $\dfrac{x}{x^2+1}>0$ لما يكون $x$ كبير بالقدر الكافي

وبالتالي : $\dfrac{-x}{x^2+1}\le\dfrac{x\sin x}{x^2+1}\le\dfrac{x}{x^2+1}$ .

ومن كون $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=0$ فإنه حسب مبرهنات النهاية بالمقارنة : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sin x}{x^2+1}=0$ .

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+\cos x}{x+1}$ : لدينا : $-1\le\cos x\le 1$ و $x+1>0$ لما يكون $x$ كبير بالقدر الكافي

وبالتالي : $\dfrac{-1+2x}{x+1}\le\dfrac{2x+\cos x}{x+1}\le\dfrac{1+2x}{x+1}$ .

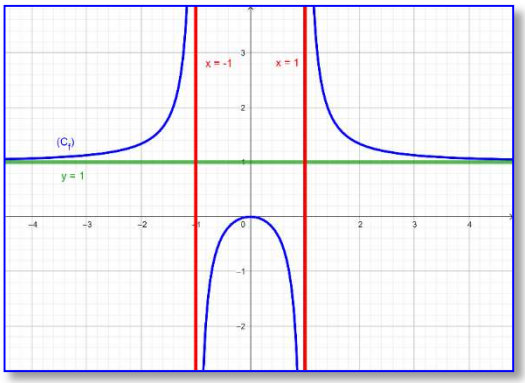
ومن كون $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1+2x}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+2x}{x+1}=2$ فإنه حسب مبرهنات النهاية بالمقارنة : $f'(x)=3x^2-3$ .

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}2x+\sin x$ : لدينا : $-1\le\sin x\le 1$ ، وبالتالي : $2x+\sin x\le 1+2x$ .

ومن كون $\lim\limits_{x\to-\infty}1+2x=-\infty$ فإنه حسب مبرهنات النهاية بالمقارنة : $\lim\limits_{x\to-\infty}2x+\sin x=-\infty$ .

## التمرين 06

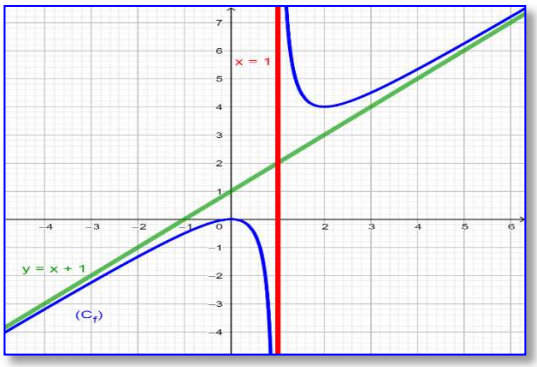
1. الشكل الأول :




- مجموعة التعريف : $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$
- النهايات : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=1$ ، $\lim\limits_{\substack{<\\x\to1}}f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{>\\x\to1}}f(x)=+\infty$

و $\lim\limits_{\substack{<\\x\to-1}}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{>\\x\to-1}}f(x)=-\infty$ .

2. الشكل الثاني :




- مجموعة التعريف : $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$
- النهايات : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{<\\x\to1}}f(x)=-\infty$

و $\lim\limits_{\substack{>\\x\to1}}f(x)=+\infty$ .

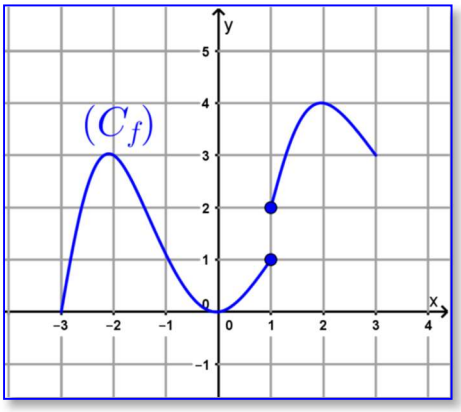
## الإستمرارية

**تعريف:** $f$ دالة مجموعة تعريفها $D_f$ و $a$ عدد حقيقي غير معزول من $D_f$.

☜ القول أن الدالة $f$ مستمرة عند $a$ يعني أن $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

☜ القول أن الدالة $f$ مستمرة على مجال $I$ يعني أن $f$ مستمرة عند كل عدد حقيقي من $I$.

**التفسير البياني:** تكون الدالة $f$ مستمرة على مجال $I$ عندما يمكن رسم منحنيها البياني على هذا المجال دون رفع القلم ( اليد ).




☜ $f$ مستمرة على كل من المجالين $]-3;1[$ و $]1;3[$.

☜ $f$ غير مستمرة على المجال $]-3;3[$ لأنها غير مستمرة عند 1.

**نتائج:** ـ الدوال المرجعية مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

ـ الدوال كثيرات الحدود، sin و cos مستمرة على $\mathbb{R}$.

ـ الدوال الناطقة ( حاصل قسمة كثيري حدود ) مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

## مبرهنة القيم المتوسطة

**مبرهنة:** $f$ دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a;b]$.

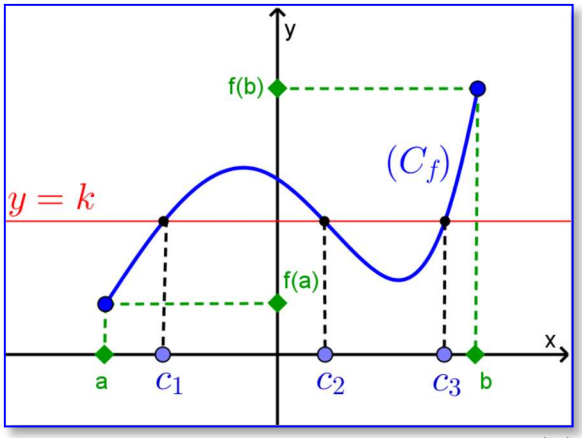
من أجل كل عدد حقيقي $k$ محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، يوجد على الأقل عدد حقيقي $c$ محصور بين $a$ و $b$ بحيث $f(c) = k$.

**التفسير البياني:** من أجل كل عدد حقيقي $k$

محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y = k$

يقطع على الأقل مرة واحدة المنحنى $(C)$ في نقطة فاصلتها $c$

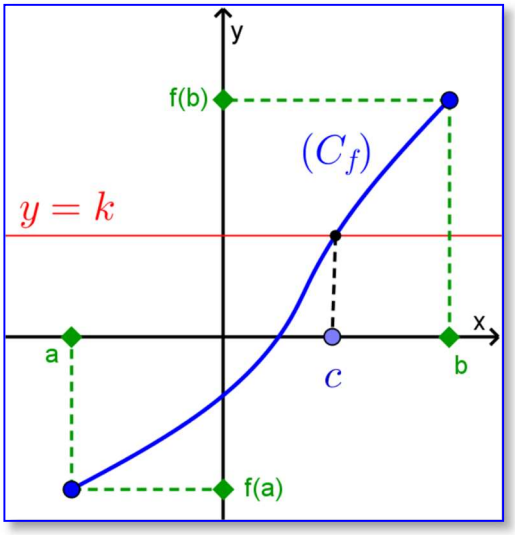
محصورة بين $a$ و $b$.




**حالة خاصة:**

إذا كانت $f$ دالة مستمرة على مجال $[a;b]$ و كان $f(a) \times f(b) < 0$، فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي $c$ محصور بين $a$ و $b$ بحيث $f(c) = 0$.

**مبرهنة 1 :** إذا كانت $f$ دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a;b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي $k$ محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المعادلة $f(x)=k$ تقبل على الأقل حلا $c$ محصورا بين $a$ و $b$.




**مبرهنة 2 :** إذا كانت $f$ دالة مستمرة و رتيبة تماما على مجال $[a;b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي $k$ محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a;b]$.

# تمارين

## التمرين 01

1. $f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-2}\;;x\in]2;+\infty[\\ \dfrac{5x-4}{x}\;;x\in]-\infty;0[\cup]0;2]\end{cases}$

ـ أدرس إستمرارية الدالة $f$ عند العدد $2$ .

2. $a$ عدد حقيقي، عين قيمة $a$ حتى تكون الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $g(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-2}\;;x\in]2;+\infty[\\ \dfrac{5x-a}{x}\;;x\in]-\infty;0[\cup]0;2]\end{cases}$ مستمرة عند العدد $2$ .

## التمرين 02

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على المجال $[-1;2[$ بـ: $f(x)=xE(x)+1$

1. عين عبارة $E(x)$ على كل من المجالات التالية: $[-1;0[$ ؛ $[0;1[$ و $[1;2[$ .
2. أدرس إستمرارية الدالة $f$ عند $0$ ثم عند $1$ .
3. أنشئ التمثيل البياني للدالة $f$ على المجال $[-1;2[$ في معلم م.م.
4. هل $f$ مستمرة على $[-1;1[$ ؟ $[-1;2[$ ؟ $[1;2[$ ؟

## التمرين 03

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على المجال $[-2;1[$ بـ: $f(x)=x\left(x+E(x)\right)$

1. عين عبارة $E(x)$ على كل من المجالات التالية: $[-2;-1[$ ؛ $[-1;0[$ و $[0;1[$ .
2. أدرس إستمرارية الدالة $f$ عند $-1$ ثم عند $0$ .
3. أنشئ التمثيل البياني للدالة $f$ على المجال $[-2;1[$ في معلم م.م.
4. هل $f$ مستمرة على $[-2;-1[$ ؟ $[-2;0[$ ؟ $[-2;1[$ ؟

## التمرين 04

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3-3x+1$

ـ أثبت أن المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[-2;2]$

## التمرين 05

$f$ دالة معرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^3+2}$

1. شكل جدول تغيرات الدالة $f$ .
2. أثبت أن المعادلة $f(x)=\dfrac{3}{4}$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $\alpha\in[-1;2]$ .

## التمرين 06

لتكن الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x^3-3x-4$

1. شكل جدول تغيرات الدالة $g$ .
2. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث: $2<\alpha<2,2$ .
3. استنتج حسب قيم العدد الحقيقي $x$ إشارة $g(x)$ .

# الحلـــول

## التمرين 01

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

1. لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} \dfrac{5x-4}{x} = \dfrac{5\times 2-4}{2} = 3 = f(2)$

ولكن $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} \sqrt{x^2-2} = \sqrt{2} \neq 3$ وبالتالي الدالة $f$ غير مستمرة عند العدد $2$ .

2. لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} \dfrac{5x-\alpha}{x} = \dfrac{5\times 2-\alpha}{2} = \dfrac{10-\alpha}{2} = g(2)$

و $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} \sqrt{x^2-2} = \sqrt{2}$ وبالتالي حتى تكون $f$ مستمرة عند العدد $2$ يجب : $\dfrac{10-\alpha}{2} = \sqrt{2}$ أي $\alpha = 10-2\sqrt{2}$ .

## التمرين 02

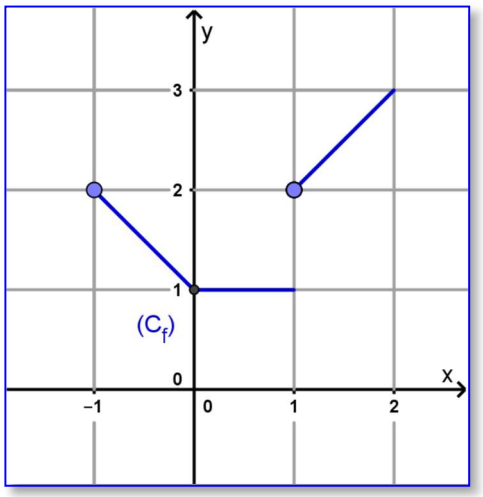
$n \le x < n+1 \Rightarrow E(x) = n \quad ; n \in \mathbb{Z}$

1. $f(x) = xE(x)+1 = \begin{cases} -x+1 \; ; x \in [-1;0[ \\ 1 \; ; x \in [0;1[ \\ x+1 \; ; x \in [1;2[ \end{cases}$

2. ـ عند $0$ : لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = f(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} 1 = 1 = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} -x+1 = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)$ وهذا يعني أن الدالة مستمرة عند $0$

ـ عند $1$ : لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = f(1) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} x+1 = 2 \neq \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = 1$ وهذا يعني أن الدالة غير مستمرة عند $1$

3. التمثيل البياني :




4 ـ الدالة مستمرة على المجالين $[-1;1[$ و $[1;2[$

ـ الدالة غير مستمرة على المجال $[-1;2[$

## التمرين 03

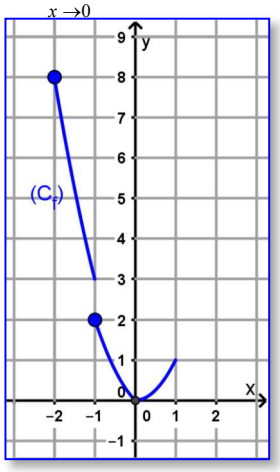
$n \le x < n+1 \Rightarrow E(x) = n \quad ; n \in \mathbb{Z}$

1. $f(x) = x\left(x + E(x)\right) = \begin{cases} x^2 - 2x & ; x \in [-2;-1[ \\ x^2 - x & ; x \in [-1;0[ \\ x^2 & ; x \in [0;1[ \end{cases}$

2. عند $-1$ : لدينا $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = f(-1) = \lim\limits_{x \to -1^+} x^2 - x = 2 \neq \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} x^2 - 2x = 3$ وهذا يعني أن الدالة مستمرة عند $-1$

- عند $0$ : لدينا $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0 = \lim\limits_{x \to 0^-} x^2 - x = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ وهذا يعني أن الدالة غير مستمرة عند $0$

3. التمثيل البياني :




4. الدالة غير مستمرة على المجالين $[-2;0[$ و $[-2;1[$

- الدالة مستمرة على المجال $[-2;-1[$

## التمرين 04

الدالة $f$ مستمرة على $\mathbb{R}$ وبالأخص على المجال $[-2;2]$، ولدينا $f(2) = 3 > 1$ و $f(-2) = -1 < 1$. إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة تقبل حلا على الأقل في المجال $[-2;2]$.

## التمرين 05

1. الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $[0;+\infty[$ و: $f'(x) = \dfrac{3x^2\left(x^3+2\right) - 3x^2\left(x^3+1\right)}{\left(x^3+2\right)^2} = \dfrac{3x^2}{\left(x^3+2\right)^2} \ge 0$

نعلم أن $3x^2 = 0$ تكافئ $x = 0$، ومنه جدول التغيرات يصبح :

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\frac{1}{2}$ | $\nearrow$ $1$ |

2. الدالة $f$ مستمرة على $[0;+\infty[$ وبالأخص على المجال $[-1;2]$،

ولدينا $f(2) = \dfrac{9}{10} > \dfrac{3}{4}$ و $f(-1) = 0 < \dfrac{3}{4}$. إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة تقبل حلا على الأقل $\alpha$ بحيث $\alpha \in [-1;2]$.

وبما أن $f$ متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ وبالأخص على المجال $[-1;2]$ فإن $\alpha$ وحيد.

## التمرين 06

1. الدالة $g$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و: $g'(x) = 3x^2 - 3$

نعلم أن $3x^2 - 3 = 0$ تكافئ $x = 1$ أو $x = -1$، ومنه جدول التغيرات يصبح :

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $g(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ $-2$ | $\searrow$ | $-6$ | $\nearrow$ $+\infty$ |

2. الدالة $g$ مستمرة على $\mathbb{R}$ وبالأخص على المجال $[2;2.2]$،

ولدينا $g(2) = -2 < 0$ و $g(2.2) = 0.048 > 0$. إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة تقبل حلا على الأقل $\alpha$ بحيث $2 < \alpha < 2,2$.

وبما أن $g$ متزايدة تماما على $[1;+\infty[$ وبالأخص على المجال $[2;2.2]$

فإن $\alpha$ وحيد. $\left(g\left(\alpha\right)=0\right)$

3. من السؤالين السابقين نستنتج إشارة $g\left(x\right)$ على النحو التالي :

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

# دراسة دالـــة

## التمرين 01

$I$. $g$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=\dfrac{ax^2+bx+1}{x^2+1}$ ، مع $a$ و $b$ عددين حقيقيين.

ـ جد العددين $a$ و $b$ بحيث منحنى الدالة $g$ يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=1$ ، و يشمل النقطة $A(1;2)$ .

$II$. $f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+1}$ . و $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى م.م.م $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ ،

1. أحسب نهاية الدالة $f$ عند أطراف مجموعة التعريف، ثم فسر النتيجة بيانيا .

2. أدرس الوضع النسبي بين المنحنى $(C_f)$ و المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y=1$ .

3. تحقق أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $f'(x)=\dfrac{2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$.

4. إستنتج إتجاه تغير الدالة $f$ ، ثم شكل جدول تغيراتها على $\mathbb{R}$ .

5. بين أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $f(-x)=2-f(x)$ ، فسر النتيجة بيانيا .

6. جد إحداثيات نقط تقاطع $(C_f)$ مع حاملي محوري الإحداثيات .

7. أ. تحقق من أن المعادلة $f'(x)=2$ تكافئ المعادلة $x^2\left(x^2+3\right)=0$ .

ب. إستنتج أن $(C_f)$ يقبل مماسا واحدا $(T)$ معامل توجيهه يساوي 2 ، يطلب تعيين معادلة له .

8. أنشئ المنحنى $(C_f)$ ، المستقيم $(\Delta)$ و المماس $(T)$ في المعلم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

## التمرين 02

**I.** لتكن الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x^3+6x+12$

**1.** أدرس إتجاه تغير الدالة $g$ .

**2.** بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $\alpha\in]-1,48;-1,47[$ ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي $x$ إشارة $g(x)$ .

**II.** نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^3-6}{x^2+2}$

و ليكن $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ .

**1.أ.** أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ .

**ب.** بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{\left(x^2+2\right)^2}$

ثم أدرس إتجاه تغير الدالة $f$ و شكل جدول تغيراتها .

**2.أ.** بين أن المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ .

**ب.** أدرس وضعية المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$.

**3.** بين أن $f(\alpha)=\dfrac{3}{2}\alpha$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ .

**4.** أرسم المستقيم $(\Delta)$ و المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ .

## التمرين 03

**I.** لتكن الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x^3-3x-4$

**1.** أدرس اتجاه تغير الدالة $g$ و شكل جدول تغيراتها .

**2.** بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث: $2<\alpha<2,2$ .

**3.** استنتج حسب قيم العدد الحقيقي $x$ إشارة $g(x)$ .

**II.** لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^3+2}{x^2-1}$

نسمي $(\mathcal{C})$ تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ ذو الوحدة 2cm .

**1.** أحسب النهايات عند حدود مجموعة التعريف .

**2.أ-** عين الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ ، $c$ و $d$ حيث من أجل كل عدد حقيقي $x$ يختلف عن 1 و $-1$ : $f(x)=ax+b+\dfrac{cx+d}{x^2-1}$

**ب-** استنتج أن $(\mathcal{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ يطلب تعيينه .

**ج-** أدرس وضعية $(\mathcal{C})$ بالنسبة إلى $(\Delta)$ .

**3.** بين أن $(\mathcal{C})$ يقبل مستقيمين مقاربين آخرين يطلب تعيينهما .

**4.** بين أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ : $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$

**5.** أدرس اتجاه تغير الدالة $f$ و شكل جدول تغيراتها .

**6.** بين أن $f(\alpha)=\dfrac{3(\alpha+2)}{\alpha^2-1}$ ، ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$ .

**7.** عين معادلة المماس $(d)$ لـ $(\mathcal{C})$ عند النقطة ذات الفاصلة $-2$ .

**8.** أرسم المماس $(d)$ و المستقيمات المقاربة و المنحنى $(\mathcal{C})$ .

## التمرين 04

لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-x+\sqrt{x^2+8}$

و $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$ .

**1.** احسب نهايات الدال $f$ عند أطراف مجموعة تعريفها .

**2.** بين أن $x-\sqrt{x^2+8}<0$ من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ .

**3.** احسب الدالة $f'$ مشتقة الدالة $f$ و استنتج إشارتها ، ثم شكل جدول تغيراتها .

**4.** بين أن المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y=-2x$ مقارب للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$

**5.** أدرس الوضع النسبي للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$ .

**6.** احسب $f(0)$ ، ثم أنشئ $(\mathcal{C}_f)$ و $(\Delta)$ .

**7.** $g$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=-x-\sqrt{x^2+8}$ ، وليكن $(\mathcal{C}_g)$ تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

- بين أن $(\mathcal{C}_g)$ و $(\mathcal{C}_f)$ متناظران بالنسبة للمبدأ ، ثم أنشئ $(\mathcal{C}_g)$.

## التمرين 05

I. لتكن الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=2x^3-4x^2+7x-4$

1. أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ .

ب- أدرس إتجاه تغير الدالة $g$ على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها .

2 أ- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث : $0,7<\alpha<0,8$

ب- استنتج حسب قيم العدد الحقيقي $x$ إشارة $g(x)$ .

II. نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$

و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ .

1. أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .

2. أ- بين أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+1)+\dfrac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$

ب- أستنتج أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ يطلب تعيين معادلة له .

ج- أدرس الوضع النسبي للمنحنى $(C_f)$ و $(\Delta)$ .

3. أ- بين أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$ حيث $f'$ مشتقة الدالة $f$ .

ب- استنتج إشارة $f'(x)$ حسب قيم $x$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة $f$. (نأخذ $f(\alpha)\approx-0,1$ )

4. أحسب $f(1)$ ثم حل في المعادلة $f(x)=0$ .

5. أنشئ المستقيم $(\Delta)$ و المنحنى $(C_f)$ .

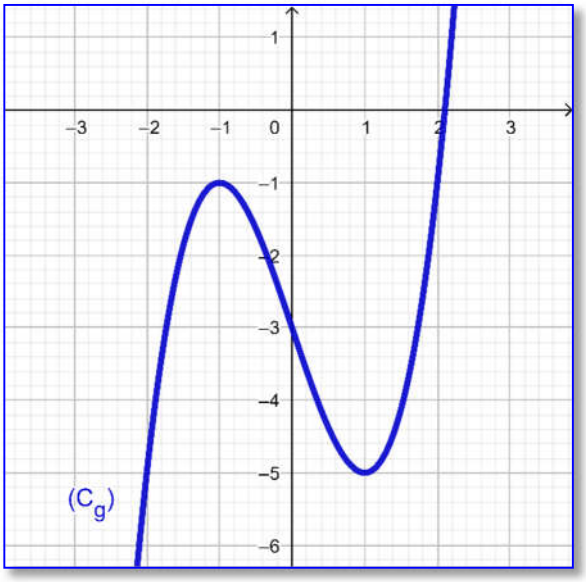
6. لتكن $h$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=\dfrac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}$ و $(C_h)$ تمثيلها البياني في المعلم السابق .

أ- تحقق أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $h(x)=f(x)-2$

ب- استنتج أن $(C_h)$ هو صورة $(C_f)$ بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه ، ثم أنشئ $(C_h)$ .

## التمرين 06

I. $(C_g)$ التمثيل البياني للدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=ax^3+bx+c$ ، حيث a ، b و c أعداد حقيقية .




1. باستعمال $(C_g)$ عين كلا من a ، b و c .

2. شكل جدول تغيرات الدالة $g$ .

3. بين أن المعادلة $x^2-3x-3=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $\alpha\in\left[2;\dfrac{5}{2}\right]$ .

4. استنتج إشارة $g(x)$ لما يتغير $x$ على $\mathbb{R}$ .

II. نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;2\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{2x^3+3}{x^2-1}+1$ .

و ليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ .

1. تحقق أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}-\{-1;2\}$ : $f'(x)=\dfrac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$ .

2. عين دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا .

3. أحسب نهايات الدالة $f$ عند حدود مجموعة تعريفها .

4. شكل جدول تغيرات الدالة $f$ .

5. بين أن : $f(\alpha)=3\alpha+1$ ، ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$ .

6. بين أن المستقيم $(\Delta)$ ذو العادلة $y=2x+1$ مقارب لـ $(C_f)$ عند $+\infty$ و $-\infty$ ، ثم أدرس الوضع النسبي بين $(C_f)$ و $(\Delta)$ .

7. أنشئ كلا من $(C_f)$ و $(\Delta)$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ .

## التمرين 07

$f$ دالة معرفة على بـ $]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$ : $f(x)=|x|+\sqrt{x^2-1}$ .

و ليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ .

1. أدرس شفعية الدالة $f$ ثم أحسب نهاية الدالة عند $+\infty$ .

2. بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-2x]=0$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا .

3. أدرس قابلية إشتقاق الدالة $f$ عند 1 من اليمين ثم فسر النتيجة بيانيا .

4. أدرس اتجاه تغير الدالة $f$ على $[1;+\infty[$ ثم استنتج اتجاه تغيراتها على $]-\infty;-1[$ و شكل جدول تغيراتها .

5. بين أن $(C_f)$ يقطع المستقيم ذو المعادلة $2y=5$ في نقطة وحيدة فاصلتها $\alpha$ حيث $1<\alpha<2$.

6. أرسم المستقيمات المقاربة و المنحنى $(C_f)$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

## التمرين 08

$f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{(x+a)^2}{x^2+b}$ ، حيث a و b عددان حقيقيان .

و ليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ .

1. عين العددين a و b إذا علمت أن معادلة المماس $(T)$ عند النقطة ذات الفاصلة 0 هي : $y=2x+1$ .

2. أثبت أن المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مستقيم مقارب لـ $(C_f)$ .

3. بوضع a=b=1 :

أ. أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $f'(x)=\dfrac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$ .

ب. عين اتجاه تغير الدالة $f$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .

ج. أدرس الوضع النسبي بين $(C_f)$ و المماس $(T)$ ، ماذا يمكن القول عن النقطة $A(0;1)$ ؟

د. بين أن النقطة $A$ مركز تناظر للمنحنى $(C_f)$ .

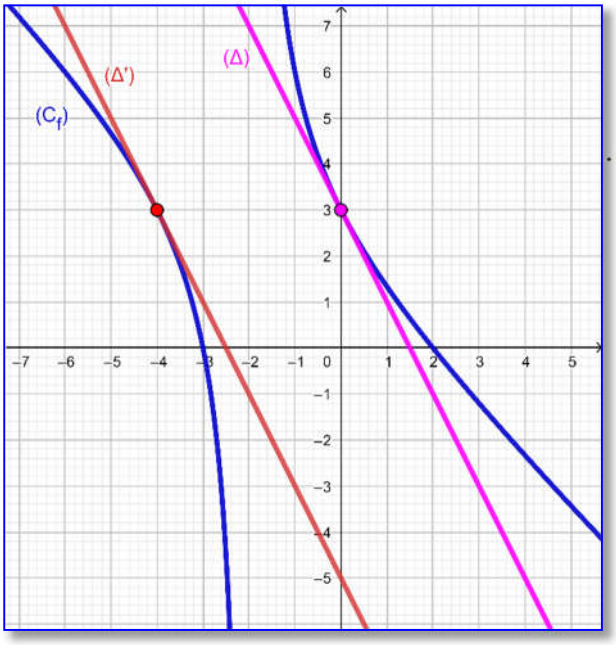
هـ أنشئ المنحنى $(C_f)$ و المماس $(T)$ .

4. نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ .

ـ استنتج جدول تغيرات الدالة $g$ إنطلاقا من جدول تغيرات الدالة $f$ .

## التمرين 09

$f$ دالة معرفة على بـ $\mathbb{R}-\{-2\}$ : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+2}$ ، حيث a ، b و c أعداد حقيقية . و ليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني المقابل في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ ، $(\Delta)$ و $(\Delta')$ مماسي في نقطتين فاصلتيهما 0 و 4- على الترتيب .




بقراءة بيانية أجب عن الأسئلة التالية :

1. عين $f'(0)$ و $f'(-4)$ ، ثم أكتب معادلتي المماسين $(\Delta)$ و $(\Delta')$ .
2. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x)=+2x=m-1$ .
3. شكل جدول تغيرات الدالة $f$ ثم عين إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}-\{-2\}$ .
4. نعتبر الدالة $g$ المعرفة بـ : $g(x)=\sqrt{f(x)}$ .
   أ. باستعمال إشارة $f(x)$ عين مجموعة تعريف الدالة $g$ .
   ب. استنتج تغيرات الدالة $g$ ثم شكل جدول تغيراتها .
5. عين الأعداد الحقيقية a ، b و c .

## التمرين 10

I. $g$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=x^3-3x^2+3x-9$

1. أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ .
2. أدرس اتجاه تغير الدالة $g$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .
3. أحسب $g(3)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ .

II. نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^3-5x^2+7x+1}{(x-1)^2}$ .

و ليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ .

1. أ. أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ .
   ب. أحسب $\lim\limits_{\substack{>\\x\to1}}f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{<\\x\to1}}f(x)$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا .
2. بين أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}-\{1\}$ : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x-1)^3}$ .
3. استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ على $\mathbb{R}-\{1\}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .
4. أ. بين أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}-\{1\}$ فإن : $f(x)=x-3+\dfrac{4}{(x-1)^2}$ .
   ب. بين أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ يطلب تعيين معادلة له .
   ج. أدرس الوضع النسبي للمنحنى $(C_f)$ مع المستقيم المقارب $(\Delta)$ .
5. بين أن المنحنى $(C_f)$ يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $\alpha$ حيث : $-0.2<\alpha<-0.1$ .
6. عين معادلة المماس $(T)$ للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1- .

7. أحسب $f(0)$ ثم أنشئ $(C_f)$ و $(\Delta)$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ .

8. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد و اشارة حلول المعالتين : $f(x)=m+1$ و $f(x)=x+m$ .

9. نعتبر الدالة $h$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ : $h(x)=f(|x|)$ .

أ. بين أن $h$ هي دالة زوجية .

ب. أنشئ منحنى الدالة $h$ إنطلاقا من المنحنى $(C_f)$.

10. نعتبر الدالة $k$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ : $k(x)=|f(x)|$ .

ـ أنشئ منحنى الدالة $k$ إنطلاقا من المنحنى $(C_f)$ .

## التمرين 11

$f$ دالة معرفة على بـ $\mathbb{R}-\{-2;1\}$ : $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x^2+x-2}$ .

و ليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني المقابل في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ .

1. أحسب نهايات الدالة $f$ عند حدود مجموعة تعريفها ، ثم فسر النتائج بيانيا .

2. أثبت أن المستقيم ذو المعادلة $x=\dfrac{-1}{2}$ محور تناظر للمنحنى $(C_f)$ .

3. أ. عين العدد الحقيقي $a$ بحيث : $f(x)=1+\dfrac{a}{x^2+x-2}$ .

ب. استنتج مجموعة النقط $M(x;y)$ من $(C_f)$ التي احداثياتها أعداد صحيحة .

4. نعتبر من أجل كل عدد حقيقي $m$ الدالة $h_m$ حيث : $h_m(x)=\dfrac{x^2+mx-6}{x^2+mx-2}$ و $(C_m)$ تمثيلها البياني .

أ. أدرس تغيرات الدالة $h_m$ .

ب. بين أن جميع المنحنيات $(C_m)$ تشمل نقطة وحيدة $A$ ، يطلب تعيين إحداثياها .

ج. أكتب معادلة للماس $(T)$ للمنحنى $(C_m)$ عند النقطة $A$ .

د. عين المنحنى $(C_m)$ الذي يشمل النقطة $B\left(-2;\dfrac{5}{3}\right)$ .

## التمرين 12

$f$ دالة معرفة على بـ $\mathbb{R}-\{1\}$ : $f(x)=|x+1|-\dfrac{4}{x-1}$ .

و ليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني المقابل في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ .

1. أحسب نهايات الدالة $f$ عند حدود مجموعة تعريفها.

2. أكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .

3. أحسب $f'(x)$ و أدرس إشارتها ، ثم شكل جدول التغيرات .

4. بين أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين $(\Delta)$ و $(\Delta')$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$ على الترتيب .

5. أدرس الوضع النسبي بين $(C_f)$ و $(\Delta)$ على المجال $]1;+\infty[$ ، بين $(C_f)$ و $(\Delta')$ على المجال $]-\infty;1[$ .

6. أ. أحسب $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$ و $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$ ، ماذا تستنتج ؟

ب. فسر النتيجة بيانيا .

ج. أكتب معادلتي نصفي المماسين $(T_1)$ و $(T_2)$ عند النقطة التي فاصلتها 1-.

7. أنشئ $(C_f)$ ، $(\Delta)$ ، $(\Delta')$ و نصفي المماسين .

8. ناقش بيانيا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد و إشارة حلول المعادلة : $(x+1)|x-1|-mx=x-m+3$ .