ثانوية الشهيد حميدي عيسى - أولاد دراج - المسيلة

يسرني أن أتقدم لكم بهذا العمل المتواضع والمتمثل في مذكرات مادة الرياضيات لسنة ثانية ثانوي شعبة:

★ علوم تجريبية ★ رياضيات ★ تقني رياضي ★

يتضمن هذه العمل:

- مذكرة 55: عموميات حول المتتاليات.
- مذكرة 56: توليد متتالية عددية.
- مذكرة 57: اتجاه تغيّر متتالية.
- مذكرة 58: المتتاليات الحسابية.
- مذكرة 59: حساب مجموع - الوسط الحسابي.
- مذكرة 60: المتتاليات الهندسية.
- مذكرة 61: حساب مجموع - الوسط الهندسي.
- مذكرة 62: نهاية متتالية عددية.

لا تنسونا من صالح الدعاء للوالدين الكريمين ولي. محبكم في الله الأستاذ: فراحتية المحفوظ

آخر تحديث: 12 / 04 / 2023

السنة الدراسية: 2022 / 2023

للتواصل معنا تابعونا على مواقع التواصل الاجتماعي

الأستاذ فراحتية المحفوظ للرياضيات | فراحتية المحفوظ | mahfoudferahtia@gmail.com

أنشطة محور المتتاليات العددية

نشـــاط : (عموميات حول المتتاليات)

① لتكن A مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية الأكبر تماما من 1 والأصغر تماما من 16.
❖ أوجد العدد الذي رتبته 1 والعددالذي رتبته 2 والعدد الذي رتبته 6 في المجموعة A.
② نعتبر الدالة f المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية كالتالي: $f(n) = 2n + 1$.
❖ أحسب صور كل من 2،1، 3، 7 بالدالة f.
❖ ماذا تلاحظ ؟

نشـــاط : (توليد متتالية عددية)

① نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $u_n = 5n - 4$.
❖ أحسب الحدود u_0 ، u_1 و u_2.
❖ أكتب بدلالة n الحدود: u_{n+1} ، u_{2n} و u_{n-1}.
② $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ حيث : $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 2v_n + 3 \end{cases}$.
❖ أحسب الحدود: v_1 ، v_2 و v_3.
③ ماذا تستنتج فيما يخص طرق توليد متتالية.

نشـــاط : (اتجاه تغيّر متتالية)

✍ نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $u_n = n^2 + n$.
① أحسب الحدود u_0 ، u_1 و u_2. ثم قارن بينها.
② ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n).
③ من اجل كل عدد طبيعي n احسب u_{n+1}، ثم $u_{n+1} - u_n$.
④ ماذا تستنتج حول تغيرات المتتالية (u_n).

نشـــاط : (المتتاليات الحسابية)

✍ نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = 2 + 5n$.
① أحسب الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3. ثم $u_1 - u_0$ ، $u_2 - u_1$ و $u_3 - u_2$.
② أحسب الفرق $u_{n+1} - u_n$ ، ثم عبر عن u_{n+1} بدلالة u_n.
③ أكتب u_1 ، u_2 و u_3 بدلالة u_0، ثم خمن كتابة u_n بدلالة u_0.

نشـــاط : (اتجاه تغير متتالية حسابية)

✍ أدرس اتجاه تغير المتتاليات الحسابية التالية:
① المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = 3n + 5$.
② المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = -n - 5$.
③ المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = 5$.

⭐ نشـــاط : (حساب مجموع - الوسط الحسابي)

✍ نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_{n+1} = u_n + 5$.

① أحسب $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4$ و $\frac{6}{2}(u_0 + u_5)$ ثم قارن بين النتيجتين.

③ أحسب $u_0 + u_2$ و $u_2 + u_4$ ثم $2u_1$ و $2u_3$. ماذا تستنتج؟

⭐ نشـــاط : (المتتاليات الهندسية)

✍ نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = 3 \times 2^n$.

① أحسب الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3. ثم عين العدد الحقيقي q حيث: $u_1 = qu_0$ و $u_2 = qu_1$.

② عبر عن u_{n+1} بدلالة u_n و q .

③ أكتب u_1 ، u_2 و u_3 بدلالة u_0، ثم خمن كتابة u_n بدلالة u_0 .

⭐ نشـــاط : (حساب مجموع - الوسط الهندسي)

✍ نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_{n+1} = 2u_n$.

① أحسب $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4$ و $u_0 \times \left(\frac{q^5 - 1}{q - 1}\right)$ ثم قارن بين النتيجتين.

③ أحسب $u_0 \times u_2$ و $u_2 \times u_4$ ثم $(u_1)^2$ و $(u_3)^2$. ماذا تستنتج؟

⭐ نشـــاط : (نهاية متتالية عددية)

✍ نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = \frac{3n+1}{2n+4}$.

① عين الدالة f المرفقة للمتتالية (u_n) حيث: $f(n) = u_n$.

② أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ثم إستنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

✍ (v_n) متتالية حسابية حدها الأول $v_0 = 7$ حيث v_0 وأساسها 3.

③ أوجد عبارة الحد العام u_n.

④ احسب النهاية $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

الأستاذ: فراحتية المحفوظ

الأستاذ:
فَرَاحْتِيَة
المَحْفُوظ

مـــذكـــرة رقـــم 55

ثانوية : حميدي عيسى – أولاد دراج –
السنة الدراسية : 2022 – 2023
يـــوم :
المدة : 01 ساعة.

المستوى : السنة الثانية علوم تجريبية.
ميدان التعلم : تحليل.
المحور : المتتاليات العددية.
الموضوع : عموميات حول المتتاليات.

✍ **المكتسبات القبلية:** مفاهيم أولية حول الأعداد والحساب، مجموعة الأعداد الطبيعية.
✍ **الكفاءات المستهدفة:** تعريف متتالية عددية وإستعمال الكتابات والتعابير المناسبة.
✍ **الأدوات المستعملة:** المنهاج، الكتاب المدرسي، مراجع، الأنترنت.

المراحل	عناصـــر الـــدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق		
التشخيص والاكتشاف	**نشـــاط مقترح :** ① لتكن A مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية الأكبر تماما من 1 والأصغر تماما من 16. ❖ أوجد العدد الذي رتبته 1 والعددالذي رتبته 2 والعدد الذي رتبته 6 في المجموعة A. ② نعتبر الدالة f المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية كالتالي: $f(n)=2n+1$. ❖ أحسب صور كل من 1،2، 3، 7 بالدالة f. ❖ ماذا تلاحظ ؟ **مناقشة النشـــاط :** ❶ لدينا: $A=\{3;5;7;9;11;13;15\}$ • العدد الذي رتبته 1 هو 3. • العدد الذي رتبته 3 هو 7. • العدد الذي رتبته 6 هو 13. ❷ لدينا من أجل كل $n\in\mathbb{N}$، $f(n)=2n+1$ ومنه: • $f(1)=2\times1+1=3$ • $f(2)=2\times2+1=5$ • $f(3)=2\times3+1=7$ • $f(7)=2\times7+1=15$ ❖ نلاحظ أن العدد الذي رتبته 1 في المجموعة A هو صورة 1 بالدالة f، ونفس الشيء لبقية الأعداد. ❖ عناصر المجموعة A ممثلة بالدالة f.	15 د
بناء المعارف	**عمـــوميـــات :** **متتـالية عدديـة :** **تعريف** ✍ **متتالية عددية** حقيقية u هي دالة ترفق بكل عدد طبيعي n ،أكبر من أو يساوي عدد طبيعي n_0 معطى، العدد $u(n)$. ✍ أو: نسمي **متتالية عددية** كل دالة معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ أو جزء منها نحو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. **ترميـز واصطلاحـات :** ❖ يرمز عادة لمتتالية بأحد الرموز الآتية: u ، v ، w ، ..... . ❖ نرمز إلى صورة n بالمتتالية u بـ u_n بدلا من $u(n)$. هذا الترميز الجديد يسمى الترميز بدليل. ❖ العدد u_n هو الحد الذي دليله n ويسمى كذلك الحد العام للمتتالية (u_n). **مـــثـال - 1 -** ✔ (u_n) متتالية معرفة على $D=\{0;1;2;3;4\}$ بالشكل: 2 ، 4 ، 6 ، 8 ، 10 حيث $u_0=2$ ، $u_1=4$ ، $u_2=6$ ، $u_3=8$ ، $u_4=10$. ✔ نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=-2n+5$. • الحد الذي دليله 0 لهذه المتتالية هو $v_0=-2\times0+5=5$. • الحد الذي دليله 4 لهذه المتتالية هو $v_4=-2\times4+5=-3$.	15 د

التقويم

بناء المعارف

ملاحظـــــات :

❖ نرمز إلى المتتالية u بـ: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أو (u_n) إذا كانت المتتالية u معرفة على $\mathbb{N}$، وحدها الأول في هذه الحالة هو u_0 مالم يذكر عكس ذلك (لم يصرح بالحد الأول).

❖ يمكن لمتتالية u أن تكون معرفة انطلاقا من دليل معين n_0 نرمز لها في هذه الحالة بالرمز: $(u_n)_{n>n_0}$ أي إذا كانت المتتالية u معرفة من أجل n أكبر من أو يساوي n_0، وحدها الأول في هذه الحالة هو u_{n_0}.

15 د

مـــثـال - 2 -

✔ نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = 4n^2 + 2$ حدها الأول هو $u_0 = 4 \times 0^2 + 2 = 2$.

✔ نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بـ: $v_n = \frac{3}{n}$ حدها الأول هو $v_1 = \frac{3}{1} = 3$.

✔ نعتبر المتتالية $(w_n)_{n\geq 5}$ المعرفة بـ: $v_n = \sqrt{2n-10}$ حدها الأول هو $v_5 = \sqrt{2\times 5 - 10} = 0$.

العلاقة بين رتبة حد ودليله في متتالية :

✍ نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ والتي حدها الأول هو u_{n_0}. وليكن u_p الحد الذي دليله p إذا رتبة الحد u_p هي $p - n_0 + 1$.

مـــثـال - 3 -

15 د

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $v_n = 6n - 4$ و v_2 حدها الأول.

✔ الحد الذي **دليله** 10 هو: $v_{10} = 6 \times 10 - 4 = 56$ و**رتبته** هي: $10 - 2 + 1 = 9$.

✔ **دليل** الحد الذي **قيمته** 26 هو 5 لأن: $6n - 4 = 26$ أي: $n = 5$. و**رتبته** هي: $5 - 2 + 1 = 4$

تطبـــيق

نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بـ: $v_n = 4n - 3$ و v_0 حدها الأول

❶ أحسب v_0 ، v_1 ، v_{10} ، v_{18} .

❷ أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل:

❖ رتبة الحد الذي دليله 5 هي 5.

❖ الحد الذي قيمته 21 دليله هو 6.

❖ الحد الذي قيمته 37 رتبته هي 11.

ملاحظات حول سير الحصة :

.....

.....

.....

الأستاذ:
فَرَاحْتِيَة
المَحْفُوظ

مـــذكـــرة رقـــم 56

ثانوية : حميدي عيسى – أولاد دراج –
السنة الدراسية : 2022 – 2023
يـــوم :
المدة : 02 ساعة.

المستوى : السنة الثانية علوم تجريبية.
ميدان التعلم : تحليل.
المحور : المتتاليات العددية.
الموضوع : توليد متتالية عددية.

✍ **المكتسبات القبلية:** مفاهيم أولية حول الأعداد والحساب، مفاهيم أولية حول المتتاليات.
✍ **الكفاءات المستهدفة:** • تعريف متتالية عددية بعبارة الحد العام أو بعلاقة تراجعية.
• التمثيل البياني لمتتالية عددية (تمثيل حدود متتالية عددية).
✍ **الأدوات المستعملة:** المنهاج، الكتاب المدرسي، مراجع، الأنترنت.

المراحل	عناصـــر الـــدرس	المدة

مرحلة الإنطلاق

★ نشـــاط مقترح :

① نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $u_n = 5n - 4$.
❖ أحسب الحدود u_0 ، u_1 و u_2.
❖ أكتب بدلالة n الحدود: u_{n+1} ، u_{2n} و u_{n-1}.

② $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ حيث : $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 2v_n + 3 \end{cases}$.

❖ أحسب الحدود: v_1 ، v_2 و v_3.

③ ماذا تستنتج فيما يخص طرق توليد متتالية.

التشخيص والاكتشاف

مناقشة النشـــاط :

❶ حساب الحدود:
• $u_0 = 5 \times 0 - 4 = -4$ • $u_1 = 5 \times 1 - 4 = 1$ • $u_2 = 5 \times 2 - 4 = 6$
❖ كتابة بدلالة n الحدود:
• $u_{n+1} = 5 \times (n+1) - 4 = 5n + 1$ • $u_{2n} = 5 \times 2n - 4 = 10n - 4$.
❷ حساب الحدود:
• $v_1 = 2v_0 + 3 = 2 \times 1 + 3 = 5$ • $v_2 = 2v_1 + 3 = 2 \times 5 + 3 = 13$
• $v_3 = 2v_2 + 3 = 2 \times 13 + 3 = 29$.

طرق توليـــد متتـــاليـــة :

يقصد بتوليد متتالية عددية معرفة حدودها، وهناك ثلاث طرق لتوليد متتالية عددية هي:

بإعطاء قائمة كل حدود المتتالية (عدد الحدود منته) :

مـــثـــال - 1 -

✔ 0 ، 2 ، 4 ، 6 ، 8 ، 10. ✔ 1 ، 3 ، 5 ، 7 ، 9. ✔ 0 ، 4 ، 8 ، 12 ، 16 ، 20.

بنـــاء المعـــارف

توليد متتالية عددية بالحد العام (بعبارة من الشكل $u_n = f(n)$):

✍ يمكن تعريف متتالية بعبارة صريحة (دستور) بدلالة n تسمح بحساب كل حد u_{n_0} من الحدود مباشرة بتعويض n بالقيمة n_0.

مـــثـــال - 2 -

✔ لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث: $u_n = 2n^2 - 2$ معرفة بحدها العام .ويمكن حساب أي حد منها
• في هذه الحالة نجد: $u_0 = 2 \times 0^2 + 2 = 2$ ، $u_1 = 2 \times 1^2 + 2 = 4$ ، $u_5 = 2 \times 5^2 + 2 = 52$.

ملاحظـــــة :

❖ يمكن التعبير عن الحد العام لمتتالية (u_n) باستعمال دالة f ونكتب $u_n = f(n)$ وتسمى الدالة f الدالة المرفقة للمتتالية (u_n).

مـــثـال - 3 -

✔ الدالة المرفقة لمتتالية (u_n) المعرفة بحدها العام $u_n = 6n^2 + 7$ هي الدالة f المعرفة من أجل كل عدد حقيقي موجب x بـ: $f(x) = 6x^2 + 7$.

تطبـــيق

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية كما يلي: $u_n = 2n^2 + 1$.

❖ أحسب u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3.

توليد متتالية عددية بعلاقة تراجعية :

✍ يمكن تعريف متتالية وذلك بإعطاء :

❖ الحد الأول.

❖ وعلاقة تسمح بتعيين كل حد انطلاقا من الحد السابق له مباشرة.

نسمي هذه العلاقة علاقة تراجعية.

مـــثـال - 4 -

✔ لتكن المتتالية (v_n) المعرفة بحدها الأول v_0 حيث: $v_0 = 2$ ومن أجل $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = 2v_n - 1$.

● في هذه الحالة نجد: $v_1 = 2v_0 - 1 = 4 - 1 = 3$ ، $v_2 = 2v_1 - 1 = 6 - 1 = 5$.

ملاحظـــــة :

❖ لتكن دالة عددية f معرفة على مجال D وحيث أن من أجل $x \in D$ فإن $f(x) \in D$. المتتالية u المعرفة بحدها الأول u_{n_0} والعلاقة $u_{n+1} = f(u_n)$ تسمى متتالية تراجعية. تسمح هذه العلاقة بحساب u_{n+1} إذا علم u_n من أجل كل $n \geq n_0$. الدالة العددية f تسمى الدالة المرفقة بالمتتالية u.

تطبـــيق

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n بعلاقة تراجعية u_{n+1} بدلالة u_n، احسب الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 . في كل حالة من الحالات الآتية:

❶ $u_{n+1} = (u_n - 4)^2 + 5$ ❷ $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 5}$

❸ $u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{u_n + 4} - 2$ ❹ $u_{n+1} = \cos\left(\dfrac{(u_n - 3)\pi}{3}\right)$

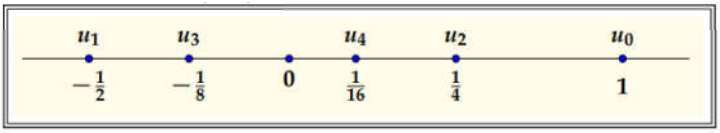
التمثيل البياني لمتتالية عددية :

❶ متتالية معرفة بحدها العام :

❖ يمكن تمثيل حدود متتالية عددية معرفة بحدها العام على حامل محور الفواصل.

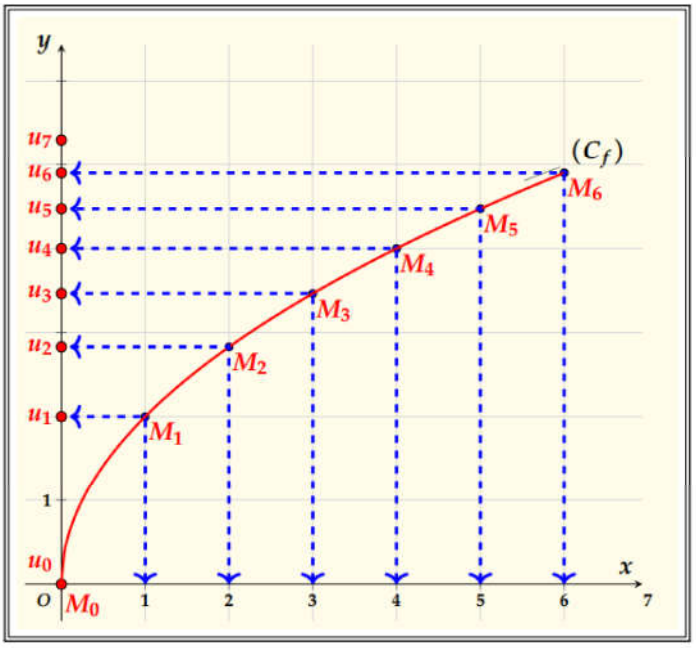
مـــثـال - 5 -

✔ لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.



❖ يمكن تمثيل متتالية عددية معرفة بحدها العام (ترفق هذه المتتالية بدالة) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}; \vec{j})$ حيث تكون النقط M التي فواصلها $n = 0$، $n = 1$، $n = 2$، ... وتراتيبها هي الصور بالمتتالية u أو الدالة المرفقة f ومنه فإن التمثيل البياني للمتتالية (u_n) هي النقط $M(n, u_n)$.

مـــثـــال - 6 -



✔ لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = 2\sqrt{n}$.
✔ نفرض $u_n = f(n)$ حيث f الدالة المرفقة للمتتالية (u_n) المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = 2\sqrt{x}$.
✔ في الرسم المقابل النقط M_n الممثلة إحداثياها $(n, f(n))$ حيث $n \in \mathbb{N}$

❷ متتالية معرفة بعلاقة تراجعية :

✍ لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول u_0 والعلاقة التراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث f دالة معرفة على $\mathbb{R}$. مجموعة النقط $M(u_n, f(u_n))$ هي التمثيل البياني في المستوي المنسوب إلى معلم للمتتالية.

طريقـة

✍ لتمثيل المتتالية (u_n) بيانيا:
① ننشئ الرسم البياني للدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n).
② ننشئ المستقيم ذا المعادلة $y = x$ (المنصف الأول) لأن المتتالية من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$.
③ التمثيل البياني هو مجموعة النقط $M(u_n, f(u_n))$ حيث $n \in \mathbb{N}$.

❖ خـطوت الإنشـاء :

✍ رسم كلا من (C_f) بيان الدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n) و $(\Delta) : y = x$ منصف الربع الأول .
✍ نحدد النقطة $A_0(u_0; 0)$ على حامل محور الفواصل ، ثم نبدأ بإسقاط النقطة A_0 وفق (oy) على (c_f) فنتحصل على أول نقطة $M_0(u_0; u_1)$
✍ ثم نسقط النقطة M_0 المحصل عليها على المستقيم (Δ) وفق (ox) فنتحصل على النقطة $N_1(u_1; u_1)$
✍ نسقط النقطة N_1 المحصل عليها على (xx') وفق (oy) فنتحصل على النقطة $A_1(u_1; 0)$
✍ نكرر نفس الإنشاء مع A_1 فنحصل على $M_1(u_1; u_2)$ ، $N_2(u_2; u_2)$ ، $A_2(u_2; 0)$
✍ نكرر نفس الإنشاء مع A_2 فنحصل على $M_2(u_2; u_3)$ ، $N_3(u_3; u_3)$ ، $A_3(u_3; 0)$
✍ نحصل على النقط $A_n(u_n; 0)$ على حامل محور الفواصل وهي تمثل حدود المتتالية (u_n) على حامل محور الفواصل
✍ نحصل على النقط $M_n(u_n; u_{n+1})$ على المنحنى (C_f) وهي عبارة عن تمثيل المتتالية (u_n)

بنـــــاء المعـــــارف

مـــثـــال - 7 -

✔ لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما بحدها الأول $u_0 = 1$ و العلاقة التراجعية $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n^2 + u_n$

✔ نضع $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث f الدالة المرفقة للمتتالية (u_n) المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + x$.

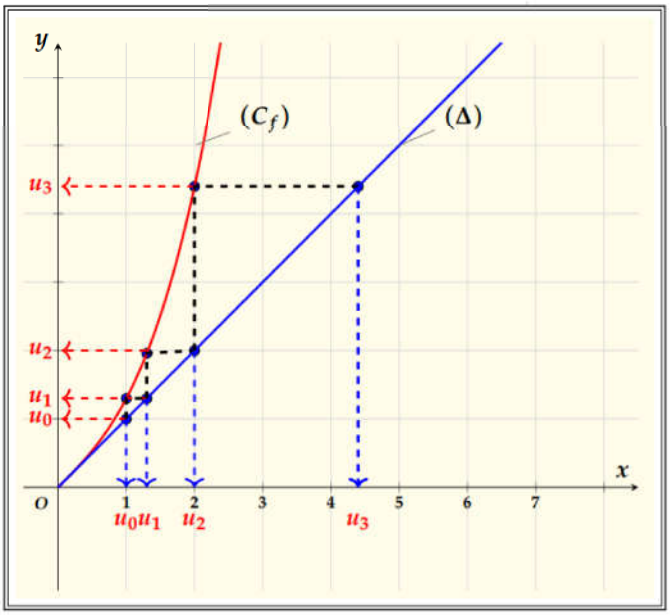
✔ في الرسم المقابل تمثيل كلا من النقط

$A_n(u_n, 0) \in (xx')$

و $N_n(u_n, u_n) \in (\Delta)$

و $M_n(u_n, u_{n+1}) \in (C_f)$

حيث $n \in \mathbb{N}$.



مـــثـــال - 8 -

✔ لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_0 = 1$ و $v_{n+1} = f(v_n)$ حيث f الدالة المرفقة للمتتالية (u_n) المعرفة بـ: $f(x) = \frac{x+4}{x}$ مع $x \in]0;+\infty[$.

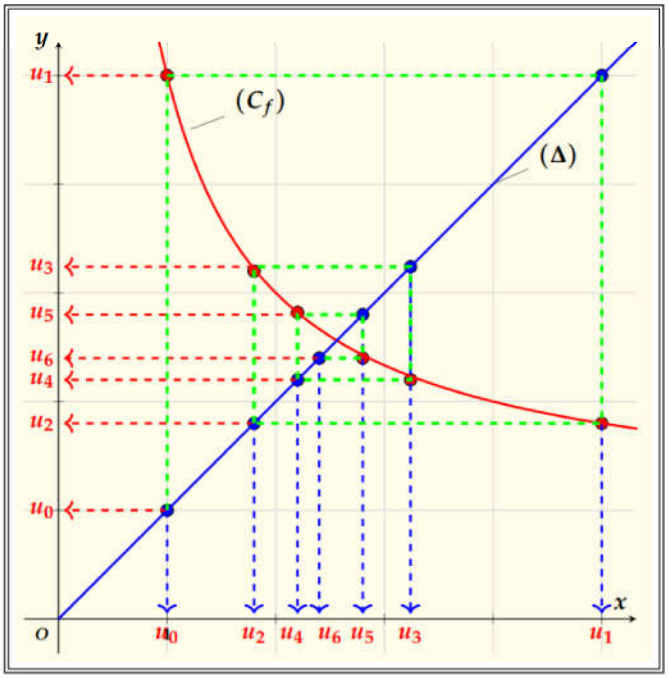
✔ في الرسم المقابل تمثيل كلا من النقط

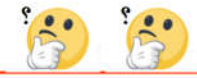
$A_n(u_n, 0) \in (xx')$

و $N_n(u_n, u_n) \in (\Delta)$

و $M_n(u_n, u_{n+1}) \in (C_f)$

حيث $n \in \mathbb{N}$.





تطبـــيق

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بحدها الأول $u_1 = 2$ و العلاقة التراجعية $u_{n+1} = 2u_n^2 + 2u_n + 2$.

❖ مثل بيانيا المتتالية (u_n) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}; \vec{j})$.

عمـــل منـــزلي

تمارين 20 - 21 - 24 - 27 - 30 الصفحة 167 - 168

ملاحظات حول سير الحصة :

.....

.....

بنـــاء المعـــارف

التقويم

الأستاذ:
فَرَاحْتِيَة
المَحْفُوظ

مـذكـرة رقـم 57

ثانوية : حميدي عيسى – أولاد دراج –
السنة الدراسية : 2022 – 2023
يـوم :
المدة : 01 ساعة.

المستوى : السنة الثانية علوم تجريبية.
ميدان التعلم : تحليل.
المحور : المتتاليات العددية.
الموضوع : اتجاه تغيّر متتالية.

✍ **المكتسبات القبلية:** مفاهيم أولية حول الأعداد والحساب، مفاهيم أولية حول المتتاليات.
✍ **الكفاءات المستهدفة:** التعرف على اتجاه تغيّر متتالية (u_n) ابتداء من رتبة معينة.
✍ **الأدوات المستعملة:** المنهاج، الكتاب المدرسي، مراجع، الأنترنت.

المراحل	عناصـر الـدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق		
التشخيص والاكتشاف	**نشـاط مقترح :** ✍ نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $u_n = n^2 + n$. ① أحسب الحدود u_0 ، u_1 و u_2. ثم قارن بينها. ② ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n). ③ من اجل كل عدد طبيعي n احسب u_{n+1}، ثم $u_{n+1} - u_n$. ④ ماذا تستنتج حول تغيرات المتتالية (u_n). **مناقشة النشـاط :** ❶ **حساب الحدود :** • $u_0 = 0^2 + 0 = 0$ • $u_1 = 1^2 + 1 = 2$ • $u_2 = 2^2 + 2 = 6$ ومنه نجد: $u_2 > u_1 > u_0$ ❷ **التخمين :** بما أن $u_2 > u_1 > u_0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة تماما. ❸ **حساب** u_{n+1}، **ثم** $u_{n+1} - u_n$ **:** من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_n = n^2 + n$ ومنه: $u_{n+1} = (n+1)^2 + n + 1 = n^2 + 2n + 1 + n + 1 = n^2 + 3n + 2$. إذن: $u_{n+1} - u_n = n^2 + 3n + 2 - n^2 - n = 2n + 2$ ❹ **الإستنتاج :** نص التعريف. **اتجـاه تغيـر متتـاليـة :** **تعريف** ✍ (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$. ❖ نقول إن (u_n) متتالية متزايدة تماما إذا كان كل حد من حدودها أكبر تماما من الحد السابق له، يعني عندما يكون من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} > u_n$ أي $u_{n+1} - u_n > 0$. ❖ نقول إن (u_n) متتالية متناقصة تماماإذا كان كل حد من حدودها أصغر من الحد السابق له،يعني عندما يكون من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} < u_n$ أي $u_{n+1} - u_n < 0$. ❖ نقول إن (u_n) متتالية ثابتة عندما يكون من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = u_n$ أي $u_{n+1} - u_n = 0$. ❖ القول عن المتتالية (u_n) أنها رتيبة تماما يعني أنها إما متزايدة تماما وإما متناقصة تماما. **إرشـاد :** عندما نستبدل الرمز $>$ (أو $<$) بالرمز $\geq$ (أو $\leq$) في التعريف السابق، نقول أن المتتالية (u_n) متزايدة (أو متناقصة).	
أثناء المعـــارف		

مـــثـال - 1 -

✔ لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = 3n^2 + 3$.

• في هذه الحالة نجد: $u_{n+1} - u_n = 3(n+1)^2 + 3 - (3n^2 + 3) = 6n + 3$.

ومنه $u_{n+1} - u_n > 0$ إذن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

تطبـــيق

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية كما يلي: $u_n = 4n + 3$.

❶ أحسب u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 .

❷ أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

طريقـة

لدراسة اتجاه تغير متتالية (u_n) يمكن أن:

① ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$. أو

② نقارن بين $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ و 1. أو

③ إذا وجدت دالة f حيث من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = f(n)$ ندرس تغيرات الدالة f.

تطبـــيق

أدرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفة المعرفتين على $\mathbb{N}$ بـ:

❶ $u_n = n^2 + 3$ ❷ $v_n = \frac{n+1}{2n+6}$

عمـــل منـــزلي

تمارين 34 - 35 - 36 - 45 - 46 - 47 الصفحة 169

ملاحظات حول سير الحصة :

.....

.....

.....

الأستاذ:
فَرَاحْتِيَة
المَحْفُوظ

مـذكـرة رقـم 58

ثانوية : حميدي عيسى – أولاد دراج –
السنة الدراسية : 2022 – 2023
يـوم :
المدة : 02 ساعة.

المستوى : السنة الثانية علوم تجريبية.
ميدان التعلم : تحليل.
المحور : المتتاليات العددية.
الموضوع : المتتاليات الحسابية.

✍ **المكتسبات القبلية:** مفاهيم أولية حول الأعداد والحساب، مفاهيم أولية حول المتتاليات.
✍ **الكفاءات المستهدفة:** التعرف على متتالية حسابية، التعرف على عبارة حدها العام، معرفة اتجاه تغيرها.
✍ **الأدوات المستعملة:** المنهاج، الكتاب المدرسي، مراجع، الأنترنت.

المراحل	عناصـر الـدرس	المدة

مرحلة الإنطلاق

★ نشـاط مقترح :

✍ نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = 2 + 5n$.
① أحسب الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3. ثم $u_1 - u_0$ ، $u_2 - u_1$ و $u_3 - u_2$.
② أحسب الفرق $u_{n+1} - u_n$ ، ثم عبر عن u_{n+1} بدلالة u_n.
③ أكتب u_1 ، u_2 و u_3 بدلالة u_0، ثم خمن كتابة u_n بدلالة u_0 .

مناقشة النشاط :

التشخيص والاكتشاف

❶ حساب الحدود :
- $u_0 = 2 + 5 \times 0 = 2$ ● $u_1 = 2 + 5 \times 1 = 7$ ●
- $u_2 = 2 + 5 \times 2 = 12$ ● $u_3 = 2 + 5 \times 3 = 17$ ●

ومنه نجد :
- $u_1 - u_0 = 7 - 2 = 5$ ● $u_2 - u_1 = 12 - 7 = 5$ ● $u_3 - u_2 = 17 - 12 = 5$ ●

❷ حساب الفرق $u_{n+1} - u_n$ ، ثم التعبير عن u_{n+1} بدلالة u_n :

$$u_{n+1} - u_n = 2 + 5(n+1) - 2 - 5n = 7 + 5n - 2 - 5n = 5$$

ومنه نجد : $u_{n+1} = u_n + 5$

❸ كتابة u_1 ، u_2 و u_3 بدلالة u_0 :

$$u_1 = u_0 + 5$$
$$u_2 = u_1 + 5 = (u_0 + 5) + 5 = u_0 + 2 \times 5$$
$$u_3 = u_2 + 5 = (u_0 + 2 \times 5) + 5 = u_0 + 3 \times 5$$

❖ التخمين : $u_n = u_0 + n \times 5 = u_0 + 5n$

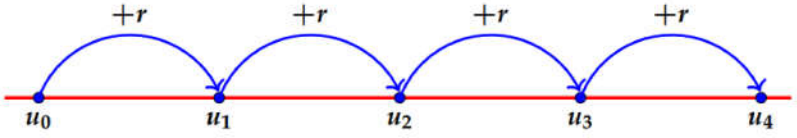
المتتاليات الحسابية :

تعريف

✍ نقول أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي r بحيث من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n + r$ ، يسمى العدد الحقيقي r أساس المتتالية (u_n).

أثناء المعـــارف

معنى ذلك أنه في المتتالية الحسابية (u_n)، نمر من الحد u_n إلى الحد الموالي u_{n+1} بإضافة نفس العدد الحقيقي r دائما.



مـــثـال - 1 -

✔ المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = 6n + 4$ هي متتالية حسابية حدها الأول u_0 حيث: $u_0 = 4$
وأساسها r حيث $r = 6$ لأن: $u_{n+1} = 6(n+1) + 4 = 6n + 6 + 4 = u_n + 6$.
✔ الأعداد الطبيعية 0، 1، 2، 3، ..... تشكل بهذا الترتيب حدوداً متتابعة لمتتالية حسابية أساسها 1 وحدها الأول 0.

15 د

15 د

ملاحظات :

❖ يمكن أن يكون العدد الحقيقي r موجبا أو سالبا.
❖ إذا كان $r = 0$ فإن $u_{n+1} = u_n$ أي المتتالية (u_n) ثابتة وكل حدودها متساوية وتساوي الحد الأول u_0.

حساب الحد العام u_n لمتتالية حسابية :

بإعطاء الحد الأول u_0 والأساس r :

مبرهنة 01 (تقبل بدون برهان)

✍ (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r يعني أن، من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = u_0 + nr$

15 د

مثال - 2 -

✔ (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 حيث $u_0 = 7$ وأساسها 5 ومنه: $u_n = 7 + 5n$.

بإعطاء حد كيفي u_p للمتتالية والأساس r :

خاصية 01 (تقبل بدون برهان)

✍ (u_n) متتالية حسابية علم حد منها u_p (p عدد طبيعي أصغر من n) وأساسها r يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = u_p + (n-p)r$

15 د

مثال - 3 -

✔ (u_n) متتالية حسابية حيث $u_6 = 8$ وأساسها $\frac{1}{2}$ ومنه: $u_n = u_6 + (n-6)\frac{1}{2} = 8 + \frac{n-6}{2}$.

✔ حساب u_{24} : $u_{24} = u_6 + (24-6)\frac{1}{2} = 8 + \frac{18}{2} = 8 + 9 = 17$

ملاحظات :

❖ تعيين الحد العام يعود إلى كتابة u_n بدلالة n.
❖ إذا كان u_1 هو الحد الأول فإن عبارة الحد العام هي $u_n = u_1 + (n-1)r$.
❖ العلاقة $u_n = u_p + (n-p)r$ تسمح بحساب الأساس والحد الأول لمتتالية حسابية انطلاقا من معرفة حدين لهذه المتتالية.

15 د

نشاط مقترح :

✍ أدرس اتجاه تغير المتتاليات الحسابية التالية:
① المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = 3n + 5$.
② المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = -n - 5$.
③ المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = 5$.

15 د

مناقشة النشاط :

✍ دراسة اتجاه تغير المتتاليات الحسابية التالية:
❶ لدينا: $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) + 5 - (3n+5) = 3$
ومنه: $u_{n+1} - u_n > 0$ إذن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.
❷ لدينا: $v_{n+1} - v_n = -(n+1) - 5 - (-n-5) = -1$
ومنه: $u_{n+1} - u_n < 0$ إذن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.
❶ لدينا: $w_{n+1} - w_n 5 - 5 = 0$
ومنه: $u_{n+1} - u_n = 0$ إذن المتتالية (w_n) ثابتة.

بنـاء المعـــارف

التقويم

15 د

اتجاه تغير المتتالية الحسابية :

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ حدها الأول u_0 و أساسها r
لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} - u_n = r$ ومنه:
- إذا كان r موجب تماما $(r > 0)$ فالمتتالية (u_n) متزايدة تماما.
- إذا كان r سالب تماما $(r < 0)$ فالمتتالية (u_n) متناقصة تماما.
- إذا كان r معدوم $(r = 0)$ فالمتتالية (u_n) ثابتة.

15 د

تطبـــيق

(v_n) متتالية حسابية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية حيث $v_{11} = 38$ و $v_{19} = 62$.
❶ أحسب الحد الأول v_0 والأساس r، ثم استنتج اتجاه تغيرالمتتالية (v_n).
❷ أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n.
❸ أوجد قيمة العدد الطبيعي n حتى يكون $v_n = 305$.
❹ هل الحد الذي قيمته 452 هو حد من حدود المتتالية (u_n)؟

عمـــل منـــزلي

تمارين 53 ⇐ 66 الصفحة 170

مناقشة نشاط 01 صفحة 280 :

- الراتب الشهري خلال السنة الاولى $u_1 = 10000DA$
- الراتب الشهري بعد n سنة هو u_n

❶ حساب: $u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7$
هناك زيادة ثابتة كل سنة قدرها $1200DA$

$u_2 = u_1 + 1200 = 11200$
$u_3 = u_2 + 1200 = u_1 + (2)1200 = 12400$
$u_4 = u_1 + 1200 = u_1 + (3)1200 = 13600$
$u_5 = u_4 + 1200 = u_1 + (4)1200 = 14800$
$u_6 = u_5 + 1200 = u_1 + (5)1200 = 16000$

❷ العلاقة بين u_{n+1} و u_n
من أجل كل $n \geq 1$: $u_{n+1} = u_n + 1200$
- نسمي المتتالية (U_n) متتالية حسابية أساسها 1200

ملاحظات حول سير الحصة :

.....

.....

.....

الأستاذ:
فَرَاحْتِيَة
المَحْفُوظ

مـــذكـــرة رقـــم 59

ثانوية : حميدي عيسى – أولاد دراج –
السنة الدراسية : 2022 – 2023
يـــوم :
المدة : 02 ساعة.

المستوى : السنة الثانية لغات أجنبية.
ميدان التعلم : تحليل.
المحور : المتتاليات العددية.
الموضوع : حساب مجموع - الوسط الحسابي.

✍ **المكتسبات القبلية:** مفاهيم أولية حول المتتاليات. المتتالية الحسابية وعبارة حدها العام.
✍ **الكفاءات المستهدفة:** حساب مجموع p حداً متعاقباً من متتالية حسابية.
معرفة واستعمال خاصية ثلاثة حدود متتابعة من متتالية حسابية. الوسط الحسابي.
✍ **الأدوات المستعملة:** المنهاج، الكتاب المدرسي، مراجع، الأنترنت.

المراحل	عناصـــر الـــدرس	المدة

مرحلة الإنطلاق

التشخيص والاكتشاف

نشـــاط مقترح : (يقسم حسب تسلسل الدرس)

✍ نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_{n+1} = u_n + 5$.
① أحسب $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4$ و $\frac{6}{2}(u_0 + u_5)$ ثم قارن بين النتيجتين.
③ أحسب $u_0 + u_2$ و $u_2 + u_4$ ثم $2u_1$ و $2u_3$. ماذا تستنتج؟

مناقشة النشاط :

❶ حساب $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4$ و $\frac{5}{2}(u_0 + u_5)$:

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 &= u_0 + (u_0 + 5) + (u_1 + 5) + (u_2 + 5) + (u_3 + 5) \\ &= 2 + (2 + 5) + (7 + 5) + (12 + 5) + (17 + 5) \\ &= 2 + 7 + 12 + 17 + 22 \\ &= 60 \end{aligned}$$

ولدينا : $\frac{5}{2}(u_0 + u_5) = \frac{5}{2}(2 + 22) = 60$

❖ المقارنة : $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = \frac{5}{2}(u_0 + u_5)$

❷ حساب $u_0 + u_2$ و $u_2 + u_4$ ثم $2u_1$ و $2u_3$. :

- $u_0 + u_2 = 2 + 12 = 14$
- $u_2 + u_4 = 12 + 22 = 34$
- $2u_1 = 2 \times 7 = 14$
- $2u_3 = 2 \times 17 = 34$

❖ الإستنتاج : $u_0 + u_2 = 2u_1$ و $u_2 + u_4 = 2u_3$

مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية :

مبرهنة 01

✍ (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r

فإنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$

بـــرهـــان.
ليكن p عدد طبيعي أصغر من n ، لدينا $u_p = u_0 + pr$ و $u_{n-p} = u_0 + (n-p)r$
ومنه $u_p + u_{n-p} = u_0 + u_0 + nr = u_0 + u_n$
نكتب S بطريقتين ثم نجمع المساوتين طرف بطرف

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n$$

$$S = u_n + u_{n-1} + \cdots + u_1 + u_0$$

بناء المعارف

ومنه $2S = u_0 + u_n + u_1 + u_{n-1} + \cdots + u_{n-1} + u_1 + u_n + u_0$

أي $2S = u_0 + u_n + u_0 + u_n + \cdots + u_0 + u_n + u_0 + u_n$

بتطبيق $u_p + u_{n-p} = u_0 + u_n$ ، ومنه $2S = (n+1)(u_0 + u_n)$ إذن $S = (n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$ □

✍ وبصفة عامة مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية نحصل علية بالقاعدة الآتية :

$$S = (\text{عدد الحدود}) \times \frac{\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول الوارد في المجموع}}{2}$$

ملاحظـات :

❖ عدد الحدود يساوي: دليل الحد الأخير - دليل الحد الأول الوارد في المجموع +1

❖ إذاكان $r = 0$ فإن $u_0 = u_1 = u_2 = \cdots = u_n$ وبالتالي $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (n+1)u_0$

من أجل كل عدد طبيعي n.

نتيجة

✍ متتالية الأعداد الطبيعية غير المنعدمة هي متتالية حسابية، حدها الأول 1 وأساسها 1.

ومجموع n حدا الأولى لها هو: $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

تطبـــيق

نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) المعرفة بـ $v_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_{n+1} = u_n - 2$

❖ أحسب المجاميع التالية:

❶ $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

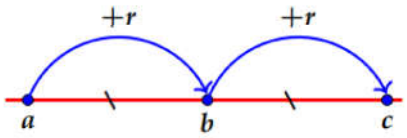
❷ $u_1 + \cdots + u_{18}$

❸ $u_{45} + \cdots + u_{108}$

الـــوسط الحســـابي :

خاصية

✍ تكون الأعداد a ، b و c بهذا الترتيب ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان $a + c = 2b$ يسمى العدد b الوسط الحسابي للعددين a و c.



مـــثـال - 1 -

✔ u_1 ، u_2 و u_3 حدودا متتابعة من متتالية حسابية إذا و فقط إذا كان $u_1 + u_3 = 2u_2$.

✔ الأعداد 3، 9 و 15 بهذا الترتيب هي ثلاث حدود متتابعة من متتالية حسابية لأن $3 + 15 = 2 \times 9$.

تطبـــيق

a ، b و c بهذا الترتيب ثلاثة حدود متتابعة لمتتالية حسابية متزايدة أساسها r حيث $a + b + c = 9$.

❶ احسب b ثم اكتب a و c بدلالة r.

❷ علما أن $a \times c = 16$ ، عين الأساس r ثم إستنتج a و c.

التقويم

تطبـــيق

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = 2n - 7$

❶ احسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3.

❷ اثبت أن (u_n) متتالية حسابية. ثم استنتج اتجاه تغيرها.

❸ أحسب المجموع: $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$. ثم استنتج المجموع: $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{11}$.

❹ هل الأعداد 11 ، 13 و 15 ثلاث حدود متتابعة من المتتالية (u_n) ؟

❺ لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $6v_n - u_n = 0$

- أحسب المجموع: $S' = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$.

عمـــل منـــزلي

تمارين 69 - 70 - 72 - 73 الصفحة 171 - 172

ملاحظات حول سير الحصة :

.....

.....

.....

الأستاذ:
فَرَاحْتِيَة
المَحْفُوظ

مـذكـرة رقـم 60

ثانوية : حميدي عيسى – أولاد دراج –
السنة الدراسية : 2022 – 2023
يـوم :
المدة : 02 ساعة.

المستوى : السنة الثانية علوم تجريبية.
ميدان التعلم : تحليل.
المحور : المتتاليات العددية.
الموضوع : المتتاليات الهندسية.

✍ **المكتسبات القبلية:** مفاهيم أولية حول الأعداد والحساب، مفاهيم أولية حول المتتاليات.
✍ **الكفاءات المستهدفة:** التعرف على متتالية هندسية، التعرف على عبارة حدها العام، معرفة اتجاه تغيرها.
✍ **الأدوات المستعملة:** المنهاج، الكتاب المدرسي، مراجع، الأنترنت.

المراحل	عناصـر الـدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق		
التشخيص والاكتشاف		15 د
أثناء المعـــارف		15 د

نشـاط مقترح :

✍ نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = 3 \times 2^n$.
① أحسب الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3. ثم عين العدد الحقيقي q حيث: $u_1 = qu_0$ و $u_2 = qu_1$.
② عبر عن u_{n+1} بدلالة u_n و q .
③ أكتب u_1 ، u_2 و u_3 بدلالة u_0، ثم خمن كتابة u_n بدلالة u_0 .

مناقشة النشاط :

❶ حساب الحدود :
- $u_0 = 3 \times 2^0 = 3$ ● $u_1 = 3 \times 2^1 = 6$ ●
- $u_2 = 3 \times 2^2 = 12$ ● $u_3 = 3 \times 2^3 = 24$ ●

❖ تعين العدد الحقيقي q :
- لدينا $u_1 = qu_0$ ومنه $6 = 3q$ إذن $q = \frac{6}{3} = 2$.
- ولدينا $u_2 = qu_1$ ومنه $12 = 6q$ إذن $q = \frac{12}{6} = 2$.

❷ التعبير عن u_{n+1} بدلالة u_n و q :
$u_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} = 3 \times 2^n \times 2$ ومنه نجد : $u_{n+1} = q \times u_n$

❸ كتابة u_1 ، u_2 و u_3 بدلالة u_0 :
$u_1 = 2 \times u_0$
$u_2 = 2 \times u_1 = 2 \times (2 \times u_0) = 2^2 \times u_0$
$u_3 = 2 \times u_2 = 2 \times (2^2 \times u_0) = 2^3 \times u_0$

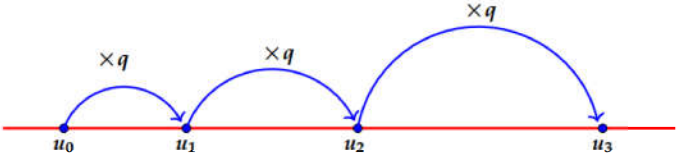
❖ التخمين : $u_n = 2^n \times u_0$ أي $u_n = u_0 \times q^n$

المتتاليات الهندسية :

تعريف

✍ نقول أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي غير منعدم q ، حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = q \times u_n$ ، يسمى العدد الحقيقي q أساس المتتالية (u_n).

✍ معنى ذلك أنه في المتتالية الهندسية (u_n)، نمر من الحد u_n إلى الحد الذي يليه مباشرة u_{n+1} بالضرب في نفس العدد الثابت غير منعدم q دائما.



مـــثـال - 1 -

✔ المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = 6 \times 5^n$ هي متتالية هندسية حدها الأول u_0 حيث: $u_0 = 6$
وأساسها q حيث $q = 5$ لأن: **لأن:** $u_{n+1} = 6 \times 5^{n+1} = 6 \times 5^n \times 5 = 5 \times u_n$.
✔ متتالية قوى العدد 4 : 1 ، 4، 16، 64 ، ..... تشكل بهذا الترتيب حدوداً متتابعة لمتتالية هندسية أساسها 4 وحدها الأول 1.

15 د

ملاحظـات :

❖ إذا كان $q = 1$ فإن $u_{n+1} = u_n$ أي المتتالية (u_n) ثابتة وجميع حدودها متساوية وتساوي u_0.
❖ إذا كان $q = 0$ فإن حدود المتتالية معدومة ابتداءا من الحد الثاني.

حساب الحد العام u_n لمتتالية هندسية :

بإعطاء الحد الأول u_0 والأساس q :

مبرهنة 01 (تقبل بدون برهان)

✍ (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 وأساسها q
يعني أن، من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = q^n u_0$

15 د

مـــثـال - 2 -

✔ (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 حيث $u_0 = 7$ وأساسها 5 ومنه: $u_n = 5^n \times 7$.

بإعطاء حد كيفي u_p للمتتالية والأساس q :

خاصية 01 (تقبل بدون برهان)

✍ إذا كانت (u_n) متتالية هندسية علم حد منها u_p (p عدد طبيعي أصغر من n) وأساسها q حيث q عدد طبيعي غير معدوم يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = u_p q^{n-p}$

15 د

مـــثـال - 3 -

✔ (u_n) متتالية هندسية، بحيث $u_4 = 8$ وأساسها $\frac{1}{2}$ ومنه: $u_n = u_4 q^{n-4} = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$
✔ حساب u_{22} : $u_{14} = u_4 q^{14-4} = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{14-4} = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 8 \times \frac{1}{1024} = \frac{1}{128}$

ملاحظـات :

❖ تعيين الحد العام يعود إلى كتابة u_n بدلالة n.
❖ إذا كان u_1 هو الحد الأول فإن عبارة الحد العام هي $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.
❖ العلاقة $u_n = u_p \times q^{n-p}$ تسمح بحساب الأساس والحد الأول لمتتالية هندسية انطلاقا من معرفة حدين لهذه المتتالية.

15 د

طريقـة

✍ للبرهان على أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية نحاول كتابة u_n على الشكل $u_{n+1} = q \times u_n$ حيث q عدد حقيقي مستقل عن n. أو أن كل الحدود u_n غير معدومة والنسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ عدد ثابت، هذا العدد الثابت هو أساسها.

15 د

خاصية 02

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية حدودها غير معدومة وأساسها q حيث q عدد طبيعي غير معدوم.
عند ئذ من أجل كل عددين طبيعيان n و p يكون لدينا: $\frac{u_n}{u_p} = q^{n-p}$

برهان.
إستنادا إلى المبرهنة السابقة، نجد $u_n = u_0 q^n$
و $u_p = u_0 q^p$ إذن $\frac{u_n}{u_p} = \frac{u_n = u_0 q^n}{u_p = u_0 q^p} = q^{n-p}$

□

اتجاه تغير المتتالية الهندسية :

مبرهنة 03

(u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ حدها الأول u_0 وأساسها q
نعلم أن $u_{n+1} = u_0 q^{n+1}$ و $u_n = u_0 q^n$ إذن من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = u_0 q^n (q-1)$
ومنه:

15 د

- ❖ إذا كان $0 < q < 1$ وكان $u_0 > 0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.
- ❖ إذا كان $0 < q < 1$ وكان $u_0 < 0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.
- ❖ إذا كان $q > 1$ وكان $u_0 > 0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.
- ❖ إذا كان $q > 1$ وكان $u_0 < 0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.
- ❖ إذا كان $q = 1$ فإن المتتالية ثابتة.
- ❖ إذا كان $q = 0$ تكون كل حدود المتتالية معدومة ابتداء من الحد الثاني.
- ❖ إذا كان $q < 0$ فإن الفرق $u_{n+1} - u_n$ لا يحتفظ بإشارة ثابتة لأن q^n لا يحتفظ بإشارة ثابتة ومنه (u_n) ليست رتيبة.

تطبيق

(u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ ، أساسها $\frac{1}{2}$ و $u_5 = \frac{1}{32}$.
❶ أحسب u_{2020}.
❷ حدد اتجاه تغيرالمتتالية (v_n).

تطبيق

(v_n) متتالية هندسية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية حيث $u_3 = 24$ و $u_6 = 192$
❶ أحسب الحد الأول v_0 والأساس q، ثم استنتج اتجاه تغيرالمتتالية (v_n).
❷ أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n.
❸ علما أن $2^9 = 512$ أوجد قيمة العدد الطبيعي n حتى يكون $v_n = 1536$.

عمـــل منـــزلي

تمارين 74 - 76 - 77 - 79 - 81 - 82 الصفحة 172 - 173

ملاحظات حول سير الحصة :

.....

.....

.....

الأستاذ:
فَرَاحْتِيَة
المَحْفُوظ

مـذكـرة رقـم 61

ثانوية : حميدي عيسى – أولاد دراج –
السنة الدراسية : 2022 – 2023
يـوم :
المدة : 02 ساعة.

المستوى : السنة الثانية علوم تجريبية.
ميدان التعلم : تحليل.
المحور : المتتاليات العددية.
الموضوع : حساب مجموع - الوسط الهندسي.

✍ **المكتسبات القبلية:** مفاهيم أولية حول المتتاليات، المتتالية الهندسية وعبارة حدها العام.
✍ **الكفاءات المستهدفة:** حساب مجموع p حداً متعاقباً من متتالية هندسية.
معرفة واستعمال خاصية ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية. الوسط الهندسي.
✍ **الأدوات المستعملة:** المنهاج، الكتاب المدرسي، مراجع، الأنترنت.

المراحل	عناصـر الـدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق	★ **نشـاط مقترح :** (يقسم حسب تسلسل الدرس)	
التشخيص والاكتشاف	✍ نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_{n+1} = 2u_n$. ① أحسب $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4$ و $u_0 \times \left(\frac{q^5-1}{q-1}\right)$ ثم قارن بين النتيجتين. ③ أحسب $u_2 \times u_0$ و $u_2 \times u_4$ ثم $(u_1)^2$ و $(u_3)^2$. ماذا تستنتج؟	
	مناقشة النشاط : ❶ حساب $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4$ و $u_0 \times \left(\frac{q^5-1}{q-1}\right)$: $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = u_0 + (2u_0) + (2u_1) + (2u_2) + (2u_3)$ $= 3 + (2 \times 3) + (2 \times 6) + (2 \times 12) + (2 \times 24)$ $= 3 + 6 + 12 + 24 + 48$ $= 93$ ولدينا : $u_0 \times \left(\frac{q^5-1}{q-1}\right) = 3 \times \left(\frac{2^5-1}{2-1}\right) = 3 \times (32-1) = 3 \times 31 = 93$ ❖ المقارنة : $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = u_0 \times \left(\frac{q^5-1}{q-1}\right)$ ❷ حساب $u_2 \times u_0$ و $u_2 \times u_4$ ثم $(u_1)^2$ و $(u_3)^2$: • $u_0 \times u_2 = 3 \times 12 = 36$ • $(u_1)^2 = 6^2 = 36$ • $u_2 \times u_4 = 6 \times 24 = 144$ • $(u_3)^2 = 12^2 = 144$ ❖ الإستنتاج : $u_0 \times u_2 = (u_1)^2$ و $u_2 \times u_4 = (u_3)^2$	30 د
أثناء المعارف	**مجموع حدود متتابعة لمتتاليات هندسية :** **مبرهنة 01** ✍ (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 وأساسها q يختلف عن 1. فإن من أجل كل عدد طبيعي n: $u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n = u_0 \left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right) = u_0 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$ بـرهـان . في حالة $q \neq 1$ ليكن المجموع $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n$ $S = u_0 + u_0 \times q + \ldots + u_0 \times q^{n-1} + u_0 \times q^n$	15 د

ومنه $S = u_0(1+q+...+q^{n-1}+q^n)$ نظرب الطرفين في q نحصل على
$(1-q)S = u_0(1-q+q-q^2+q^2-...+q^{n-1}-q^n+q^n-q^{n+1})$
أي $(1-q)S = u_0(1-q^{n+1})$ و بالتالي : $S = u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) = u_0\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)$

□

✍ وبصفة عامة مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية نحصل علية بالقاعدة الآتية :

$$S = (\text{الحد الأول}) \times \left(\frac{\text{عدد الحدود أس الأساس - 1}}{\text{الأساس - 1}}\right)$$

ملاحظات :

❖ عدد الحدود يساوي: دليل الحد الأخير - دليل الحد الأول الوارد في المجموع +1
❖ إذاكان $q = 1$ فإن $u_0 = u_1 = u_2 = \cdots = u_n$ وبالتالي $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (n+1)u_0$
من أجل كل عدد طبيعي n.

نتيجة

✍ من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 ، $1 + x + x^2 + \cdots x^n = \frac{1-x^n}{1-x}$

تطبيق

نعتبر المتتالية الهندسة (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 5$ و من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_{n+1} = 3u_n$
❖ أحسب المجاميع التالية:
❶ $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$
❷ $u_1 + \cdots + u_{18}$
❸ $u_{45} + \cdots + u_{108}$

الوسط الهندسي :

خاصية

✍ تكون الأعداد غير المعدومة a ، b و c بهذا الترتيب ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان $a \times c = b^2$. يسمى العدد b الوسط الهندسي للعددين a و c.

مثال - 1 -

✔ u_1 ، u_2 و u_3 حدودا متتابعة من متتالية هندسية إذا و فقط إذا كان $u_1 \times u_3 = (u_2)^2$.
✔ الأعداد 5، 15 و 45 بهذا الترتيب هي حدود متتالية حسابية لأن $5 \times 45 = 15^2$.

تطبيق

(u_n) متالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ حدودها موجبة تماما، حيث: $u_0 \times u_2 = 576$ و $u_0 + u_1 = 30$.
❖ بين أن $u_1 = 24$ ثم استنتج قيمة u_0 و u_2.

بناء المعارف

التقويم

التقويم

تطبيق

(v_n) متالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ حيث $v_1 = 6$ و $v_4 = 48$

❶ أحسب الأساس q والحد الأول v_0 للمتتالية (v_n)، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (v_n)

❷ استنتج أن عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) هي: $v_n = 3 \times 2^n$.

❸ علما ان $2^8 = 256$ بين ان العدد 768 هو حد من حدود المتتالية (v_n).

❹ احسب المجموع: $S = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$، ثم استنتج المجموع:
$S' = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_7$.

تطبيق

لتكن (u_n) متالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_1 = 6$ والعلاقة $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.

ولتكن (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_n - 3$.

❶ أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

❷ احسب المجموع: $S = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$، ثم استنتج المجموع:
$S' = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + n_n$.

عمـــل منـــزلي

تمارين 83 - 84 - 85 - 88 الصفحة 173

ملاحظات حول سير الحصة :

.....

.....

.....

الأستاذ:
فَرَاحْتِيَة
المَحْفُوظ

مـــذكـــرة رقـــم 62

ثانوية : حميدي عيسى – أولاد دراج –
السنة الدراسية : 2022 – 2023
يـــوم :
المدة : 02 ساعة.

المستوى : السنة الثانية علوم تجريبية.
ميدان التعلم : تحليل.
المحور : المتتاليات العددية.
الموضوع : نهاية متتالية عددية.

✍ **المكتسبات القبلية:** مفاهيم حول المتتاليات العددية. نهايات الدوال العددية.
✍ **الكفاءات المستهدفة:** حساب نهاية متتالية عددية، المتتاليات المتقاربة.
✍ **الأدوات المستعملة:** المنهاج، الكتاب المدرسي، مراجع، الأنترنت.

المراحل	عناصـــر الـــدرس	المدة

مرحلة الإنطلاق

★ نشـاط مقترح :

✍ نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = \dfrac{3n+1}{2n+4}$.

① عين الدالة f المرفقة للمتتالية (u_n) حيث: $f(n) = u_n$.

② أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم إستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

✍ (v_n) متتالية حسابية حدها الأول v_0 حيث $v_0 = 7$ وأساسها 3.

③ أوجد عبارة الحد العام u_n.

④ احسب النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

التشخيص والاكتشاف

منـاقشة النشـاط :

❶ **تعيين الدالة f المرفقة للمتتالية (u_n) :**

لدينا $f(n) = u_n = \dfrac{3n+1}{2n+4}$

ومنه الدالة المرفقة هي الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \dfrac{3x+1}{2x+4}$.

❷ **حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم إستنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:**

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+1}{2x+4} = \dfrac{3}{2}$

ومنه نستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{3}{2}$

❸ **عبارة الحد العام u_n :**

لدينا $u_n = u_0 + nr = 7 + 3n$

❹ **حساب النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$:**

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 7 + 3n = +\infty$.

بنـــاء المعـــــارف

نهـايـة متتـاليـة عدديـة :

متتالية عددية متقاربة :

تعريف

✍ (u_n) متتالية عددية و l عدد حقيقي.

نقول أن المتتالية (u_n) تقبل l كنهاية إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح يشمل l فهو يشمل أيضا كل حدود المتتالية (u_n) ابتداءا من رتبة معينة. ونكتب: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ أو $\lim u_n = l$

(حيث أن النهاية لا تحسب إلا عند $+\infty$). في هذه الحالة نقول أن المتتالية (u_n) متقاربة .

ملاحظـات :

❖ إذا كانت (u_n) متتالية متقاربة فإن نهايتها وحيدة.

❖ إذا كانت (u_n) متتالية غير متقاربة فهي متباعدة (نهايتها غير منتهية أو غيرموجودة).

مـــثـال - 1 -

✔ لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$.
إذن المتتالية (u_n) متقاربة.

✔ لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $v_n = \frac{3^n 2+1}{2n}$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3^n 2+1}{2n} = +\infty$
المتتالية (v_n) متباعدة.

✔ لتكن المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = 3 + (-1)^n$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$ غير موجودة ومنه المتتالية (w_n) متباعدة.

نهاية متتالية عددية مرفقة بدالة :

مبـرهنـة 01 (تقبل بدون برهان)

✍ لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n = f(n)$. حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $[\alpha, +\infty[$ حيث α عدد حقيقي. إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

نهاية غير منتهية لمتتالية عددية :

تعـاريـف

✍ (u_n) متتالية عددية.

- المتتالية (u_n) تقبل $+\infty$ كنهاية إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح $]\alpha, +\infty[$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ يشمل كل حدود المتتالية (u_n) إبتداءا من رتبة معينة. و نرمز: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- المتتالية (u_n) تقبل $-\infty$ كنهاية إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح $]-\infty, \alpha[$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ يشمل كل حدود المتتالية (u_n) إبتداءا من رتبة معينة. و نرمز: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

مـــثـال - 2 -

✔ لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = -n^2$. وليكن α عدد حقيقي.
n_0 عدد طبيعي أكبر تماما من α لدينا $(-n^2) \in]-\infty, \alpha[$ ابتداء من $n \geq n_0$ ومنه: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

مبـرهنـة 02 (تقبل بدون برهان)

✍ لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n = f(n)$. حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $[\alpha, +\infty[$ حيث α عدد حقيقي.

- إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

ملاحظـات :

❖ النتائج والنظريات حول نهايات الدوال تبقى صحيحة في المتتاليات.

بناء المعارف

نهاية متتالية عددية باستعمال الحصر :

مبرهنة 03

✍ (u_n) ، (v_n) و (w_n) ثلاث متتاليات عددية و l عدد حقيقي.
إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$ و إذا كان ابتداءا من عدد طبيعي n_0 ، $v_n \leq u_n \leq w_n$
فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

برهان.
ليكن D مجالا يشمل l ، D يشمل كل حدود المتتالية (v_n) انطلاقا من n_1 و D يشمل كل حدود المتتالية (w_n) انطلاقا من n_2. ليكن n_3 أكبر العددين n_1 و n_2 ، D يشمل كل حدود (v_n) و (v_n) انطلاقا من n_3 وبما أن $v_n \leq u_n \leq w_n$ فإن D يشمل كل حدود المتتالية (v_n) انطلاقا من n_3. وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ ..
□

مبرهنة 04

✍ (u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان. إذا كان ابتداءا من عدد طبيعي n_0 ، $u_n \geq v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

برهان.
ليكن $]\alpha, +\infty[$ مجالا.
$]\alpha, +\infty[$ يشمل إنطلاقا من n_0 كل حدود المتتالية (v_n) و بما أن $u_{n_0} \geq v_{n_0}$ فإن المجال $]\alpha, +\infty[$ يشمل إنطلاقا من n_0 كل حدود المتتالية (u_n) معينة p ، من أجل $n \geq n_0$ ، $u_n \geq v_n$ ليكن q الأكبر من بين p و n_0. إذا كان $n \geq q$ فإن $v_n \in]\alpha, +\infty[$
وباتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
□

مبرهنة 05

✍ (u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان. إذا كان ابتداءا من عدد طبيعي n_0 ، $u_n \leq v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$
فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

برهان.
نفس البرهان مع المبرهنة 4 بوضع $u_n = -U_n$ و $v_n = -V_n$.
□

مـــثـال - 3 -

✔ (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = n + \sin(n)$.
✔ لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n: $\sin(n) \geq -1$.
إذن $u_n \geq n - 1$. بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-1) = +\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

تطبـــيق

❖ باستعمال الحصر أحسب نهاية المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $v_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n^2+1}$.

بناء المعارف

التقويم

نهاية متتالية هندسية :

مبرهنة 06

✍ (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 وأساسها q.

- إذا كان $q > 0$ و $u_0 > 0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ والمتتالية (u_n) متباعدة.
- إذا كان $q > 0$ و $u_0 < 0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ والمتتالية (u_n) متباعدة.
- إذا كان $-1 < q < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ والمتتالية (u_n) متقاربة.

مـــثـال - 4 -

✔ (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 حيث $u_0 = 7$ وأساسها 5 ومنه: $u_n = 7 \times 5^n$.

✔ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ لأن $u_0 > 0$ و $q > 0$. والمتتالية (u_n) متباعدة.

تطبـــيق

لتكن (u_n) متتالية معرفة بحدها الأول $u_0 = 2$ والعلاقة $u_{n+1} = 1 + \frac{2}{5}u_n$.

ولكتن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي $v_n = u_n - \frac{5}{3}$.

❶ أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساها وحدها الأول.

❷ أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n.

❸ أحسب نهاية المتتالية (v_n) ، ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n).

عمـــل منـــزلي

تمارين 51 - 52 - 71 - 87 - 82 الصفحة 170 - 171 - 172 - 173

ملاحظات حول سير الحصة :

.....

.....

.....