مـــذكـــرة رقـــــم 01

الأستاذ :بــخدة أمـــين

ثانوية ساجي مختار السمار–غليزان

السنة الدراسية : 2018 – 2019

المستوى : السنة ثانية رياضيات

المدة : 2 ساعة

الوحدة التعلمية: الجداء السلمي في المستوي

ميدان التعلم: الهندسة

موضوع الحصة : الجداء السلمي

✍ **المكتسبات القبليـة :** حساب الشعاعي

✍ **الكفاءات المستهدفة :** حساب الجداء السلمي لشعاعين، إستعمال خواص الجداء السلمي لأثبات علاقات تتعلق بالتعامد

✍ **المراجع :** الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق تشييد	التهيئة النفسية تذكير بالحساب الشعاعي و خواصه **مناقشة شاط 01 صفحة 280:** من مميزات المثلثات القائمة" مبرهنة فيتاغوس الشهيرة" 1. • إثبات أن $BC^2 = HB^2 + HC^2$ لدينا المثلث HCB قائم في H ومنه $BC^2 = HB^2 + HC^2$ • إثبات أن $AC^2 = HA^2 + HC^2$ لدينا المثلث HAC قائم في H ومنه $AC^2 = HA^2 + HC^2$ لدينا: $\omega = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$ ومنه $\omega = \frac{1}{2}(AB^2 + HA^2 + HC^2 - HB^2 - HC^2)$ ومنه : $\omega = \frac{1}{2}(AB^2 + HA^2 - HB^2)$ و هو المطلوب . 2. الوظعية 1 $\omega = \frac{1}{2}(AB\ AH)$ بكتابة $HB = AB - HA$ لدينا : $\omega = \frac{1}{2}(AB^2 + HA^2 - HA^2)$ ومنه $\omega = \frac{1}{2}(AB^2 + HA^2 - (AB - HA)^2) = \frac{1}{2}(AB\ HA)$ أي $\omega = (AB\ AH)$ • $\omega = AB \times AC \cos\widehat{BAC}$ نعلم أن $\omega = (AB\ AH)$ و $\cos\widehat{CAH} = \frac{AH}{AC}$ أي $AH = AC\cos\hat{A}$ و بالتالي : $AB \times AH = AB \times AC\cos\widehat{BAC}$ أي أن: $\omega = (AB\ AH) = AB \times AC\cos\widehat{BAC}$ 3. $\omega = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$ نعلم أن $\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC}$ ومنه $\vec{BC} = -\vec{AB} + \vec{AC}$ أي $-\vec{BC} = \vec{AB} - \vec{AC}$ نعلم أن $\left(-\vec{BC}\right)^2 = \left(\vec{AB} - \vec{AC}\right)^2$ ومنه $\left\|\vec{BC}\right\|^2 = \left\|\vec{AB} - \vec{AC}\right\|^2$ و بما أن $\left\|\vec{AC}\right\|^2 = AC^2$ و $\left\|\vec{AB}\right\|^2 = AB^2$ أخيرا $\omega = \frac{1}{2}\left(\left\|\vec{AB}\right\|^2 + \left\|\vec{AC}\right\|^2 - \left\|\vec{AB} - \vec{AC}\right\|^2\right)$ و بفرض $\vec{AB} = \vec{u}$ و $\vec{AC} = \vec{v}$ فإن: $\omega = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$ 4. لدينا $\omega = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$ ومنه $\omega = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 - (x - x')^2 + (y - y')^2)$ ومنه : $\omega = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 - x^2 - x'^2 + 2xx' - y^2 - y'^2 + 2yy')$ ومنه $\omega = xx' + yy'$	

الجداء السلمي لشعاعين

تعريف

الجداء السلمي للشعاعين $\overrightarrow{u}$ و $\overrightarrow{v}$ هو العدد الحقيقي الذي نرمز له بالرمز $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ و المعرف كما يلي:

✍ إذا كان $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$ أو $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$ فإن $\boxed{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0}$

✍ إذا كان $\overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0}$ و $\overrightarrow{v}\neq\overrightarrow{0}$ فإن $\boxed{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|\cdot cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}$

✍ **إنتبه:** $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\neq\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}$

حالات خاصة

✍ اذا كان $\overrightarrow{u}$ و $\overrightarrow{v}$ مرتبطين خطيا و كان لهما نفس الاتجاه فان $cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=1$ و بالتالي:

$$\boxed{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|}$$

✍ اذا كان $\overrightarrow{u}$ و $\overrightarrow{v}$ مرتبطين خطيا و كانا متعاكسان في الاتجاه فان $cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=-1$ و بالتالي:

$$\boxed{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=-\|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|}$$

✍ نرمز للجداء السلمي $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}$ بالرمز $\overrightarrow{u}^2$ و يسمى المربع السلمي للشعاع $\overrightarrow{u}$ و بالتالي $\boxed{\overrightarrow{u}^2=\|\overrightarrow{u}\|^2}$

✍ اذا كانت A و B نقطتين فان: $\boxed{\overrightarrow{AB}^2=\|\overrightarrow{AB}\|^2=AB^2}$

مبرهنة

إذا كان $\overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0}$ و $\overrightarrow{v}\neq\overrightarrow{0}$ شعاعين فإن $\boxed{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2\right)}$

البرهان.

ليكن $\overrightarrow{u}$ و $\overrightarrow{u}$ شعاعان غير معدومين . نضع $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})=\theta$

نعلم أن : $\overrightarrow{u}\cdot(-\overrightarrow{v})=-(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})=(-\overrightarrow{u})\cdot\overrightarrow{v}$

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2&=(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})^2\\&=(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})\\&=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}-\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}-\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}\\&=\|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2-2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\end{aligned}$$

ومنه : $\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2=\|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2-2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$

ومنه $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2\right)$ □

العبارة التحليلية للجداء السلمي

مبرهنة

في معلم متعامد و متجانس إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين حيث $\vec{u}(x;y)$ و $\vec{v}(x';y')$ فإن $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'}$

البرهان.

إذا كان $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ معلم متعامد و متجانس و كان $u\,(x;y)$ و $v\,(x';y')$ شعاعين فإن :

$\|\overrightarrow{u}\|^2 = x^2+y^2$ و $\|\overrightarrow{v}\|^2 = x'^2+y'^2$

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2 &= (x-x')^2+(y-y')^2\\ &= x^2+y^2+x'^2+y'^2-2(xx'+yy')\\ &= \|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2-2(xx'+yy')\end{aligned}$$

و بالعودة إلى عبارة $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ نجد: $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = xx'+yy'$ □

التقويم

تطبيق

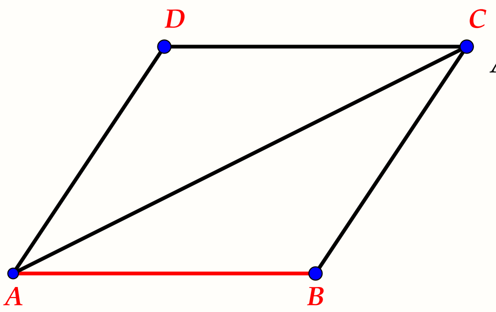
في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$

نضع : $A\,(0;3)$ و $B\,(-2;-1)$ و $C\,(2;-1)$

✍ أحسب : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}$

بناء معارف

تطبيق



في الشكل المجاور ، $ABCD$ متوازي أضلاع فيه $AB=5$

و $AD=2$ و $\widehat{DAB}=\dfrac{\pi}{3}$.

✍ أحسب الجداء السلمي : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

الأشعة المتعامدة

تعريف

القول أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ أنهما متعامدان يعني أنه إذا كان $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$ فإن المستقيمان (AB) و (CD) متعامدان

ملاحظة : نقبل اصطلاحا ان الشعاع المعدوم عمودي على أي شعاع في المستوي

مبرهنة

يكون الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان إذا وفقط إذا كان $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

التقويم

تطبيق

ABC مثلث في المستوي .

لدينا الأضلاع حيث $AB=3$ و $BC=4$

✍ أحسب : أحسب الجداء السلمي الأتي : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ علما أن $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{41\pi}{2}$ ، ماذا تستنتج؟

✍ أحسب الجداء السلمي : $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}$.

واجب منزلي رقم 23-27 صفحة299

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

السنة الدراسية : 2018 — 2019
المستوى : السنة ثانية رياضيات
المدة : 2 ساعة

الوحدة التعلمية: الجداء السلمي في المستوي
ميدان التعلم: الهندسة
موضوع الحصة : الجداء السلمي و الإسقاط العمودي

المكتسبات القبليـة : الجداء السلمي
الكفاءات المستهدفة : خواص الجداء السلمي و الإسقاط العمودي
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق	**التهيئة النفسية** تذكير بالجداء السلمي	

قواعد الحساب

خــواص

من أجل كل ثلاثة أشعة $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ومن أجل كل عدد حقيقي k

① $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
② $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
③ $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$
④ $\left(k\vec{u}\right)\cdot\vec{v} = k\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$
⑤ $\vec{u}\cdot\left(k\vec{v}\right) = k\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$

أمثلة ....

تشخيص

المطابقات الشهيرة

❶ $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$ أو $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2+2\vec{u}.\vec{v}+\left\|\vec{v}\right\|^2$

❷ $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$ أو $\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2-2\vec{u}.\vec{v}+\left\|\vec{v}\right\|^2$

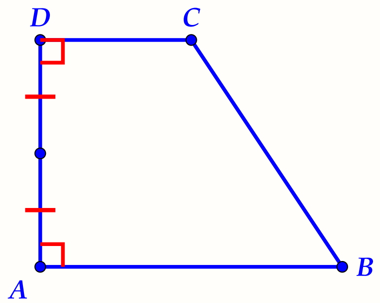
❸ $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\left(\vec{u}-\vec{v}\right) = \vec{u}^2-\vec{v}^2$ أو $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\left(\vec{u}-\vec{v}\right) = \left\|\vec{u}\right\|^2-\left\|\vec{v}\right\|^2$

التقويم

تطبيـــــــــــق

ليكن الشعاعان $\vec{u}\,(2,-1)$ و $\vec{v}\,(3,6)$
أحسب : $\vec{u}\cdot\vec{v}$ و $\vec{u}^2$ و $(3\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-2\vec{v})$ و $(\vec{u}+\vec{v})^2$ و $(\vec{u}-\vec{v})^2$
إستنتج قيمة كل من $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2$ و $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2$

تطبيق



$ABCD$ شبه منحرف قائم في A و D ، O منتصف $[AD]$

نضع $AB=a$ و $DC=b$ و $AO=c$.

✍ أحسب : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}$

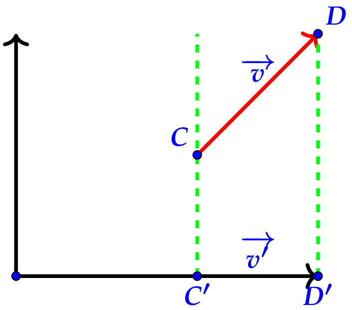
✍ بين أن $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=ab-c^2$

الجداء السلمي و الإسقاط العمودي

المسقط العمودي لشعاع على محور او شعاع

تعريف

$\vec{v}$ شعاع من المستوي حيث: $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$. لتكن C' و D' المسقطان العموديان على الترتيب للنقطتين C و D على المحور $(O,\vec{u})$. يسمى الشعاع $\vec{v'}$ المعرف بـ $\vec{v'}=\overrightarrow{C'D'}$ المسقط العمودي للشعاع $\vec{v}$ على المحور $(O,\vec{u})$ او على الشعاع $\vec{u}$

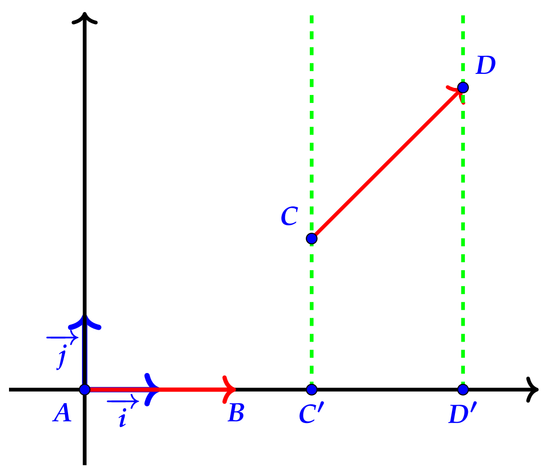


مبرهنة

إذا كان الشعاع $\overrightarrow{C'D'}$ المسقط القائم للشعاع $\overrightarrow{CD}$ على المستقيم الحامل للشعاع $\overrightarrow{AB}$ فإن:

é $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}}$

البرهـــــــــــــان.



نختار معلما متجانس $\left(A;\vec{i},\vec{j}\right)$ يكون فيه الشعاعان $\vec{i}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطيا .

□

عند ئذ مركبتا الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هما $(x_B;0)$ و مركبتا الشعاع $\overrightarrow{CD}$ هما : $(x_D-x_C;y_D-y_C)$.

أما مركبتا الشعاع $\overrightarrow{C'D'}$ هما : $(x_D-x_C;0)$ لأن: $x_D=x'_D$ ، $x_C=x'_C$ و $y'_D=y'_C=$

إذن : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=x_B(x_D-x_C)$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}=x_B(x_D-x_C)$

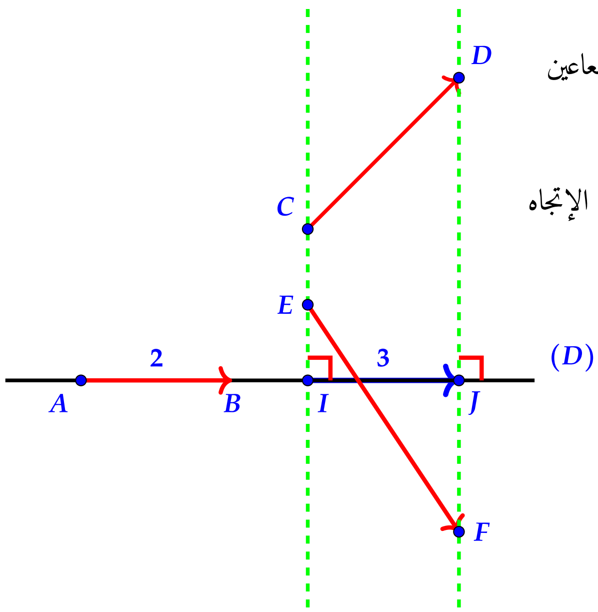
مـــثـــال (1)

في الشكل المجاور الشعاع $\overrightarrow{IJ}$ مسقط قائم لكل من الشعاعين $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{EF}$ على المستقيم (D)

إذن : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ}$

و بما أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{IJ}$ مرتبطان خطيا و بنفس الإتجاه

فإن : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ}=AB\times IJ=2\times 3=6$



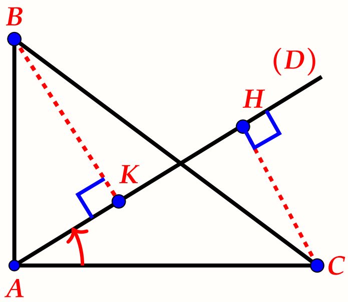
تطبـــــيق

في الشكل المجاور مثلث ABC قائم في A حيث $AB=3$ و $AC=4$

و $\widehat{CAH}=\frac{\pi}{3}$. النقطتان H و K هما بالترتيب مسقطا C و B على (D)

أحسب الجداءات السلمية الأتية :

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$ و $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}$ و $\overrightarrow{KB}\cdot\overrightarrow{HC}$



بناء معارف

التقويم

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

السنة الدراسية : 2018 — 2019
المستوى : السنة ثانية رياضيات
المدة : 2 ساعة

الوحدة التعلمية: الجداء السلمي في المستوي
ميدان التعلم: الهندسة
موضوع الحصة : تطبيقات الجداء السلمي

المكتسبات القبليـة : الأشعة في المستوية، العلاقات المثلثية
الكفاءات المستهدفة : تعين معادلة مستقيم و معادلة دائرة
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق	التهيئة النفسية	

التهيئة النفسية

مبرهنة

في مستوي منسوب إلى معلم $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$

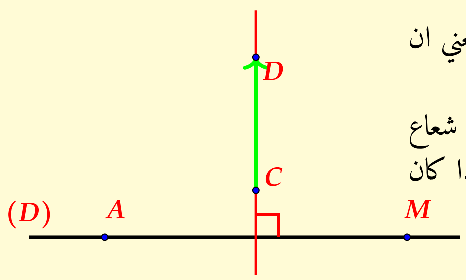
- لكل مستقيم معادلة من الشكل $ax+by+c=0$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية ، و الشعاع $\vec{u}\,(-b;a)$ شعاع توجيه له.
- مجموعة النقط $M\,(x;y)$ من المستوي التي تحقق إحداثياتها : $ax+by+c=0$ حيث $(a;b)\neq(0;0)$ هي مستقيم موجه بالشعاع $\vec{u}\,(-b;a)$

مرحلة بناء المعارف

الشعاع الناظمي لمستقيم

تعريف

- القول ان الشعاع غير المعدوم $\vec{n}$ شعاع ناظمي لمستقيم (D) يعني ان $\vec{n}$ عمودي على شعاع توجيه لـ (D)
- فإذا كانت A نقطة من المستقيم (D) يقبل $\overrightarrow{CD}=\vec{n}$ شعاع ناظمي ، عند ئذ تنتمي النقطة M إلى المستقيم (D) إذا و فقط إذا كان $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}=0$



معادلة مستقيم علم شعاع ناظمي له و نقطة منه:

مبرهنة

في معلم متعامد و متجانس لكل مستقيم له شعاع ناظمي غير معدوم $\vec{n}(a,b)$ معادلة ديكارتية من الشكل $ax+by+c=0$ حيث c عدد حقيقي
اذا كانت $ax+by+c=0$ هي معادلة لمستقيم (D) فإن الشعاع $\vec{u}(-b,a)$ هو شعاع توجيه لـ (D) و $\vec{n}(a,b)$ هو شعاع ناظمي له لأن $\vec{n}$ و $\vec{u}$ متعامدان : $\vec{u}\cdot\vec{n}=a\times(-b)+ba=0$

إثبات

$A\,(x_0;y_0)$ نقطة معلومة من المستقيم (D) و $M\,(x;y)$ نقطة كيفية من (D)
$\vec{n}(a,b)$ شعاع ناظمي للمستقيم تكافئ $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$ تكافئ $(x-x_0)a+(y-y_0)b=0$ تكافئ
$ax+by-x_0a-by_0=0$ تكافئ $ax+by+c=0$ حيث : $c=-x_0a-by_0$

مثال (1)

عين معادلة الدكارتية للمستقيم (D) حيث : $\vec{n}\,(3;2)$ شعاع ناظمي له و $A\,(0.2)$ نقطة منه

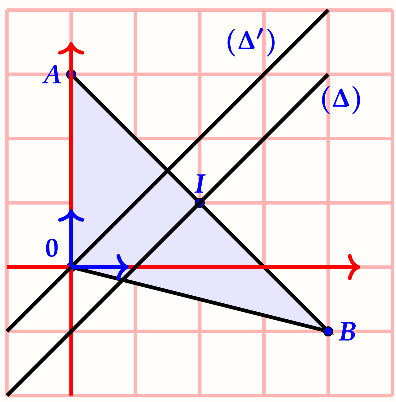
ملاحظة

إذا كان (D) و (D') مستقيمان معادلتاهما:
$ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ على الترتيب
✍ يكون المستقيمان (D) و (D') متعامدين إذا وفقط إذا كان $aa'+bb'=0$
✍ إذا كان (D) و (D') مستقيمين مائلين ، معادلتاهما: $y=ax+b$ و $y'=a'x+b'$ على الترتيب
شرط تعامدهما $aa'=-1$

التقويم

تطبيق

$A\,(0;3)$ و $A\,(4;-1)$ نقطتين من المستوي مزود ب معلم متعامد و متجانس $\left(O;\,\vec{i},\,\vec{j}\right)$.
✍ أكتب معادلة المستقيم (Δ) محور قطعة مستقيم $[AB]$ ومعادلة المستقيم (Δ') إرتفاع المثلث OAB المرسوم من الرأس O



معادلة دائرة علم مركزها و نصف قطرها :

معادلة دائرة علم قطرها :

مبرهنة

الدائرة التي قطرها$[AB]$هي مجموعة النقط M من المستوي بحيث: $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

الإثبات

لتكن نقطة I منتصف $[AB]$ ، و لنعرف $AB=2r$
من أجل أي نقطة كيفية M في المستوي :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)=\overrightarrow{MO}^2-\overrightarrow{OA}^2=MO^2-AO^2=MO^2-r^2$$

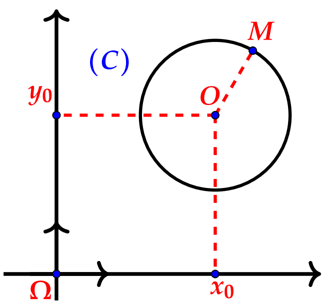
إذن $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ تكافئ $MO=r$.

تعريف

في معلم متعامد و متجانس لكل دائرة (C) ذات المركز $\Omega(x_0;y_0)$ و نصف القطر r حيث $r\succ 0$ معادلة من الشكل
$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

الإثبات

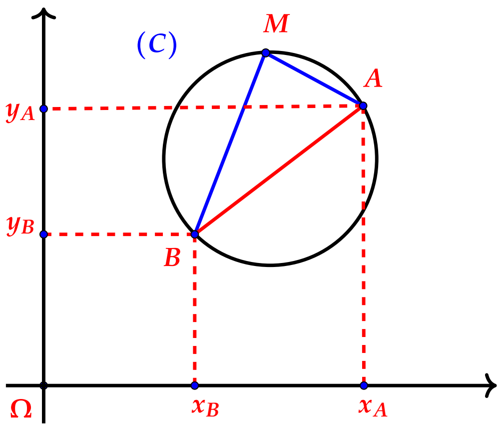
الدائرة (C) هي مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تحقق $OM=r$ أي
$OM^2=r^2$
مركبتا الشعاع $\overrightarrow{OM}$ هما: $(x-x_0;y-y_0)$، من المبرهنة إستنتجنا
$OM^2=r^2$ تكافئ : $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$



مـــثـــال (2)

- $(x+2)^2+(y-4)^2=6$ هي معادلة دائرة التي مركزها $A\left(-2;4\right)$ ونصف قطرها $\sqrt{6}$
- $(x-1)^2+(y+2)^2=-4$ هي ليست معادلة لدائرة لأن $-4<0$

معادلة دائرة التي قطرها $[AB]$:



لتكن $A\left(x_A;y_A\right)$ و $B\left(x_B;y_B\right)$ ، و لتكن (C) الدائرة التي قطرها $[AB]$

و مركبات الشعاعين $\overrightarrow{MA}$ و $\overrightarrow{MB}$ هي $\left(x-x_A;y-y_A\right)$ و $\left(x-x_B;y-y_B\right)$ على الترتيب .

(C) هي مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تحقق: $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

تكافئ: $(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$

و هي تكافئ: $x^2+y^2+ax+by+c=0$ حيث :

$a=-x_A-x_B$ و $b=-y_A-y_B$

و $c=x_Ax_B+y_Ay_B$

مـلاحظة

لكل دائرة (C) معادلة من الشكل $x^2+y^2+ax+by+c=0$ و لكن ليس كل معادلة من هذا الشكل معادلة لدائرة

تطبيـــــــيق

في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$

- أكتب معادلة للدائرة (C) التي مركزها $I\left(1;2\right)$ و المارة بالنقطة $J\left(3;-2\right)$
- أكتب معادلة للدائرة (C') المارة بالنقاط O و $A\left(4;0\right)$ و $B\left(0;2\right)$

كيف نعلم أن: $x^2+y^2+ax+by+c=0$ معادلة دائرة؟:

لتعين (C) مجموعة النقط $M\left(x,y\right)$ التي تحقق: $x^2+y^2+ax+by+c=0$، نكتب هذه المعادلة بالصيغة $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=k$

- إذا كان $k>0$، فإن (C) دائرة و النقطة $\Omega\left(x_0;y_0\right)$ مركزها ونصف قطرها $\sqrt{k}$
- إذا كان $k=0$، فإن (C) نقطة وحيدة $\Omega\left(x_0;y_0\right)$
- إذا كان $k<0$ ، فإن (C) خالية .

تطبيـــــــيق

المستوي مزود بمعلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. اكتب معادلة للدائرة (C) التي مركزها $\Omega(3;-1)$ و نصف قطرها $\sqrt{2}$
2. اكتب معادلة للدائرة (C') التي قطرها $[AB]$ حيث $A(2,1)$ و $B(-3,2)$
3. بين ان مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوي بحيث $x^2+y^2-4y-5=0$ هي دائرة يطلب مركزها و نصف قطرها
4. هل المجموعة (Γ) مجموعة النقط $M(x,y)$ المعرفة بالمعادلة : $x^2+y^2-4x+2y+6=0$ دائرة

ملاحظات حول سير الدرس ....

معـــارف

التقويم

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

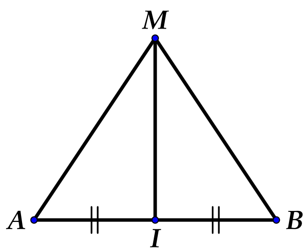
السنة الدراسية : 2018 – 2019
المستوى : السنة ثانية رياضيات
المدة : 2 ساعة

الوحدة التعلمية: الجداء السلمي في المستوي
ميدان التعلم: الهندسة
موضوع الحصة : حساب مسافات و أقياس زوايا

المكتسبات القبلية : الأشعة في المستوية، العلاقات المثلثية
الكفاءات المستهدفة : القدرة على حساب مسافات و أقياس زوايا
المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق		

التهيئة النفسية
نشاط مقترح:



I منتصف قطعة المستقيم $[AB]$ و M نقطة كيفية

❶ بين أن: $MA^2+MB^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$

❷ إستنتج أن : $MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$

ـاء مـعـارف

مبرهنة المتوسط
A و B نقطتان ،I منتصف قطعة مستقيم $[AB]$

لدينا: $MA^2+MB^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$

تكافئ: $MA^2+MB^2=2\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)+\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{IB}^2$

وبما أن: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0}$ و $IA=IB=\frac{1}{2}AB$ أي $\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{IB}^2=\frac{1}{4}AB^2$

فإن: $MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$

مبرهنة

A و Bنقطتان و I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$. من أجل كل نقطة Mمن المستوي لدينا:

$$MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$$

العلاقات المترية في مثلث قائم:

مبرهنة الكاشي

ABC مثلث حيث $AB=c$ و$AC=b$ و $BC=a$. لدينا العلاقات التالية:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot cos\widehat{A}$$

إثبات

حسب علاقة شال: $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$ تكافئ: $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ تكافئ: $\overrightarrow{BC}^2=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})^2$

تكافئ: $BC^2=AC^2+AB^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$ تكافئ: $BC^2=AC^2+AB^2-2AC\times AB\cos\widehat{A}$

أي : $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot cos\widehat{A}$

بنفس الطريقة نجد: $b^2=a^2+c^2-2ac\cdot cos\widehat{B}$ و $c^2=a^2+b^2-2ab\cdot cos\widehat{A}$

قاعدة المساحة:

مبرهنة

ABC مثلث حيث $AB=c$ و $AC=b$ و $BC=a$. لدينا العلاقات التالية:

$$S=\frac{1}{2}bc.sinA=\frac{1}{2}ac.sinB=\frac{1}{2}ab.sinC$$

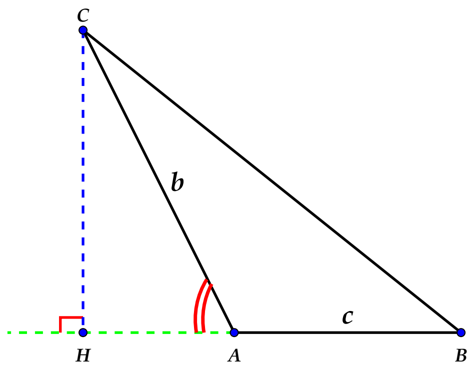
إثبات

نعلم أن $S=\frac{1}{2}AB\times CH$

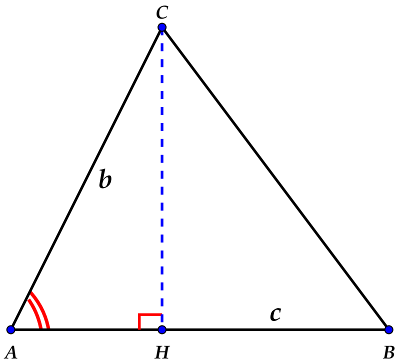
إذا كانت $\widehat{A}$ حادة فإن: $CH=CA\times\sin\widehat{A}$

وعندما تكون $\widehat{A}$ منفرجة فإن: $CH=CH\times\sin\left(\pi-\widehat{A}\right)=CA\sin\widehat{A}$

ومنه في كلتا الحالتين : $S=\frac{1}{2}AB\times AC\times\sin\widehat{A}=\frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$



$\boxed{CH=CH\times\sin(\pi-\widehat{A})}$



$\boxed{CH=CA\times\sin\widehat{A}}$

نتيجة

من المبرهنة السابقة ، نجد أن $2S=bc\sin\widehat{A}=ac\sin\widehat{B}=ab\sin\widehat{C}$ ، إذن بتقسيم $2S$ على abc

نحصل على : $\frac{2S}{abc}=\frac{\sin\widehat{A}}{a}=\frac{\sin\widehat{B}}{b}=\frac{\sin\widehat{C}}{c}$

و إذا كانت جيوب زوايا المثلث مختلفة عن الصفر فإن: $S=\frac{a}{sinA}=\frac{b}{sinB}=\frac{c}{sinC}$

تطبيق

ABC مثلث، فيه $c=20$ ، $b=28$ و $a=32$ وفق الترميز المألوف .

- أوجد قياسات التقريبية $\widehat{A}$ ، $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$
- أحسب طول كل من المتوسط و الإرتفاع المرسومين من A

حساب الزوايا

لدينا حسب مبرهنة الكاشي $a^2=b^2+c^2-2bc\times\cos\widehat{A}$، إذن نستنتج أن: $32^2=28^2+20^2-2ac\cos\widehat{A}$ ومنه $\cos\widehat{A}=\frac{1}{7}$،بإستعمال الألة حاسبة نجد: $\widehat{A}=82^\circ$ ، بنفس الطريقة إنطلاقا من علاقة : $b^2=a^2+c^2-2bc\times\cos\widehat{B}$ نجد $\widehat{B}=60^\circ$ و أخيرا نحسب $\widehat{C}$ بسهولة من : $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180$ نجد $\widehat{C}=38^\circ$

حساب الإرتفاع

لنضع $AH=h$ إذن، $S=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}ac\sin\widehat{B}$ ومنه : $h=c\sin\widehat{B}=20\sin 60^\circ=10\sqrt{3}$

حساب المتوسط

ليكن I منتصف $[BC]$، و لنضع $AI=m$. لدينا إسنادا إلى مبرهنة المتوسط ما يلي : $c^2+b^2=2m^2+\frac{a^2}{2}$

إذن: $m^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}=\frac{28^2+20^2}{2}-\frac{32^2}{4}=16\times 21$ ومنه : $m=4\sqrt{21}$.

معارف

التقويم

تمرين منزلي رقم 01

ABC مثلث حيث $a = 4$ ، $\widehat{C} = 45°$ و $\widehat{B} = 75°$

✍ أحسب b و c

تمرين منزلي رقم 02

ABC مثلث حيث $AB = 4$ و $AC = 7$ و $BC = 6$

① عين (Γ) مجموعة النقط $M(x, y)$ من المستوي التي تحقق: $MB^2 + MC^2 = 24$

② عين قيسا لزوايا المثلث ABC (تعطى القيم مدورة إلى 0.1)

③ ليكن H المسقط العمودي للنقطة A على (BC) . احسب المسافة AH

ملاحظات حول سير الدرس

....

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

السنة الدراسية : 2018 – 2019
المستوى : السنة ثانية رياضيات
المدة : 2 ساعة

الوحدة التعلمية: الجداء السلمي في المستوي
ميدان التعلم: الهندسة
موضوع الحصة : البحث عن مجموعة نقاط

- المكتسبات القبلية : الأشعة في المستوية، العلاقات المثلثية
- الكفاءات المستهدفة : القدرة على حساب مسافات و أقياس زوايا
- المراجع : الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق / التقويم	**تمارين الحل الهندسي** **تمرين 84 من الكتاب** : ABC مثلث .ماهي مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}$ ؟ إرشاد للحل: أدخل C بين A و M بعلاقة شال **تمرين 85 من الكتاب** : A و B نقطتان من المستوي حيث $AB=4$ ماهي مجموعة النقط M من المستوي جيث $MA^2+MB^2=16$ ؟ إرشاد للحل: أدخل G منتصف $[AB]$ بين A و M و بين B و M بعلاقة شال أو طريقة أخرى أدخل A بين B و M بعلاقة شال **تمرين 86 من الكتاب** : A و B نقطتان متمايزتان من المستوي . ماهي مجموعة النقط M من المستوي حيث 1. $\left(2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=0$ 2. $\left(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)=0$ إرشاد للحل: أ) أدخل G مرجح $(A;2)$ و $(B;-3)$ بين A و M بعلاقة شال ب) أدخل G مرجح $(A;2)$ و $(B;-3)$ بين A و M و بين B و M بعلاقة شال في القوس الأيسر و لاحظ ما داخل القوس الأيمن يساوي $\overrightarrow{BA}$ **تمرين 87 من الكتاب** : A و B نقطتان من المستوي و I منتصف $[AB]$ 1. بين أن من أجل كل نقطة M من المستوي يكون : $\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2=2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{AB}$ 2. نفرض أن $AB=1$ ،عيم مجموعة النقط M من المستوي بحيث : $\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2=2$ **تمرين 88 من الكتاب** : لتكن A و B نقطتان متمايزتان من المستوي و G مرجح $(A;3)$ و $(B;2)$ حيث $AB=5$ 1. أ) أكتب $\overrightarrow{AG}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ ب) لتكن (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=10$. بين أن $G\in(E)$ برهن أن (E) هي المستقيم العمودي (AB) في G . 2. حدد (F) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=7$ **تمرين 89 من الكتاب** : A و B نقطتان متمايزتان من المستوي ماهي مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)\cdot\overrightarrow{MA}=0$ ؟ **ملاحظة حول سير الحصة**	

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

السنة الدراسية : 2018 — 2019
المستوى : السنة ثانية رياضيات
المدة : ⏱ 1 ســاعة

الوحدة التعلمية: الجداء السلمي في المستوي
ميدان التعلم: الهندسة
موضوع الحصة : المسافة بين نقطة و مستقيم

✍ **المكتسبات القبليــة :** الأشعة في المستوية، العلاقات المثلثية
✍ **الكفاءات المستهدفة :** القدرة على حساب مسافات و أقياس زوايا
✍ **المراجع :** الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة

مرحلة الإنطلاق

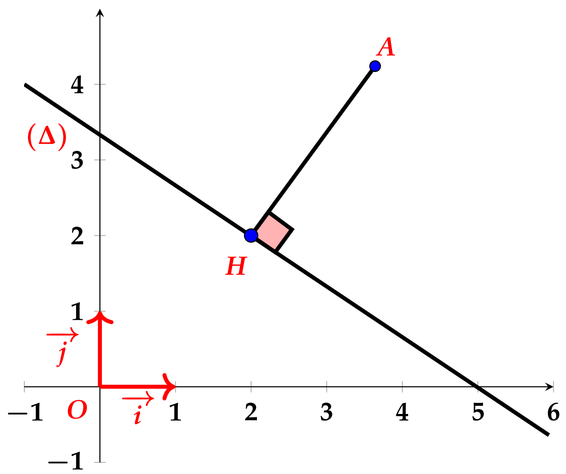
التهيئة النفسية

أعمال موجهة صفحة 292:

تعريف

المسافة بين نقطة A و مستقيم (D) هي المسافة AH بينAو النقطة H مسقطها العمودي على (D).

تمرين



✍ نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ نقطة $A(x_0;y_0)$ و مستقيما (D) معادلته:
$ax+by+c=0$ حيث $(a,b)\neq(0,0)$
لتكن النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على (D)
وليكن $\vec{n}$ الشعاع الناظمي للمستقيم (D) الذي مركبتاه هما (a,b).

الهدف:
حساب المسافة AH بدلالة a ، b ، c، x_0 و y_0 .

❶ بين أن : $\left\|\vec{n}.\overrightarrow{AH}\right\|=\left\|\vec{n}\right\|\times AH$ ثم استنتج أن:
$$\left|\vec{n}.\overrightarrow{AH}\right|=\sqrt{a^2+b^2}\times AH\cdots(1)$$

❷ علما أن النقطة H تنتمي إلى المستقيم (D) و بفرض أن إحداثيتيها هي (x,y) بين أن:
$$\left|\vec{n}.\overrightarrow{AH}\right|=\left|ax_0+by_0+c\right|\cdots(2)$$

❸ استنتج من (1) و (2) أن : $AH=\dfrac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

مناقشة التمرين

$\left|\vec{n}.\overrightarrow{AH}\right|=\left|\left\|\vec{n}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AH}\right\|\times\cos\left(\vec{n};\overrightarrow{AH}\right)\right|=\left\|\vec{n}\right\|\times AH\times 1$ و لدينا: $\left\|\vec{n}\right\|=\sqrt{a^2+b^2}$

ومنه: $\left|\vec{n}.\overrightarrow{AH}\right|=\sqrt{a^2+b^2}\times AH$

لدينا: $\left|\vec{n}.\overrightarrow{AH}\right|=\sqrt{a^2+b^2}\times AH$ ومن جهة أخرى لدينا: $\overrightarrow{AH}\left(x_H-x_0;y_H-y_0\right)$

إذن: $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AH}=a\left(x_H-x_0\right)+b\left(y_H-y_0\right)=ax_H+by_H-ax_A-by_A$

بما أن $H\in(D)$ فإن : $ax_H+by_H+c=0$ وهذا يعني أن : $ax_H+by_H=-c$

إذن: $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AH}=-ax_0-by_0-c$ و بالتالي: $\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AH}\right|=\left|-ax_0-by_0-c\right|=\left|ax_0+by_0+c\right|$

إذن: $\sqrt{a^2+b^2}\times AH=\left|ax_0+by_0+c\right|$ و هذا يعني أن : $AH=\dfrac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

مبرهنة

في معلم متعامد و متجانس المسافة بين نقطة $A(x_0;y_0)$ و مستقيم (D) معادلته $ax+by+c=0$
هي $\dfrac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

تطبيقات

- أحسب المسافة بين النقطة $A(2,3)$ و المستقيم (D) ذو المعدلة: $y=2x+1$
- عين معادلة الدائرة (C) التي مركزها Ω و تمس المستقيم (D') ذو المعادلة: $y=x+y-2$
- لتكن (C') مجموعة النقط $M(x,y)$ و التي تحقق المعادلة: $x^2+y^2-2x-6y-3=0$
  - بين أن (C') دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.
  - هل المستقيم (D') ذو المعادلة $3x+2y+4=0$ مماس للدائرة (C') ؟

مناقشة تطبيقات

- $y=2x+1$ تكافئ $-2x+y-1=0$ ومنه المعادلة الدكارتية للمستقيم (D) هي : $-2x+y-1=0$

$$d\left(A;(D)\right)=\frac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\left|-2(2)+1(3)-1\right|}{\sqrt{(-2)^2+(1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

- $r=d\left(\Omega;(D)\right)=\dfrac{\left|1(-2)+1(1)-2\right|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ ، إذن : $(C):(x+2)^2+(y-1)^2=\dfrac{9}{2}$
- $x^2+y^2-2x-6y-3=0$ تكافئ: $(x-1)^2-1+(y-3)^2-9=0$

تكافئ: $(x-1)^2+(y-3)^2=10$ ومنه (C') دائرة مركزها $A\,(1;3)$ ونصف قطرها $r'=\sqrt{10}$

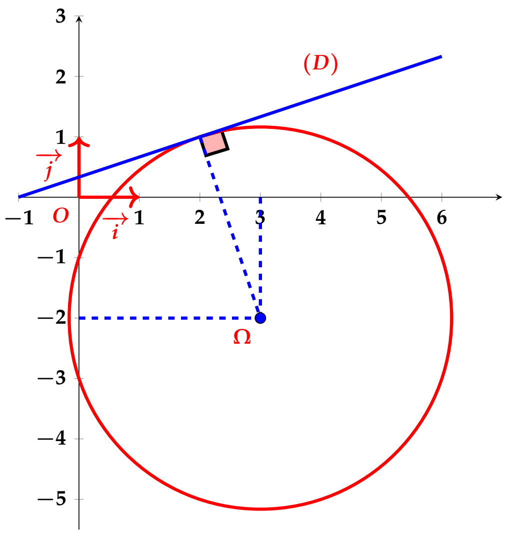
$d\left(A;(D')\right)=\dfrac{\left|3(1)+2(3)+4\right|}{\sqrt{(3)^2+(2)^2}}=\dfrac{13}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}$ إذن $d\left(A;(D')\right)>r'$ ومنه (D') ليس مماس لـ (C')

تمرين 74 صفحة 303

لتكن $\Omega\,(3;-2)$ و (D) المستقيم الذي معادلته $x-3y+1=0$

1. أحسب المسافة بين Ω و (D) .
2. إستنتج معادلة للدائرة التي مركزها Ω و التي تمس (D)

حل



1.

$$\begin{aligned}d\left(A;(D')\right)&=\frac{\left|1(3)-3(-2)+-1\right|}{\sqrt{(1)^2+(-3)^2}}\\&=\frac{10}{\sqrt{10}}\\&=\sqrt{10}\end{aligned}$$

2. نصف قطر الدائرة التي مركزها Ω و التي تمس (D) هو : $\sqrt{10}$

معادلة لهذه الدائرة هي : $(x-3)^2+(y+2)^2=10$

ومعناه : $x^2+y^2-6x+4y+3=0$

ملاحظات حول سير الدرس

....

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

السنة الدراسية : 2018 − 2019
المستوى : السنة ثانية رياضيات
المدة : 2 ساعة

الوحدة التعلمية: الجداء السلمي في المستوي
ميدان التعلم: الهندسة
موضوع الحصة : دساتير الجمع

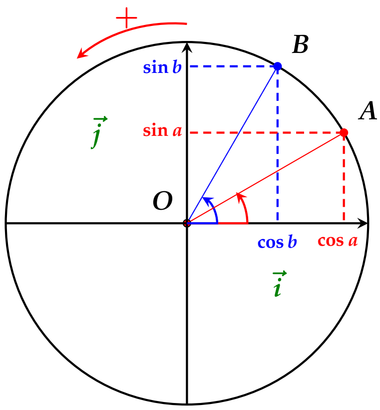
✍ **المكتسبات القبلية :** الأشعة في المستوية، العلاقات المثلثية
✍ **الكفاءات المستهدفة :** القدرة على حساب مسافات و أقياس زوايا
✍ **المراجع :** الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة

مرحلة الإنطلاق

أعمال موجهة صفحة 292:

دساتير الجمع:



حساب $\cos(a-b)$ ، $\cos(a+b)$ ، $\sin(a-b)$ و $\sin(a+b)$

نرسم دائرة مثلثية (C) في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ ، و لتكن A و B النقطتين من الدائرة (C)

اللتين تحققان بالراديان : $\left(\vec{i};\overrightarrow{OA}\right)=a$ و $\left(\vec{i};\overrightarrow{OB}\right)=b$

عند ئذ نجد : $\overrightarrow{OA}=\cos a\,\vec{i}+\sin a\,\vec{j}$ و $\overrightarrow{OB}=\cos b\,\vec{i}+\sin b\,\vec{j}$

حسب علاقة شالة : $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right)=\left(\vec{i},\overrightarrow{OA}\right)-\left(\vec{i},\overrightarrow{OB}\right)=b-a$

لنحسب إذن الجداء السلمي $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ بطريقتين ، تذكر أن: $OA=OB=1$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\cos a\cos b+\sin a\sin b$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=OA\times OB\times\cos\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)=\cos(b-a)=\cos(a-b)$$

ومنه نستنتج أن : $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$

بإستعمال $\cos(-x)=\cos(x)$ و $\sin(-x)=-\sin(x)$ وبكتابة $a+b$ بالصيغة $a-(-b)$

نجد : $\cos(a+b)=\cos(a-(-b))=\cos a\cos(-b)+\sin a\sin(-b)$

ومنه : $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

$$\sin(a-b)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(a-b)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-a\right)+b\right)$$

إذن : $\sin(a-b)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cos b-\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\sin b$

ومنه $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$

$$\sin(a+b)=\sin(a-(-b))=\sin a\cos(-b)-\cos a\sin(-b)$$

ومنه $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$

مبرهنة

من أجل كل عددين حقيقين a و b

❶ $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$ ❷ $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

❸ $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$ ❹ $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$

تطبيق ❶

❶ تحقق أن : $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}$ ،ثم أحسب القيم المضبوطة لـ: $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

❷ إستنتج القيم المضبوطة لـ: $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$

حل

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

• إستنتاج القيم المضبوطة لـ: $\cos \frac{5\pi}{12}$ و $\sin \frac{5\pi}{12}$

$$\cos \frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}\right) = \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$
$$\sin \frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}\right) = \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

عبارة $\cos 2a$ و $\sin 2a$

تطبيق ❷

بين، باستعمال النتائج السابقة، أن: $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ و $\sin 2a = 2\sin a \cos a$

بين،أن : $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

حل

$$\cos 2a = \cos(a+a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a = \cos^2 a - \sin^2 a$$
$$\sin 2a = \sin(a+a) = \sin a \cos a + \cos a \sin a = 2\sin a \cos a$$
$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - (1-\cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1$$
$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = (1-\sin^2 a) - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a$$

مبرهنة

من أجل كل عدد حقيقي a

❶ $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ ❷ $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$

❸ $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ ❹ $\sin 2a = 2\sin a \cos a$

تطبيق ❸

• أحسب القيم المضبوطة لـ $\cos \frac{\pi}{8}$ و $\sin \frac{\pi}{8}$

• بين أن : $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$ و $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$

حل

• $\cos 2\frac{\pi}{8} = 2\cos^2 \frac{\pi}{8} - 1$ تكافئ $1 + \cos \frac{\pi}{4} = 2\cos^2 \frac{\pi}{8}$ تكافئ $\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1+\cos \frac{\pi}{4}}{2}$

تكافئ $\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ بما أن $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$ فإن : $\cos \frac{\pi}{8} > 0$ و بالتالي : $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

• $\cos 2\frac{\pi}{8} = 1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{8}$ تكافئ $1 - \cos \frac{\pi}{4} = 2\sin^2 \frac{\pi}{8}$ تكافئ $\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$

تكافئ $\sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$ بما أن $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$ فإن : $\sin \frac{\pi}{8} > 0$ و بالتالي : $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

• لدينا : $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ تكافئ $1 + \cos 2a = 2\cos^2 a$ تكافئ $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$

لدينا : $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ تكافئ $2\sin^2 a = 1 - \cos 2a$ تكافئ $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$

تمرين منزلي

1 بسط العبارة التالية : $\cos(5x)\cos(3x) + \sin(5x)\sin(3x)$

2 بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

3 بين أنه من أجل كل عدد حقيقي a : $1 + \cos a + \sin a = 2\left(\cos \frac{a}{2}\right)\left(\cos \frac{a}{2} + \sin \frac{a}{2}\right)$

ملاحظات حول سير الدرس

....

ثانوية ساجي مختار السمار-غليزان

السنة الدراسية : 2018 — 2019

المستوى : السنة ثانية رياضيات

المدة : 1 ساعة

الوحدة التعلمية: الجداء السلمي في المستوي

ميدان التعلم : الهندسة

موضوع الحصة : حل معادلة $a\cos x + b\sin x = c$

✍ **المكتسبات القبلية :** حل معادلات من الشكل $\cos x = a$ ، $\sin x = a$ ، دساتير الجمع

✍ **الكفاءات المستهدفة :** حل معادلات من الشكل $a\cos x + b\sin x = c$

✍ **المراجع :** الكتاب المدرسي ،الأنترنت

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق	**حل معادلات من الشكل $a\cos x + b\sin x = c$** **أعمال موجهة صفحة 222:** لتكن في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول الحقيقي x . (1) $a\cos x + b\sin x = c$ حيث b,a و c أعداد حقيقية و $(a;b) \neq (0;0)$ **1** أحسب $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2$ **2** إستنتج أنه توجد زاوية α حيث أن: $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ **3** إستنتج أن المعادلة (1) تكتب على الشكل $\cos x\cos\alpha + \sin x\sin\alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ **4** بإستعمال دساتير الجمع إستنتج أن (1) تكتب : $\cos(x-\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$	
إرساء المعارف	**مناقشة التمرين** **1** $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$ **2** بما أن $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$ فإنه توجد زاوية α تحقق : $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ **3** مما سبق لدينا : $a = \sqrt{a^2+b^2}\cos\alpha$ و $b = \sqrt{a^2+b^2}\sin\alpha$ إذن $a\cos x + b\sin x = c$ تكافئ $\sqrt{a^2+b^2}\cos x\cos\alpha + \sqrt{a^2+b^2}\sin x\sin\alpha = c$ تكافئ $\cos x\cos\alpha + \sin x\sin\alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ **4** لدينا : $\cos(x-\alpha) = \cos x\cos\alpha + \sin x\sin\alpha$ ومنه $\cos(x-\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ **ملاحظة** في السؤال الثالث كان بإمكاننا و ضع $\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و $\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ، ثم إستعمال دساتير الجمع في سؤال الرابع ، نكتب المعادلة (1) على الشكل $\sin(x+\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$	

تطبيق (1)

حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول الحقيقي x في كل حالة من الحالات الأتية :

1 $\cos x + \sin x = 1$

2 $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$

3 $\sqrt{2}\cos 2x - \sqrt{2}\sin 2x = -1$

4 $\cos 3x - \sqrt{3}\sin 3x = m$ (ناقش تبعا لقيم الوسيط الحقيقي m)

الحل

1 $\cos x + \sin x = 1$ تكافئ $\cos(x-\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ حيث $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ و $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ و بالتالي $\alpha = \frac{\pi}{4}$

إذن $\cos x + \sin x = 1$ تكافئ $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4}$ تكافئ

$\begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \\ x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi \end{cases}$

ومنه : $S_1 = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; 2k\pi \quad /k \in \mathbb{Z}\right\}$

2 $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$ تكافئ $\cos(x-\alpha) = \frac{1}{2}$ حيث $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ و $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ومنه $\alpha = \frac{\pi}{6}$

إذن $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$ تكافئ $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ تكافئ: $\begin{cases} x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \\ x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$ ومنه : $S_2 = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad /k \in \mathbb{Z}\right\}$

3 $\sqrt{2}\cos 2x - \sqrt{2}\sin 2x = -1$ تكافئ $\cos(2x-\alpha) = -\frac{1}{2}$ حيث $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ومنه $\alpha = -\frac{\pi}{4}$

إذن $\sqrt{2}\cos 2x - \sqrt{2}\sin 2x = -1$ تكافئ $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} = \frac{4\pi}{3}$

تكافئ: $\begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \\ 2x + \frac{\pi}{4} = -\frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} 2x = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \\ 2x = -\frac{19\pi}{12} + 2k\pi \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} x = \frac{13\pi}{24} + k\pi & k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{19\pi}{24} + k\pi \end{cases}$ ومنه : $S_3 = \left\{\frac{13\pi}{24} + k\pi ; -\frac{19\pi}{24} + k\pi \quad /k \in \mathbb{Z}\right\}$

4 $\cos 3x - \sqrt{3}\sin 3x = m$ تكافئ $\cos(3x-\alpha) = \frac{m}{2}$

- $\left|\frac{m}{2}\right| > 1$ تكافئ $m \in]-\infty ; -2[\cup]2 ; +\infty[$ إذن من أجل $m > 2$ أو $m < -2$ ، S_4 مجموعة خالية .
- من أجل $-2 \leq m \leq 2$ نضع $\cos(3x-\alpha) = \frac{m}{2}$ و $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ ومنه $\alpha = -\frac{\pi}{3}$

ومنه $\cos(3x + \frac{\pi}{3}) = \frac{m}{2} = \cos(\beta)$ حيث $\beta \in [0 ; \pi[$ ، إذن $\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos(\beta)$

تكافئ $\begin{cases} 3x + \frac{\pi}{3} = \beta + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \\ 3x + \frac{\pi}{3} = -\beta + 2k\pi \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} x = \frac{3\beta - \pi + 6k\pi}{9} & k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{-3\beta - 3\pi + 6k\pi}{9} \end{cases}$

ومنه : $S_3 = \left\{\frac{3\beta - \pi + 6\pi}{9} ; \frac{-3\beta - 3\pi + 6k\pi}{9} \quad /k \in \mathbb{Z}\right\}$

ج