التمرين 01: n عدد طبيعي، بقسمته على 7 أوعلى 3 نجد نفس الباقي. عين القيم الممكنة للعدد الطبيعي n

التمرين 02: I) عين الأعداد الطبيعي a و b حيث : $5ab-b^2=49$

II) عيّن كل الثنائيات من الأعداد الطبيعية $(a;b)$ التي تحقق الجملة التالية : $\begin{cases}2a^2+b^2=20992\\ PGCD(a;b)=16\end{cases}$

التمرين 03: a و b عددان طبيعيان غير معدومين نضع: $PGCD(a;b)=d$

عين كل الثنائيات $(a;b)$ التي تحقق $ab+5d^2=35d$

التمرين 04: 1) n عدد طبيعي يختلف عن 1. نضع $a=3n+5$ و $b=n-1$

أ. تحقق أن $a=3b+8$

ب. جد قيم العدد الصحيح n التي يكون من أجلها $\frac{a}{b}$ عددا صحيحا

2) نفرض أن n عددا طبيعيا

أ. برهن أن $PGCD(a;b)$ هو قاسم للعدد 8

ب. ناقش حسب قيم n القيم الممكنة لِ $PGCD(a;b)$

التمرين 05: 1) نضع: $\alpha=n^2+n$ و $\beta=n+2$

أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $PGCD(\alpha;\beta)=PGCD(n;\beta)$

ب) استنتج القيم الممكنة للعدد $PGCD(\alpha;\beta)$

2) نعتبر العددين a و b حيث : $a=3n^2+5n^2+2n$ و $b=3n^2+8n+4$

أ) برهن أن العدد $(3n+2)$ هو قاسم مشترك للعددين a و b

ب) استنتج حسب قيم n أن $PGCD(a;b)$ هو $(3n+2)$ أو $2(3n+2)$

ج) عين α و β علماأن: $PGCD(a;b)=41$

التمرين 06: نريد تصفيف تلاميذ ثانوية في الساحة ،عندما ننشئ صفوفا ذات 45 تلميذا يبقى 44 تلميذا و عندما ننشئ صفوفا ذات 50 تلميذا يبقى 49 تلميذا وعندما ننشئ صفوفا ذات 75 تلميذا يبقى 74 تلميذا

* احسب N عدد تلاميذ الثانوية علما أن N محصورا بين 1000 و1500

التمرين 07: المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. نعتبر النقط $A(7;12)$، $B(7;0)$ و $C(0;12)$

1.أ) عين مجموعة النقط من المستقيم (OA) التي إحداثياتها صحيحة

ب) استنتج مجموعة النقط من القطعة $[OA]$ التي إحداثياتها صحيحة

2.أ) x و y عددان صحيحان عين الثنائيات الصحيحة $(x;y)$ حلول المعادلتين: $12x-7y=1$ و $12x-7y=-1$

ب) بين أنه يوجد داخل المستطيل $ABOC$ نقطتين D و F إحداثياتها صحيحة تكون المسافة بين كل منها والمستقيم (OA) أصغر مايمكن

التمرين 08: n عدد طبيعي نضع : $A=n^4+n^2+1$

1) حلل العدد A إلى جداء عاملين من الدرجة الثانية (لاحظ أن : $A=n^4+2n^2+1-n^2$)

2) نضع : $a=n^2+n+1$ و$b=n^2-n+1$

أ) بين أن العددين a و b فرديين

ب) بين أن كل قاسم مشترك للعددين a و b يقسم $2n$ و $2(n^2+1)$

ج) بين أن العددين n وn^2+1 أوليان فيما بينهما و استنتج أن العددين a و b أوليان فيما بينهما

التمرين09: 1) كيف يمكن معرفة أن عددا N هو مربع تام من خلال تحليله إلى جداء عوامل أولية ؟

2) عين أصغر عدد طبيعي n بحيث يكون $240n$ مربعا تاما

3) هل يوجد عدد مكون من أربعة ارقام رقمه ا لأخير (رقم الألاف) 9 وهو مربع تام ويقبل القسمة على 147؟

التمرين10: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـــ : $u_0=14$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=5u_n-6$

1) احسب الحدود u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 ، ثم ضع تخمينا حول الرقمين الأولين (الأحاد والعشرات) لـــــ u_n

2.أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+2}\equiv u_n[4]$

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{2k}\equiv 2[4]$ و$u_{2k+1}\equiv 0[4]$

3.أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $2u_n=5^{n+2}+3$

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2u_n\equiv 28[100]$

ج) عين حسب قيم العدد الطبيعي n الرقمين الأخيرين لـــــ u_n

التمرين11: أ) نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ المعادلة : $11n-24m=1......(1)$

1) برر أن المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا.

2) عين مجموعة حلول المعادلة (1) علما أن الثنائية $(11;5)$ حل لها.

ب.1) برر أن 9 يقسم $10^{11}-1$ و$10^{24}-1$

2) بين أنه مهما يكون الحل $(n;m)$ فإن : $(10^{11n}-1)-10(10^{24m}-1)=9$

3) بين أن : $10^{11}-1$ يقسم $10^{11n}-1$ وأن : $10^{24}-1$ يقسم $10^{24m}-1$

4) استنتج وجود عددين صحيحين M و N بحيث : $(10^{11}-1)N-(10^{24}-1)M=9$

5) بين أن كل قاسم مشترك للعددين $10^{24}-1$ و$10^{11}-1$ يقسم 9 ، استنتج مما سبق $PGCD(10^{11}-1;10^{24}-1)$

التمرين12: 1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي k : $4^{5k}\equiv 1[11]$

2) استنتج تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11

3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $(2\times 2017^{5n+3}+3\times 1438^{10n}+1)$ قابلا للقسمة على 11

4) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $(2\times 2017^{5n+2}+n-3)$ قابلا للقسمة على 11

التمرين 13: نعتبر المعادلتين: $693x-216y=738.....(E_1)$ و$77x-24y=82.....(E_2)$

1) جد $PGCD(693;216)$ واستنتج أن المعادلتين (E_1) و(E_2) متكافئتان

2) تحقق أن الثنائية $(2;3)$ حل للمعادلة (E_2) ، ثم أوجد حلولها في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

3) جد الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E_2) التي تحقق $|y-x|\leq 54$

4) ليكن N عددا طبيعيا يكتب $\overline{\beta 68\alpha}$ في النظام ذي الأساس9 ويكتب $\overline{1\alpha\beta 0\alpha}$ في النظام ذي الأساس6، حيث α و β عددان طبيعيان.

- جد العددين α و β ، ثم اكتب العدد N في النظام العشري

التمارين الواردة في البكالوريات

التمرين14 (التمرين الأول باك 2022 الشعبة رياضيات الموضوع الأول)

1) أ- عين ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7

ب- بين أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n، $6^{2n} \equiv 1[7]$ ثم استنتج بواقي القسمة الإقليدية للعدد 6^n على 7

2) بين أن العدد $\left(2021^{2022}+1962^{1443}\right)^{1954}-2$ يقبل القسمة على 7

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $a_n = 2^n + 6^n$ و $S_n = a_0 + a_1 + ... + a_n$

أ-استنتج، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد a_n على 7

ب- بين أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n، $S_{n+6} \equiv S_n[7]$

جـ- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $S_n \equiv 2^{n+1} + 3\times 6^{n+1} + 3[7]$ ثم استنتج قيم n بحيث $S_n \equiv 0[7]$

التمرين15 (التمرين الأول باك 2022 الشعبة رياضيات الموضوع الثاني)

n عدد طبيعي نضع: $A_n = n^3 + 5n^2 + 7n + 9$ و $B_n = n + 2$

1) أ- بين أن $PGCD(A_n;B_n) = PGCD(B_n;7)$

ب- استنتج القيم الممكنة لـِ $PGCD(A_n;B_n)$

جـ- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون A_n و B_n أوليين فيما بينهما

2) نعتبر المعادلة $A_2x - B_2y = 29.....(E)$ ذات المجهولين الصحيحين x و y

أ- بين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $x \equiv 3[4]$

ب- عين حلول المعادلة (E)

3) أ- استنتج حلول المعادلة $51x - 4y = 45.....(E')$

ب- عين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E') حيث $|y - 12x| \le 3$

التمرين16 (التمرين الأول من الموضوع الأول باك 2022 الشعبة تقني رياضي)

a و b عددان طبيعيان حيث $a = 2022$ و $b = 124$

1) عين باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين a و b على 7

2) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7

3) بين أن العدد $a^a + b^b + 4$ يقبل القسمة على 7

4) نضع ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $A_n = 2021^n + 2022^n + 2023^n + 2024^n$

- بين أن $A_n \equiv 1 + 5^n + 6^n[7]$ ثم عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $A_n + 1$ مضاعفا للعدد7

التمرين17 (التمرين الأول من الموضوع الثاني باك2022 الشعبة تقني رياضي)

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $a=5n+2$ ، $b=n+1$ ، $c=9n+2$

و $d=PGCD(a;b)$ ، $d'=PGCD(b;c)$

1) عين القيم الممكنة لكل من d و d' ثم استنتج $PGCD(a;b;c)$

2) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد b قاسما لـ a

3) نعتبر المعادلة : $17x-4y=29.....(E)$ حيث x و y عددان صحيحان

بين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $x\equiv 1[4]$ ثم حل المعادلة (E)

4) عين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) والتي تحقق $xy<279$

التمرين18 (التمرين الثالث من الموضوع الأول باك 2021 الشعبة رياضيات)

1) نعتبر المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $42x-y=38.....(E)$ ، حيث x و y عددان صحيحان.

حل المعادلة (E) علما أن الثنائية $(1;4)$ حلا لها.

2) a ، b و c أعداد طبيعية حيث a غير معدوم.

العدد الطبيعي N يكتب $\overline{ab0cb}$ في نظام تعداد أساسه 5 ويكتب $\overline{a7c5}$ في نظام تعداد أساسه 8

أ- بين الأعداد a ، b و c تحقق: $113a=3(c-42b+151)$ ثم استنتج أن: $a=3$

ب- جد العددين الطبيعيين b و c ثم أكتب العدد N في النظام العشري

3) أ. أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 6

ب. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2021^{2n}+1441^n+4$ مضاعف للعدد 6

جـ. نضع : $A_n=2021^{2n}+1441^n+2\times1442^n$

جد قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $A_n\equiv 0[6]$

التمرين19 (التمرين الثالث من الموضوع الثاني باك2021 الشعبة رياضيات)

1) نعتبر المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $7x-6y=1.....(E)$ ، حيث x و y عددان صحيحان .

أ. حل المعادلة (E) علما أن الثنائية $(1;1)$ حل لها.

ب. تحقق أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن xy عدد طبيعي غير معدوم.

2) أ.ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بوقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 7

ب. بين أن العدد $4\times2019^{2021}+2022^{2022}$ يقبل القسمة على 7

3) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $4^n\equiv 4[6]$

4) نفرض أن الثنائية $(a;b)$ حل للمعادلة (E)

A عدد طبيعي يكتب في نظام التعداد ذي الأساس4 على الشكل : $\overline{333...330}$ (عدد أرقامه $a\times b$)

أ. بين أن : $A=4^{ab}-4$

ب. تحقق أنّ: $A\equiv 0[6]$ ثم عين كل الثنائيات $(a;b)$ التي من أجلها يكون A قابلا للقسمة على 42

التمرين 20 (التمرين الثالث من الموضوع الأول باك 2021 الشعبة تقني رياضي)

1) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 9

2) عين باقي القسمة الإقليدية للعدد 2021^{1442} على 9

3) بين أن العدد $2021^{1442}+1691^{1954}-8$ مضاعف للعدد 9

4) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $5^{6n}+2021^{6n+1}+1443$ مضاعف للعدد 9

5) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $A_n=2021^{1442}+1691^{1954}+5n$

عين الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون: $A_n\equiv 0[9]$

التمرين 21 (التمرين الأول من الموضوع الثاني باك 2021 الشعبة تقني رياضي)

نعتبر المعادلة : $13x-9y=1.....(E)$ ، ذات المجهول $(x;y)$ حيث x و y عددان صحيحان

1) أ. تحقق أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن : $x\equiv 7[9]$

ب. استنتج حلول المعادلة (E)

2) أ. ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5

ب. نضع : $A_n=3^{4n}+3^{4n+1}+3^{4n+2}-3$ حيث n عدد طبيعي .

بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، A_n يقبل القسمة على 5

3) بفرض أن $(x;y)$ حل للمعادلة (E) حيث x و y عددان طبيعيان.

عين قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد $2023^{2022}+3^{y-x}+n$ القسمة على 5

التمرين 22 (التمرين الثاني من الموضوع الثاني باك 2020 الشعبة تقني رياضي)

1) أ. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5

ب. استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد: $8^{2020}-2\times 3^{1441}-1$ على 5

2) من أجل كل عدد طبيعي n ، نعتبر العدد الطبيعي a_n حيث : $a_n=3^{n+1}+4$

عين الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون: $a_n\equiv 0[5]$

3) نعتبر العدد الطبيعي b_n حيث : $b_n=7a_n+5$

أ. عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر لعددين a_n و b_n

ب. بين أن : $a_n\equiv 0[5]$ إذا وفقط إذا كان $b_n\equiv 0[5]$

جـ. استنتج الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون a_n و b_n أوليين فيما بينهما

التمرين 23 (التمرين الثالث من الموضوع الأول باك 2020 الشعبة رياضيات)

ليكن n عددا طبيعيا أكبر تماما من 1

نعتبر الأعداد الطبيعية a ، b و c حيث : $a=4n+1$ ، $b=6n+1$ و $c=3n+2$

1) اثبت أن العددين a و b أوليان فيما بينهما

2) نسمي α القاسم المشترك الأكبر للعددين a و c

أثبت أن α يقسم 5 ، ثم عين الأعداد الطبيعية n بحيث يكون: $\alpha=5$

3) نسمي β القاسم المشترك الأكبر للعددين a و bc

أ.أثبت أن α يقسم β

ب. أثبت أن العددين β و b أوليان فيما بينهما ثم استنتج أن : $\alpha=\beta$

4) نعتبر العددين الطبيعيين A و B حيث : $A=4n^2-3n-1$ و $B_n=18n^3-3n^2-13n-2$

أ. بين أن كلا من العددين A و B مضاعف للعدد الطبيعي $(n-1)$

ب. نضع : $d=PGCD(A;B)$ ، عبر حسب قيم α عن d بدلالة n. (لاحظ أن : $bc=18n^2+15n+2$)

التمرين24(التمرين الأول من الموضوع الثاني باك 2020 الشعبة رياضيات)

1) حل المعادلة: $3x-5y=2$ ذات المجهول $(x;y)$ حيث x و y عددان صحيحان.

2) أ. ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد الطبيعي 9^n على 7

ب. ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد الطبيعي 4^n على 11

3) عين الأعداد الطبيعية n بحيث يكون : $14\times4^n+11\times9^n-4\equiv0[77]$

4) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم، نضع : $u_n=3\times4^n+4\times9^n$ و $S_n=u_1+u_2+....+u_{15n}$

أ.عبر عن S_n بدلالة n

ب. أثبت أن S_n مضاعف للعدد 77

التمرين25(التمرين الثاني من الموضوع الأول باك 2017 الشعبة رياضيات)

1) نعتبر المعادلة: $104x-20y=272.....(E)$ ذات المجهول $(x;y)$ حيث x و y عددان صحيحان

أ) احسب القاسم المشترك الاكبر للعددين 20 و104 ثم بين أن المعادلة (E) تقبل حلولا.

ب) بين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $x\equiv3[5]$ ، ثم استنتج حلول المعادلة (E)

2) λ عدد طبيعي يكتب $\overline{1\alpha\alpha\beta01}$ في نظام التعداد الذي أساسه 4 ، ويكتب $\overline{1\alpha\beta01}$ في نظام التعداد الذي أساسه 6

حيث α وβ عددان طبيعيان.

عين α وβ ، ثم اكتب λ في النظام العشري

3) تحقق أن كلا من 2017 و1009 عدد أولي ، ثم عين الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق :

$2m-d=2017$ حيث $d=PGCD(a;b)$ ، $m=PPCM(a;b)$

التمرين26(التمرين الثاني من الموضوع الثاني باك 2017 الشعبة تقني رياضي)

1) بين أن : من أجل كل عدد طبيعي k ، $4^{5k}\equiv1[11]$

2) استنتج تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11

3) بين أن : من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $\left(2\times2017^{5n+3}+3\times1438^{10n}+1\right)$ يقبل القسمة على 11

4) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $\left(2\times2017^{5n+2}+n-3\right)$ قابلا للقسمة على 11

التمرين27(التمرين الثالث من الموضوع الأول باك 2014 الشعبة رياضيات)

1) نعتبر المعادلة $2013x-1962y=54.....(E)$ حيث x و y عددان صحيحان.

أ) احسب $PGCD(2013;1962)$

ب) استنتج أن المعادلة (E) تقبل حلولا.

جـ) بين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن : $x\equiv 0[6]$

د) استنتج حلا خاصا $(x_0;y_0)$ حيث $74<x_0<80$ ثم حل المعادلة (E)

2) نرمز بالرمز d إلى القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث $(x;y)$ حل للمعادلة (E)

أ) ماهي القيم الممكنة للعدد d ؟

ب) عين قيم العددين الطبيعيين a و b حيث : $971a-654b=18$ و $PGCD(a;b)=18$

التمرين28(التمرين الثاني من الموضوع الأول باك 2012 الشعبة رياضيات)

1) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية: $2011x-1432y=31.....(1)$

أ. أثبت أن العدد 2011 أولي

ب. بإستعمال خوارزمية إقليدس ،عين حلا خاصا $(x_0;y_0)$ للمعادلة (1) ، ثم حل المعادلة (1)

2) أ. عين ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7 ، ثم جد باقي القسمة الإقليدية للعدد $2011^{1432^{2012}}$ على 7

ب. عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $2010^n+2011^n+1432^n\equiv 0[7]$

3) N عدد طبيعي يكتب $\overline{2\gamma\alpha\beta}$ في نظام التعداد الذي أساسه 9 حيث : α ، β ، γ بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة من متتالية حسابية متزايدة تماما و$(\beta;\gamma)$ حل للمعادلة (1)

عين α ، β و γ ثم اكتب N في النظام العشري

تمارين من الكتاب المدرسي

التمرين73 الصفحة 110 : أ. أدس حسب قيم العدد الطبيعي n ،بواقي القسمة الإقليدية على 7 للعددين 2^n و 3^n

ب. حل في مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ، المعادلة ذات المجهول x التالية: $2^x+3^x\equiv 0[7]$

التمرين74 الصفحة 110: عين قيم العدد الطبيعي x التي من أجلها يكون $5^x-3^x+6\equiv 0[11]$

التمرين75 الصفحة 110: أ. عين حسب قيم العدد الطبيعي x ، القيم التي توافق x^2 بترديد 5

ب. استنتج أن المعادلة $x^2-5y^2=3$ ذات المجهولين x و y لا تقبل حلا في $\mathbb{N}$

التمرين76 الصفحة 110: x و y عددان طبيعيان ، نعتبر في مجموعة الأعداد الطبيعية المعادلة $7x^2+2y^3=3$

أ. أتمم الجدول التالي

$[7]$	6	5	4	3	2	1	0	$y\equiv$
$[7]$								$y^3\equiv$
$[7]$								$2y^3\equiv$

ب. استنتج أنه لا توجد أي ثنائية $(x;y)$ تحقق المعادلة المعطاة

التمرين 77 الصفحة110: نعتبر في مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$،المعادلة ذات المجهولين x و y التالية: $3^x+8=y^2$

1) ناقش حسب قيم x ، بواقي قسمة 3^x على 8

2) ناقش حسب قيم y ، بواقي قسمة y^2 على 8

حلول التمارين المقترحة لعمل الورشات

حل التمرين 01****************************

* تعيين القيم الممكنة للعدد الطبيعي n :

لدينا $\begin{cases} n = 7k + r & (0 \le r < 7 \wedge k \in \mathbb{N}) \\ n = 3k' + r & (0 \le r < 3 \wedge k' \in \mathbb{N}) \end{cases}$ ومنه يأتي

$0 \le r < 3$ $\begin{cases} n - r = 7k \\ n - r = 3k' \end{cases}$ أي $3 | n - r$ و $7 | n - r$

أي أن $(n - r) \in M_3$ و $(n - r) \in M_7$ ولما كان العددان 3 و 7 أوليان فيما بينهما يكون

$(n - r) \in M_{21}$ أي $(\alpha \in \mathbb{N})$ $n - r = 21\alpha$

وحيث أن $r \in \{0;1;2\}$ بالتعويض نجد :

$n \in \{21\alpha; 21\alpha + 1; 21\alpha + 2\}$ مع $\alpha \in \mathbb{N}$

حل التمرين 02****************************

I) • تعيين الأعداد الطبيعية a و b :

القول $5ab - b^2 = 49$ معناه $b(5a - b) = 49$ أي

$b | 49$ و $(5a - b) | 49$ ونعلم أن $D_{49} = \{1;7;49\}$

ومنه الثنائيات التي تحقق $b(5a - b) = 49$ هي :

$\{(1;49);(49;1);(7;7)\}$ ولإيجاد قيم a و b

$5a - b$	49	1	7
b	1	49	7
a	10	10	$\frac{14}{5}$
$(a;b)$	$(10;1)$	$(1;10)$	X

II) تعيين كل الثنائيات من الأعداد الطبيعية $(a;b)$

التي تحقق $\begin{cases} 2a^2 + b^2 = 20992 \\ PGCD(a;b) = 16 \end{cases}$

نضع $a = 16a'$ و $b = 16b'$ مع a' و b' أوليان فيما بينهما .

ينتج من أن $2a^2 + b^2 = 20992$

$256(2a'^2 + b'^2) = 20992$ أي $2a'^2 + b'^2 = 82$

معناه $b'^2 = 2(41 - a'^2)$ ولما كان $b'^2 > 0$ ينتج أن

$a'^2 < 41$ ومنه الجدول التالي

a'^2	1	4	9	16	25	36
b'^2	80	74	64	50	32	10
طبيعة b'^2	ليس مربع تام	ليس مربع تام	مربع تام	ليس مربع تام	ليس مربع تام	ليس مربع تام
b'	×	×	8	×	×	×

ومنه الثنائية الوحيدة $(a';b')$ هي $(3;8)$ أي

$(a;b) = (48;128)$

* حل التمرين 03****************************

نضع $a = da'$ و $b = db'$ مع a' و b' أوليان فيما بينهما.

إذا نجد $(a'd)(b'a) + 5d^2 = 35d$ أي

$a'b'd^2 + 5d^2 = 35d$ أي $d^2(a'b' + 5) = 35d$ أي

بالقسمة على d نجد $(a'b' + 5)d = 35 ...(\bullet)$ لدينا

$d | (a'b' + 5)d$ أي $d | 35$ أي $d \in \{1;5;7;35\}$

* لما $d = 35$ تكتب $(\bullet)$ $a'b' + 5 = 1$ أي $a'b' = -4$ مستحيلة

* لما $d = 7$ تكتب $(\bullet)$ $a'b' + 5 = 5$ معناه $a'b' = 0$ مستحيلة

$(*)$ لما $d = 5$ تكتب $(\bullet)$ $a'b' + 5 = 7$ معناه $a'b' = 2$

أي $(a';b') \in \{(1;2);(2;1)\}$ أي

$(a;b) \in \{(5;10);(10;5)\}$

(*) لما $d=1$ تكتب $(\bullet)$ بالشكل $a'b'=30$ أي

$$(a;b)\in\left\{\begin{matrix}(1;30);(30;1);(2;15);(15;2)\\ ;(3;10);(10;3);(6;5);(5;6)\end{matrix}\right\}$$

الخلاصة: الأعداد الطبيعية التي تحقق الجملة

$$\begin{cases} ab+5d^2=35d \\ PGCD(a;b)=d \end{cases}$$ هي

$$(a;b)\in\left\{\begin{matrix}(1,30);(30;1);(2;15);(15;2);(3;10)\\ ;(10;3);(6;5);(5;6);(5;10);(10;5)\end{matrix}\right\}$$

حل التمرين 04***************************

ليكن $n\in\mathbb{Z}-\{1\}$ نضع $a=3n+5$ و $b=n-1$

أ.التحقق أن $a=3b+8$

لدينا $3b+8=3(n-1)+8=3n+8=a$

ب. تعيين قيم العددالصحيح n التي من أجلها $\frac{a}{b}$ عددا صحيحا:

لدينا $\frac{a}{b}=\frac{3b+8}{b}=3+\frac{8}{b}$ القول $\frac{a}{b}$ عددا صحيحا يعني أن $b|8$ أي $b\in\{-8;-4;-2;-1;1;2;4;8\}$

أي $n\in\{-7;-3;-1;0;2;3;5;9\}$

2) نفرض أن n عددا طبيعيا

أ) البرهان أن $PGCD(a;b)$ يقسم العدد8:

ليكن $d=PGCD(a;b)$ إذاً ، $d|b$ أي $d|3b$ ولما كان $d|a$ يأتي $d|(a-3b)$ أي $d|8$ أي $d\in\{1;2;4;8\}$

المناقشةحسب قيم n القيم الممكنة لـ $PGCD(a;b)$:

1) إذا كان $k\in\mathbb{N}$ $n=8k$

لما كان $d|8$ أي $d|8$ أي $d|n-b$ أي $d|1$ ومنه $d=1$

2) إذا كان $k\in\mathbb{N}$ $n=8k+1$

$a=3(8k+1)+5=8(3k+1)$ و $b=8k$ واضح أن 8 قاسم مشترك للعددين a و b ومنه يكون قاسم للعدد d ومنه $d=8$ لأن سابقا تبين أن $d|8$

3) إذا كان $k\in\mathbb{N}$ $n=8k+2$

لدينا $a=3(8k+2)+5=24k+11$ و $b=8k+1$

لدينا $a-3b=8$ ومنه $d|8$ ونلاحظ أن العددان a و b فرديان إذا يأتي $d=1$

4) إذا كان $k\in\mathbb{N}$ $n=8k+3$

لدينا $a=3(8k+3)+5=24k+14=2(12k+7)$ و $b=8k+2=2(4k+1)$ ليكن

$\alpha=PGCD(12k+7;4k+1)$ أي

$\alpha|(12k+7)-3(4k+1)$ أي $\alpha|4$ ثم القول أن $\alpha|4$ يعني أن $\alpha|4k$ وحيث أن $\alpha|4k+1$ أي $\alpha|(4k+1)-4k$ أي $\alpha|1$ وعليه يكون $\alpha=1$ وينتج أن $d=2$

5) إذا كان $k\in\mathbb{N}$ $n=8k+4$

$a=3(8k+4)+5=24k+17$ و $b=8k+3$

واضح أن العددان a و b فرديان ومنه $d=1$

6) إذا كان $k\in\mathbb{N}$ $n=8k+5$

$a=3(8k+5)+5=24k+20$ و $b=8k+4$

لدينا $a=4(6k+5)$ و $b=4(2k+1)$

ليكن $d'=PGCD(2k+1;6k+5)$ أي $d'|(6k+5-3(2k+1))$ أي $d'|2$ أي $d'\in\{1;2\}$ والملاحظ أن العدد $2k+1$ فردي ومنه $d'=1$ ينتج أن $d=4$

7) إذا كان $k\in\mathbb{N}$ $n=8k+6$

$a=3(8k+6)+5=24k+23$ و $b=8k+5$

العددان a و b فرديان ومنه $d=1$

8) إذا كان $k\in\mathbb{N}$ $n=8k+7$

$a=3(8k+7)+5=24k+26$ و $b=8k+6$

لدينا $a=24k+26=2(12k+13)$ و $b=2(4k+3)$

ليكن d' القاسم المشترك الأكبر للعددين $12k+13$ و $4k+3$ يكون $d'|(12k+13)-3(4k+3)$ أي $d'|4$

وعليه $d' \in \{1;2;4\}$ ولكن العدد $4k+3$ فردي

فلايمكن أن يكون $d' \in \{2;4\}$ وعليه $d'=1$ ومنه

$d=2$

حل التمرين 05***************************

1) $\alpha = n^2+n$ و $\beta = n+2$

أ) نبين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$،

$PGCD(\alpha;\beta)=PGCD(n;\beta)$

نفرض أن $PGCD(\alpha;\beta)=d'$ و $PGCD(n;\beta)=d$

$d|n$ معناه $d|n(n+1)$ معناه $d|\alpha$ ومنه $d|d'$

(1).......

ولدينا $d'|\alpha$ و $d'|n\beta$ أي $d'|n\beta-\alpha$ أي $d'|n$ ومنه

$d'|d$ ....(2) من (1) و(2) يكون $d=d'$

ومنه $PGCD(\alpha;\beta)=PGCD(n;\beta)$

ب) إستنتاج القيم الممكنة للعدد $PGCD(\alpha;\beta)$:

لدينا $d|n$ و $d|\beta$ معناه $d|n-\beta$ معناه $d|2$ أي

$d \in \{1;2\}$

2) نعتبر $a=3n^3+5n^2+2n$ و $b=3n^2+8n+4$

أ) البرهان أن العدد $(3n+2)$ قاسم مشترك للعددين a و b:

لدينا $a=(3n+2)\times\alpha$ و $b=(3n+2)\times\beta$ ومنه

$3n+2$ قاسم مشترك للعددين a و b

ب) إستنتاج حسب قيم n أن $PGCD(a;b)$ هو $(3n+2)$ أو $2(3n+2)$:

لدينا $\alpha=n(n+1)$ وهو عدد زوجي

إذا كان n فردي فإن $\beta=n+2$ فردي ومنه يكون

$PGCD(\alpha;\beta)=1$ وعليه يكون

$PGCD(a;b)=3n+2$

إذا كان n زوجي يكون $PGCD(\alpha,\beta)=2$ ومنه

يأتي $PGCD(a;b)=2(3n+2)$

ج) تعيين α و β علما أن $PGCD(a;b)=41$:

لما $2(3n+2)=41$ مرفوض

لما $3n+2=41$ معناه $3n=39$ معناه $n=13$ ومنه

$(\alpha;\beta)=(182;15)$

حل التمرين 06***************************

$N=45k+44$ معناه $(k_1=k+1)$ $N+1=45k_1$

$N=50k'+49$ معناه $(k'_1=k'+1)$ $N+1=50k'_1$

$N=75k''+74$ معناه $(k''_1=k''+1)$ $N+1=75k''_1$

واضح أن $N+1$ مضاعف مشترك للأعداد 45، 50 و 75 ولما كان $(45;50;75)=5(9;10;15)$ نهتم بالمضاعف المشترك الأصغر للأعداد 9، 10، 15 وعليه يكون

$PPCM(45;50;75)=5\times PPCM(9;10;15)=450$

أي أن $(\alpha \in \mathbb{N}^*)$ $N+1=450\alpha$

بما أن $1000<N<1500$ يأتي

$1001<450\alpha<1501$ أي $2.22<\alpha<3.33$ أي

$\alpha=3$ وعليه يكون $\boxed{N=1350}$

حل التمرين 07:***************************

أ. معادلة ديكارتية للمستقيم (OA) هي $12x-7y=0$

الإحداثيات الصحيحة $(x;y)$ لمجموعة النقط من (OA) هي الحلول الصحيحة للمعادلة $12x-7y=0$

أي $12x=7y$ لدينا $12|12x$ وعليه $12|7y$ ولكن 12 و 7 أوليان فيما بينهما ومنه $12|y$ أي

$y=12k$ $(k\in\mathbb{Z})$ بالتعويض في المعادلة $12x=7y$

عن y بـ $12k$ نجد $x=7k$ مع $k\in\mathbb{Z}$ ومنه

$(x;y)=(7k;12k) \quad (k\in\mathbb{Z})$

ب) مجموعة النقط ذات الإحداثيات الصحيحة من $[OA]$:

لدينا $0\le x\le 7$ معناه $0\le 7k\le 7$ معناه $0\le k\le 1$ معناه $k\in\{0;1\}$

$0\le y\le 12$ معناه $0\le 12k\le 12$ معناه $0\le k\le 1$ أي $k\in\{0;1\}$

والنقطتين هما $O(0;0)$ و $A(7;12)$

2.أ) x و y عددان صحيحان تعيين الثنائيات الصحيحة $(x;y)$ حلول المعادلتين: $12x-7y=1$ و $12x-7y=-1$:

مع المعادلة $12x-7y=1....(1)$

الثنائية $(3;5)$ حل خاص للمعادلة (1) نجد

$\begin{cases}12x-7y=1\\12(3)-7(5)=1\end{cases}$ أي $12(x-3)-7(y-5)=0$

ومنه يكون $12(x-3)=7(y-5)$ ومنه الحلول هي

$(x;y)=(7k+3;12k+5)/k\in\mathbb{Z}$

مع المعادلة $12x-7y=-1.....(2)$ الحل الخاص للمعادلة هو $(-3;-5)$

بإستخدام مبرهنة غوص نجد :

$(x;y)=(12k-3;7k-5\ )/\,k\in\mathbb{Z}$

ب) إيجاد النقطتين D و F :

لتكن $M(x;y)$ نقطة من داخل $ABOC$ معناه $0<x<7$ و $0<y<12$ وتكون

$d(M;(OA))=\dfrac{|12x-7y|}{\sqrt{193}}$ أصغر ما يمكن من أجل $|12x-7y|=1$

لما $12x-7y=1$ نجد $(x;y)=(3;5)$ أي $D(3;5)$

لما $12x-7y=-1$ نجد $(x;y)=(4;7)$ ومنه $F(4;7)$

حل التمرين 08******************************

1) تحليل العدد A إلى جداء عاملين من الدرجة الثانية:

لدينا

$$A=n^4+2n^2+1-n^2=(n^2+1)^2-n^2$$
$$=(n^2+n+1)(n^2-n+1)$$

2) نضع $a=n^2+n+1$ و $b=n^2-n+1$

أ) نبين أن العددين a و b فرديين :

لدينا $a=\underbrace{n(n+1)}_{2k}+1$ فهو فردي وكذلك

$b=\underbrace{n(n-1)}_{=2k'}+1$ فهو فردي مع $(k\in\mathbb{N})$

ب) نبين أن كل قاسم مشترك للعددين a و b يقسم $2n$ و $2(n^2+1)$:

ليكن d قاسم مشترك للعددين a و b يكون إذا $d|a-b$ أي $d|2n$.

كذلك $d|a+b$ أي $d|2(n^2+1)$

ج) نبين أن العددين n و n^2+1 أوليان فيما بينهما:

ليكن $d=PGCD(n^2+1;n)$ أي $d|(n^2+1)-(n^2)$ أي $d|1$ ومنه $d=1$ والعددان n و n^2+1 أوليان فيما بينهما.

• إستنتاج أن العددين a و b أوليان فيما بينهما:

ليكن $d=PGCD(a;b)$ معناه $d|a-b$ أي $d|2n$ و $d|a+b$ معناه $d|2(n^2+1)$ ورأينا أن $PGCD(n;n^2+1)=1$ أي $d|2$ أي $d\in\{1;2\}$

إذا كان $d=2$ أي أن العددان a و b يقبلان القسمة على 2 فهما زوجيان وهذاتناقض .

ومنه $d=1$ والعددان a و b أوليان فيما بينهما.

حل التمرين 09***************************

1) يكون عدد N مربعا تاما إذا وفقط إذا كانت كل الأسس الظاهرة في تحليله إلى جداء عوامل أولية هي أعداد زوجية

2) تعيين أصغر عدد طبيعي n بحيث $240n$ مربعا تاما:

لدينا $240n = 2^4 \times 3 \times 5 \times n$ يكفي أخذ $n = 3 \times 5$

فيكون العدد $240n$ مربعا تاما وهو $3600 = (60)^2$

3) البحث عن العدد A في حالة وجوده:

ليكن العدد الطبيعي A هو العدد المطلوب في حالة وجوده.

$147|A$ معناه $A = 147\alpha$ مع $\alpha \in \mathbb{N}$

لدينا $A = (3 \times 7^2 \times \alpha)$

القول أن A مربع تام يعني $\alpha = 3 \times k^2$ و k عدد أولي

وعليه يكون $A = (3 \times 7 \times k)^2$

القول أن $9000 \leq A \leq 9999$ معناه

$9000 \leq (21k)^2 \leq 9999$ معناه

$94.86 \leq 21k \leq 99.99$ معناه

$4.51 \leq k \leq 4.76$ ولا يوجد عدد صحيح نسبي يحقق المتراجحة المضاعفة المتحصل عليه ومنه لايوجد عدد طبيعي A حل للمسألة

حل التمرين 10***************************

لدينا $u_0 = 14$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ؛

$u_{n+1} = 5u_n - 6$

1) حساب الحدود: $u_1 = 64$ ، $u_2 = 314$ ، $u_3 = 1465$

$u_4 = 7814$

التخمين : الرقمين الأخيرين للحدود ذات الرتب الزوجية هما 14 (منزلة الأحاد ومنزلة العشرات). الرقمين الأخيرين في الحدود ذات الرتب الزوجية هما 64

2.أ) نبين أن: $u_{n+2} \equiv u_n [4]$:

$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6 = 5(5u_n - 6) - 6 = 25u_n - 36$

ثم $25u_n = 24u_n + u_n$ وعليه $u_{n+2} \equiv u_n [4]$

(واضح أن $24u_n - 36 \equiv 0[4]$)

ب. الإستنتاج :

من أجل n زوجي أي $n = 2k$ مع $k \in \mathbb{N}$

$u_{2k} \equiv u_{2k-2} [4]$

$u_{2k} \equiv u_{2k-4} [4]$

$u_{2k} \equiv ....[4]$

$u_{2k} \equiv u_0 [4]$

$u_{2k} \equiv 14[4]$

$u_{2k} \equiv 2[4]$

من أجل n فردي أي $n = 2k+1$ مع $k \in \mathbb{N}$

$u_{2k+1} \equiv u_{2k-1} [4]$

$u_{2k+1} \equiv ....[4]$

$u_{2k+1} \equiv u_1 [4]$

$u_{2k+1} \equiv 16[4]$

$u_{2k+1} \equiv 0[4]$

3.أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $2u_n = 5^{n+2} + 3$

- لما $n = 0$: $2u_0 = 2 \times 14 = 28 = 5^{0+2} + 3$ محققة
- نفرض أن $2u_n = 5^{n+2} + 3$ ونبرهن أن

$2u_{n+1} = 5^{(n+1)+2} + 3$

لدينا :

$$2u_{n+1} = 2(5u_n - 6) = 2\left(5\frac{(5^{n+2}+3)}{2} - 6\right)$$

$$= \left(5^{(n+1)+2} + 15 - 12\right) = 5^{(n+1)+2} + 3$$

ومنه الخاصية صحيحة من أجل $(n+1)$

الخلاصة : حسب مبدأ التراجع الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

ب) الإستنتاج أنه من أجل كل عددطبيعي n ،

$2u_n \equiv 28[100]$

لدينا $5^0 \equiv 1[100]$ و $5^1 \equiv 5[100]$ و $5^2 \equiv 25[100]$

$5^3 \equiv 5^2[100]$ أي $5^3 \equiv 25[100]$ ثم نجد

$5^n \equiv 25[100]$ مع $n \geq 2$

ومنه $5^{n+2} = 5^n \times 25$ أي $5^{n+2} \equiv 625[100]$ أي

$5^{n+2} \equiv 25[100]$ ومنه يأتي $5^{n+2} + 3 \equiv 28[100]$

- تحقق الأن من صحة النتيجة من أجل $n \in \{0;1\}$

لما $n = 0$ لدينا $5^{0+2} + 3 \equiv 28[100]$

لما $n = 1$ لدينا $5^3 + 3 = 128$ أي $5^3 + 3 \equiv 28[100]$

ينتج من هذا أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛

$5^{n+2} + 3 \equiv 28[100]$ أي $2u_n \equiv 28[100]$

ج) تعيين حسب قيم n الرقمين الأخيرين لـ u_n :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $2u_n \equiv 28[100]$

أي $2u_n = 100q + 28$ بقسمة الطرفين على 2 نجد

$u_n = 50q + 14$ نميز حالتين للعدد q حسب شفعيته.

- إذا كان q زوجي فإن الرقمين الأخيرين في u_n هما 14
- إذا كان q فردي أي $q = 2k + 1$ و $k \in \mathbb{N}$ فإن

$u_n = 100k + 64$ ومنه الرقمين الأخيرين في u_n هما 64

إذا الرقمين الأخيرين في كتابة u_n هما 14 أو 64

ولدينا مما سبق أن $u_{2k} \equiv 2[4]$ و $14 \equiv 2[4]$

و $u_{2k+1} \equiv 0[4]$ و $64 \equiv 0[4]$

نقول إذا كان n فرديا فإن الرقمان الأخيران في كتابة u_n هما 64

إذا كان n زوجيا فإن الرقمان الأخيران في كتابة u_n هما 14

حل التمرين 11 ****************************

لدينا $11n - 24m = 1 .....(1)$

1) تبرير أن المعادلة (1) تقبل على الأقل حل:

$24 = 11 \times 2 + 2$

$11 = 2 \times 5 + \boxed{1}$

أخري باقي غير معدوم في خوارزمية أقليدس لقسمة 24 على 11 هو 1 ومنه يكون $PGCD(24;11) = 1$ أي $PGCD(11;-24) = 1$ ومنه المعادلةعلى الأقل تقبل حلا

2) تعيين حلول المعادلة (1)

الثنائية $(11;5)$ حلا خاصا للمعادلة (1) ومنه نحصل على الحلول $(n;m) = (2k + 11; 11k + 5) / k \in \mathbb{Z}$

ب.1) التبرير أن 9 يقسم $10^{11} - 1$ و $10^{24} - 1$:

لدينا $10 \equiv 1[9]$ أي $10^{11} \equiv 1[9]$ أي $10^{11} - 1 \equiv 0[9]$

وكذلك $10^{24} \equiv 1[9]$ أي $10^{24} - 1 \equiv 0[9]$

2) نبين أنه مهما يكن الحل $(n;m)$ فإن :

$(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 9$

من أجل $(n;m)$ حلا للمعادلة (1) يكون

$11n - 24m = 1$ معناه $11n = 24m + 1$

نجد إذا:

$$\begin{aligned}
&(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) \\
&= (10^{24m+1} - 1) - 10(10^{24m} - 1) \\
&= (\cancel{10^{24m+1}} - 1) - \cancel{10^{24m+1}} + 10 \\
&= -1 + 10 = 9
\end{aligned}$$

3) نبين أن $10^{11} - 1$ يقسم $10^{11n} - 1$ و $10^{24} - 1$ يقسم $10^{24m} - 1$:

نضع $10^{11} = x$ فنحصل على $\dfrac{x^n - 1}{x - 1}$ وينتج عن ذلك

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^0 + x^1 + x^2 + ... + x^{n-1}$$

أي $(x^n - 1) = (x - 1)(1 + x + x^2 + ... + x^{n-1})$

أي أن $(10^{11} - 1) | (10^{11n} - 1)$

بنفس الطريقة نبين أن $(10^{24}-1)|(10^{24m}-1)$

4) إستنتاج العددين الصحيحين M و N بحيث

$(10^{11}-1)N-(10^{24}-1)M=9$

من السؤال السابق يمكن أن نكتب

$10^{24m}-1=(10^{24}-1)M$ و $10^{11n}-1=(10^{11}-1)N$

مع N و M عددان صحيحان نسبيان

ومنه نستنتج وجود عددان صحيحان نسبيان N و $M'=10M$ بحيث $(10^{11}-1)N-(10^{24}-1)M=9$

بالإستفادة من 2)

5) ليكن d قاسم مشترك الأكبرللعددين $10^{11}-1$ و $10^{24}-1$ معناه d يقسم $(10^{11}-1)\times N-(10^{24}-1)\times M$ حيث N و M عددان صحيحان نسبيان.

معناه أن d يقسم 9

ولما كان 9 يقسم كلا من $10^{11}-1$ و $10^{24}-1$ ينتج أن $d=9$

إذا $PGCD(10^{11}-1;10^{24}-1)=9$

حل التمرين 12***************************

1) لدينا $4^0\equiv1[11]$ ، $4^1\equiv4[11]$ ، $4^2\equiv5[11]$ ، $4^3\equiv9[11]$ ، $4^4\equiv3[11]$ ، $4^5\equiv1[11]$

من أجل كل عدد طبيعي k يكون $4^{5k}\equiv1[11]$

2) لديا الجدول

$n=$	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$5k+4$	
$4^n\equiv$	1	4	5	9	3	$[11]$

3) لدينا $A=2\times2017^{5n+3}+3\times1438^{10n}+1$

لدينا $2017\equiv4[11]$ و $1438\equiv8[11]$ ومنه

$A\equiv2\times4^{5n+3}+3\times8^{10n}+1[11]$

معناه $A\equiv2\times9+3\times(5^{4n})^3+1[11]$

معناه $A\equiv18+3\times1+1[11]$ معناه $A\equiv22[11]$ معناه

$A\equiv0[11]$

4) لدينا $2017^{5n+2}\equiv5[11]$ أي

$2\times2017^{5n+2}\equiv10[11]$ أي

$2\times2017^{5n+2}+n-3\equiv7+n[11]$

القول أن $n+7\equiv0[11]$ معناه $n\equiv4[11]$ ومنه

$n=11k+4$ و $k\in\mathbb{N}$.

حل تمرين 13****************************

1) تعيين القاسم المشترك الأكبر للعددين 693،216:

ال $PGCD(693;216)=9$

2) بما أن $9|738$ فإن المعادلتين (E_1) و (E_2) متكافئتين.

التحقق :

$77(2)-24(3)=82$ ومنه الثنائية $(2;3)$ حلا خاصا للمعادلة (E_2) .

• حل المعادلة (E_2) :

$$\begin{cases}77x-24y=82.....................(1)\\77(2)-24(3)=82.............(2)\end{cases}$$ بطرح (2) من (1) طرفا لطرف نجد :

$77(x-2)-24(y-3)=0$ أي

$77(x-2)=24(y-3)........(*)$

لدينا $77|77(x-2)$ معناه $77|24(y-3)$ ولكن $77\wedge24=1$ ومنه حسب غوص فإن $77|y-3$ أي

$y=77k+3$ و $k\in\mathbb{Z}$

بالتعويض في $(*)$ عن y بـ $77k+3$ نجد

$x=24k+2$ مع $k\in\mathbb{Z}$

ومنه حلول المعادلة (E_2) هي

$(x;y)=(24k+2;77k+3)/k\in\mathbb{Z}$

3) إيجاد الثنائيات $(x;y)$ حلول (E_2) التي تحقق $|y-x|\le 54$:

$$|y-x|\le 54 \Leftrightarrow |77k+3-24k-2|\le 54$$
$$\Leftrightarrow |51k+1|\le 54$$
$$\Leftrightarrow -54\le 51k+1\le 54$$
$$\Leftrightarrow -55\le 51k\le 53$$
$$\Leftrightarrow -1.07\le k\le 1.09$$

معناه $k\in\{-1;0;1\}$

ونجد $(x;y)\in\{(-22;-74);(2;3);(26;80)\}$

4) إيجاد العددين α و β وكتابة N في النظام العشري:

$$N=729\beta+\alpha+558=36\beta+217\alpha+1296$$

معناه $693\beta-216\alpha=738......(E_1)$ ولما كانت

المعادلة (E_1) تكافئ المعادلة (E_1) نجد الحلول هي

$\alpha=77k+3$ و $\beta=24k+2$ مع $0\le\alpha<6$ و

$0\le\beta<6$ نجد أن $\alpha=3$ و $\beta=2$

ونجد أن $\boxed{N=2019}$

حلول الأنشطة الإضافية

حل التمرين 14 (باك 22 شعبة رياضيات م1 تمرين 1)

1) أ. تعيين حسب قيم n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7:

$2^0\equiv1[7]$، $2^1\equiv2[7]$، $2^2\equiv4[7]$، $2^3\equiv1[7]$

من أجل كل عدد طبيعي k لدينا

$n=$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
$2^n\equiv$	1	2	4

ب) نبين أن من أجل كل عدد طبيعي n ، $6^{2n}\equiv1[7]$:

لدينا $6\equiv-1[7]$ ومنه $6^{2n}\equiv1[7]$

الإستنتاج : إذا كان $n=2k$ فإن $6^n\equiv1[7]$ إذا كان

$n=2k+1$ فإن $6^n\equiv6[7]$

3) نبين أن العدد $\left(2021^{2022}+1962^{1443}\right)^{1954}-2$ يقبل القسمة على 2:

لدينا $2021\equiv-2[7]$ وعليه $2021^{2022}\equiv2^{3k}[7]$ أي

$2021^{2022}\equiv1[7]$ $(6=2+2+0+2)$

لدينا $1962^{1443}\equiv2^{3k}[7]$ أي $1962^{1443}\equiv1[7]$ أي

أي $\left(2021^{2022}+1962^{1443}\right)^{1954}\equiv2^{3k+1}[7]$

$$\left(2021^{2022}+1962^{1443}\right)^{1954}-2\equiv0[7]$$

3.أ) نضع من أجل كل عددطبيعي n، $a_n=2^n+6^n$:

إستنتاج بواقي القسمة الإقليدية للعدد a_n على 7:

$n=$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	
$2^n\equiv$	1	2	4	1	2	4	$[7]$
$6^n\equiv$	1	6	1	6	1	6	$[7]$
$a_n\equiv$	2	1	5	0	3	3	$[7]$

ب) نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_{n+6}\equiv S_n[7]$:

لدينا $a_{n+6}=2^{n+6}+6^{n+6}=2^6\times2^n+6^6\times6^n$

ولأن $2^6\times2^n\equiv2^n[7]$ و $6^6\times6^n\equiv6^n[7]$ يأتي

$$a_{n+6}\equiv a_n[7]$$

ومنه يكون $S_{n+6}\equiv S_n[7]$

ج) نثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n\equiv2^{n+1}+3\times6^{n+1}+3[7]$:

$$S_n=\left(1+2^1+2^2+...+2^n\right)+\left(1+6+6^2+..+6^n\right)$$

أي $S_n=2^{n+1}-1+\dfrac{6^{n+1}-1}{5}$ أي

$5S_n=5\times2^{n+1}+6^{n+1}-6$ بضرب الطرفين في 3 نجد

إذا: $S_n\equiv2^{n+1}+3\times6^{n+1}+3[7]$

وعليه $S_n \equiv 0[7]$ يكافئ $n = 6k+5$

حل التمرين 15 (التمرين 1 باك 2022 الشعبة رياضيات 2م)

لدينا $A_n = n^3 + 5n^2 + 7n + 9$ و $B_n = n+2$

1) أ.نبين أن $PGCD(A_n;B_n) = PGCD(B_n;7)$:

لدينا $A_n = (n^2+3n+1)B_n + 7$ ومنه

$PGCD(A_n;B_n) = PGCD(B_n;7)$

ب) إستنتاج القيم الممكنة لـ $PGCD(A_n;B_n)$:

القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين A_n و B_n هي قواسم العدد 7 في $\mathbb{N}$ أي $\{1;7\}$

ج) تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $(A_n \wedge B_n) = 1$:

القول أن $PGCD(A_n;B_n) = 7$ معناه $B_n \equiv 0[7]$ معناه $n+2 \equiv 0[7]$ معناه $n \equiv 5[7]$ ومنه جميع قيم n عدا التي من شكل $n = 7k+5$ مع $k \in \mathbb{N}$ ، تجعل العددين A_n و B_n أوليان فيما بينهما.

2) نعتبر المعادلة $A_2x - B_2y = 29....(E)$:

أ) بين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $x \equiv 3[4]$:

$51x - 4y \equiv 29[4]$ أي $3x \equiv 1[4]$ ومنه $x \equiv 3[4]$

ب) تعيين حلول المعادلة (E) : لدينا $x = 4k+3$ ومنه نجد $y = 51k+31$ إذا الحلول هي

$(x;y) = (4k+3;51k+31) \ / k \in \mathbb{Z}$

3) أ. إستنتاج حلول المعادلة (E') $51x - 4y = 45....(E')$:

$51x - 4y = 45$ تكافئ $51x - 4(y+4) = 29$ ومنه الحلول هي $(x;y) = (4k+3;51k+27)$ مع $k \in \mathbb{Z}$

ب. تعيين الثنائيات $(x;y)$ حلول (E') التي تحقق $|y - 12x| \leq 3$:

$|y - 12x| \leq 3$ معناه $2 \leq k \leq 4$ والثنائيات هي

$(11;129)$ ، $(15;180)$ ، $(19;231)$

حل التمرين 16 (تمرين 1 باك 2022 تقني رياضي 1م)

لدينا $a = 2022$ و $b = 124$

1) $a \equiv 6[7]$ ، $b \equiv 5[7]$

2) البواقي في القسمة الإقليدية لـ 5^n على 7:

$5^0 \equiv 1[7]$ ، $5^1 \equiv 5[7]$ ، $5^2 \equiv 4[7]$ ، $5^3 \equiv 6[7]$ ، $5^4 \equiv 2[7]$ ، $5^5 \equiv 3[7]$ ، $5^6 \equiv 1[7]$ من أجل كل عدد طبيعي k

$n =$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
$5^n \equiv$	1	5	4	6	2	3

3) نبين أن $a^a + b^b + 4$ يقبل القسمة على 7:

$a^a + b^b + 4 \equiv (-1)^{2022} + 5^{6\times 20+4} + 4[7]$ وعليه

$a^a + b^b + 4 \equiv 0[7]$

4) من أجل كل عدد طبيعي n ؛

$A_n = 2021^n + 2022^n + 2023^n + 2024^n$

نبين أن $A_n \equiv 1 + 5^n + 6^n[7]$:

$2021 \equiv 5[7]$ ، $2022 \equiv 6[7]$ ، $2023 \equiv 0[7]$ ،

$2024 \equiv 1[7]$

ومنه $A_n \equiv 1 + 5^n + 6^n[7]$

الإستنتاج : $A_n + 1 \equiv 0[7]$ معناه

$n \in \{6k+2;6k+3\}$ مع $k \in \mathbb{N}$

حل التمرين 17 (تمرين 1 باك 2022 تقني رياضي 2م)

$a = 5n+2$ ، $b = n+1$ ، $c = 9n+2$

و $d = PGCD(a;b)$ و $d' = PGCD(b;c)$

1) تعيين القيم الممكنة لكل من d و d' :

$d|a$ و $d|b$ معناه $d|(5b-a)$ أي $d|3$ ومنه $d \in \{1;3\}$

ومنه $d'|7$ أي $d'|(9b-c)$ معناه $d'|c$ و $d'|b$

$d'\in\{1;7\}$

الإستنتاج : $PGCD(a;b;c)=1$

2) تعيين قيم n حتى يكون b قاسما للعدد a :

$$\frac{a}{b}=\frac{5n+2}{n+1}=\frac{5(n+1)-3}{n+1}=5-\frac{3}{n+1}$$

ومنه $b|a$ معناه $n+1|3$ معناه $n\in\{0;2\}$

3) نعتبر المعادلة $17x-4y=29....(E)$

نبين أنه إذا كانت $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن : $x\equiv 1[4]$

لدينا $17x\equiv 29[4]$ أي $x\equiv 1[4]$ ومنه $x=4k+1$ مع $k\in\mathbb{Z}$

حلول المعادلة (E) :

$(x;y)=(4k+1;17k-3)$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

4) تعيين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) والتي تحقق $xy<279$:

أي $(4k+1)(17k-3)<279$ وحلول المتراجحة هي

$k\in\{-2;-1;0;1\}$

إذا: $S'=\{(-7;-37);(-3;-20);(1;-3);(5;14)\}$

حل التمرين 18 (تمرين 3 باك 21 شعبة رياضيات م1)

لدينا المعادلة $42x-y=38.....(E)$

1) حل المعادلة (E) علما أن $(1;4)$ حلا خاصا لها:

نحصل على $42(x-1)=(y-4)$ ومنه الحلول هي:

$(x;y)=(k+1;42k+4)$ و $k\in\mathbb{Z}$

2) أ.نبين أن الأعداد a ، b و c تحقق

$113a=3(c-42b+151)$

لدينا $N=\overline{ab0cb}^5=625a+126b+5c.......(1)$

و $N=\overline{a7c5}^8=8c+512a+453$

ومنه نحصل على $113a=3(c-42b+151)$

مع $0\le a<5$ و $0\le b<5$ و $0\le c<5$

الإستنتاج :بالمطابقة نجد $a=3$ ومن جدول قيم العددين b و c نجد $(b;c)=(1;4)$

كتابة N في النظام العشري : $\boxed{N=2021}$

2) البواقي في القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 6 :

لدينا $5\equiv-1[6]$ ومنه $5^{2k}\equiv1[6]$ و $5^{2k+1}\equiv5[6]$

مع $k\in\mathbb{N}$

ب) نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $2021^{2n}+1441^n+4$ مضاعف للعدد6:

لدينا $2021\equiv5[6]$ أي $2021^{2n}\equiv1[6]$ و

$1441\equiv1[6]$ أي $1441^n\equiv1[6]$ ومنه ينتج أن

$2021^{2n}+1441^n+4\equiv0[6]$

جـ) نضع $A_n=2021^{2n}+1441^n+2\times1442^n$

إيجاد قيم العدد الطبيعي n التي تحقق $A_n\equiv0[6]$:

لدينا $1442^n\equiv2^n[6]$ و $2\times1442^n\equiv2^{n+1}[6]$

من أجل n فردي يكون $n+1$ زوجي وعليه

$2^{n+1}\equiv-2[6]$ ويكون $A_n\equiv0[6]$

حل التمرين 19 (ت3 م 2 باك 21 شعبة رياضيات)

1) نعتبر المعادلة $7x-6y=1...(E)$

أ) حل المعادلة (E) علما أ ن الثنائية $(1;1)$ حل لها:

نحصل على المعادلة $7(x-1)=6(y-1)$ ومنه الحلول

هي $(x;y)=(6k+1;7k+1)$ مع $k\in\mathbb{Z}$

ب) التحقق أنه من أجل $(x;y)$ حلا للمعادلة (E)

فإن xy طبيعي غير معدوم:

من أجل $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) لدينا

$$xy=(6k+1)(7k+1)=42k^2+13k+1>0$$

لأن الجذران البديهيان للعبارة $(6k+1)(7k+1)$ هما

$k=-\frac{1}{6}$ ، $k=-\frac{1}{7}$ ولا يوجد عدد صحيح بينهما

فتكون إذا إشارة العدد xy من أجل كل عدد صحيح k موجبة تماما ومنه $xy\in\mathbb{N}^*$

2) أ.دراسة تبعا لقيم n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 7:

$4^0\equiv1[7]$، $4^1\equiv4[7]$، $4^2\equiv2[7]$، $4^3\equiv1[7]$ من أجل كل عدد طبيعي k

$n=$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
$n\equiv$	1	4	2

ب) نبين أن العدد $4\times2019^{2021}+2022^{2022}$ يقبل القسمة على 7:

$2019\equiv(-4)[7]$ ومنه $2019^{2021}\equiv(-4)^{2021}[7]$ أي $2019^{2021}\equiv(-4)^{3k+2}[7]$ أي $2019^{2021}\equiv-2[7]$

ومن ثم $4\times2019^{2021}\equiv-1[7]$ ولدينا $2022\equiv(-1)[7]$ ومنه يكون $2022^{2022}\equiv1[7]$ يأتي أخيرا أن $4\times2016^{2021}+2022^{2022}\equiv0[7]$

3) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $4^n\equiv4[6]$

لما $n=1$ محققة

نفرض أن $4^n\equiv4[6]$ ونبرهن أن $4^{n+1}\equiv4[6]$ مع $n\geq1$

$4^n\equiv4[6]$ معناه $4\times4^n\equiv4\times4[6]$ معناه $4^{n+1}\equiv16[6]$ ولدينا $16\equiv4[6]$ ومنه $4^{n+1}\equiv4[6]$

إذا الخاصية محققة من أجل $(n+1)$

الخلاصة: من أجل كل عددطبيعي غيرمعدوم n،

$4^n\equiv4[6]$

4) نفرض أن $(a;b)$ حل للمعادلة (E):

ليكن $A=\overline{\underbrace{333....330}_{ab\ chifrs}}^4$

أ.نبين أن: $A=4^{ab}-4$:

ننشر A:

$A=0+3\times4+3\times4^2+.....+3\times4^{ab-1}$

$A=3\left(4+4^2+.....+4^{ab-1}\right)$

لدينا $4+4^2+...+4^{ab-1}=4\left(\frac{4^{ab-1}-1}{3}\right)$ ومنه يكون

$A=4^{ab}-4$

ب) التحقق أن $A\equiv0[6]$: رأينا أن $4^n\equiv4[6]$ ومنه يكون $4^{ab}\equiv4[6]$ (رأينا سابقا أن $ab\in\mathbb{N}^*$)

• تعيين كل الثنائيات $(a;b)$ التي من أجلها يكون A للقسمة على 42:

$A\equiv0[42]$ محقق من أجل $A\equiv0[7]$ لأن $42=7\times6$ و $7\wedge6=1$ أي $4^{k+1}\equiv4[7]$ مع $k\in\mathbb{N}$

وهذا يكون $k=3p$ مع $p\in\mathbb{N}$

ومنه $(a;b)\in(18p+1;21p+1)$ و $p\in\mathbb{N}$

حل التمرين20(ت03 باك21 تقني رياضي م1)

1) دراسة تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمةالإقليدية للعدد 5^n على 9:

$5^0\equiv1[9]$، $5^1\equiv5[9]$، $5^2\equiv7[9]$، $5^3\equiv8[9]$، $5^4\equiv4[9]$، $5^5\equiv2[9]$، $5^6\equiv1[9]$

من أجل كل عدد طبيعي k،

$n=$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
$5^n\equiv$	1	5	7	8	4	2

2) تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد 2021^{1442} على 9:

لدينا $2021\equiv5[9]$ ومنه $2021^{1442}\equiv5^{1442}[9]$ و $1442=240\times6+2$ إذا $2021^{1442}\equiv5^{6k+2}[9]$ أي

$2021^{1442}\equiv7[9]$

3) نبين أن العدد $2021^{1442}+1691^{1954}-8$ يقبل القسمة على 9:

لدينا $1691\equiv 187\times 9+8$ ومنه $1691\equiv(-1)[9]$

وعليه يكون $1691^{1654}\equiv 1[9]$ في الأخير يكون

$2021^{1442}+1691^{1954}-8\equiv 0[9]$

3) البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $5^{6n}+2021^{6n+1}+1443$ مضاعف للعدد 9:

لدينا $5^{6n}\equiv 1[9]$ و $2021^{6n+1}\equiv 5[9]$ و

$1443=127\times 9+3$ أي $1443\equiv 3[9]$ ينتج أن

$5^{6n}+2021^{6n+1}+1443\equiv 0[9]$

5) من أجل كل عدد طبيعي n نضع :

$A_n=2021^{1442}+1691^{1954}+5n$

تعيين الأعدادالطبيعية n التي من أجلها يكون $A_n\equiv 0[9]$: $A_n\equiv 8+5n[9]$

القول أن $5n+8\equiv 0[9]$ معناه $5n\equiv 1[9]$ معناه

$n\equiv 2[9]$ معناه $n=9k+2$ و $k\in\mathbb{N}$

حل التمرين 21 (تمرين 1 باك 21 شعبة تقني رياضي م2)

نعتبر المعادلة $13x-9y=1....(E)$

1) أ.التحقق أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $x\equiv 7[9]$:

لدينا $13x-9y=1$ معناه $13x\equiv 1[9]$ معناه

$4x\equiv 1[9]$ معناه $7(4x)\equiv 7[9]$ معناه $x\equiv 7[9]$

ب) حل المعادلة (E) :

لدينا $x\equiv 7[9]$ معناه $x=9k+7$ بالتعويض في

المعادلة (E) نجد $y=13k+10$ ، $k\in\mathbb{Z}$

2) أ.الباقي في القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5 و $n\in\mathbb{N}$:

$3^0\equiv 1[5]$ ، $3^1\equiv 3[5]$ ، $3^2\equiv 4[9]$ ، $3^3\equiv 2[9]$ ،

$3^4\equiv 1[5]$ من أجل كل عدد طبيعي k

$n=$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
$3^n\equiv$	1	3	4	2

ب) نضع $A_n=3^{4n}+3^{4n+1}+3^{4n+2}-3$ ، $n\in\mathbb{N}$:

بين أن A_n قابلا للقسمة على 5:

$A_n\equiv 1+3+4-3[5]$ أي $A_n\equiv 0[5]$

3) بفرض $(x;y)$ حل للمعادلة (E) حيث $(x;y)\in\mathbb{N}^2$:

تعيين قيم n حتى يكون $n+3^{y-x}+2023^{2022}$ يقبل القسمة على 5:

القول أن $n+3^{y-x}+2023^{2022}\equiv 0[5]$ يعني

$n+3^{4k+3}+3^{4k+2}\equiv 0[5]$ يعني $n+6\equiv 0[5]$ يعني

$n\equiv 4[5]$ معناه $n=5k+4$ و $k\in\mathbb{N}$

حل التمرين 22 (ت02 باك 20 تقني رياضي م2)

1) $3^0\equiv 1[5]$ ، $3^1\equiv 3[5]$ ، $3^2\equiv 4[5]$ ، $3^3\equiv 2[5]$ ،

$3^4\equiv 1[5]$

من أجل كل عدد طبيعي k ؛

$n=$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
$3^n\equiv$	1	3	4	2

ب) إستنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد $8^{2020}-2\times 3^{1441}-1$ على 5:

لدينا $8\equiv 3[5]$ و $2020=4k$ ومنه $8^{2020}\equiv 1[5]$

$3^{1441}=3^{4\times 360+1}$ وعليه $3^{4\times 360+1}\equiv 3[5]$ إذا يكون

$2\times 3^{1441}\equiv 1[5]$ أي $8^{2020}-2\times 3^{1441}-1\equiv -1[5]$

أي $8^{2020}-2\times 3^{1441}-1\equiv 4[5]$

2) نضع $a_n=3^{n+1}+4$:

$a_n\equiv 0[5]$ يعني $3^{n+1}+4\equiv 0[5]$ يعني $3^{n+1}\equiv 1[5]$ يعني

$n+1=0[4]$ يعني $n\equiv 3[4]$ ومنه $k\in\mathbb{N}$ $\boxed{n=4k+3}$

3) نعتبر $b_n=7a_n+5$

أ)تعيين القيم الممكنة لـ $PGCD(a_n;b_n)$: ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين a_n و b_n

$d|a_n$ معناه $d|7a_n$ و $d|b_n$ معناه $d|(b_n-7a_n)$ معناه $d|5$ أي $d\in\{1;5\}$

ب)نبين أن $a_n\equiv0[5]$ إذاوفقط إذا $b_n\equiv0[5]$:

أولا : $a_n\equiv0[5]$ معناه $7a_n\equiv0[5]$ معناه $7a_n+5\equiv0[5]$ أي $b_n\equiv0[5]$

ثانيا : $b_n\equiv0[5]$ معناه $7a_n+5\equiv0[5]$ معناه $7a_n\equiv0[5]$ أي $7a_n=5k$ معناه (غوص) $5|a_n$ ومنه $a_n\equiv0[5]$

ج)إستنتاج الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون a_n و b_n أوليان فيما بينهما.

من الأسئلة السابقة أن $a_n\equiv0[5]$ معناه $n=4k+3$ ويكون الـ $PGCD(a_n;b_n)=5$ باقي القيم للعدد n وهي $4k$، $4k+1$، $4k+2$ ($k\in\mathbb{N}$)يكون العددان a_n و b_n أوليان فيما بينهما.

حل التمرين23(ت03 باك20 شعبة رياضيات م1)

لدينا $a=4n+1$، $b=6n+1$، $c=3n+2$ و $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

1)إثبات أن $a\wedge b=1$: لدينا $3a-2b=1$ ومنه المشترك الأكبر للعددين a و b يقسم 1

ومنه $PGCD(a;b)=1$ والعددان اوليان فيما بينهما.

2) ليكن α القاسم المشترك الأكبر للعددين a و c :

إثبات أن α يقسم 5:

لدينا $4c-3a=5$ ومنه القاسم المشترك الأكبر للعددين a و c يكون قاسماللعدد 5 أي $\alpha\in\{1;5\}$

• تعيين الأعداد الطبيعية n بحيث $\alpha=5$:

لدينا $a\equiv0[5]$ معناه $4n+1\equiv0[5]$ و $c\equiv0[5]$ معناه $3n+2\equiv0[5]$ بجمع الموافقتين نجد $2n+3\equiv0[5]$ معناه $n\equiv1[5]$ أي $n=5k+1$ مع $k\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

3) نسمي β القاسم المشترك الأكبر للعددين a و bc :

إثبات أن α يقسم β :

لدينا $\alpha|a$ و $\alpha|c$ يكون $\alpha|bc$ ومنه α قاسم مشترك للعددين a و bc فهو يقسم β

ب)إثبات أن β و b أوليان فيما بينهما:

ليكن d قاسم مشترك للعددين β و b أي $d|b$ و $d|\beta$ أي $d|a$ و $d|b$ أي $d|PGCD(a;b)$ أي $d=1$

إستنتاج أن $\alpha=\beta$:

لدينا $\beta|bc$ و $\beta\wedge b=1$ ومنه $\beta|a$ و $\beta|c$ أي $\beta|\alpha$

وعليه يكون $\beta=\alpha$

حل التمرين24(ت1 باك20 رياضيات م2)

1) حل المعادلة $3x-5y=2$

لدينا $3(-1)-5(-1)=2$ ومنه الحل الخاص للمعادلة هو $(x_0,y_0)=(-1;-1)$.

ومنه نحصل على $3(x+1)=5(y+1)$ ومنه $k\in\mathbb{Z}$ $(x;y)=(5k-1;3k-1)$ وهي حلول المعادلة.

2)أ.دراسة تبعا لقيم العدد الطبيعي n الباقي في القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 7:

لدينا $9^3\equiv1[7]$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي k لدينا

$n=$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
$9^n\equiv$	1	2	4

ب.دراسة تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11:

$n=$	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$5k+4$

$4^n\equiv$	1	4	5	9	3

3) تعيين الأعداد الطبيعية n بحيث

$$14\times4^n+11\times9^n-4\equiv0[77]$$

يكون هذا محقق من أجل

$14\times4^n+11\times9^n-4\equiv0[7]$ و

$$14\times4^n+11\times9^n-4\equiv0[11]$$

أي :

$9^n\equiv1[7]$ و $4^n\equiv5[11]$

ومنه نجد $n=3\alpha=5\beta+2$ أي $3\alpha-5\beta=2$

مع α و β عددان طبيعيان.

وعليه يكون $(\alpha;\beta)=(5p-1;3p-1)$ مع $p\in\mathbb{N}^*$

وأخيرا نكتب $\boxed{n=15p-3}$

4) أ.نضع $u_n=3\times4^n+4\times9^n$ و

$S_n=u_1+u_2+....+u_{15n}$:

أ) التعبير عن S_n بدلالة n :

$$S_n=3\left(4^1+4^2+...+4^{15n}\right)+4\left(9+9^2+...+9^{15n}\right)$$

$$S_n=3\left(4\times\frac{4^{15n}-1}{3}\right)+4\left(9\times\frac{9^{15n}-1}{8}\right)$$

$$S_n=4\left(4^{15n}-1\right)+\frac{9}{2}\left(9^{15n}-1\right)$$

ب) إثبات أن S_n مضاعف للعدد 77:

لدينا $S_n\equiv0[77]$ معناه $2S_n\equiv0[77]$ معناه

$8\left(4^{15n}-1\right)+9\left(9^{15n}-1\right)\equiv0[77]$ معناه

$$\begin{cases}8\left(4^{15n}-1\right)+9\left(9^{15n}-1\right)\equiv0[7]\\8\left(4^{15n}-1\right)+9\left(9^{15n}-1\right)\equiv0[11]\end{cases}$$

معناه : $\begin{cases}4^{15n}-1\equiv0[7]\\9^{15n}-1\equiv0[11]\end{cases}$ معناه $\begin{cases}\left(4^3\right)^{5n}-1\equiv0[7]\\\left(9^5\right)^{3n}-1\equiv0[11]\end{cases}$

أي $\begin{cases}(1)^{5n}-1\equiv0[7]\\(1)^{3n}-1\equiv0[11]\end{cases}$ وهي محققة مهما كان n طبيعي

حل التمرين 25 (ت2باك17 رياضيات م1)

1) نعتبر المعادلة $104x-20y=272....(E)$

أ) تعيين القاسم المشترك الأكبر للعددين 104 و 20 :

لدينا

$104=20\times5+4$ و $20=5\times4+0$ ومنه يكون

$PGCD(104;20)=4$

• نبين أن المعادلة تقبل حلول : لدينا $272=68\times4$

ومنه المعادلة (E) تقبل حلول

ب) نبين أنه إذا كان $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإن $x\equiv3[5]$:

المعادلة (E) تكافئ $26x-5y=68$ معناه

$26x\equiv68[5]$ معناه $x\equiv3[5]$ معناه

$x=5k+3\ (k\in\mathbb{Z})$ بالتويض نجد $y=26k+2$ ومنه

حلول المعادلة هي

$$(x;y)=(5k+3;26k+2)\quad(k\in\mathbb{Z})$$

2) نضع : $\lambda=\overline{1\alpha\alpha\beta01}^4=\overline{1\alpha\beta01}^6$:

مع $0\le\alpha\le3$ و $0\le\beta\le3$:

بنشر العددين نحصل على $104\alpha-20\beta=272$ ومنه

$\alpha=5k+3$ و $\beta=26k+2$ ومنه $\alpha=3$ و $\beta=2$

ويكون العدد $\boxed{\lambda=2017}$

3) التحقق من أن العددين 2017 و 1009 أوليان:

بإستعمال جيوجيبرا نجد أن العددان أوليان

• تعيين الثنائيات $(a;b)$ التي تحقق $2m-d=2017$:

لدينا إذا: $2a'b'\times d-d=2017$ معناه

$2a'b'-1=\dfrac{2017}{d}$ لما $d=1$ يكون $a'\times b'=1009$

ومنه $(a;b)\in\{(1;1009);(1009;1)\}$

حل التمرين26(ت02 باك17 تقني رياضي م2)

1) نبين أن من أجل كل عددطبيعي k، $4^{5k}\equiv 1[11]$:

لدينا $4^5=1024=93\times 11+1$ ومنه $4^5\equiv 1[11]$ ومن أجل كل عدد طبيعي k؛ $4^{5k}\equiv 1[11]$

2)إستنتاج بواقي القسمة للعدد 4^n على 11:

$n=$	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$5k+4$
$4^n\equiv$	1	4	5	9	3

3) نبين أن $2\times 2017^{5n+3}+3\times 1438^{10n}+1$ يقبل القسمة على 11:

لدينا $2017\equiv 4[11]$ ومنه $2017^{5n+3}\equiv 4^{5n+3}[11]$ أي $2017^{5n+3}\equiv 9[11]$ أي $2\times 2017^{5n+3}\equiv 7[11]$

$1438\equiv 8[11]$ أي $1438^{10n}\equiv 8^{10n}[11]$ أي

$1438^{8n}\equiv (8^2)^{5n}[11]$ أي $1438^{10n}\equiv (4^{5n})^3[11]$

أي $1438^{10n}\equiv 1[11]$ ومنه $3\times 1438^{10n}\equiv 3[11]$

ومنه $2\times 2017^{5n+3}+3\times 1438^{10n}+1\equiv 11[11]$ أي

$2\times 2017^{5n+3}+3\times 1438^{10n}+1\equiv 0[11]$

4)تعيين قيم n التي يكون من أجلها $(2\times 2017^{5n+2}+n-3)$ يقبل القسمة على 11:

لدينا $2017^{5n+2}\equiv 4^{5n+2}[11]$ ومنه $2017^{5n+2}\equiv 5[11]$ أي $2\times 2017^{5n+2}\equiv 10[11]$

القول أن $2\times 2017^{5n+2}+n-3\equiv 0[11]$ معناه $n+7\equiv 0[11]$ معناه $n\equiv 4[11]$ معناه $n=11k+4$ مع $k\in\mathbb{N}$

حل التمرين27(ت03 باك2014 شعبة رياضيات م1)

1) نعتبر المعادلة $(E)....2013x-1962y=54$

أ) حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين 2013 و 1962 :

$2013=1962\times 1+51$

$1962=38\times 51+24$

$51=24\times 2+3$

$24=3\times 8+0$

ومنه الـ$PGCD(2013;1962)=3$

ب)إستنتاج أن المعادلة (E) تقبل حلولا:

لدينا $54=3\times 18$ ومنه المعادلة تقبل حلول.

ج) من أجل $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) لدينا

$2013x=1962y+54$ أي $2013x=1962k+54$

أي $671x=654k+18$ أي $671x=6(109k+3)$

واضح أن $6|6(109k+3)$ ومنه $6|671x$ ولكن

$6\wedge 671=1$ ومنه ينتج من غوص أن $6|x$ أي

$x\equiv 0[6]$

د) الحل الخاص: $74<x_0<80$ تعني $74<6k<80$

تعني $12.3<k<13.8$ معناه $k=13$ ومنه نجد

$x_0=6\times 13=78$ ونجد $y_0=80$ أي الحل الخاص للمعادلة (E) هو $(78;80)$

- حل المعادلة (E) :

حلول المعادلة (E) هي :

$(x;y)=(654k+78;671k+80)\quad (k\in\mathbb{Z})$

2) تعيين القيم الممكنةللقاسم المشترك الأكبرللعددين x و y:

ليكن $d=PGCD(x;y)$ إذا $d|(671x-654y)$

معناه $d|18$ أي $d\in\{1;2;3;6;9;18\}$

4) تعيين قيم العددين الطبيعيين a و b حيث :

$671a-654b=18$ و $PGCD(a;b)=18$:

لدينا $671a-654b=18$ معناه

$671(18a')-654(18b')=18$ معناه

$671a'-654b'=1$ و $(a'\wedge b')=1$

لدينا

$$671=654\times1+17$$
$$654=17\times38+8$$
$$17=8\times2+1$$

ومنه

$$1=17-8\times2$$
$$=................$$
$$=77(671)-79(654)$$

ومنه $a'=77$ و $b'=79$

ونجد من عبارة $(a;b)$ حل المعادلة أن

$a=654\times18p+77\times18=11772p+1386$

و $b=671\times18p+79\times18=12078p+1422$

مع $p\in\mathbb{N}$

حل التمرين 28 (باك 12 شعبة رياضيات التمرين 2 م اول)

1) نعتبر المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية :

$$2011x-1432y=31....(1)$$

أ. إثبات أن العدد 2011 أولي:

لدينا $\sqrt{2011}\approx44.84$

ولدينا 2011 لا يقبل القسمة على كل من :

2، 3، 5، 7، 11، 13، 17، 19، 23، 29، 31، 37، 41، 43 ومنه العدد 2011 أولي .

ب) بإستعمال خوارزمية إقليدس نعين حلا خاصا $(x_0;y_0)$ للمعادلة (1) :

$$2011=1432\times1+579$$
$$1432=579\times2+274$$
$$579=274\times2+31$$

ومنه :

$$31=579-2\times274$$
$$=579-2(1432-2\times579)$$
$$=-2\times1432+5\times579$$
$$=-2\times1432+5(2011-1432)$$
$$=5\times2011-7\times1432$$

ومنه الحل الخاص للمعادلة هو $(5;7)$

• حل المعادلة (1) :

$2011(x-5)=1432(y-7)$ معناه $x=1432k+5$

و $y=2011k+7$ مع $k\in\mathbb{Z}$

2) أ. تعيين الباقي في القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7:

$2^0\equiv1[7]$، $2^1\equiv2[7]$، $2^2\equiv4[7]$، $2^3\equiv1[7]$ من أجل كل عدد طبيعي k

$n=$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
$2^n\equiv$	1	2	4

• إيجاد الباقي في القسمةالإقليدية للعدد $2011^{1432^{2012}}$ على 7:

لدينا $2011\equiv2[11]$ ومنه $2011^k\equiv2^k[11]$

لدينا $1432\equiv1[3]$ معناه $1432^{2012}\equiv1[3]$ معناه

$1432^{2012}=3k+1\quad(k\in\mathbb{Z})$ ومنه يكون

$2011^{1432^{2012}}\equiv2^{3k+1}[7]$ معناه $2011^{1432^{2012}}\equiv2[7]$

ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون :

$$2010^n+2011^n+1432^n\equiv0[7]$$

لدينا $2010\equiv1[7]$ ومنه $2010^n\equiv1[7]$

لدينا $2011^n\equiv2^n[7]$ و $1432\equiv4[7]$ معناه

$1432^n\equiv2^{2n}[7]$ نجد أن $n=3k+1$ أو $n=3k+2$

مع $k\in\mathbb{N}$

3) تعيين قيمة العدد الطبيعي N :

$N=\overline{2\gamma\alpha\beta}^{9}$ و $2\beta=\alpha+\gamma$ و $\beta=1432k+5$ و

$\gamma=2011k+7$ و $0\le\alpha\le8$ و $0\le\beta\le8$ و $0\le\gamma\le8$

نجد $\beta=5$ و $\gamma=7$ و $\alpha=3$

ومنه $N=5+9\times3+81\times7+729\times2=2057$

تمارين الكتاب المدرسي الإضافية

حل التمرين 73صفحة 110:

لدينا الجدول التالي

$n\equiv$	0	1	2	3	4	5	[6]
$2^n\equiv$	1	2	4	1	2	4	[7]
$3^n\equiv$	1	3	2	6	4	5	[7]
$2^n+3^n\equiv$	2	5	6	0	6	2	[7]

ومنه $2^x+3^x\equiv0[7]$ معناه $x\equiv3[6]$

حل التمرين 74 صفحة 110:

لدينا الجدول

$x\equiv$	0	1	2	3	4	[5]
$5^x\equiv$	1	5	3	4	9	[11]
$3^x\equiv$	1	3	9	5	4	[11]
$5^x-3^x\equiv$	0	2	5	10	5	[11]

ومنه يكون $5^x-3^x\equiv5[11]$ معناه $x\equiv2[5]$ أو

$x\equiv4[5]$

حل التمرين 75الصفحة 110 :

أ) لدينا الجدول

$x\equiv$	0	1	2	3	4	[5]
$x^2\equiv$	0	1	4	4	1	[5]

ب) $x^2-5y^2=3$ معناه $x^2=5y^2+3$ معناه

$x^2\equiv3[5]$ ومن الجدول السابق نلاحظ أن

المعادلةمستحيلية الحل.

حل التمرين 76الصفحة 110: الفكرة مشابهة لفكرة التمرين السابق له.

حل التمرين 77 الصفحة 110 :

$3^0\equiv1[8]$ ، $3^1\equiv1[8]$ ، $3^2\equiv1[8]$ ومنه إذا كان x فردي فإن $3^x\equiv3[8]$

(2

$y\equiv$	1	2	3	4	5	6	7	[8]
$y^2\equiv$	1	4	1	0	1	4	1	[8]

3) إذا كان $3^x\equiv3[8]$ ومنه $y^2+8\equiv3[8]$ أي $y^2\equiv3[8]$ وهذا غير ممكن.

4) بوضع $x=2n$ لدينا:

$3^{2n}-y^2=(3^n-y)(3^n+y)$

إذا $(3^n-y)(3^n+y)=8$ تعني أن $3^n+y|8$ ومعناه أن $3^n\le8$ لأن y طبيعي

ومنه $n\in\{0;1\}$

لما $n=0$ نجد $3^0-8=y$ معناه $y=-7$ وهذا غيرممكن

لما $n=1$ نجد $y=9-8=1$ و $x=2\times1=2$ ومنه

الثنائية الوحيدة التي تحقق المسألة هي $(x;y)=(2;1)$